Laboratorio 4

Jairo Fierro - 202226326
Juan Felipe Puig - 202221336

April 2025

1. Problema 1: Implementación del Método Simplex Estándar

1.1. Formulación matemática

I. Solución básica factible inicial

Modelo original

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 150 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Forma estandar:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 100 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 150 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_3 = 80 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Asumimos que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$\begin{aligned} s_1 &= 100 \\ s_2 &= 150 \\ s_3 &= 80 \end{aligned} \tag{3}$$

II. Algoritmo del Método Simplex Estándar

El método Simplex estándar sigue los siguientes pasos para resolver un problema de programación lineal en forma estándar.

a) **Tabla Simplex inicial**

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
s_1	1	1	1	1	0	0	100
s_2	2	1	1	0	1	0	150
s_3	1	4	2	0	0	1	80
Z	-3	-2	-5	0	0	0	0

b) **Verificar optimalidad**
Se analiza la fila de la función objetivo Z para determinar si la solución actual es óptima. Se calcula el costo reducido para cada variable no básica:

$$\bar{c}_j = c_j - z_j$$

Si todos los costos reducidos cumplen $\bar{c}_j \geq 0$, la solución actual es óptima.

c) **Seleccionar variable de entrada**
Se elige la variable no básica con el costo reducido más negativo:

$$s = \arg\min_j \{\bar{c}_j : \bar{c}_j < 0\}$$

Esta variable entra a la base.

d) **Selección de la variable de salida**
Para cada restricción $i | a_{is} > 0$, calcular:

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{is}}$$

Se escoge la fila r con el menor θ_i y la variable básica correspondiente a esa fila sale de la base.

e) **Operación de pivoteo**
Se actualiza la tabla Simplex

- Se divide la fila pivote entre el valor del pivote a_{rs} para que este sea igual a 1.
- A las demás filas se les resta una múltiplo adecuado de la fila pivote para anular la columna correspondiente.

f) **Iteración**
El procedimiento se repite desde el paso 1 con la nueva tabla hasta alcanzar la condición de optimalidad.

1.2. Interpretación geométricamente de la solución

El problema tiene 3 variables las cuales se pueden ver en la imagen de los resultados obtenidos en consola al correr el programa. A continuación se puede ver los valores que tomaron las variables no básicas:

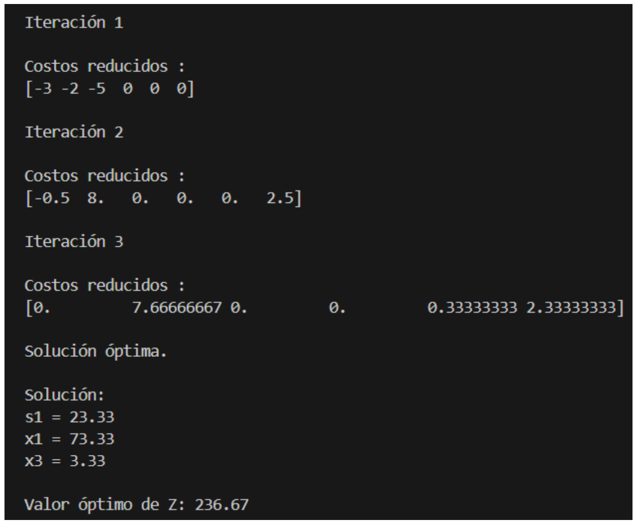
$$x_1 = 73{,}33$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 3{,}33$$

Como valor optimo se obtuvo:

$$Z = 236{,}67$$



```
Iteración 1

Costos reducidos :
[-3 -2 -5  0  0  0]

Iteración 2

Costos reducidos :
[-0.5  8.   0.   0.   0.   2.5]

Iteración 3

Costos reducidos :
[0.         7.66666667 0.         0.         0.33333333 2.33333333]

Solución óptima.

Solución:
s1 = 23.33
x1 = 73.33
x3 = 3.33

Valor óptimo de Z: 236.67
```

Figura 1: Resultado en consola

Con estos resultados obtenidos se puede ver que el punto óptimo está en el espacio tridimensional es (73.33, 0, 3.33) el cual representa una intersección en el plano.

En la imagen se puede ver que la región factible está delimitada por tres restricciones lineales. Por otro lado, el punto óptimo aparece como un vértice de la región factible lo que es coherente con el método Simplex que garantiza que la solución óptima alcance alguno de los vértices y que sea factible. También se puede ver que la variable x_2 es 0 por lo que no contribuye a la solución óptima. Por otro lado, la variable de holgura s_1 indica que la primera restricción no se cumple.

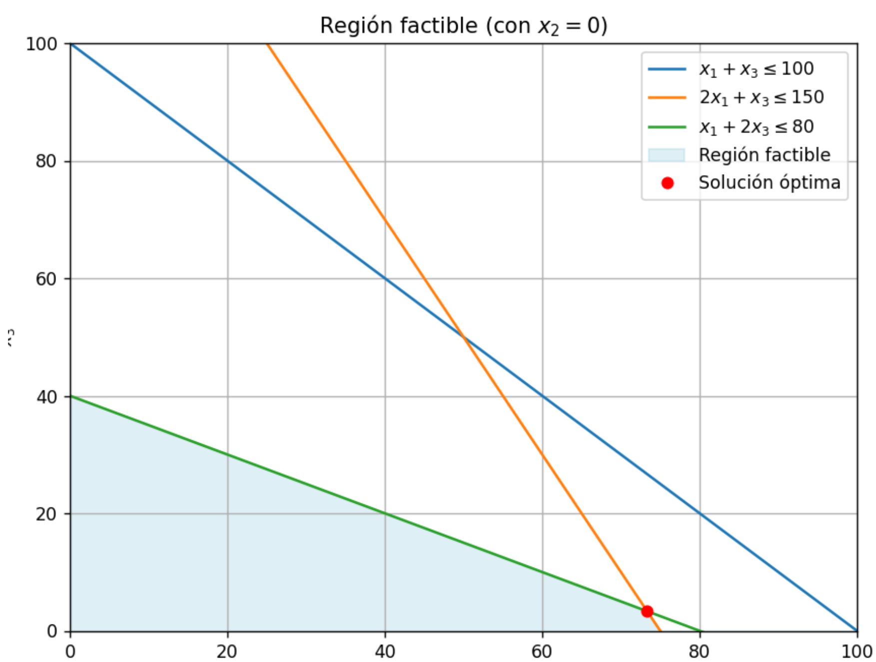


Figura 2: Enter Caption

1.3. Análisis de sensibilidad

Para hacer el análisis de sensibilidad primero se cambia el primer coeficiente por -2. A continiación se muestra lo que se obtuvo por consola.

```
Iteración 1

Costos reducidos :
[-2 -2 -5  0  0  0]

Iteración 2

Costos reducidos :
[0.5 8.  0.  0.  0.  2.5]

Solución óptima.

Solución:
s1 = 60.00
s2 = 110.00
x3 = 40.00

Valor óptimo de Z: 200.00
```

Figura 3: Cambio x_1

La siguiente imagen es la gráfica de lo que se obtuvo al cambiar el primer coeficiente.

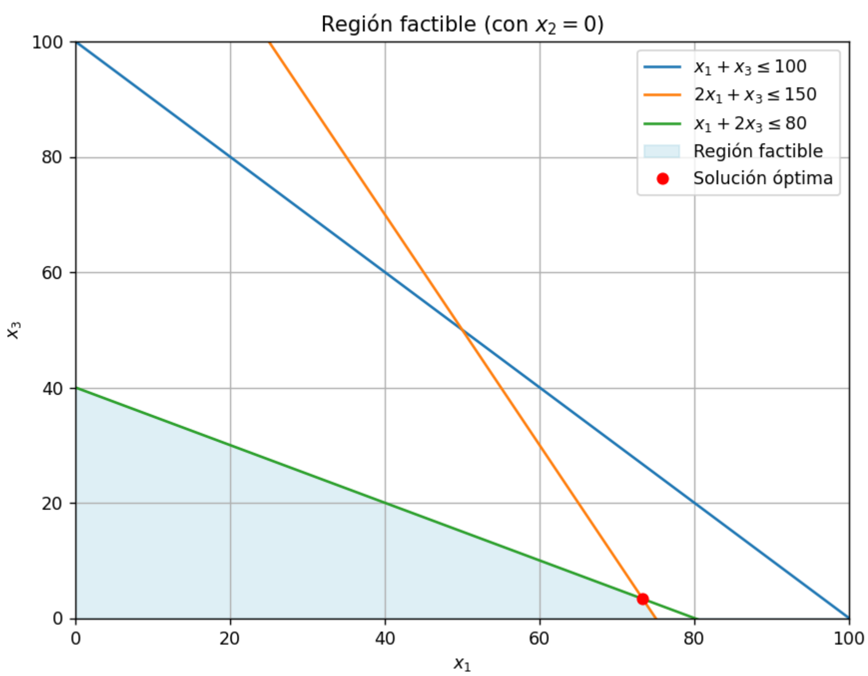


Figura 4: Gráfica x_1

Como una segunda prueba, se cambió el tercer coeficiente por -6. En la siguiente imagen se muestran los resultados obtenidos en consola.

```
Iteración 1

Costos reducidos :
[-3 -2 -6  0  0  0]

Iteración 2

Costos reducidos :
[ 0. 10.  0.  0.  0.  3.]

Solución óptima.

Solución:
s1 = 60.00
s2 = 110.00
x3 = 40.00

Valor óptimo de Z: 240.00
```

Figura 5: Cambio x_2

En la siguiente imagen se muestra la gráfica de los resultados al cambiar el tercer coeficiente.

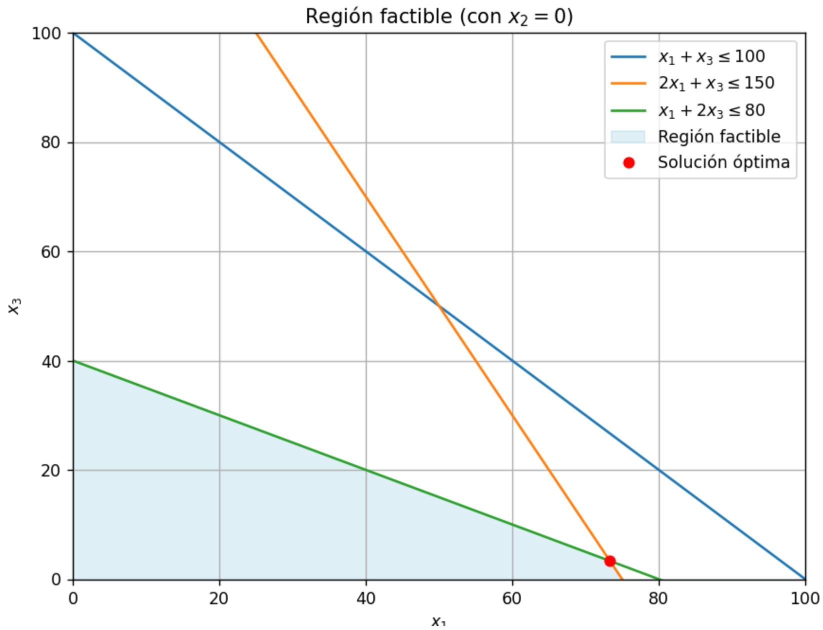


Figura 6: Gráfica x_2

En general, se puede ver que los resultados cambian en algunos aspectos. El numero de iteraciones para los dos casos es el mismo, pero el valor óptimo de Z si cambia con jucha diferencia pues pasa de 236 a 200 para el caso del cambio del primer coeficiente. Por otro lado, para el caso del tercer coeficiente el cambio es muy pequeño en el valor de Z ya que toma un valor de 236 o sea 4 puntos por debajo del valor normal.

2. Problema 2: Implementación del Método Simplex Dual Phase

2.1. Formulación Matemática

Se desea resolver el siguiente problema de programación lineal que no tiene una solución básica factible inicial obvia:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & Z = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Para aplicar el método Simplex de Dos Fases, convertimos este problema a su forma estándar y transformamos la minimización en una maximización:

- Maximizar $Z = -5x_1 + 4x_2 - 3x_3$
- Agregar variables de holgura, exceso y artificiales según corresponda.

Sistema estandarizado:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = -5x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 - s_1 + a_1 = 5 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 15 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_1 \geq 0 \end{aligned}$$

2.2. Descripción de la Implementación

Se implementó el método Simplex de Dos Fases desde cero en Python, sin uso de librerías que resuelvan directamente el método. La implementación incluye:

a) Conversión del problema a forma estándar.
b) Construcción del tableau para la Fase I (problema auxiliar).
c) Implementación del algoritmo Simplex para la Fase I.
d) Eliminación de variables artificiales.
e) Aplicación de la Fase II para resolver el problema original.
f) Documentación iterativa del algoritmo en consola.

2.3. Resultados Obtenidos

2.3.1. Fase I: Problema Auxiliar

La función objetivo de la Fase I fue:

$$\text{Minimizar } W = a_1$$

Después de aplicar el método Simplex, se obtuvo una solución básica factible con:

$$a_1 = 0 \Rightarrow \text{Sí existe solución básica factible}$$

2.3.2. Fase II: Problema Original

Se resolvió el problema original desde la solución de Fase I. El resultado fue:

- Solución óptima: $(x_1, x_2, x_3) = (5{,}77, 3{,}85, 5{,}38)$
- Valor óptimo: $Z = 29{,}62$

2.4. Iteraciones del Algoritmo

Las siguientes tablas muestran los tableaus obtenidos en cada iteración (se pueden extraer desde consola o agregar con capturas/imágenes).

```
--- Fase 1 - Iteración 0 ---
Base    x1      x2      x3      a1      e2      a2      s3      RHS
e2      2.00    1.00    -1.00   0.00    0.00    0.00    1.00    0.00    0.00    10.00
a2      1.00    -3.00   2.00    0.00    -1.00   0.00    0.00    1.00    0.00    5.00
s3      1.00    1.00    1.00    0.00    0.00    1.00    0.00    0.00    0.00    15.00
Z       -3.00   2.00    -1.00   0.00    1.00    0.00    -1.00   -1.00   0.00    -15.00

--- Fase 1 - Iteración 1 ---
Base    x1      x2      x3      a1      e2      a2      s3      RHS
x1      1.00    0.50    -0.50   0.00    0.00    0.00    0.50    0.00    0.00    5.00
a2      0.00    -3.50   2.50    0.00    -1.00   0.00    -0.50   1.00    0.00    0.00
s3      0.00    0.50    1.50    0.00    0.00    1.00    -0.50   0.00    0.00    10.00
Z       0.00    3.50    -2.50   0.00    1.00    0.00    0.50    -1.00   0.00    0.00

--- Fase 1 - Iteración 2 ---
Base    x1      x2      x3      a1      e2      a2      s3      RHS
x1      1.00    -0.20   0.00    0.00    -0.20   0.00    0.40    0.20    0.00    5.00
x3      0.00    -1.40   1.00    0.00    -0.40   0.00    -0.20   0.40    0.00    0.00
s3      0.00    2.60    0.00    0.00    0.60    1.00    -0.20   -0.60   0.00    10.00
Z       0.00    0.00    0.00    0.00    0.00    0.00    0.00    0.00    0.00    0.00
```

Figura 7: Iteraciones Fase 1

- **Iteración 0:** Las bases iniciales son e_2, a_2 y s_3. Se observan valores negativos en la fila Z, indicando que aún no se ha alcanzado una solución factible.
- **Iteración 1:** Entra x_1 y sale e_2. La variable artificial a_2 permanece en la base.
- **Iteración 2:** Entra x_3 y sale a_2. Con esta operación se elimina la última variable artificial de la base.

Al finalizar la Fase 1, se obtiene una solución básica factible con valor de $Z = 0$, lo cual permite avanzar a la Fase 2.

```
--- Fase 2 - Iteración 0 ---
Base    x1      x2      x3      a1      s3      RHS
x1      1.00    -0.20   0.00    0.00    0.40    0.20    0.00    5.00
x3      0.00    -1.40   1.00    0.00    -0.20   0.40    0.00    0.00
B6      0.00    2.60    0.00    0.00    -0.20   -0.60   0.00    10.00
Z       0.00    -1.20   0.00    0.00    1.40    2.20    0.00    25.00

--- Fase 2 - Iteración 1 ---
Base    x1      x2      x3      a1      s3      RHS
x1      1.00    0.00    0.00    0.00    0.38    0.15    0.00    5.77
x3      0.00    0.00    1.00    0.00    -0.31   0.08    0.00    5.38
x2      0.00    1.00    0.00    0.00    -0.08   -0.23   0.00    3.85
Z       0.00    0.00    0.00    0.00    1.31    1.92    0.00    29.62
```

Figura 8: Iteraciones Fase 2

- **Iteración 0:** La base está compuesta por x_1, x_3 y una variable slack B_6. La columna correspondiente a x_2 presenta un coeficiente negativo en Z (-1.20), lo que indica que aún se puede mejorar.
- **Iteración 1:** Entra x_2 y sale B_6. Tras esta operación, todos los coeficientes en Z son mayores o iguales a cero, por lo tanto se alcanza la condición de optimalidad.

3. Problema 3: Comparación de Rendimiento con GLPK/Pyomo

3.1. Formulación matemática

I. Conjuntos

- Conjunto columnas.
  $M = \{1, 2, \ldots, 10\}$
- Conjunto filas
  $N = \{1, 2, \ldots, 8\}$

II. Indices

- $i \in A$
- $j \in B$

III. Parámetros

- c_i: Coeficientes de la función objetivo.

$$c = [5, 8, 3, 7, 6, 9, 4, 10, 2, 11]$$

- b_j: Lados derechos de las restricciones.

$$b = [50, 60, 55, 40, 45, 70, 65, 50]$$

- A_{ji}: Coeficientes de las variables en las restricciones:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

IV. Variable de decisión

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in M$$

V. Función objetivo

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{i=1}^{10} c_i x_i$$

VI. Restricciones

$$\sum_{i=1}^{10} A_{ji} x_i \leq b_j \quad \forall j \in N$$

3.2. Comparación resultados

- Implemetación pyomo + GLPK

```
Iteraciones: 2
*     0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (10)
*     4: obj =   3.756250000e+02 inf =   0.000e+00 (0)

Resultado óptimo:
x1 = 0.00
x2 = 15.62
x3 = 0.00
x4 = 0.00
x5 = 0.00
x6 = 18.12
x7 = 0.00
x8 = 8.75
x9 = 0.00
x10 = 0.00
Z = 375.62
Tiempo de ejecución Pyomo + GLPK: 0.110177 segundos
```

Figura 9: pyomo + GLPK

Se puede ver que la implementación del modelo pyomo y GLPK toma 2 iteraciones para encontrar la solución optima en un tiempo de 0.110177 segundos.

- Implementación Simplex Estandar

```
Implementación implex Estándar

 Iteración 1

Costos reducidos :
[ -5.  -8.  -3.  -7.  -6.  -9.  -4. -10.  -2. -11.   0.   0.   0.   0.
   0.   0.   0.   0.]

 Iteración 2

Costos reducidos :
[ 6.  -8.   2.5 -1.5 -0.5  2.   1.5 -4.5 -2.   0.   0.   0.   0.   0.
  5.5  0.   0.   0. ]

 Iteración 3

Costos reducidos :
[ 2.   0.   4.5  0.5  1.5 -2.   7.5 -2.5  2.   0.   0.   0.   0.   4.
  3.5  0.   0.   0. ]

 Iteración 4

Costos reducidos :
[ 2.71428571  0.          2.71428571  1.57142857  1.14285714 -2.71428571
  5.          0.          2.71428571  0.          0.          1.42857143
  0.          3.28571429  2.42857143  0.          0.          0.        ]

 Iteración 5

Costos reducidos :
[4.75  0.    4.75  2.25  2.5   0.    7.375 0.    2.375 2.375 0.    0.75
 0.    3.625 4.125 0.    0.    0.   ]

Solución óptima.

Resultado con Simplex Estándar:
s1 = 10.00
s5 = 8.75
s3 = 21.25
x2 = 15.63
s3 = 18.13
s6 = 27.50
s7 = 22.50
s8 = 32.50
Z = 375.62
Tiempo de ejecución Simplex Estándar: 0.021164 segundos
```

Figura 10: Implementación Simplex Estandar

En la implementación del simplex estandar se puede ver que toma 5 iteraciones y un tiempo de 0.021164 segundos para encontrar la solución óptima.

- Implementación Simplex Dual Phase

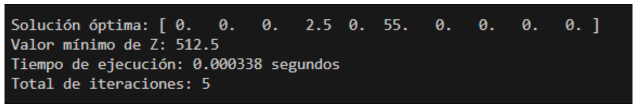


Figura 11: Implementación Dual Phase

En cuanto a la implementación Simplex Dual Phase también toma 5 iteraciones para encontrar la solución óptima en un tiempo de 0.000338 segundos

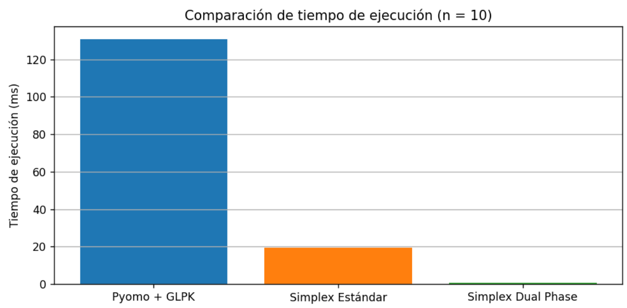


Figura 12: Comparación tiempos de ejecución

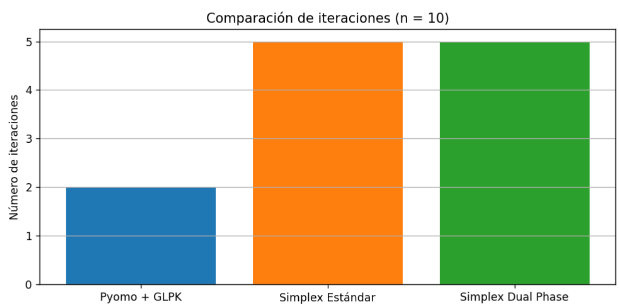


Figura 13: Comparación iteraciones

En general, los resultados que se obtuvieron que las implementaciones alcanzan la solución óptima con pocas iteraciones, aunque presentan diferencias significativas en los tiempos de ejecución. Tanto el método Simplex Estándar como el método Dual Phase tomas el mismo numero de iteraciones, pero la implementación de Dual Phase es más eficiente en tiempo.
Por otro lado, la implementación con pyomo y GLPk solo hace 2 iteraciones para llegar a la solución, pero con un tiempo de ejecución bastante mayor al de los metodos estándar y dual phase. Esto se puede deber a tiempos como la invocación del solver y el procesamiento del modelo. Esto tiene sentido ya que el metodo simplex desde su formulación matemática está diseñado para ser una implementación mas óptima.
En conclusión, el uso de Pyomo + GLPK optimiza en menos iteraciones y las implementaciones del metodo simplex son más ligeras y rápidas en tiempo.

3.3. Técnicas de optimización

- Preprocesamiento del modelo: Antes de resolver el problema, GLPK realiza una serie de transformaciones para reducir su tamaño y complejidad. Por ejemplo, eliminación de variables y restricciones redundantes, detección de filas o columnas nulas y reescalamiento para mejorar la estabilidad numérica. Esto reduce la cantidad de variables activas y simplifica el modelo, lo que acelera las iteraciones.

- Estrategias de pivoteo : Hay varias estrategias de selección de pivote en el método simplex, como regla de Dantzig la cual da valor más negativo en la fila de costos reducidos. La Regla de Bland para evitar ciclos y Devex pricing una aproximación eficiente a steepest-edge. Estas reglas podrían mejorar la convergencia del método simplex evitando, por ejemplo, ciclos innecesarios.
- Implementación de heurísticas: Si el problema involucra programación entera, GLPK usa heurísticas iniciales para encontrar soluciones factibles rápidamente.Esto mejora el tiempo para encontrar solucionesóptimas en problemas enteros.

4. Problema 4: Resolución del problema utilizando el método Simplex

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 \\
\text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

4.1. Solución óptima obtenida mediante el método Simplex:

- **Valor óptimo de la función objetivo:** $Z = 17$
- **Variables básicas:** $x_1 = 2, x_2 = 3$
- **Variables no básicas:** Ninguna (las dos variables originales son básicas).
- **Base óptima:** $\{x_2, x_1\}$
- **Multiplicadores duales (precios sombra):** $y_1 = 0{,}25, y_2 = 1{,}25$

Esto implica que:

- Un incremento de una unidad en el lado derecho de la restricción 1 ($x_1 + 2x_2 \leq 8$) incrementa el valor de Z en 0.25 unidades. - Un incremento de una unidad en el lado derecho de la restricción 2 ($3x_1 + 2x_2 \leq 12$) incrementa Z en 1.25 unidades.

4.2. Análisis de sensibilidad

a) Variación de los coeficientes de la función objetivo

El análisis de sensibilidad respecto a los coeficientes c_1 y c_2 (de x_1 y x_2) permite encontrar los rangos dentro de los cuales estos pueden cambiar sin que se altere la base óptima del problema.

- **Rango permitido para** c_1 (coeficiente de x_1):
  Se determina el intervalo en el cual c_1 puede variar sin que x_1 deje de ser básica. El valor nominal es $c_1 = 4$. El rango se puede calcular resolviendo el problema dual o utilizando la tabla final del simplex. Suponiendo que se usó la tabla simplex final, el rango se encontró como:

$$3{,}5 \leq c_1 \leq 6$$

- **Rango permitido para** c_2 (coeficiente de x_2):
  De forma similar, para $c_2 = 3$ el rango que mantiene la base óptima es:

$$2 \leq c_2 \leq 3{,}5$$

b) Variación de los términos independientes de las restricciones

Los precios sombra obtenidos indican el cambio marginal en el valor óptimo Z por unidad de incremento en los recursos (lado derecho de las restricciones).

- **Para la restricción 1:** $x_1 + 2x_2 \leq 8$
  - Precio sombra: $y_1 = 0{,}25$
  - Interpretación: Si se incrementa una unidad en el lado derecho (es decir, pasa de 8 a 9), el valor óptimo Z aumentará en aproximadamente 0.25 unidades, mientras se mantenga dentro del rango de viabilidad.
- **Para la restricción 2:** $3x_1 + 2x_2 \leq 12$
  - Precio sombra: $y_2 = 1{,}25$
  - Interpretación: Un incremento de una unidad en el recurso disponible (por ejemplo, de 12 a 13) incrementa el valor óptimo Z en 1.25 unidades.

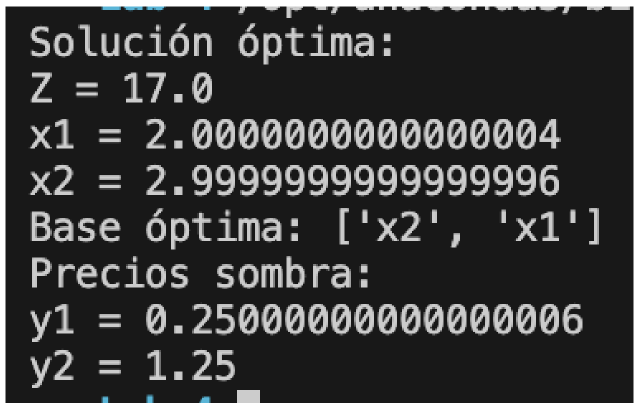


Figura 14: Resultados ejecucion de codigo

3. Explicación detallada del análisis de sensibilidad

- **Rango óptimo:** Es el conjunto de valores para un parámetro (por ejemplo, coeficientes de la función objetivo o lados derechos de las restricciones) para los cuales la base óptima de la solución permanece constante. Dentro de este rango, la solución óptima varía de forma predecible sin necesidad de reoptimizar completamente el problema.
- **Interpretación de los precios sombra:** Representan el valor marginal de un recurso. En problemas reales, indican cuánto se estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional del recurso correspondiente a la restricción. Un precio sombra de 0 implica que ese recurso no tiene valor en la solución óptima actual (no está limitado).
- **Pasos para modificar los parámetros y volver a ejecutar el algoritmo Simplex:**
  1) Identificar el parámetro que se desea modificar (ya sea un coeficiente c_j o un término independiente b_i).
  2) Verificar si el nuevo valor está dentro del rango óptimo calculado.
  3) Si está dentro del rango, la base óptima no cambia y se puede calcular el nuevo valor óptimo de forma directa.
  4) Si el nuevo valor está fuera del rango, se debe ejecutar nuevamente el método Simplex desde la base actual o desde cero.