1 Disclaimer

Disse noter blev udarbejdet i forbindelse med jeg underviste i kurset **Sandsynlighedsteori og statistik** udbudt af Økonomisk Institut, Københavns Universitet.

Dette er ikke blevet gennemlæst, rettet eller på anden måde redigeret af en tredje person, som ville kunne fange evt. fejl og mangler. Derfor **forvent** at der er fejl i dette dokument. Forhold dig kritisk til resultaterne, og hvis du er sikker på der er en fejl, så tag udgangspunkt i det.

Dokumentet indeholder rettevejledninger til øvelsesseddlerne forbundet med faget. Der er et tilhørende github-repository:

https://github.com/JakartaLaw/statistik2018.

Lecture Notes

Jeppe Johansen

October 29, 2018

2 Topics

3 Lectures

3.1 Øvelse 1

10/09/2018, opgaver: 1.1, 1.4, 1.17, 1.24 (og 1.13 hvis der er tid)

3.1.1 Opgave 1.1

- en fair mønt
- 3 kast

Udfaldsrummet E har 2^3 udfald:

$E = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),((1,1,0),(1,1,1)\}$

SSH for 1 mønt=krone:

$$p((1,1,1)) = \frac{\text{Gunstige udfald}}{\text{mulige udfald}} = \frac{1}{8} \tag{1}$$

SSH for mindst 1 mønt=krone.

brug den komplementere sandsynlighed: $p((0,0,0)) = \frac{1}{8}$. Kald denne hændelse B.

$$P(E \setminus B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \tag{2}$$

SSH for præcis et kast viser mønt=krone

Vi definere 3 hændelser

- $A = \{\text{Det første kast bliver krone}\}$,
- $B = \{\text{Det andet kast bliver krone}\}$,
- $C = \{\text{Det tredje kast blive krone}\}$

Undersøg om dette er korrekt:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \tag{3}$$

spørgsmål: hvorfor kan vi ignorere fællesmængden: denoted $A \cup B \cup C$? =¿ Den er disjunkt. Kig i opgave 1.13 for at se hvordan man skulle have inkluderet fællesmængderne

3.2 Opgave 1.4

- 3 slag med terninger $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Ssh summen er 10

1) Vi ser at summen kan antage alle hele tal mellem 3 og 18.

2) Vi kan se det ikke er en ligefordeling af summer: dvs. summen 3 er ikke så hyppig som summen 10.

3) Det samlede antal udfald er 6^3

4) Via computer fandt jeg det gunstige antal udfald:

$$\frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{27}{6^3} = \frac{27}{216} \tag{4}$$

3.3 Opgave 1.17

- 1 sort terning
- 1 hvid terning

del 1) Hvad er den betingede ssh. for at summen er 12 givet summen er mindst 11

Brug reglen for betingede sandsynligheder

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{5}$$

Lad A være sandsynligheden for summen er 12.

Lad B være sandsynligheden for summen er mindst 11.

$$P(A) = p((6,6)) = \frac{1}{36} \tag{6}$$

$$P(B) = P(\{(6,6),(5,6),(6,5)\}) = \frac{3}{36} \tag{7}$$

vi ser at $A \subset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3} \tag{8}$$

Del 2) Hvad er den betingede SSH for at de to terninger viser det samme, givet summen er 7:

A er hændelsen for begge er terninger viser det samme.

B er hændelsen summer af terningerne er 7.

$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$

$B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

Vi ser at $P(A \cap B) = \emptyset$

Man husker $P(\emptyset) = 0$ Givet fra definitioner af sandsynlighedsmål.

$$P(A \mid B) = 0 \tag{9}$$

Del 3) Ssh for den hvide terning viser 3, givet den sorte viser 5

A: er hændelsen at den hvide terning er 3.

B: er hændelsen den sorte terning er 5.

Hændelserne er uafhængige!

$$A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\} \tag{10}$$

$$B = \{(1,5),(2,5),\cdots,(6,5)\} \tag{11}$$

Vi ser: $P(A \cup B) = P\{(3,5)\} = \frac{1}{6^2}$.

Vi ser: $P(B) = \frac{1}{6}$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \tag{12}$$

Del 4) Ssh. for den mindste terning viser 2, givet den terning med det højeste andel højest viser 5

A: hændelsen at den mindste terning viser 2.

B: hændelsen at den terning med det højeste antal øjne viser 5.

$A = \{(2,2),(2,3),\cdots,(2,6),(3,2),(4,2),\cdots,(6,2)$

$B = \bigcup_{i,j\in\{1,2,3,4,5\}}(i,j) = E \backslash \{(1,6),(2,6),\cdots,(5,6),(1,6),(2,6)\cdots(5,6),(6,6)\}$

Vi kan finde $A \cap B$:

$$A \cap B = (2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(4,2),(5,2) \tag{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{7}{6^2} = \frac{7}{36} \tag{14}$$

$$P(B) = P(E) - P(\{(1,6),(2,6),\cdots,(5,6),(1,6),(2,6)\cdots(5,6),(6,6)\}) \tag{15}$$

$$= 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36} \tag{16}$$

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{25}{36}} = \frac{7}{25} \tag{17}$$

3.4 Opgave 1.24

- 1 hvid terning
- 1 sort terning
  - A = {den hvide terning viser 4}
  - B = {den sorte terning viser 1}
  - C = {terningen med det højeste antal øjne viser 4 }
  - D = {summen af øjene er 5 }
  - F = {summen af øjnene er 7 }

hvilke par er indbyrdes uafhængige:

Husk uafhængighed er: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A) = \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \tag{18}$$
$$P(B) = \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \tag{19}$$
$$P(C) = P(\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}) = \frac{7}{36} \tag{20}$$
$$P(D) = P(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1) = \frac{4}{36} \tag{21}$$
$$P(F) = \{(1,6),(6,1)\} = \frac{1}{12} = \frac{3}{36} \tag{22}$$

Elementer i hver fællesmængde:

A	B	C	D	F	set
6	1	4	1	1	A
1	6	1	1	1	B
4	1	7	2	2	C
1	1	2	4	0	D
1	1	2	0	6	F

Figure 1: opg. 1.24 - elementer i hver fællesmængde

A	B	C	D	F	set
0.167	0.028	0.111	0.028	0.028	A
0.028	0.167	0.028	0.028	0.028	B
0.111	0.028	0.194	0.056	0.056	C
0.028	0.028	0.056	0.111	0.000	D
0.028	0.028	0.056	0.000	0.167	F

Figure 2: opg 1.24 - Sandsynlighed for fællesmængde

A	B	C	D	F	set
0.028	0.028	0.032	0.019	0.028	A
0.028	0.028	0.032	0.019	0.028	B
0.032	0.032	0.038	0.022	0.032	C
0.019	0.019	0.022	0.012	0.019	D
0.028	0.028	0.032	0.019	0.028	F

Figure 3: opg. 1.24 - Sandsynligheden for $P(A) \cdot P(B)$

De uafhængige par er: $(A, B), (A, F), (B, F)$

3.5 Opgave 1.13

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C) && (23)\\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C) && (24)
\end{aligned}
$$

Hvis vi ser nærmere på den sidste del **Lav tegning af mængder! A, B, C har en intersektion**.

$$P(A \cap (B \cup C) = P(A \cup B) + P(A \cup C) - P(A \cup B \cup C) \quad (25)$$

Man husker at der er minus foran denne mængde, sådan at:

$$\begin{aligned} &P(A \cup B \cup C) = && (26)\\ &\quad P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cup C) && (27)\\ &\quad - (P(A \cup B) + P(A \cup C) - P(A \cup B \cup C)) && (28) \end{aligned}$$

3.6 Øvelse 2

15/09/2018, opgaver: 1.6, 1.7, 1.9, 1.15, 1.18, 1.28 og 1.30 (og 1.12 hvis der er tid)

3.6.1 1.6

- 1 ternning
- 2 slag

Ssh for mindst 1 sekser

$$\begin{aligned} &P(\{\text{mindst en sekser}\}) = && (29)\\ &P(\{(1,6),(2,6),\cdots,(6,6),(6,1),\cdots,(6,5) = && (30)\\ &\frac{5+6}{36} = \frac{11}{36} && (31) \end{aligned}$$

Ssh. for mindst 1 sekser eller mindst 1 toer

$$\begin{aligned} &P(\{\text{mindst en sekser}\}) = && (32)\\ &P(\{(1,6),(2,6),\cdots,(6,6),(6,1),\cdots,(5,6), && (33)\\ &(1,2),\cdots(5,2),(2,1)\cdots(2,5)\}) = && (34)\\ &\frac{6+5+5+4}{36} = \frac{20}{36} && (35) \end{aligned}$$

3.6.2 Opgave 1.7

- 1 mønt
- 10 kast

Hvad er ssh. for mindst 2 plat

Find sandsynligheden for komplimenter hændelsen:

A : Er hændelsen for at få mindst 2 plat.

A^C : Er Komplementær hændelsen - altså maks 1 plat:

$$A^C = \{\text{slå 0 plat}\} \cup \{\text{slå 1 plat}\} \tag{36}$$

$$P(\{\text{slå 0 plat}\}) = \frac{1}{2^{10}} \tag{37}$$

$$P(\{\text{slå 1 plat}\}) = \frac{10}{2^{10}} \tag{38}$$

Noter at $\{\text{slå 0 plat}\} \cap \{\text{slå 1 plat}\} = \emptyset$

$$P(A^C) = \frac{1}{2^{10}} + \frac{10}{2^{10}} = \frac{11}{2^{10}} \tag{39}$$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{11}{2^{10}} = \frac{1013}{2^{10}} \tag{40}$$

3.6.3 Opgave 1.9

- 1 spil kort (52 kort)
- 13 kort trækkes

Hvad er Ssh. for 0 billedkort eller esser

Antal billedkort og esser (kaldet billedkort fra nu): $4 * 4 = 16$

Kig på komplementær hændelsen:

$$P(\{\text{kort 1 ikke billedkort}\}) = \frac{52 - 16}{52} \tag{41}$$

Vi har trukket 1 kort nu $\implies$ 51 kort tilbage, men stadig 12 billedkort

$$P(\{\text{kort 2 er billedkort}\}) = \frac{51-16}{51} \tag{42}$$

$$P(\{\text{man trækker 0 billedkort}\}) = \prod_{i=0}^{12} \frac{52-i-16}{52-i} = 0.0036 \tag{43}$$

Alternativt

$$\#E = 52 \cdot 51 \cdots 40 = \frac{52!}{39!} \tag{44}$$

$$\#A = 36 \cdot 35 \cdots 24 = \frac{36!}{23!} \tag{45}$$

$$P(\{\text{man trækker 0 billedkort}\}) = \frac{\#A}{\#E} = 0.0036 \tag{46}$$

3.6.4 Opgave 1.15

- 4 slag med terning
- mindst 1 sekser
- demere mente $4 \times \frac{1}{6}$

Hvorfor tog han fejl?

Klasse diskussion:

Kig på komplementærhændelsen: *Ingen seksere*

$$P(\{\textbf{Ingen seksere}\}) = (\frac{5}{6})^4 = \frac{5^4}{6^4} = 0.49 \tag{47}$$

Da dette er komplementær hændelsen kan vi i stedet sige:

$$P(\{\textbf{mindst 1 sekser}\} = 1 - 0.49 = 0.51 \tag{48}$$

Ssh for en dobbelt sekser i 24 kast

- 24 kast
- mindst 1 dobbelt sekser

Sandsynligheden for 1 dobbelt sekser i et slag.

$$P(\{\textbf{En dobbelt sekser}\}) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \tag{49}$$

Brug komplementær hændelsen: Dvs. ssh for ikke at få en dobbelt sekser i 24 slag:

$$P(\{\textbf{Ingen dobbelt sekser i 24 slag}\}) = (\frac{35}{36})^{24} = 0.509 \tag{50}$$

$$P(\{\textbf{mindst en dobbelt sekser i 24 slag}\}) = 1 - 0.509 = 0.491 \tag{51}$$

Så ikke langt fra!

3.6.5 Opgave 1.18

- 1 mønt
- 10 kast

Hvad er ssh. for at få krone den 10'ende gang givet 9 plat

Lad os definerer hændelserne:

A : Man har fået 9 plat på de første 9 slag af de 10 slag

B : Man får krone på det sidste slag ud af de 10 slag

Brug definition for betingede ssh (1.4.1):

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{52}$$

$$P(A \cap B) = (\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{2^{10}} \tag{53}$$

$$P(A) = (\frac{1}{2})^{9} = \frac{1}{2^{9}} \tag{54}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2^9}} = \frac{1}{2} \tag{55}$$

SSh for den 10 bliver krone, givet 9 af de 10 kast blive plat

Lad os definerer hændelserne:

A : Man har fået 9 plat ud af de 10 slag

B : Man får krone på det sidste slag ud af de 10 slag

$$P(A \cap B) = (\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{2^{10}} \tag{56}$$

$$P(A) = 10 \times (\frac{1}{2})^{10} = \frac{10}{2^{10}} \tag{57}$$

$$P(B \mid A) = \frac{1}{10} \tag{58}$$

3.6.6 Opgave 1.28

- 1 terning
- 1 kast
- Hændelse A : kast er 1,2,3
- Hændelse B : kast er 1 eller 4

Vis at A og B er uafhængige

Brug Definition 1.5.1:

$$P(A \cap B) = P(A)\dot{P}(B) \tag{59}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \tag{60}$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \tag{61}$$

Hvad er fælles mængden af de to hændelser: *at terningen bliver 1*

$$P(A \cap B) = P(\{\textbf{Terningen bliver 1}\}) = \frac{1}{6} = P(A)\dot{P}(B) \qquad (62)$$

Og vi har herved vist, at hændelserne er uafhængige!

3.6.7 Opgave 1.30

Lad eleverne prøve!

- 3 hændelser: A, B, C
- $A \perp\!\!\!\perp B$
- $A \perp\!\!\!\perp C$

Kan man fra ovenstående slutte at: $A \perp\!\!\!\perp B \cup C$

$$A \perp\!\!\!\perp B \implies P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \qquad (63)$$

$$A \perp\!\!\!\perp C \implies P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C) \qquad (64)$$

Bevis via. modeksempel

$A = \{\textbf{Spar eller hjerter}\}$

$B = \{\textbf{Spar eller ruder}\}$

$C = \{\textbf{hjerter eller ruder}\}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$

$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$

$P(A \cap (B \cup C)) = \frac{1}{2} \neq P(A)P(B \cup C) = \frac{1}{2}\frac{3}{4}$

3.6.8 Opgave 1.12

- 1 slag
- 5 terninger

Sandsynligheden for at få mindst 1 sekser

Udregn ssh for komplementærhændelsen at få 0 seksere!

Definér hændelsen A : At få mindst 1 sekser

$$P(A^C) = P(\{\textbf{0 seksere}\} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.402 \tag{65}$$

$$1 - A^C = 0.598 \tag{66}$$

Øvelse 3

17/9/2017, Opgaver: 2.1 og 2.3 fra Sørensen (2015) samt opgaverne B.1, B.2 og B.3

3.6.9 Opgave 2.1

- 1 rød terning
- 1 sort terning
- $Y := \min(r, s)$
- $Z := \max(r, s)$

Fordelingen for Y

TEGN TERNINGEMATRICEN

$$P(Y = 1) = P(\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(6,1)\}) = \frac{11}{36} \tag{67}$$

$$P(Y = 2) = P(\{(2,2),(2,3),\cdots(2,6),(3,2)\cdots(6,2)\}) = \frac{9}{36} \tag{68}$$

$$P(Y = 3) = \cdots = \frac{7}{36} \tag{69}$$

Den resterende fordeling for Y er: $P(Y = 4) = \frac{5}{36}, P(Y = 5) = \frac{3}{36}, P(Y = 6) = \frac{1}{36}$.

Fordelingen for Z

TEGN TERNINGEMATRICEN

$$P(Z=1) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36} \tag{70}$$
$$P(Z=2) = P(\{(2,1),(2,2),(2,1) = \frac{3}{36} \tag{71}$$
$$P(Z=3) = \cdots = \frac{5}{36} \tag{72}$$

Den resterende fordeling for Z er $P(Z=4) = \frac{7}{36}, P(Z=5) = \frac{9}{36}, P(Z=6) = \frac{11}{36}$.

Den simultane fordeling er 3.6.9:

Y er vandret, Z lodret: Vi ved at det må være en øvre trekantsmatrice.

Til diagonalen: Vi ved at der er kun måde at min og maks kan være ens $min(T_1, T_2) = max(T_1, T_2) \implies T_1 = T_2$.

Til den øvre trekant: $Y = 1, Z_2 \implies T_1 = 1, T_2 = 2 \vee T_1 = 2, T_2 = 1$. Dette kan gøres for alle elementer af den øvre trekant

Table 1: Simultan fordeling

	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$	$Y=5$	$Y=6$
$Z=1$	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36
$Z=2$	0	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36
$Z=3$	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36
$Z=4$	0	0	0	1/36	2/36	2/36
$Z=5$	0	0	0	0	1/36	2/36
$Z=6$	0	0	0	0	0	1/36

3.7 Spørgsmål 2.3

- Stokastisk variabel er beskrevet i bogen

$Y = t(X)$

$$P(Y=1) = P(X \in \{1,2,3\}) = 0.12 + 0.8 + 0.20 = 0.4 \tag{73}$$
$$P(Y=2) = P(X \in \{4,5\}) = 0.11 + 0.19 = 0.30 \tag{74}$$
$$P(Y=3) = P(X \in \{6,7\}) = 0.14 + 0.06 = 0.20 \tag{75}$$
$$P(Y=4) = P(X \in \{8\}) = 0.10 \tag{76}$$

Fordelingsfunktion (CDF):

$$P(Y \leq 0) = 0 \tag{77}$$
$$P(Y \leq 1) = 0.4 \tag{78}$$
$$P(Y \leq 2) = 0.7 \tag{79}$$
$$P(Y \leq 3) = 0.9 \tag{80}$$
$$P(Y \leq 4) = 1.0 \tag{81}$$

3.8 Opgave B.1

- stokastiske variable X_1, X_2
- $X_1 = 1$ hvis der var en stor nyhed (ellers 0)
- $X_2 = 1$ hvis aktiemarkedet steg/faldt (0 hvis ikke)
- $P(X_1 = 1) = \frac{6}{10}$
- $P(X_2 = 1) = \frac{3}{10}$

Simultane fordeling under antagelse af uafhængighed!

Brug definition 2.4.1 (sørensen)

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \frac{4}{10}\frac{7}{10} = \frac{28}{100} \tag{82}$$
$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) = \frac{4}{10}\frac{3}{10} = \frac{12}{100} \tag{83}$$
$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) = \frac{6}{10}\frac{7}{10} = \frac{42}{10} \tag{84}$$
$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{6}{10}\frac{3}{10} = \frac{18}{10} \tag{85}$$

TEGN BI-MATRICE

DEL 2: Antag IKKE uafhængighed - Hvad er den simultane fordeling (X_1, X_2)

tegn bimatrice og fyld værdier i løbende!

$$P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{4}{10} \tag{86}$$

Udvid **Definition 1.4.3**

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B, A_j) \tag{87}$$

$$P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1) \tag{88}$$

$$P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1, X_1 = 0) + P(X_2 = 1, X_1 = 0) \tag{89}$$

Vi husker at $P(X_2) = \frac{3}{10}$

$$\frac{3}{10} = \underbrace{\frac{4}{10}\frac{6}{10}}_{P(X_1=1,X_2=1)} + P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0) \tag{90}$$

$$\implies P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{6}{100} \tag{91}$$

Vi har allerede set at:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{24}{100} \tag{92}$$

Vi går videre:

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) \tag{93}$$

Vi indsætter de værdier vi kender:

$$\frac{6}{10} = P(X_1 = 1, X_2 = 0) + \frac{24}{100} \implies P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{36}{100} \tag{94}$$

Vi mangler kun sidste værdi nu:

$$P(X_2 = 0) = P(X_2 = 0, X_1 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1) \tag{95}$$

Husker værdier: $P(X_2 = 0) = \frac{7}{10}$ og $P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{36}{100}$

$$\frac{7}{10} = \frac{36}{100} + P(X_1 = 0, X_2 = 0) \implies P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{34}{100} \tag{96}$$

Ændrer fordelingen sig for X_1, X_2, X

Spørg klassen

De marginale distributioner er ens, De betingede og den simultane er forskellig

3.8.1 Opgave B.2

- Test for cancer
- Den gætter rigtig med 95 % ssh.
- 1 ud af 100.000 mennesker har denne kræft form

Lad X for cancer testen $X = 1$ implicerer positiv test . Lad Y være en stokastisk variabel som angiver om man har kræft $Y = 1$ betyder man har kræft.

Vi kan skitserer nogle sandsynligheder:

$$P(X = 1 \mid Y = 1) = 0.95, \quad P(X = 0 \mid Y = 1) = 0.05 \tag{97}$$

$$P(X = 0 \mid Y = 0) = 0.95, \quad P(X = 1 \mid Y = 0) = 0.05 \tag{98}$$

$$P(Y = 1) = \frac{1}{100000} = 0.00001 \tag{99}$$

Brug bayes formel (sætning 1.4.7):

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)} \tag{100}$$

$$
\begin{aligned}
&P(Y=1 \mid X=1) && (101)\\
&= \frac{P(X=1 \mid Y=1)P(Y=1)}{P(X=1 \mid Y=1)P(Y=1)+P(X=1 \mid Y=0)P(Y=0)} && (102)
\end{aligned}
$$

$$
P(Y=1 \mid X=1) = \frac{0.95 \cdot 0.00001}{0.95 \cdot 0.00001 + 0.05 \cdot 0.99999} = 0.0001899 \tag{103}
$$

3.8.2 Opgave B.3

Kig github!

3.9 Øvelse 4

21/9/2018, Øvelser: B.4 og 2.4, 2.5, og 2.9 fra Sørensen (2015)

3.9.1 Opgave B.4

Lav i klassen

- 1 mønt
- 1 terning
- X er stokastisk variabel med summen af antal øjne på terning + (0/1) (1 hvis krone).

$$
T := \text{Ternings øjne}, \qquad M := \text{Mønt} \tag{104}
$$

$$
X := T + M \tag{105}
$$

Del 4 - Find $P(X > 3)$

Definer hændelser:

$A = \{X > 3\}$

$A^C = \{X \leq 3\}$

udfaldsrummet for den simultane fordeling af T of M $\{0,1\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

$$P(A^C) = \tag{106}$$
$$P(\{(M=0, T=1), (M=0, T=2), (M=0, T=3), \tag{107}$$
$$(M=1, T=1), (M=1, T=2)\}) \tag{108}$$

Dette var kun komplementær hændelsen

$$P(A^C) = \frac{5}{12} \tag{109}$$

$$P(A) = \frac{7}{12} \tag{110}$$

Del 5 - SSh for ulige nummer

Definér hændelsen.

$A = \{X \in \textbf{Ulige numre}\}$

Disse er alle indbyrdes disjunkte hændelser $A = \{X = 1\} \cup \{X = 3\} \cup \{X = 5\} \cup \{X = 7\}$

$$P(A) = P(\{X = 1\}) + P(\{X = 3\}) + P(\{X = 5\}) + P(\{X = 7\}) \tag{111}$$

$$P(A) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \tag{112}$$

3.9.2 Opgave 2.4

L

- X er en stokastisk variabel som kan antage værdierne $\{1,2,3\}$
- $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{3}$
- En stokastisk variabel $Y = 1/X$

Tegn fordelingsfunktionen for X og Y

Kig Github!

3.9.3 Opgave 2.5

Lav første del i klassen

- X_1, X_2 er stokastiske variable.
- begge har udfaldsrummet $\{0, 1\}$
- X_1 marginale fordeling:
  - $P(X_1 = 0) = 0.4$
  - $P(X_1 = 1) = 0.6$
- X_2 marginale fordeling
  - $P(X_2 = 0) = 0.3$
  - $P(X_2 = 1) = 0.7$
- Vi har en stokastisk vektor $X = (X_1, X_2)$

Del 1) Undersøg uafhængighed når den simultane fordeling af X **er:**

Table 2: Simultan fordeling af X

	$X_1 = 0$	$X_1 = 1$
$X_2 = 0$	0.12	0.18
$X_2 = 1$	0.28	0.42

Se **definition 2.4.1**: Skriv den op på tavlen!

Vi tester for uafhængighed:

$$P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12 \tag{113}$$
$$P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28 \tag{114}$$
$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 \tag{115}$$
$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42 \tag{116}$$

Vi ser at X_1 er uafhængig af X_2.

Del 2) Undersøg uafhængighed når den simultane fordeling af X **er:**

Til klassen: Er *dette overhovedet muligt - givet ovenstående resultat?*

Table 3: Simultan fordeling af X

	$X_1 = 0$	$X_1 = 1$
$X_2 = 0$	0.15	0.15
$X_2 = 1$	0.25	0.45

Del 3) gør rede for at begge simulatane fordelinger er i overensstemmelse med de angivne marginale fordelinger

$$P(X_1 = 0) = P((0,0)) + P((0,1)) = 0.4 \tag{117}$$
$$P(X_1 = 1) = P((1,0)) + P((1,1)) = 0.6 \tag{118}$$
$$P(X_2 = 0) = P((0,0)) + P((1,0)) = 0.3 \tag{119}$$
$$P(X_2 = 1) = P((0,1)) + P((1,1)) = 0.7 \tag{120}$$

3.9.4 Opgave 2.9

Note brug min() og maks() som funktioner istedet for bogens notation.

- 2 terninger, T_1, T_2
- T_1, T_2 er ligefordelt på $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $Y = min(T_1, T_2)$
- $Z = max(T_1, T_2)$

Hvad er den simultane fordeling?

Y er vandret, Z lodret: Vi ved at det må være en øvre trekantsmatrice.

Til diagonalen: Vi ved at der er kun måde at min og maks kan være ens $min(T_1, T_2) = max(T_1, T_2) \implies T_1 = T_2$.

Til den øvre trekant: $Y = 1, Z_2 \implies T_1 = 1, T_2 = 2 \vee T_1 = 2, T_2 = 1$. Dette kan gøres for alle elementer af den øvre trekant

Er Y, Z uafhængige

Husk:

$$P(Y = A, Z = B) = P(Y = A)P(Z = B) \quad \forall A, B \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{121}$$

Table 4: Simultan fordeling

	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$	$Y=5$	$Y=6$
$Z=1$	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36
$Z=2$	0	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36
$Z=3$	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36
$Z=4$	0	0	0	1/36	2/36	2/36
$Z=5$	0	0	0	0	1/36	2/36
$Z=6$	0	0	0	0	0	1/36

Vi skal bare have et modeksempel. Eftersom: $P(Y=1, Z=2) = 0$ kan vi konkluderer ikke uafhægighed. *Overvej dette !*

4 Øvelse 5

24/09/2018 - C.1, C.2, C.3 & 3.20, 3.24, 3.27 (optional 3.2) sørensen

4.0.1 Opgave C.1

- Basketball player
- 10 skud
- ssh for at ramme 0.5

Binomial fordeling

Hvad er SSh for at ramme 8 skud med ssh 0.5

$$p(x) = \binom{10}{8} 0.5^8 (1-0.5)^{10-8} = 0.04394 \tag{122}$$

Hvad er SSh for at ramme med ssh 0.6

$$p(x) = \binom{10}{8} 0.6^8 (1-0.6)^{10-8} = 0.1209 \tag{123}$$

Ssh på 0.5 - hvad er varians of middelværdi

$$\mathrm{E}(X) = n \cdot p = 0.5 \cdot 10 = 5 \tag{124}$$

fra wikipedia

$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 2.5 \tag{125}$$

4.0.2 Opgave C.2

- X er stokastisk variabel
- diskret pdf $f(x) = \frac{x}{8}$
- $x \in \{1, 2, 5\}$

Hvad er E(X)

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} + 5 \cdot \frac{5}{8} = \frac{1+4+25}{8} = 3.75 \tag{126}$$

Hvad er Var(X)

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{127}$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{2}{8} + 5^2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{1+8+125}{8} = 16.75 \tag{128}$$

$$\mathrm{Var}(X) = 16.75 - 3.75^2 = 16.75 - 14.0625 = 2.6875 \tag{129}$$

Hvad er $E(2X+3)$

Vi bruger:

$$\mathrm{E}(a + bX) = a + b\mathrm{E}(X) \tag{130}$$

Husk $\mathrm{E}(X) = 3.75$

$$2 \cdot 3.75 + 3 = 7.5 + 3 = 10.5 \tag{131}$$

4.0.3 Opgave C.3

- Efterspørgsel for software er X
- købspris 10
- salgspris 35
- Ved årets ende er softwaren intet værd
- køber 4 kopier af software

Find E(X)

$$\mathrm{E}(X) = 0.1{\cdot}0{+}0.3{\cdot}1{+}0.3{\cdot}2{+}0.2{\cdot}3{+}0.1{\cdot}4 = 0.3{+}0.6{+}0.6{+}0.4 = 1.9 \tag{132}$$

Find Var(X)

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{133}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = 0.1{\cdot}0{+}0.3{\cdot}1{+}0.3{\cdot}4{+}0.2{\cdot}9{+}0.1{\cdot}16 = 0.3{+}1.2{+}1.8{+}1.6 = 4.9 \tag{134}$$

$$\mathrm{Var}(X) = 4.9 - 1.9^2 = 4.9 - 3.61 = 1.29 \tag{135}$$

Efterspørgselsfunktion Y**, samt E**(Y) **og Var**(Y)

man køber 4 stykker software 4×10. og sælger x af dem som er en realisation af X.

$$Y := 35X - 40 \tag{136}$$

husk

$$\mathrm{E}(a + bX) = a + b\mathrm{E}(X) \tag{137}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(35X - 40) = 35 \cdot \mathrm{E}(X) - 40 = 3.5 \cdot 1.9 - 40 = 26.5 \tag{138}$$

Normalt ville vi sige:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{139}$$

Vi gør noget smartere her (kig bog s. 93):

$$\mathrm{Var}(aX + b) = b^2\mathrm{Var}(X) \tag{140}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(35X - 40) = 35^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = 35^2 \cdot 1.29 = 1580.25 \tag{141}$$

4.0.4 Opgave 3.20

- en stokastisk variabel X er ligefordelt på $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (en terning)
- stokastisk variabel $Y := R + H$, hvor er og R, H er terninger
- Z er stokastisk variabel som er for uniform på $\{1, 2, 3 \cdots, n$.

Find middelværdi og varians for X

Man siger at $X := unif\{a, b\} = unif\{1, 6\}$

Middelværdi

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} i = 3.5 \tag{142}$$

Fra wikipedia om diskrete uniform fordeling

`https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_uniform_distribution`
`Varians`

Generelt er der gode informationer om distributioner på wiki!

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12} \tag{143}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(6 - 1 + 1)^2 - 1}{12} = \frac{35}{12} = 2.92 \tag{144}$$

For Y

$R, H := unif\{1, 6\}$. $Y = R + H$

Vi ved at $R \perp\!\!\!\perp H$

brug Sætning 3.7.7 (s. 91) - (uafhængighed er ikke nødvendig)

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(R + H) = \mathrm{E}(R) + \mathrm{E}(H) = 3.5 + 3.5 = 7 \tag{145}$$

Grundet uafhængighed kan vi nu bruge sætning 3.8.8 (s. 101)

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) \cdots \mathrm{Var}(X_n) \tag{146}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(R) + \mathrm{Var}(H) = 2.92 + 2.92 = 5.84 \tag{147}$$

Middelværdi og varians for Z

Vi kan definere den stokastiske variabel $Z := unif(1, n)$

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i \tag{148}$$

summen er $\frac{n(n+1)}{2}$. Vis gaus beviset: vi har $n/2$ gange (1 + n). 1 + 50 = 51, 2 + 49 = 51 osv det kan vi gøre 25 gange.

$$\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \tag{149}$$

Nu skal variansen udregnes!

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - (E(Z))^2 \tag{150}$$

I bogen har vi opgivet at:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(2n+1)(n+1) \tag{151}$$

Vi ved derfor at:

$$E(Z^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n} \frac{1}{6} n(2n+1)(n+1) = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1) \tag{152}$$

(Andel af udtrykket er $E(Z)^2$)

$$\mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1) - \frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2} \tag{153}$$

Vi ser udtrykket kan forkortes:

$$\mathrm{Var}(Z) = \left(\frac{1}{6}(2n+1) - \frac{n+1}{2^2}\right)(n+1) \tag{154}$$

4.0.5 Opgave 3.24

- en stokastisk variabel X
- $\mathrm{E}(X) = 5$
- $\mathrm{Var}(X) = 2$

Find $\mathbf{E}(7 + 8X + X^2)$

$$\mathrm{E}(7 + 8X + X^2) = \mathrm{E}(7) + \mathrm{E}(8X) + \mathrm{E}(X^2) \tag{155}$$

Først ved vi at $\mathrm{E}(7) = 7$.

Dernæst

$$\mathrm{E}(8X) = 8 \cdot \mathrm{E}(X) = 8 \cdot 5 = 40 \tag{156}$$

Til sidst

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \tag{157}$$

Vi kender variansen og $\mathrm{E}(X)$:

$$2 = \mathrm{E}(X^2) - 5^2 \implies \mathrm{E}(X^2) = 2 + 5^2 = 27 \tag{158}$$

$$\mathrm{E}(7 + 8X + X^2) = 7 + 40 + 27 = 74 \tag{159}$$

4.0.6 Opgave 3.27

- 3 stokastiske variable
- X_1, X_2, X_3
- identiske og uafhængige

Vis at

$$\mathrm{Corr}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \frac{1}{2} \tag{160}$$

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \tag{161}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = (X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y)) \tag{162}$$

Indsæt vores stokastiske variable $X_1 + X_2$ og $X_2 + X_3$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = &(163)\\
&(X_1 + X_2 - \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2))(X_2 + X_3 - \mathrm{E}(X_2) + \mathrm{E}(X_3)) = &(164)\\
&([X_1 - \mathrm{E}(X_1)] + [X_2 - \mathrm{E}(X_2)])([X_2 - \mathrm{E}(X_2)] + [X_3 - \mathrm{E}(X_3)]) = &(165)\\
&\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_1, X_3) + \mathrm{Cov}(X_2, X_3) + \mathrm{Var}(X_2) &(166)
\end{aligned}$$

Vi ved at uafhængighed implicerer ar covariancen er lig 0. Det betyder:

$$\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \mathrm{Var}(X_2) = \sigma^2 \tag{167}$$

Brug **sætning 3.8.8** (s. 101). Man kan splitte variansen op af ukorrelerede stokastiske variabler til en sum

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(X_1 + X_2)\mathrm{Var}(X_2 + X_3) = &(168)\\
&(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2))(\mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3)) = &(169)\\
& &(170)
\end{aligned}$$

Vi ved variansen er ens for alle stokastiske variable sådan at: $Var(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = \mathrm{Var}(X_3) = \sigma^2$

$$2\sigma^2 \cdot 2\sigma^2 \tag{171}$$

$$\sqrt{2\sigma^2 \cdot 2\sigma^2} = 2\sigma^2 \tag{172}$$

Vi har herved fundet det ønskede resultat!

$$\text{Corr}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2} \tag{173}$$

4.0.7 Opgave 3.2

- 5 Cola-smagere
- 2 Cola-mærker $\{C, P\}$
- med sandsynlighed p gætter de rigtigt
- 4 ud af 5 gætte på cola P. 1 gættede C

Hvad er den betingede ssh for at det var cola C der blev serveret

Definér to stokastiske variable:

$S := \{\textbf{Hvilke cola der blev serveret}\}$

$C := \{\textbf{hvilken cola der blev serveret}\}$

$P(D) = \frac{1}{2}$

$P(S \mid D) \sim Bin(5, p)$

$$P(S = 4 \mid D = C) \binom{5}{4} p(1-p)^4 \tag{174}$$

4.1 Øvelse 5

28/09/2018 - C.4 & Opgave 1

4.1.1 C.4

- Poisson distribution
- Antal opkald kan modelleres med en stokastisk variabel kaldet $X := Poisson(\lambda)$.

Om Poisson fordelingen: En ventetidsfordeling! Citat wikipedia:

> "[Poisson fordelingen] is a discrete probability distribution that expresses the probability of a given number of events occurring in a fixed interval of time or space if these events occur with a known constant rate and independently of the time since the last event." - Wikipedia

Den har den egenskab at: $\mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$

Om denne fordeling kan vi sige at sandsynligheden for et givent udfald er (pdf):

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \tag{175}$$

Lad dem regne selv

Ssh for præcis 7

$$p(7) = \frac{7^{10}}{7!}e^{-10} = 0.090079 \tag{176}$$

Ssh for max 7 opkald

$$P(X \leq 7) = \sum_{i=0}^{7} \frac{i^{10}}{i!}e^{-10} = 0.22022 \tag{177}$$

$$P(3 \leq X \leq 7) = \sum_{i=3}^{7} \frac{i^{10}}{i!}e^{-10} = \sum_{i=0}^{7} \frac{i^{10}}{i!}e^{-10} - \sum_{i=0}^{2} \frac{i^{10}}{i!}e^{-10} \tag{178}$$

Indsæt værdier udregnet i python

$$0.22022 - 0.002769 = 0.217451 \tag{179}$$

4.1.2 Opgave 1

- Værdi af cykel 4000 kr
- ssh for den bliver stjålet 5 %
- man kan tegne en cykel så den bliver erstattet for hele dens værdi

Del 1) Hvor meget er man villig til at betale for en sådan forsikring?

Spørg klassen - Intet rigtigt svar?

del 2) Udregn værdi af cykel (på et år)

Vi definerer X stokastiske variable:

$X :=$ **Cykel værdi**

$P(X = 0) = 0.05$ og $P(X = 4000) = 0.95$

Så ganger vi værdien på X bagefter.

$$\mathrm{E}(X) = 0.95 \cdot 4000 = 3800 \tag{180}$$

del 3) Cykel forsikring!

$$Y := \textbf{Værdi af cykel minus forsikring 1} \tag{181}$$

$$(Y \mid X = 0) = 0 - 400 + 4000 = 3600 \tag{182}$$
$$(Y \mid X = 4000) = 4000 - 400 = 3600 \tag{183}$$

$$\mathrm{E}(Y) = 0.95 \cdot 3600 + 0.05 \cdot 3600 = 3600 \tag{184}$$

Del 4) Forsikring med selvrisiko på 1000 kr!

pris = 150 årligt, selvrisiko = 1000.

$Z :=$ **Værdi af cykel minus forsikring 2**

$$(Z \mid X = 0) = 0 - 150 - 1000 + 4000 = 2850 \tag{185}$$
$$(Z \mid X = 4000) = 4000 - 150 = 3850 \tag{186}$$

$$\mathrm{E}(Z) = 0.05 \cdot 2850 + \cdot 0.95 \cdot 3850 = 3800 \tag{187}$$

Del 5) Sammenlign middel værdier

Klassediskussion

Del 6) Nytte af af X, Y, Z

nyttefunktion:

$$u(v) = 10v - 0.001v^2, \qquad v \in \{0, 1, \cdots 4000\} \tag{188}$$

Transformér de enkelte stokastiske variable først! X:

$$u(X \mid X = 0) = 0 \tag{189}$$
$$u(X \mid X = 1) = 10 \cdot 4000 - 0.001 \cdot 4000^2 = 24000 \tag{190}$$

transformation af Y:

$$u(Y \mid Y = 3600) = 10 \cdot 3600 - 0.001 \cdot 3600^2 = 23040 \tag{191}$$
$$\tag{192}$$

Transformation af Z:

$$u(Z \mid Z = 3850) = 10 \cdot 3850 - 0.001 \cdot 3850^2 = 23677.5 \tag{193}$$
$$u(Z \mid Z = 2850) = 10 \cdot 2850 - 0.001 \cdot 2850^2 = 20377.5 \tag{194}$$

$$\mathrm{E}(u(X)) = 0.95 \cdot 24000 + 0.05 \cdot 0 = 22800 \tag{195}$$

$$\mathrm{E}(u(Y)) = 0.95 \cdot 23040 + 0.05 \cdot 23040 = 23040 \tag{196}$$

$$\mathrm{E}(u(Z)) = 0.95 \cdot 23677.5 + 0.05 \cdot 20377.5 = 23512.5 \tag{197}$$

Del 7) Vis generelt udtryk for den forventede værdi af $u(W)$

$$u(v) = 10v - 0.001v^2, \qquad v \in \{0, 1, \cdots 4000\} \tag{198}$$

lad W være koncentreret på mængden T:

$$\mathrm{E}(u(W)) = \sum_{w \in T} (10 \cdot w - 0.001w^2)p(w) \tag{199}$$

$$\mathrm{E}(u(W)) = \sum_{w \in T} (10 \cdot w)p(w) - \sum_{w \in T} (0.001w^2)p(w) \tag{200}$$

$$\mathrm{E}(u(W)) = 10 \cdot \sum_{w \in T} (w)p(w) - 0.001 \cdot \sum_{w \in T} (w^2)p(w) \tag{201}$$

$$\mathrm{E}(u(W)) = 10\mathrm{E}(W) - 0.001 \cdot \mathrm{E}(W^2) \tag{202}$$

Vi ved at:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \implies \mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2 = \mathrm{E}(X^2) \tag{203}$$

Vi bruger dette:

$$\mathrm{E}(u(W)) = 10 \cdot \mathrm{E}(W) - 0.001 \cdot (\mathrm{E}(W))^2 + \mathrm{Var}(W) \tag{204}$$

Som var det ønskede udtryk

Del 8) Udregn variansen af X, Y, Z

Vi bruger formlen for den varians:

$$\sum_{x \in T} (x - \mathrm{E}(X))^2 p(x) \tag{205}$$

Varians af X

$$0.95 \cdot (3800 - 4000)^2 + 0.05 \cdot (0 - 4000)^2 = 760000 \tag{206}$$

Varians af Y: Den er $\mathrm{Var}(Y) = 0$. Vi får altid udbetalt det samme! **Definition 3.7.13**

Varians af Z

$$0.95 \cdot (3850 - 3800)^2 + 0.05 \cdot (2850 - 3800)^2 = 47500 \tag{207}$$

4.2 Øvelse 7

Opgaver: 3.4, 3.13, 3.14, 4.5, 4.6, (4.14)

4.2.1 Opgave 3.4

- 5 terninger kastes

SSH for 3 seksere

Man kan bruge både binomial fordelingen og Polynomialfordelingen.

Vi bruger binomialfordelingen $X := Binom(n = 5, p = 1/6)$

$$p = \frac{1}{6} \tag{208}$$

VI har antalsparameter $n = 5$, og antal succeser $x = 3$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-3} = 0.0321 \tag{209}$$

SSH for mindst 3 seksere

$$P(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{n} \binom{5}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-i} = 0.03549 \tag{210}$$

SSh for præcis 3 ens

Brug hvad vi har udregnet tidligere. SSH for præcis 3 seksere, kan vi gange med 6 for at finde det for alle!

$$P(Z = 3) = 6 \cdot 0.0321 = 0.1929 \tag{211}$$

SSH for mindst 3 ens

Brug hvad vi regnede ud tidligere for mindst 3 seksere

$$P(Z = 3) = 6 \cdot 0.03549 = 0.2129 \tag{212}$$

4.2.2 Opgave 3.13

- $X, Y \sim Uni(0, N)$
- $X \perp\!\!\!\perp Y$

Find $P(X > Y)$

Find middelværdien for X, Y.

Vi ser: $P(X > Y \mid Y = 0) = P(X > 0)$, $P(X > Y \mid Y = 1) = P(X > 1)$. Vi ved at Y, X er ligefordelt sådan at alle ting er lige sandsynlige. Dette implicerer $P(Y = y) = \frac{1}{N+1}, \forall y \in Y$.

Vi kender CDF af den diskrete uniforme fordeling:

$$P(Y \geq k) = \frac{k - a + 1}{n} \tag{213}$$

Sæt det hele sammen:

$$P(X \geq Y) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \frac{i - 0 + 1}{N+1} = \frac{1}{N+1} \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} i + 1 \tag{214}$$

Husk at summen fra 1 til N kan skrives som $= (n+1)n/2$. I vores tilfælde $(n+1+1)(n+1)/2$,grundet vi har $i+1$ i vores sum.

$$P(X \geq Y) = \frac{1}{(N+1)^2} \frac{(N+1)(N+1+1)}{2} = \frac{(N+2)}{2(N+1)} \tag{215}$$

Find $P(X = Y)$

Der er $N + 1$ udfald.

$$P(X = Y, Y = y) = \frac{1}{(1+N)^2} \tag{216}$$

Dette er klart tænk på terninger ssh for 1 dobbelt sekser $1/6^2$.

Vi har $1 + N$ måder at dette kan ske på:

$$P(X = Y)(N+1) \frac{1}{(N+1)^2} = \frac{1}{N+1} \tag{217}$$

Find $P(Z)$ **hvor** $Z \sim max(X, Y)$

Vi ser at: $P(Z = 0) = P(X = 0, Y = 0)$

Og at: $P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) + P(Y = 1, X = 0) + P(X = 0, Y = 1)$.

Vi prøver at generaliserer observationen:

Find $P(V)$ **hvor** $V \sim min(X, Y)$

DROP AT LAVE

Find $P(W)$ **hvor** $W \sim |X - Y|$

DROP AT LAVE

4.2.3 Opgave 3.14

LAV I KLASSEN

- (X_1, X_2) er en stokastisk vektor
- SE OPLÆG for den simultane fordeling

SSH X_1 **er et lige tal**

Vi husker relationen mellem marginale, betingede og simultane fordelinger!

$$P(X_1 = k) = \sum_{i=1}^{n} P(X_1 = k, X_2 = x_i) \tag{218}$$

Vi ser at X_1 skal være et lige tal:

$$P(X_1 \in \textbf{Lige tal}) = P(X_1 = 0) + P(X_1 = 2) + P(X_1 = 6) = 1 - P(X_1 = -1) \tag{219}$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = -1) = & P(X_1 = -1, X_2 = 3) && (220)\\ & + P(X_1 = -1, X_2 = 1) && (221)\\ & + P(X_1 = -1, X_2 = -2) && (222) \end{aligned}$$

$$P(X_1 = -1) = 0 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} \tag{223}$$

Vi finder den sandsynlighed vi ønskede fra start:

$$P(X_1 \in \textbf{Lige tal}) = 1 - P(X_1 = -1) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} \tag{224}$$

SSH, X_1X_2 er et ulige tal

Kravet er at produktet af de to stokastiske variable skal være et ulige tal. Dette vil implicere at $X_1 \in \{\textbf{ulige tal}\}, X_2 \in \{\textbf{ulige tal}\}$.

$$\begin{aligned} P(X_1X_2 \in \{\textbf{Ulige tal}\}) &= P(X_1 = -1, X_2 = 3) && (225)\\ &+ P(X_1 = -1, X_2 = 1) && (226)\\ &= \frac{2}{9} && (227) \end{aligned}$$

SSH for $X_2 > 0$ og $X_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} P(X_2 > 0, X_1 \geq 0) &= P(X_2 = 3, X_1 = 2) && (228)\\ &+ P(X_2 = 3, X_1 = 6) && (229)\\ &+ P(X_2 = 1, X_1 = 2) && (230)\\ &+ P(X_2 = 1, X_1 = 6) && (231)\\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{27} = \frac{13}{27} && (232) \end{aligned}$$

4.2.4 Opgave 4.5

Lav i klassen

- shh for sikring defekt 0.03
- køber pakke med 100 sikringer

SSH for at i en pakke med 100 sikringer maks 2 er er defekte

Brug sætning 4.1.2

VI lader altså vores antal parameter gå mod uendelig. Vi bruger nu en poisson fordeling!

Vi ser at $n \cdot p = \lambda = 100 \cdot 0.03 = 3$

Vi definerer vores stokastiske variabel $X \sim Poisson(\lambda = 3)$

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \sum_{i=0}^{2} \frac{3^i}{i!} e^{-3} \approx 0.42 \tag{233}$$

4.2.5 Opgave 4.6

- En terning kastes indtil den første sekser opnås

Hvad er ssh for at en sekser opnås inden 6 kast.

$$P(X < 6) = 1 - P(X \geq 5) = 1 - (1 - 1/6)^{5+1} = 0.665 \tag{234}$$

5 + 1 fordi 0 skal tælles med

Hvad er den største værdi af $i \in \mathbb{N}$ hvor $P(X > i) \geq \frac{1}{2}$

$$P(X > 0) = (1 - 1/6)^1 = 0.8333 \tag{235}$$

$$P(X > 1) = (1 - 1/6)^2 = 0.6944 \tag{236}$$

$$P(X > 2) = (1 - 1/6)^3 = 0.5787 \tag{237}$$

$$P(X > 3) = (1 - 1/6)^3 = 0.4822 \tag{238}$$

VI ser at $i = 2$ er det største!!

4.2.6 Optional (4.14)

- En stokastisk variabel X
- $X \sim Poisson(\lambda)$

Hvad er $E\left(2^X\right)$

$Z = 2^X$. VI har så at

$$p(z) = \frac{\lambda^{2^x}}{2^x!}e^{-\lambda} \tag{239}$$

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \frac{\lambda^{2^i}}{2^i!}e^{-\lambda} \tag{240}$$

Vi kan trække en fra i nævneren da den bliver ganget på!

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2^i}}{(2^i-1)!}e^{-\lambda} \tag{241}$$

Man trækker et lambda fra tælleren ud foran sumtegnet!

$$= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2^i-1}}{(2^i-1)!}e^{-\lambda} \tag{242}$$

Hvad er $E\left((1+X)^{-1}\right)$

4.3 Øvelse 8

Opgaver: 4.4, opgave A, (Opgave H)

4.3.1 Opgave 4.4

- A står ved en lidet trafikkeret vej
- Antal taxaer pr. minut, er poisson fordelt med $\lambda = \frac{1}{30}$

Del 1) Hvad er ssh for A må vente mere end en halv time

Altså poisson fordelingen måler "antal observationer" som vores x. og vores λ som vores parameter. Vi bliver nødt til at gange lambda (det er på minut basis, og vi skal have det på halv time basis) t.

$Y \sim Poisson(\lambda = 1/30t)$

$\lambda = 1/3 * 30$

$$P(Y=0) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-1} = \frac{1^0}{0!}e^{-1} = 0.36787 \tag{243}$$

Del 2) Hvad er ssh for at vente 1 1/2 time.

$\lambda = 1/30 * 90 = 3$

$$P(Y=0) = \frac{3^x}{x!}e^{-3} = \frac{3^0}{0!}e^{-3} = 0.04978 \tag{244}$$

Del 3) SSh for $Y > 0$ Taxa er der før 10 minutter

$\lambda = 1/30 * 10 = 1/3$

$$P(Y>0) = 1 - P(Y=0) = 1 - \frac{(1/3)^0}{0!}e^{-(1/3)} = 0.28346 \tag{245}$$

Del 4) Vis at ventetiden, afrundet nedad til helt minuttal, er geometrisk fordelt med $p = 1 - e^{1/30}$

Den geometriske fordeling:

Antal forsøg inden succes

$$pdf = (1-p)^k p \tag{246}$$

Først ser vi at:

$$P(Y=y) = P(X_y > 0, X_{y-1} = 0) \tag{247}$$

Altså ventetiden må være sådan at man ikke har fået taxa i sidste minut, men har i dette minut.

Brug nu at en simultan fordeling kan skrives som en betinget fordeling

$$P(X_y > 0, X_{y-1} = 0) \tag{248}$$
$$= P(X_y > 0 \mid X_{y-1} = 0)P(X_{y-1} = 0) \tag{249}$$
$$\overset{(*)}{=} (1 - P(X_{y=1} = 0))P(X_{y-1} = 0) \tag{250}$$

Vi har i (*) brugt at $P(X_y > 0 \mid X_{y-1} = 0)$ Svarer til $P(X_1 > 0)$ som svarer til $1 - P(X_1 = 0)$

Indsæt nødvendige tal:

$$\left(1-\frac{(1/30)^0}{0!}e^{-1/30}\right)\left(\frac{((t-1)/30)^0}{0!}e^{-(t-1)/30}\right) \tag{251}$$

Vi ser at: $\frac{(t-1/30)^0}{0!}=\frac{1}{1}=1$

Hvilket betyder:

$$\left(1-\frac{(1/30)^0}{0!}e^{-1/30}\right)\left(\frac{((t-1)/30)^0}{0!}e^{-(t-1)/30}\right) \tag{252}$$
$$=\left(1-e^{-1/30}\right)\left(e^{-(t-1)/30}\right) \tag{253}$$
$$\approx\left(1-e^{-1/30}\right)\left(e^{-1/30\cdot t}\right) \tag{254}$$

Vi skulle have i den geometriske fordeling: $p=1-e^{-1/30}$

$$(1-p)^k p=(1-(1-e^{-1/30}))^t(1-e^{-1/30}) \tag{255}$$

Vi forkorter

$$(1-p)^k p=e^{-1/30\cdot t}(1-e^{-1/30}) \tag{256}$$

Vi har vist udtrykket!

4.3.2 Opgave A

Lav i klassen!!!

Cykelforsikring fortsat!

- udbetaling ved mistet cykel 4000
- ssh for cykel stjålet pr. år: 5%
- Maks en cykel stjålet om året
- forsikring pris 400

Del 1)

10 cyklister tegner forsikring:

$$Y \sim Binomial(n = 10, p = 0.05) \tag{257}$$

Del 2) Udregn Forventet antal stjålne cykler, samt forventet udgift

$$\mathrm{E}(Y) = n \cdot p = 10 \cdot 0.05 = 0.5 \tag{258}$$

Forventet udgift:

$$\mathrm{E}(Y) \cdot 4000 = 2000 \tag{259}$$

Del 3) SSh for mere end en cykel bliver stjålet

Få folk til at opskrive binomial koefficienter osv.

$$P(Y > 1) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 0) = 0.08613 \tag{260}$$

Del 4) Antag nu 100 cyklister

$$Z \sim Binomial(n = 100, p = 0.05) \tag{261}$$

$$\mathrm{E}(Z) = 100 \cdot 0.05 = 5 \tag{262}$$

Forventede indtægter:

$$400 \cdot 100 = 40000 \tag{263}$$

Forventede udgifter:

$$4000 \cdot \mathrm{E}(Z) = 4000 \cdot 5 = 20000 \tag{264}$$

Del 5)Ssh for man udgifter overstiger indtægter

Udgifer overstiger indtægter når der er 11, som får stjålet sin cykel:

Med binomial (udregnet på com):

$$P(Z > 10) = 1 - \sum_{i=0}^{10} P(Z = i) = 0.01147 \tag{265}$$

Med poisson:

$lambda = 100 \cdot 0.05 = 5$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 0.013695 \tag{266}$$

Del 6) Antag nu nu n=200, Ssh udgifter over indtægter

Dette sker når der er 21 som får stjålet cyklen

$lambda = 200 \cdot 0.05 = 10$

$W \sim Poisson(10)$

$$P(W > 20) = 0.0015882 \tag{267}$$

Del 7)

Klasse diskussion!!!

4.3.3 (Optional) Opgave H

4.4 Øvelse 9

Opgaver: 5.2, 5.3, 5.7, U41.1, U41.2

4.4.1 Opgave 5.2

- X er en kontinuær stok var
- $p(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)}$ for $x > 1, \alpha > 0$

Find fordelingsfunktionen for X

Vi ved at $p(x) = F'(x)$ Hvis vi skulle finde sandsynligheden for et udfald ville vi bruge tætheden $p(x)$ lad os sige vi ville finde ssh for at X er i intevallet a til b: da

$$\int_a^b p(x)dx \tag{268}$$

Fordelingsfunktionen er kendetegnen ved for intervallet $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^x p(x)dx \tag{269}$$

Vi har dog intervallet $(1, \infty)$

Vi opskriver integralet:

$$\int_1^x \alpha x^{-(\alpha+1)} \tag{270}$$

$$\left[\frac{\alpha}{-\alpha+1-1}x^{-\alpha+1-1}\right]_1^x = [-x^{-\alpha}]_1^x = -x^{-\alpha}+1 \tag{271}$$

4.4.2 Opgave 5.3

LAV I KLASSEN

fordelingsfunktionen fotr X er givet ved:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{for } x \leq 0 \\ x/3 \quad \text{for } 0 < x \leq 1 \\ (2x-1)/3 \quad \text{for } 1 < x \leq 2 \\ 1 \quad \text{for } x > 2 \end{cases}$$

Find de følgende sandsynligheder

$$P(0.5 < X < 1) = F(1) - F(0.5) = \frac{1-0.5}{3} = \frac{1}{6} \tag{272}$$

Vi kan ignorere punktsandsynligheden da denne er 0 (i forhold til $\leq$ udtryk i oplæg).

$$P(1 \leq X < 1.5) = F(1.5) - F(1) = \frac{3-1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \tag{273}$$

$$P(2/3 < X < 4/3) = F(4/3) - F(2/3) = \frac{2(4/3)-1}{3} - \frac{2/3}{3} \tag{274}$$

$$= \frac{8/3 - \frac{3}{3} - 2/3}{3} = \frac{3/3}{3} = \frac{1}{3} \tag{275}$$

Redegør for kontinuitet

Vi viser kontinuæritet via et lille $\delta > 0$

Først se om: $F(0+\delta) \to 0$ og $F(0-\delta) \to 0$ for $\delta \to 0$. Man ser at for $x/3$ går mod 0, hvis x er tæt på 0. (Trivielt at se 0 går mod 0 for lille x).

Undersøg i en omegn af punktet $x = 1$: $F(x \pm \delta) \to \frac{1}{3}$ for $\delta \to 0$. Det er klart da: $x/3 \to \frac{1}{3}$, for $x = 1 - \delta$ og $(2x-1)/3 \to \frac{1}{3}$, for $x = 1 + \delta$

Undersøg i en omegn af punktet $x = 2$: $F(x \pm \delta) \to 1$ for $\delta \to 0$. man ser at $(2(2-\delta)-3)/3 \to 1$ for $\delta \to 0$. (trivilt at 1 går mod 1)

Kontinuitet er vist. Vi noterer at fordelingsfunktionen overholder at $F : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ og at $F(x) \leq F(x+h), \quad h > 0$. Altså den er defineret på hele den reelle akse, samt at den er monotont voksende!

Find tæthedsfunktionen for X

Vi differentiere de enkelte udtryk og får:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases} \tag{276}$$

4.4.3 Opgave 5.7

LAV I KLASSEN!

- 5.1.5 i bogen:

$$p(x) = \beta x^{\beta-1} \tag{277}$$

- $x \in [0, 1]$

Vis at 5.1.5 (i bogen) har middelværdi $\beta/(\beta+1)$

Vi behøver ikke at teste om middelværdien eksisterer!

Definition på middelværdi!

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx < \infty \tag{278}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\beta x^{\beta-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta x^{\beta} \tag{279}$$

Vi ved at x er koncentrerer på intervallet 0 til 1: $x \in (0, 1)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\beta x^{\beta-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta x^{\beta} \tag{280}$$

Vi har her et uendeligt integrale, men x er koncentreret på en mindre mængde. Vi bruger at $P(\emptyset) = 0$ og at vi må splitte integralerne op (indskudssætningen):

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \qquad \text{(Indskudssætningen)} \tag{281}$$

Vi ser at integralerne i intervallet $(-\infty, 0[$ og $]1, \infty)$ er lig 0.

$$E(X) \int_0^1 \beta x^{\beta} = \left[\frac{\beta}{\beta+1} x^{\beta+1}\right]_0^1 = \frac{\beta}{\beta+1} \tag{282}$$

Vi finder variansen

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \tag{283}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \beta x^{\beta-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta x^{\beta+1} \tag{284}$$

Analogt med før

$$\mathrm{E}(X^2) = \left[\frac{\beta}{\beta+2}x^{\beta+2}\right]_0^1 = \frac{\beta}{\beta+2} \tag{285}$$

Variansen findex:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\beta}{\beta+2} - \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^2 \tag{286}$$

kan evt. forkortes

4.4.4 Opgave U41.1

- $X, Y \sim Uni(0, 1)$
- den uniforme fordeling er kontinuær

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2} \tag{287}$$

Brug sætning 6.4.2 - man kan splitte forventinger op.

find E$(6X + 32Y)$

$$\mathrm{E}(6X + 32Y) = \frac{6+32}{2} = 19 \tag{288}$$

Find E(X^3) **og E**$(X^3 + Y^3)$

$$\mathrm{E}(X^3) = \int_0^1 x^3 p(x) = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} \tag{289}$$

Vi har derfor selvfølgelig $\mathrm{E}(X^3 + Y^3) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Find Var$(X) = $ **E**$(X^2) - [$**E**$(X)]^2$

Vi ved at $\mathrm{E}(X)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 p(X) = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \tag{290}$$

Varians:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \tag{291}$$

Find tæthed for $Z = X - \frac{1}{2}$

$$p(z) = 1, \quad z \in [-0.5, 0.5] \tag{292}$$

Find E(Z)

Brug sætning 5.2.5. lineær transformation.

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\left(X - \frac{1}{2}\right) = \mathrm{E}(X) - \frac{1}{2} = 0 \tag{293}$$

Find $F(Z)$

$$F(Z) = z - \frac{1}{2}, \qquad z \in [-0.5, 0.5] \tag{294}$$

4.4.5 Opgave U41.2

- stokastisk variabel X
- $p(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$

Del 1 - A) Opskriv fordelingsfunktionen for X og vis at $Y = F(X)$ er ligefordelt på $[0, 1]$

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x) \tag{295}$$

Vis at $Y = F(X)$ er ligefordelt på $[0, 1]$

$$P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = P(X \leq x) = F(X) = y \tag{296}$$

$$x = F^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)/\lambda \tag{297}$$

$t(X) = F(X) = y$ bruges i sidste led af ligningen!

Vi ser at $P(Y \leq y) = y$ Hvor vi ved at y er fordelingsfunktionen for en uniform fordeling!

Del 2)

4.5 Øvelse 10

12/10/2018, Opgaver: 5.1, 5.5, 5.13, 5.15, U41.3 og U41.4

4.5.1 Opgave 5.1

- $X \sim exponential(\lambda)$
- pdf: $\lambda e^{-\lambda x}$

Find $P(X > x)$**, for alle** $x > 0$

Vi ved at fordelingsfunktion $F(x)$ svarer til $P(X < x)$ hvilket betyder at $P(X > x) = 1 - F(x)$.

Kommentar: vi bruger lille x i fordelingsfunktionen. hvorfor? fordi det er en funktion der tager et tal (en realisation) af X

Vi kan se på wikipedia at exponential fordelingens fordelingsfunktionen CDF er:

$$F(x) = 1 - e^{\lambda x} \tag{298}$$

Så vi har at:

$$P(X > x) = 1 - (1 - e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \tag{299}$$

SSH $P(1 < X < 2)$ **,hvor** $\lambda = 1$

brug (hvor lambda er 1):

$$F(x) = 1 - e^{1x} \tag{300}$$

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = (1 - e^2) - (1 - e^1) = 0.2325 \tag{301}$$

4.5.2 Opgave 5.5

Lav i klassen!

- Laplace-fordelingen
- defineret på hele $\mathbb{R}$
- funktionsforskrift:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{302}$$

Find fordelingsfunktionen F

Fordelingsfunktionen er: $F(k) = \int_{-\infty}^{k} f(x)dx$

Vi ser, vi må skære integralet op i to dele på grund af normerings operatoren på x.

Først $x < 0$

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{2}e^x = \left[\frac{1}{2}e^x + k\right]_{-\infty}^{a} = \left(\frac{1}{2}e^a + k\right) - \left(\frac{1}{2}e^{-\infty} + k\right) = \frac{1}{2}e^a \tag{303}$$

Nu $x \geq 0$

$$F(a) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^x + \int_{0}^{a} \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{-1}\frac{1}{2}e^{-x}\right]_0^a = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_0^a \tag{304}$$

$$F(a) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}e^{-a}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^0\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a} = 1 - \frac{1}{2}e^{-a} \tag{305}$$

Vi kan opskrive fordelingsfunktionen!

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \tag{306}$$

Del 2) Find middelværdi

Vi behøver ikke at vise middelværdi og varians eksisterer!

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \tag{307}$$

Vi splitter intergralet op i intervallerne $(-\infty, 0)$ og $[0, \infty)$:

(man har her brugt reglen for partiel integration - kig Thomas note/formelsamling) $f(x) = exp(x), g(x) = x$:

for integralet i intervallet $(-\infty, 0)$:

$$\int \frac{1}{2}xe^{x}dx = \frac{1}{2}(x-1)e^{x} \tag{308}$$

for integralet i intervallet $[0, \infty)$

$$\int \frac{1}{2}xe^{-x}dx = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x} \tag{309}$$

vi ved at:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}xe^{x}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}xe^{-x}dx \tag{310}$$

Vi sætter integralernes grænser ind i stamfunktioner udledt ovenfor:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}xe^{x}dx = \left(\frac{1}{2}(0-1)e^{0}\right) - \left(\frac{1}{2}(-\infty-1)e^{-\infty}\right) = -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} \tag{311}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}xe^{-x}dx = \left(-\frac{1}{2}(\infty+1)e^{-\infty}\right) - \left(-\frac{1}{2}(0+1)e^{0}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{312}$$

Så vi har at:

$$\mathrm{E}(X) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \tag{313}$$

Find variansen Var(X)

VI ved at $\mathrm{E}(X) = 0$ det betyder at $Var(X) = \mathrm{E}(X^2)$. *Husk på formlen for varians.*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \tag{314}$$

vi deler igen integralet op. og bruger reglerne for partiel integration. *Vi ender med at få integralet fra før som et del element.*

I intervallet $(-\infty, 0)$:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} x^2 e^x dx = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right) e^x\right]_{-\infty}^{0} = 1 - 0 = 1 \tag{315}$$

I intervallet $[0, \infty)$:

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \left[-\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) e^{-x}\right]_{0}^{\infty} = 0 - (-1) = 1 \tag{316}$$

Vi har at:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} x^2 e^x dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 1 + 1 = 2 \tag{317}$$

4.5.3 Opgave 5.13

LAV I KLASSEN

- X er en kontinuær stokastisk variabel i intervallet (a, b)
- X har en kontinuer sandsynlighedstæthed p på (a, b)

Vi bruger sætning 5.4.1

$$q(y) = \begin{cases} p(t^{-1}(y))|\frac{d}{dy}t^{-1}(y)|, & y \in (v, h) \\ 0, & y \notin (v, h) \end{cases} \tag{318}$$

hvor $v = \inf t(I), h = \sup t(I)$ og I er intervallet (a, b)

Til de kommende opgaver kan der siges generalt at: $x = t^{-1}(y)$

Og der skippes ofte (y) fra notation, således at: $\frac{d}{dy}t^{-1}(y)$ bliver til $\frac{d}{dy}t^{-1}$

Del 1) Find tætheden for $exp(X)$

vi har vores transformation givet som $t = exp(\cdot)$ som implicerer at $t^{-1} = ln(\cdot)$.

Vi finder den afledte af vores inverse transformation

$$\frac{d}{dy}t^{-1}(y) = \frac{d}{dy}ln(y) = \frac{1}{y} \tag{319}$$

Vi opskriver:

$$q(y) = \begin{cases} p(ln(y)) \cdot |\frac{1}{y}|, & y \in (e^a, e^b) \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \tag{320}$$

Man ser at faktisk $y \in \mathbb{R}_+ \forall y \in Y$, hvilket betyder, man ikke ville behøve at lave normeringstegnet

Antag resten af opgaven at $a > 0$

Del 2) Find tætheden for $\sqrt{X}$

Vi finder transformationens inverse $t^{-1} = y^2$. og herfra den afledte: $\frac{d}{dy}t^{-1} = 2y$.

$$q(y) = \begin{cases} p(y^2) \cdot 2y, & y \in (\sqrt{a}, \sqrt{b}) \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \tag{321}$$

Vi bemærker at y ikke kan antage værdier under 0, grundet $a > 0$.

Del 3) Find tætheden for $\frac{1}{X}$

Vi finder transformationens inverse $t^{-1} = \frac{1}{y}$

den inverse transformations afledte: $\frac{d}{dy}t^{-1} = -\frac{1}{y^2}$. *Det huskes at man tager den absolutte værdi* $\implies$ *man fjerner minuset*

$$q(y) = \begin{cases} p\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2} & y \in \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \tag{322}$$

Del 4) Find tætheden for X^2

Vi finder den inverse transformation: $t^{-1} = \sqrt{y}$

Den afledte af den inverse transformation: $\frac{d}{dy}t^{-1} = \frac{1}{2}y^{-1/2}$

$$q(y) = \begin{cases} p(\sqrt{y})\frac{1}{2}y^{-1/2}, & (a^2, b^2) \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \tag{323}$$

4.5.4 Opgave 5.15

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $Y = \exp(X)$

Del 1) Find sandsynlighedstætheden for Y

tæthedsfunktionen for normal fordlingen:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{324}$$

Vi finder den inverse transformation: $x = t^{-1}(y) = ln(y)$

Den inverse transformations afledte mht y: $\frac{d}{dy}t^{-1}(y) = \frac{1}{y}$

læg mærke til $\ln(y)$ ind i udtrykket

$$q(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{y}, & y \in (0, \infty) \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \tag{325}$$

Del 2) Vis at $Y = \beta X$ er scala invariant

Vi finder den inverse transformation $x = t^{-1}(\beta y) = ln(\beta y)$. Vi husker at: $ln(\beta y) = ln(\beta) + \ln(y)$

Den inverse transformations afledte mht y:

$$\frac{d}{dy}t^{-1}(\beta y) = \frac{d}{dy}ln(y) + ln(\beta) = \frac{1}{y} \tag{326}$$

Vi indsætter de fundne værdier

$$q(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(\ln(\beta)+\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{y}, & y \in (0, \infty) \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \tag{327}$$

Vi ser den transformerede fordeling stadig er logaritmisk normalfordelt!

Del 3

Vi husker en detalje: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$. Dette betyder, at hvis vi kan skabe det ovenstående integrale, og få det resterende ud foran integralet, så har vi fundet resultatet!

Husk $q(y)$ er 0 når ikke $y \in (0, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(y)dy = \int_{0}^{\infty} q(y)dy \tag{328}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{0}^{\infty} yq(y)dy \tag{329}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{0}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{y} \tag{330}$$

Vi ser at y går ud med $\frac{1}{y}$ Vi indsætter $\mu = 0, \sigma = 1$ som angivet i opgaveteksten.

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(\ln(y))^2}{2}\right) \tag{331}$$

Det bagerste udtryk manipuleres:

$$exp\left(-\frac{ln(y)^2}{2}\right) = exp\left(-\frac{\ln(y)\ln(y)}{2}\right) = exp\left(-\frac{1}{2}\right) exp\left(\ln(y)\ln(y)\right) \tag{332}$$

Går i stå her!

4.5.5 Opgave U41.3

- X er ligefordelt på $(0, 1)$.

Del 1) $S = \mathbb{1}_{(0,0.25)}$ **Find** $P(S = 1)$

$$P(X \in (0, 0.25)) = F(0.25) = \frac{1}{4} \tag{333}$$

Del 2) $S = \mathbb{1}_{(0,p)}$. **Find** $P(S = 1)$

$$P(X \in (0, p)) = F(p) = p \tag{334}$$

Del 3) Beskriv hvordan du kan simulere en trækning fra en stokastisk variabel Y

$P(Y = 1) = \frac{1}{9}$ og $P(Y = 2) = \frac{8}{9}$

Vi ved at fordelingsfunktionen $F : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$. Det betyder at den inverse $F^{-1} : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$. Overvej dette.

Vi kan altså sample fra intervallet $[0, 1]$ og mappe det til en real værdi gennem den inverse fordelingsfunktion:

Vi har implicit givet fordelingsfunktionen ovenfor:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{1}{9}, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & 2 \leq y \end{cases} \tag{335}$$

Tegn fordelingsfunktionen og den inverse fordelingsfunktion

Det betyder at vi kunne sample således:

$Y = 1$ når $x \in \left(0, \frac{1}{9}\right)$.

$Y = 2$ når $x \in \left(\frac{1}{9}, 1\right)$

4.5.6 Opgave U41.4

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Del 1) Hvad er fordelingen af $Y = (X - \mu)/\sigma$

Denne er let, da dette bare er en tilbage skalering af normalfordelingen! Dvs. en standard normalfordeling:

$$Y \sim N(0,1) \tag{336}$$

Del 2) Hvad er fordelingen af $Z = (X - \mu)^2/\sigma^2$

Vi ser dette er:

$$Z = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \tag{337}$$

Dette svarer altså til den kvadrerede standard normalfordeling: χ^2-fordelingen.

4.6 Øvelse 11

22/10/2018, opgaver: U43.1.1, U43.1.2, U43.1.3 U43.1.4

4.6.1 U43.1.1

- X, Y er ligefordelt på A
- $A = [0,1] \times [0,1]$
- $p(x,y) = \mathbb{1}_A(x,y)$

Tegn 2-D sketch af definitionsmængden

Del 1) Udregn $P(X < 0.1, Y < 0.6)$

$$\begin{aligned}
P(X < 0.1, Y < 0.6) &= \int_0^{0.6}\int_0^{0.1} \mathbb{1}_A(x,y)dxdy && (338)\\
&= \int_0^{0.6} [x]_0^{0.1}\mathbb{1}_A(y)dy && (339)\\
&= [x]_0^{0.1}[y]_0^{0.6} && (340)\\
&= (0.1-0)\cdot(0.6-0) && (341)\\
&= 0.1\cdot 0.6 = 0.06 && (342)
\end{aligned}$$

Del 2) Udregn $P(0.25 < X < 0.75, 0.4 < Y < 0.6$

Analogt med før - opskrivningen er ikke nødvendig:

$$P(0.25 < X < 0.75, 0.4 < Y < 0.6) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1 \tag{343}$$

Del 3) Udregn $P(X < 0.1)$

Her bruges at man kan integrere irrelevante variable ud: **sætning 6.1.3**

$$q(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy \tag{344}$$

dvs:

$$q(x) = \mathbb{1}_{[1,0]}(x) \tag{345}$$

Vi finder nu det ønskede udtryk

$$P(X < 0.1) = \int_0^{0.1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = [x]_0^{0.1} = 0.1 \tag{346}$$

Del 4) Find den marginale fordeling for X

Igen bruges sætning 6.1.3

$$q(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy \tag{347}$$

dvs:

$$q(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \tag{348}$$

Altså vi svarede indirekte på det problem før!

$p_x(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ og lige så $p_y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ Vi ser altså nu at $p(x, y) = p_x(x) \cdot p_y(y)$

U43.1.2

- X, Y er uafhængige
- X, Y er ligfordelte på intervallet $[0, 1]$

- $Y* = 2Y$

Find $E(Y*), V(Y*)$

Brug sætning **6.3.2** som viser at hvis $X \perp\!\!\!\perp Y \implies X \perp\!\!\!\perp \phi(Y)$

Vi har uafhængighed hvilket implicerer:

$$p(x, y*) = p(x)p(y*) \tag{349}$$

Nu integreres X ud:

$$p(y*) = p(y*) \int_{\mathbb{R}} p(x)dx = p(y*) \tag{350}$$

Vi finder den forventede værdi:

2 er den øvre grænse, 0 er den nedre grænse for Y.

$$\mathrm{E}(Y*) = 2 \cdot \mathrm{E}(Y) = 2 \cdot 0.5 = 1 \tag{351}$$

Variansen findes ved: $\mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X)$.

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12}(0-1)^2 = \frac{1}{12} \tag{352}$$

$$\mathrm{Var}(Y*) = 2^2\mathrm{Var}(Y) = 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \tag{353}$$

Del 2) Tætheden for $Y*$

Tætheden er:

tætheden for en uniform (kontinuær) distribution er: $p(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{x\in[a,b]}(x)$

Vi bruger dette:

$$p(y*) = \frac{1}{2-0}\mathbb{1}_{x\in[0,2]}(y*) \tag{354}$$

Del 3) $Z = X + Y*$ **Find tætheden for** Z**,** $q(z)$

Vi bruger **korollar 6.3.2** (få en studerende til at læse op).

$$q(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_2(z-x)dx \tag{355}$$

$$p_x(x)p_{y*}(z-x) = \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,2]}\frac{1}{2}(x)(z-x) = \frac{1}{2}(xz - x^2) \tag{356}$$

Nu integreres denne:

$$q(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(xz - x^2)dx \tag{357}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (xz - x^2)dx \tag{358}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{1}{2}x^2 z - \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4}z - \frac{1}{6} \tag{359}$$

NOGET ER GALT

4.6.2 U43.1.3

- $X, Y \in [5,10] \times [3,7]$
- $p(x,y) = \frac{1}{20}\mathbb{1}_{[5,10]\times[3,7]}(x,y)$

Skitser definition mængden.

Del 1) Forklar hvorfor $p(x,y)$ er en tæthedsfunktion

notér at $(10-5)\times(7-3) = 20$, således at den samlede areal under kurven er 1.

Find $P(6 \leq X \leq 10, 4 \leq Y \leq 6)$

$$P(6 \leq X \leq 10, 4 \leq Y \leq 6) = \int_6^{10} \int_4^6 \frac{1}{20} \mathbb{1}_{[5,10]\times[3,7]}(x,y) dy dx \tag{360}$$

$$= \frac{1}{20} \int_6^{10} \int_4^6 \mathbb{1}_{[5,10]\times[3,7]}(x,y) dy dx \tag{361}$$

$$= \frac{1}{20} \int_6^{10} \mathbb{1}_{[5,10]}(x) \, [y]_4^6 \, dx \tag{362}$$

$$= \frac{1}{20} \int_6^{10} \mathbb{1}_{[5,10]}(x)(6-4) dx \tag{363}$$

$$= \frac{2}{20} \int_6^{10} \mathbb{1}_{[5,10]}(x) dx \tag{364}$$

$$= \frac{2}{20} \, [x]_6^{10} \tag{365}$$

$$= \frac{2}{20}(10-6) = \frac{8}{20} \tag{366}$$

Del 3) Find de marginale fordelinger

$$p(x) = \frac{1}{20} \int_3^7 \mathbb{1}_{[5,10]\times[3,7]}(x,y) dy = \frac{4}{20} \mathbb{1}_{[5,10]}(x,y) \tag{367}$$

Omvendt for Y:

$$p(y) = \frac{5}{20} \mathbb{1}_{[3,7]}(x,y) \tag{368}$$

Del 4) Find $\mathbf{E}(X)$

For en ligefordeling har man middelværdi ved (a og b er enderne):

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2} \tag{369}$$

Vi bruger dette

$$\mathrm{E}(X) = \frac{5+10}{2} = 7.5 \tag{370}$$

4.6.3 Opgave U43.1.4

- $X, Y \in [0, \infty)$
- $p(x, y) = 6 \exp(-2x - 3y)$

Praktisk at vide:

$$\int \exp(-bx)dx = -\frac{\exp(-bx)}{b} \tag{371}$$

Del 1 - a) find $P(X \leq 2, Y \leq 4)$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2, Y \leq 4) &= \int_0^2 \int_0^4 6 \exp(-2x - 3y) dy dx && (372) \\
&= \int_0^2 \int_0^4 6 \exp(-2x) \exp(-3y) dy dx && (373) \\
&= 6 \int_0^2 \exp(-2x) \left(\int_0^4 \exp(-3y) dy \right) dx && (374) \\
&= 6 \int_0^2 \exp(-2x) \left(\left[-\frac{\exp(-3y)}{3} \right]_0^4 \right) dx && (375)
\end{aligned}$$

Vi løser det indre problem:

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{\exp(-3y)}{3} \right]_0^4 &= \left(-\frac{\exp(-12)}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3} \right) && (376) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{\exp(-12)}{3} && (377) \\
&= \frac{1 - \exp(-12)}{3} && (378)
\end{aligned}$$

Vi indsætter dette!

$$6\int_0^2 \exp(-2x)\left(\frac{1-\exp(-12)}{3}\right)dx = 6\left(\frac{1-\exp(-12)}{3}\right)\int_0^2 \exp(-2x)dx \tag{379}$$

$$= 6\left(\frac{1-\exp(-12)}{3}\right)\left[-\frac{\exp(-2x)}{2}\right]_0^2 \tag{380}$$

Vi udregner det inderste:

$$\left[-\frac{\exp(-2x)}{2}\right]_0^2 = \left(-\frac{\exp(-2\cdot 2)}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \tag{381}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\exp(-4)}{2} \tag{382}$$

$$= \frac{1-\exp(-4)}{2} \tag{383}$$

Dette indsættes:

$$6\left(\frac{1-\exp(-12)}{3}\right)\left(\frac{1-\exp(-4)}{2}\right) = (1-\exp(-12))\,(1-\exp(-4)) \tag{384}$$

Del 1 - b) find $P(X > 1, Y \leq 3)$

Lav i klassen! Efter samme opskrift som ovenfor:

Resultat:

$$P(X > 1, Y \leq 3) = \exp(-2)\,(1-\exp(9)) \tag{385}$$

Find de marginale fordelinger $p_y(y), p_x(x)$

Man integrere den ene variabel ud: dvs, integrer y ud, hvis man ønsker at finde $p_x(x)$, og vice versa.

$$
\begin{aligned}
p_y(y) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dx &= \int_{\mathbb{R}} 6\exp(-2x-3y)dx && (386)\\
&= 6\exp(-3y)\int_{\mathbb{R}} \exp(-2x)dx && (387)\\
&= 6\exp(-3y)\cdot\frac{1}{2} && (388)\\
&= 3\exp(-3y) && (389)
\end{aligned}
$$

Hvor man har udnyttet at $\int_{\mathbb{R}} \exp(-2x)dx = \frac{1}{2}$

Lad klassen lave anden halvdel!

Resultatet er analogt for Y, bare hvor

$$
p_x(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dy = \frac{1}{3}\cdot 6\exp(-2x) = 2\exp(-2x) \qquad (390)
$$

Del 3) Find fordelingsfunktionen for X

Jeg udskifter x med a for ikke at gøre notationen forvirrende!

$$
\begin{aligned}
F(a)\int_0^a p(x)dx &= \int_0^a 2\exp(-2x)dx && (391)\\
&= 2\left[-\frac{-\exp(-2x)}{2}\right]_0^a && (392)\\
&= 2\,(1) - 2\left(-\frac{\exp(-2a)}{2}\right) && (393)\\
&= 1-\exp(-2a) && (394)
\end{aligned}
$$

Dette indsættes:

$$
F(x) = 1-\exp(-2x) \qquad (395)
$$

Medianen findes

$$0.5 = 1 - \exp(-2x) \Leftrightarrow 0.5 = \exp(-2x) \tag{396}$$
$$\Leftrightarrow ln(0.5) = -2x \tag{397}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{ln(0.5)}{2} = x \tag{398}$$

Del 4) Vis uafhængighed

Vi ser at $p(x)p(y) = p(x, y)$ - Dette er sætning **6.2.1**

$$(2\exp(-2x))\,(3\exp(-3y)) = 6\exp(-2x - 3y) \tag{399}$$

4.7 Øvelse 12

26/10/2018, opgaver: U43.2.1, U43.2.2, U43.2.3, U43.2.4, U43.2.5 fra bogen: 6.4, 6.21

4.7.1 U43.2.1

- $A = \{x, y \mid x^2 + y^2 \leq 1$
- $p(x, y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_A(x, y)$

Del 1) Tegn $p(x, y)$

- Tegn på tavlen en tredimensionel enhedscirkel. Højden: $\frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{3}$

Del 2) Find den marginale tæthed for X

For at finde den marginale tæthed skal man integrere Y ud af udtrykket $p(x, y)$

Først noteres at:

$$X^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq \sqrt{1 - x^2} \tag{400}$$

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_A(x,y)dy \tag{401}$$

$$= 2\frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_A(x,y)dy \tag{402}$$

$$= 2\frac{1}{\pi}\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right) - (0)\right) \tag{403}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \tag{404}$$

2-tallet kommer fra at y både kunne have været positivt og negativt!!!

Del 2) Find den marginale tæthed

Kig på github!

4.7.2 U43.2.2

- $A = \{x, y \mid x \in [1,2], y \in [1,2]\}$
- $p(x,y) = \mathbb{1}_A p(x,y)$

Del 1) Tegn $p(x,y)$

Gør på tavlen. 3-dimensionel tegning.

Del 2) Find de marginale tætheder p_Y, p_X

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x,y)dy = \int_1^2 \mathbb{1}_A(x,y)dy = \mathbb{1}_{[1,2]}(x) \int_1^2 \mathbb{1}_A(y)dy = \mathbb{1}_{[1,2]}(x) \tag{405}$$

Analogt for $p_Y(y) =$

$$p_Y(y) = \mathbb{1}_{[1,2]}(y) \tag{406}$$

Del 3) Definér $Z = X + Y$. Find $\mathbf{E}(Z), \mathbf{Var}(Z)$

Vi ser at $X \perp\!\!\!\perp Y$

Det implicerer at:

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \tag{407}$$

Hvor man har udnyttet at $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$. Man husker at $\frac{a+b}{2}$ er middelværdien for den uniforme fordeling!

Variansen findes:

VI husker de er uafhængige hvilket gør vi kan sige - Fundet på wikipedia - generelt er wikipedia bedre til egenskaber end bogen - bogen er meget rodet opbygget:

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \tag{408}$$

Vi finder variansen af X:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}(a-b)^2 = \frac{1}{12} \tag{409}$$

Find tætheden $q(z)$ for Z

Vi bruger Korollar 6.3.2

$$\begin{aligned} p(x, x-z) &= \mathbb{1}(1 \le x \le 2)\mathbb{1}(1 \le z-x \le 2) && (410)\\ &= \mathbb{1}(2 \le z \le 3)\mathbb{1}(1 \le x \le z-1) && (411)\\ &+ \mathbb{1}(3 \le z \le 4)\mathbb{1}(z-2 \le x \le 2) && (412) \end{aligned}$$

Kig github for illustration!

Vi bruger dette:

$$\begin{aligned} q(z) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(2 \le z \le 3)\mathbb{1}(1 \le x \le z-1) + \mathbb{1}(3 \le z \le 4)\mathbb{1}(z-2 \le x \le 2)dx && (413)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(2 \le z \le 3)\mathbb{1}(1 \le x \le z-1)dx + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(3 \le z \le 4)\mathbb{1}(z-2 \le x \le 2)dx && (414)\\ &= \mathbb{1}(2 \le z \le 3)\int_1^{z-1} \mathbb{1}dx + \mathbb{1}(3 \le z \le 4)\int_{z-2}^{2} \mathbb{1}dx && (415) \end{aligned}$$

Indsætter i stamfunktionen giver:

$$q(z) = \mathbb{1}(2 \leq z \leq 3)(z-2) + \mathbb{1}(3 \leq z \leq 4)(4-z) \tag{416}$$

del 4) Benyt $q(z)$ til at udregne $\mathbf{E}(z)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} zq(z)dz &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(2 \leq z \leq 3)(z^2-2z) + \mathbb{1}(3 \leq z \leq 4)(4z-z^2)dz && (417)\\
&= \int_2^3 (z^2-2z)dz + \int_3^4 (4z-z^2)dz && (418)\\
&= \left[\frac{1}{3}z^3 - z^2\right]_2^3 + \left[\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3\right]_3^4 && (419)\\
&= 3 && (420)
\end{aligned}$$

Del 5) Udregn $\mathbf{Cov}(X,Z)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Z) &= \mathrm{Cov}(X, X+Y) && (421)\\
&= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) && (422)\\
&= \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12} && (423)
\end{aligned}$$

Vi husker at X, Y er uafhængige

Vi husker at variansen af X er fundet tidligere

4.7.3 U43.2.3

- $p_X(x) = \exp(-x)$
- $p_Y(y) = \exp(-y)$
- $X \perp\!\!\!\perp Y$
- X, Y er defineret på $\mathbb{R}_+$

Del 1) Find tætheden $p(x,y)$

Grundet uafhængighed mellem X, Y ved vi at: $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$

Vi bruger dette:

$$p(x,y) = \exp(-x)\exp(-y) \tag{424}$$

Del 2) find tætheden for $Z = X + Y$

Vi gør som tidligere:

$$\begin{aligned}
p(x, z-x) &= \mathbb{1}(0 < x < z-x)\exp(-x)\exp(-(z-x)) && (425)\\
&= \mathbb{1}(0 < x < z-x)\exp(-x)\exp(x)\exp(-z) && (426)\\
&= \mathbb{1}(0 < x < z-x)\exp(-z) && (427)
\end{aligned}$$

udtrykket ·1 er kun for at understrege der altid står 1.

$$q(z) = \int_0^z \exp(-z)dx = \exp(-z)\int_0^z \mathbb{1}dx = z\exp(-z) \tag{428}$$

Del 3) Find tætheden for $Z = X - Y$

Vi bruger korollar 6.3.2 og indser at: $Z = X - Y \implies Y = X - Z$

$$\begin{aligned}
p(x, x-z) &= \mathbb{1}(0 < z < x)\exp(-x)\exp(-(x-z)) && (429)\\
&= \mathbb{1}(0 < z < x)\exp(-2x)\exp(-z) && (430)
\end{aligned}$$

Vi finder tætheden $q(z)$

$$\begin{aligned}
q(z) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(0 < z < x)\exp(-2x)\exp(-z)dx && (431)\\
&= \exp(-z)\int_0^\infty \exp(-2x)dx && (432)\\
&= \exp(-z)\left[-\frac{\exp(-2x)}{2}\right]_0^\infty && (433)\\
&= \frac{1}{2}\exp(-z) && (434)
\end{aligned}$$

VI husker at i anden nederste ligning skal kun x indsættes i square brackets.

4.7.4 U43.2.4

- X_1, X_2, X_3, X_4 er identiske og uafhængige
- $\mathrm{E}(X_i) = 5, \mathrm{Var}(X_i) = 9$
- $Y = X_1 + 2X_2 - X_4$

$$\mathrm{E}(Y) = 5 + 2 \cdot 5 - 5 = 10 \tag{435}$$

Man husker de stokastiske variable er uafhængige

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1 + 2X_2 - X_4) = \mathrm{Var}(X_1) + 2^2\mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_4) = 6 \cdot 9 = 54 \tag{436}$$

4.7.5 U43.2.5

Drop denne opgave! Tidspres gør det umuligt at nå!

4.7.6 Opgave 6.4

- Man har $p(x, y)$ givet ved:

$$p(x, y) = \begin{cases} 3xy^{-2}, & x \in (0, 1), y \in (1, 3) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{437}$$

Find de marginale fordelinger for X, Y og vis uafhængighed!

Lad $A = \{x, y \mid x \in (0, 1), y \in (1, 3)\}$

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x,y) 3xy^{-2} dy \tag{438}$$
$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x) x \int_1^3 3y^{-2} dy \tag{439}$$
$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x) x \left[3 \cdot \frac{1}{-1} y^{-1} \right]_1^3 \tag{440}$$
$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x) x \left[\frac{-3}{y} \right]_1^3 \tag{441}$$
$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x) x \left(-1 + 3 \right) \tag{442}$$
$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x) x \cdot 2 \tag{443}$$
$$= 2x, \quad x \in (0,1) \tag{444}$$

Det samme gøres for y

$$p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x,y) 3xy^{-2} dy \tag{445}$$
$$= \mathbb{1}_{[1,3]}(y) y^{-2} \cdot 3 \int_0^1 x dx \tag{446}$$
$$= \mathbb{1}_{[1,3]}(y) y^{-2} \cdot 3 \left(\frac{1}{2} \right) \tag{447}$$
$$= \frac{3}{2} y^{-2}, \qquad y \in (1,3) \tag{448}$$

Vi tester for uafhængighed:

$$p_X(x) \cdot p_Y(y) = \frac{3}{2} y^{-2} 2x \tag{449}$$
$$= 3y^{-2} x \tag{450}$$
$$= p(x,y) \tag{451}$$

Hvilket viser uafhængighed.

4.7.7 6.21

- $X \sim Uni(-1,1)$

- $Y = X^2$

Vis at $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$

$$\mathrm{Corr} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \tag{452}$$

Vi finder Covariansen:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}(Y)) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \tag{453}$$

Vi ser hurtigt at $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$. (evt - tegn for at overbevise klasse).

$$\mathrm{E}(X \cdot Y) = \int_{-1}^{-1} x \cdot x^2 dx = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0 \tag{454}$$

Herfra ser vi let at:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 0 - 0 = 0 \tag{455}$$

De er ikke uafhængige! Kan vises formelt, men bedre med intuition ved at tegne!

Vis github!

4.8 Øvelse 13

28/10/2018, opgaver: 44.1.1, 44.1.2, 44.1.3 44.1.4

4.8.1 Opgave 44.1.1

- to terninger (stokastiske variable) X_1, X_2
- $(X_1, X_2) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{x_{1,i}\} \times \{x_{2,j}\}, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $Z = X_1 + X_2$

Den vigtige regel:

$$p_x(x) = \int_y p_{x,y}(x,y)dy = \int_y p_{x|y}(x \mid y)p_y(y)dy \tag{456}$$

Find $P(X_1 = i \mid Z \geq 4)$

Vi noterer først vi ikke har kontinuerte stokastiske variable!

Man får en god idé

$$P(X_1 = i \mid Z \geq 4) = \frac{P(X_1 = i, Z \geq 4)}{P(Z \geq 4)} \tag{457}$$

(skits summen af to terninger på tavlen)

Vi indser hurtigt at $P(Z \geq 4) = \frac{33}{36}$

Vi indser også at:

$$P(X_1 = i \mid Z \geq 4) = \frac{P(X_1 = i, X_1 + X_2 \geq 4)}{33/36} = \frac{P(X_1 = i, X_2 \geq 4 - i)}{33/36} \tag{458}$$

Vi indser at i er en konstant og vi nu har uafhængighed i den simultane sandsynlighed således at:

$$P(X_1 = i)P(X_2 \geq 4 - i) \tag{459}$$

Husk at $P(X_1 = i) = \frac{1}{6}$

Vi kan opskrive det hele i et samlet udtryk:

$$P(X_1 = i)P(X_2 \geq 4 - i) = \frac{1}{6}P(X_2 \geq 4 - i) \tag{460}$$

$$P(X_1 = i)P(X_2 \geq 4 - i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4 - 1 + i}{6} \quad i < 4 \tag{461}$$

over i siger man bare $1/6 \times 1/6$

$$P(X_1 = i)P(X_2 \geq 4 - i) = \frac{3 + i}{36} \quad i < 4 \tag{462}$$

Vi husker at dele med 33/36

$$P(X_1 = i \mid Z \geq 4) = \begin{cases} 4/33 & i = 1 \\ 5/33 & i = 2 \\ 6/33 & i \geq 3 \end{cases} \tag{463}$$

Find $\mathbf{E}(X_1 = i \mid Z \geq 4)$

vi ved at $P(X_1 = i) = \frac{1}{36}$. VI kan derfor sige:

$$\sum_{i=1}^{6} i \cdot \min\left(\frac{3+i}{33}, \frac{6}{33}\right) = \frac{1}{33} \frac{4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + (3+4+5+6) \cdot 6}{33} \tag{464}$$

4.8.2 Opgave 44.1.2

- $Z \in \{1, 2\}$ angiver kommune
- $V \in \{0, 1\}$ angiver om man er velhavende
- $P(V = 1 \mid Z = 1) = 0.8 = 1 - P(V = 0 \mid Z = 0)$
- $P(V = 1 \mid Z = 2) = 0.1$

Udregn $\mathbf{E}(V \mid Z = 1)$ og $\mathbf{E}(V \mid Z = 2$

Udtrykkene er udtryk for sandsynligheden for at være velhavende betinget på hvilken kommune man kommer fra.

$$\mathrm{E}(V \mid Z = 1) = 0 \cdot P(V = 0 \mid Z = 0) + 1 \cdot (V = 1 \mid Z = 1) = 0.2 \cdot 0 + 0.8 \cdot 1 = 0.8 \tag{465}$$

For kommune 2:

$$\mathrm{E}(V \mid Z = 2) = 1 \cdot P(V = 1 \mid Z = 2) + 0 \cdot P(V = 0 \mid Z = 2) = 0.1 \tag{466}$$

Vis udtrykket:

$$\mathrm{E}(V \mid Z = z) = f(z) = 0.8 \cdot \mathbb{1}(z = 1) + 0.2 \cdot \mathbb{1}(Z = 2) \tag{467}$$

Man ser at hvis $z = 1 \implies E(V \mid Z = 1) = 0.8$

og omvendt: $z = 2 \implies E(V \mid Z = 2) = 0.1$

Hvad udtrykker $\mathbf{E}(V \mid Z = z)$

Det betyder at vores forventning er afhængig af realization af z.

Del 4)

Man definerer nu den stokastiske variabel *Den betingede middelværdi af V givet Z.*

$$\mathrm{E}(V \mid Z) = f(z) \tag{468}$$

Vis at:

$$\mathrm{E}(f(z)) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(V \mid Z)) = 0.8P(Z = 1) + 0.1P(Z = 2) \tag{469}$$

Det følger næsten naturligt:

$$\mathrm{E}(f(z)) = \mathrm{E}(0.8 \cdot \mathbb{1}(z = 1) + 0.1 \cdot \mathbb{1}(z = 2)) \tag{470}$$

Herfra følger det da $V \in \{0, 1\}$

$$\mathrm{E}(f(z)) = 0.8 \cdot P(Z = 1) + 0.1 \cdot P(Z = 2) \tag{471}$$

4.8.3 Opgave 44.1.3

- X er ligefordelt på $A = [0, 10]$

Del 1) Opskriv tætheden $p(x)$ for X og vis $P(X) > 5 = \frac{1}{2}$

Tegn tæthedsfunktionen.

Man ved at $F(x) \to 1$ for $x \to \infty$. nærmere bestemt ved man at $F(10) = 1$. Man ved at $\int \mathbb{1}_A(x)$ vil være x, så man skal gange en konstant på for at få $F(10) = 1$. Hel konkret $10 \cdot c = 1 \implies c = 1/10$

$$p(x) = \frac{1}{10}\mathbb{1}_A(x) \tag{472}$$

$$P(X > 5) = \int_0^5 \frac{1}{10} \mathbb{1}_A(x) = \frac{1}{10} \int \mathbb{1}_A(x) = \frac{1}{10}[x]_0^5 = \frac{1}{10}(5-0) = 0.5 \quad (473)$$

Del 2) Find E(X)

$$\mathrm{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)x \quad (474)$$

Vi ved at indikator funktionen kun er defineret i intervallet $[0, 10]$. så vi kan skrive:

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{10} \frac{1}{10} x \cdot \mathbb{1}_A(x) \quad (475)$$

$$= \frac{1}{0} \int_0^{10} x \quad (476)$$

$$= \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{10} \quad (477)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 5 \quad (478)$$

Vis at tætheden for $X \mid X > 5$ kan skrive som:

Skitser det givne på en tegning!

$$q(x) = \frac{2}{10} \mathbb{1}(5 < x < 10) \quad (479)$$

Man indser hurtigt at: $X \in [0, 5] \cap X \in (5, 10] = \emptyset$. Vi kan altså herfra konkludere at $X \mid X > 5$ kun er defineret på intervallet $(5, 10]$.

$X \mid X > 5$ er stadig uniformt fordelt, og vi kan derfor sige at: $q(x) = c \cdot \mathbb{1}(5 < x \leq 10)$. Igen ved vi også at $Q(10) = 1$. Vi kan hurtige udlede at $c = \frac{1}{5}$. hvormed det ønskede resultat er vist.

Del 4) Er E($X \mid X > 5$) = 7.5?

Først se på tegningen. Herfra burde det fremgår tydeligt. Mere formelt:

$$\mathrm{E}(X \mid X > 5) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{5}\mathbb{1}(5 < x < 10) \tag{480}$$
$$= \frac{1}{5}\int_{5}^{10} x \cdot \mathbb{1}(5 < x < 10) \tag{481}$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_5^{10} \tag{482}$$
$$= \frac{1}{5}\frac{1}{2}(10^2 - 5^2) \tag{483}$$
$$= \frac{1}{5}\frac{1}{2} \cdot 75 \tag{484}$$
$$= 7.5 \tag{485}$$

4.8.4 Opgave 44.1.4

- X angiver ratingen fra 0 til 1
- Y angiver værdipapirets værdi i 1000 \$
- X, Y er ligefordelt på mængden B
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0.5 + 2x \leq y \leq 2.5 + 2x\}$

Lad os starte med at tegne B. Kig github!

Find tæthedsfunktionen $f_{X,Y}(x, y)$ for den simultane fordeling for (X, Y)

Vi hurtigt indser at de marginale fordelinge må blive 1. Den hurtigste måde at konstanten c på (tænk simultan fordeling $f(x, y) = c\mathbb{1}_B(x, y)$). er at finde arealet af B.

$$\frac{1}{c} = h \cdot l = 1 \cdot 2 = 2 \implies c = \frac{1}{2} \tag{486}$$

tæthedsfunktionen er:

$$f_{x,y}(x, y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_B(x, y) \tag{487}$$

Del 2) Find $P(Y > 2)$

Tegn på tegningen hvad det egentlig medfører. Altså på mængden B.

Først og fremmest ved vi at vi må integrere X ud af tætheden.

$$p_y(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \mathbb{1}_B(x, y) dx \tag{488}$$

Vi lavet et trick og skærer mængden B ud i to mængder M_1, M_2.

$$M_1 = \{x, y \mid 0 < x < 1, 0.5 + 2x < y < 2.5\} \tag{489}$$

$$M_2 = \{x, y \mid 0 < x < 1, 2.5 < y < 2.5 + 2x\} \tag{490}$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{M_1}(x, y) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{M_2}(x, y) dx \tag{491}$$

Vi håndterer først M_1:

Vi ser at vi skal differentiere x ud. Mængden er er altså defineret i y-intervallet [0.5, 2.5]. Vi isolerer x som en funktion af y:

NOTE: Tegn diagrammet på tavlen og forklar intuitionen!

$$y = 0.5 + 2x \implies \frac{1}{2}(y - 0.5) = x \tag{492}$$

Hvor vi husker at: $y \in [0.5, 2.5]$

Vi kan nu finde at arealet for M_1 :

$$\int_0^{\frac{1}{2}(y-0.5)} 1 dx = [x]_0^{\frac{1}{2}(y-0.5)} = \frac{1}{2}y - 0.25 \tag{493}$$

Analogt for M_2:

(KIG PÅ TAVLESKITSE)

$$y = 2.5 + 2x \implies \frac{1}{2}(y - 2.5) \tag{494}$$

$$\int_{\frac{1}{2}(y-2.5)}^{1} 1 dx = [x]_{\frac{1}{2}(y-2.5)}^{1} = 1 - \left(\frac{1}{2}y - 1.25\right) = 2.25 - \frac{1}{2}y \tag{495}$$

hvor vi husker at $y \in (2.5, 4.5]$

Vi opskriver $p_Y(y)$. Man husker at gange konstanten $\frac{1}{2}$ på.

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(2.25 - \frac{1}{2}y\right) & , y \in (2.5, 4.5] \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y - 0.25\right) & , y \in [0.5, 2.5] \end{cases} \tag{496}$$

Vi kan opskrive $P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \int_{0.5}^{2} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y - 0.25\right) dy$

$$\begin{aligned} 1 - \int_{0.5}^{2} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y - 0.25\right) dy &= 1 - \frac{1}{4}\int_{0.5}^{2} y - 0.5dy && (497) \\ &= 1 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}y^2 - 0.5y\right] && (498) \\ &= 1 - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{2}0.5^2 - 0.5 \cdot 0.5\right)\right) && (499) \\ &= 1 - \frac{1}{4}(2-1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) && (500) \\ &= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{8} && (501) \\ &= 0.71875 && (502) \end{aligned}$$

Del 4) Angiv den betingede fordeling af X givet $Y = 1$

Vi skal finde $p_{X|Y=1}(x)$

Vi kan altså bruge vores regel:

$$p_{X|Y}(x)p_Y(y) = p(x,y) \implies p_{X|Y} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \tag{503}$$

Vi ved at $Y = 1$. Vi bruger dette:

$$p_Y(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(1) - 0.25\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \tag{504}$$

Vi indsætter $Y = 1$ i den øverste del af brøken. Vi ved vi er i den nederste mængde M_1. Dette implicerer:

$$0.5 + 2x < y \wedge y = 1 \implies 0.5 + 2x < 1 \implies x < \frac{1}{4} \tag{505}$$

Vi kan herfra konkludere at:

$$p_{X|Y=1}(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathbb{1}_{[0,0.25]}(x)}{1/8} = 4 \cdot \mathbb{1}_{[0,0.25]}(x) \tag{506}$$

Del 5) udregn forventede rating når $Y = 1$ og når $Y = 2$

Vi kender formlen for forventningen af en ligefordeling: $\mathrm{E}(x) = \frac{a+b}{2}$

Vi har svaret for $E(X \mid Y = 1) = \frac{0+0.25}{2} = \frac{1}{8}$

Vi skal nu analogt finde den betingede tæthed når $Y = 2$

$$p_Y(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2) - 0.25\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \tag{507}$$

Vi ser igen på mængden M_2 :

$$0.5 + 2x < y \wedge y = 2 \implies 0.5 + 2x < 2 \implies x < \frac{3}{4} \tag{508}$$

Vi kan herfor konkluderer at den betingede fordeling for $X \mid Y = 2$ må være:

$$p_{X|Y=2}(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathbb{1}_{[0,\frac{3}{4}]}(x)}{\frac{3}{8}} = \frac{4}{3} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{3}{4}]} \tag{509}$$

Vi finder forventningen som må være:

$$\mathrm{E}(X \mid Y = 2) = \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{3}{8} \tag{510}$$

Del 6) Find variansen Var$(X \mid Y = 1$ og Var$(X \mid Y = 2)$

I stedet for at bruge hintet kigger vi på distributionen og bruger regnereglen for ligefordelinger:

$$Var(X) = \frac{1}{12}(a - b)^2 \tag{511}$$

$$\text{Var}(X \mid Y = 1) = \frac{1}{12}\left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\frac{1}{12} = \frac{1}{192} \tag{512}$$

$$\text{Var}(X \mid Y = 2) = \frac{1}{12}\left(0 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}\frac{9}{16} = \frac{9}{192} \tag{513}$$

Hvornår er den betingede varians størst - dvs. variansen af ratingen betinget på prisen

Kig på tegningen: Det rigtige svar må være $Y = 2500$.

Man overvejer følgende:

$$Var(X) = \frac{1}{12}(a-b)^2 \tag{514}$$

I intervallet $y \in [0.5, 2.5]$ ved vi at:

$$Var(X \mid Y = y) = \frac{1}{12}(0-a)^2 \tag{515}$$

Hvor at er øvre grænse:

$$0.5 + 2x < y \implies x = \frac{1}{2}(y - 0.5) \tag{516}$$

er monotont stigende med højere i y i intervallet $[0.5, 2.5)$.

Vi kan derfor sige at:

I intervallet $[0.5, 2.5)$ finder vi den højeste varians ved $Y = 2.5$.

Analogt kan man den højeste varians i i intervallet $[2.5, 4.5]$ til at være $Y = 2.5$

Illustrer på tavle!