Lecture Notes

Jeppe Johansen

October 8, 2018

1 Topics

readings: Sørensen 1.2-1.3

1.1 Det endelige sandsynlighedsfelt

Et endelig sandsynlighedsfelt har følgende egenskaber:

- En endelig mængde $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_j\}$
- En funktion p fra E ind i intervallet $[0, 1]$
- Summen af samtlige sandsynligheder skal være 1:

$$\sum_{j=1}^{k} p(e_j) = 1 \tag{1}$$

1.1.1 Hændelser

A er en hændelse:

$$A \subseteq E \tag{2}$$

Sandsynligheden for A:

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x) \tag{3}$$

Sandsynligheden for to disjunkte mængder A, B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \qquad P(A) \cap P(B) = \emptyset \tag{4}$$

1.2 Ved konstant ssh funktion

$$\text{ssh. for hændelse} = \frac{\#\ \text{gunstige udfald}}{\#\ \text{mulige udfald}} \tag{5}$$

1.2.1 Termer

- **Udfald** de enkelte elementer i E
- **Hændelse** en delmængde
- **Sandsynlighedsfunktionen** er $p(\cdot)$
- **punktsandsynligheden** for e_j er $p(e_j)$
- **disjunkte** er to mængde som har den tomme mængde som fællesmængde
- **Sandsynlighedsmål** er funktionen P fra klassen af delmængder af E. (har ekstra krav, se p. 14 i **Sørensen**)
- # antal elementer i et sæt

1.3 Det generelle sandsynlighedsfelt

Hvis mængden er uendelig stor, (både tællelig og utællelig) kigger man på delintervaller af E.

Under antagelse af ligefordeling:

$$P(I) = c|I| \tag{6}$$

$|I|$ betegner længden af linjestykket på den reelle akse.

1.3.1 Definition af sandsynlighedsfelt

- Et udfaldsrum E
- En klasse $\mathcal{E}$ af delmængder fra E

- En funktion P fra $\mathcal{E}$ ind i $[0,1]$
- $\mathcal{E}$ skal indeholde både E og $\emptyset$
- P skal opfylde

$$P(E) = 1 \tag{7}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset \tag{8}$$

$\mathcal{E}$ er kun en klasse af pæne delmængder. Dette er ikke et problem på dette kursus (eller andre på økonomisk institut).

1.3.2 Indikator funktion

En indikator funktion kan tage en af de to værdier $\{0,1\}$. $\mathbb{1}_A(x) = 1$ hvis $x \in A$, ellers 0

1.3.3 Regneregler for sandsynlighedsmål P (sætning 1.3.4)

1. regler hvis $B \subseteq A$:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B) \tag{9}$$
$$P(B) \leq P(A) \tag{10}$$

2. regler for den komplementære hændelse til B. i.e. $E \setminus B$

$$P(E \setminus B) = 1 - P(B) \tag{11}$$

3.

$$P(\emptyset) = 0 \tag{12}$$

4.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{13}$$

5.

$$P(A) + P(B) \leq P(A) + P(B) \tag{14}$$

ligning 14 kan udvides til vilkårligt mange mængder. Det bliver en lighed hvis samtlige vilkårlige mængder er disjunkte.

---

readings: Sørensen 1.4-1.5

1.4 Betingede sandsynligheder og uafhængighed

1.4.1 Den betingede sandsynlighed af B giver A skrevet $P(B \mid A)$, er defineret ved (definition 1.4.1

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{15}$$

1.4.2 Regneregler for betingede sandsynligheder

$A_1, A_2, \cdots A_n$ være n hændelser, hvor $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1} > 0$. Da:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n) = \tag{16}$$
$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \tag{17}$$

Endnu en regneregel

Hvis $A_1, A_2, \cdots A_n$ er n disjunkte hændelser, hvor at $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ samt $P(A_i) > 0$, da gælder for en vilkærlig hændelse B:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j) \tag{18}$$

1.4.3 Omvendingsformel - simpel bayes'

$$P(A \mid B) = P(B \mid A)\frac{P(A)}{P(B)} \tag{19}$$

1.4.4 Bayes' formel

$A_1, A_2, \cdots A_n$ er n disjunkte hændelser, hvor at $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ samt $P(A_i) > 0$. For en hændelse B med $P(B) > 0$, da gælder for en enhver hændelse k:

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)} \tag{20}$$

1.5 Stokastisk Uafhængighed

Uafhængighed tænkes oftest som:

$$P(A \mid B) = P(A) \tag{21}$$

Altså at sandsynligheden for A ikke er påvirket af udfaldet af B.

1.5.1 Definition af uafhængighed

hændelse A og B er uafhængige siges at være stokastisk uafhængige når (definition 1.5.1) :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{22}$$

Dette udsagn kan let udvides til n hændelser (se p.34 **definition 1.5.4**)

1.5.2 Regler for indbyrdes uafhængighed

Tegn for uafhængighed $\perp\!\!\!\perp$.

A, B og C er indbyrdes uafhængige hændelser. Følgende gælder:

1. $A \setminus B \perp\!\!\!\perp C$
2. $A \cap B \perp\!\!\!\perp C$
3. $A \cup B \perp\!\!\!\perp C$
4. $E \setminus A, B \perp\!\!\!\perp C$

1.5.3 forenings mængdens uafhængighed

A, B, C er hændelser. A og B er betinget afhængige givet C hvis:

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C) \tag{23}$$

denne kan generaliseres (se p. 37 **definition 1.5.7**)

1.6 Chapter 3

1.6.1 Centrale begreber

Fordelinger på endelige mængder

Adskiller sig fra diskrete fordelinger, som ikke er på endelige mængder, men fx. alle de positive tal

Binomialfordelingen sandsynlighedsfunktion er givet ved

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{24}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!((n-x)!} \tag{25}$$

Transformation af fordelinger

Middelværdi

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i p(a_i) \tag{26}$$

Varians

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}([X - E(X)]^2) \tag{27}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \tag{28}$$

Kovarians

$$\mathrm{Cov} = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))) \tag{29}$$

$$\mathrm{Cov} = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \tag{30}$$

Korrelation

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \tag{31}$$

1.7 Flerdimensionale stokastiske variable, uafhængighed

readings: Sørensen 3.5, 4.1, 4.4

1.7.1 Polynomial fordelingen

1.7.2 Poisson fordelingen

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-x}, x \in N_0 \tag{32}$$

1.7.3 Generelle diskrete fordelinger

- Fordelinger på uendelige tællelige mængder
- $\sum_{i=1}\infty p(x_i) = 1$
- Kontinuert fordeling af 1 dimension
- middelværdi
- varians
- normalfordelingen
- transformationer
- χ^2 fordeling

1.8 Middelværdi

X har en middelværdi hvis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx < \infty \tag{33}$$

Middelværdien for X er:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx < \infty \tag{34}$$

1.9 Varians

Variansen ekstisterer hvis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx < \infty \tag{35}$$

Variansen er:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}([X - \mathrm{E}(X)]^2) \tag{36}$$

1.9.1 Normalfordelingen

Standard normalfordeling:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{37}$$

Fordelingsfunktionen (CDF)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy \tag{38}$$

Den generelle statndard normalfordeling:

$Y = \mu + \sigma X$

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{39}$$

med middelværdi μ og varians σ^2

1.10 Transformationer

$$q(y) = \begin{cases} p(t^{-1}(y))|\frac{d}{dy}t^{-1}(y)|, & y \in (v,h) \\ 0, & y \notin (v,h) \end{cases} \tag{40}$$

hvor $v = \inf t(I), h = \sup t(I)$ og I er intervallet (a,b)

2 Lectures