Contents

1 Introduzione

$X_1 = 1.7$
$X_2 = 1.82$
$X_3 = 1.73$
$X_4 = 1.7$
$X_5 = 1.8$
$\hat{\theta}?$ Altezza della popolazione

Possibile soluzione :

$$\hat{\theta_a} = \frac{1}{n}\sum_{4}^{5} x_i = \frac{1.7 + 1.82 + 1.73 + 1.7 + 1.8}{5} = \frac{8.75}{5} = 1.75$$

$$\hat{\theta_b} = \frac{min(x_i) + \max(x_i)}{2} = \frac{3.52}{2} = 1.76$$

$$\hat{\theta_c} = \frac{1}{3}\sum_{2}^{4} x_i = \frac{1}{3}(1.8 + 1.73 + 1.7) = \frac{5.23}{3} = 1.743$$

Scartiamo il più *piccolo* e il *massimo*, calcolando poi la **media** dei rimanenti

Stima parametrica (Point) Parametric Estimation

Ipotesi: - Esiste un parametro θ incognito n dati a disposizione $\{X_1, X_2, X_n\}$
Legge di probabilità che descrive il fenomeno che ha generato i dati

Formula generica: Bayes

$$P(\theta/X_1 \dots X_n) = \frac{P(X_1 \dots X_n/\theta)P(\theta)}{P(X_1 \dots X_n)}$$

Verosomiglianza (likelihood)

MLE Maximum Likelihood Estimation (Stima a Massima Verosomiglianza)

$$\hat{\theta} = argmax L(\theta) = argmax[f(X_1 \dots X_n/\theta)]$$

Esempio (Legge -> Distribuzione di Poisson)

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2 \dots X_n/\theta) &= f(X_1/\theta) \cdot f(X_2/\theta) \dots f(X_n/\theta) \\ &= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{X_1}{\theta}} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{X_2}{\theta}} \cdot \dots \frac{1}{\theta} e^{-\frac{X_n}{\theta}} \\ &= \frac{1}{\theta n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_i X_i} \end{aligned}$$

Esempio (MLE Ipotesi di Bernoulli)

$$X_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$P\{X_i = 1\} = 1 - P\{X_i = 0\}$$

$$P\{X_i = x\} = P^x (1-P)^x \quad x \in \{0, 1\}$$

Dove **X** è una *variabile aleatoria* e **x** una *variabile sperimentale*

$$f(x_1 \dots x_n/P) = P^{x_1}(1-P)^{1-x_1} \cdot P^{x_2}(1-P)^{1-x_2} \dots P^{x_n}(1-P)^{1-x_n} =$$

$P^{\sum_i^n x_i}(1-P)^{n-\sum_1^n x_i} \longrightarrow$ Bisogna trovare il **massimo** della funzione

$$
\begin{aligned}
log(f(x_1 \dots x_n/P)) &= \sum_1^n x_i logP - (n - \sum_i^n x_i) log(1-P) \\
&= \frac{d}{dP}[log(f)] = 0 = \frac{1}{\hat{P}} \sum_i^n x_i - \frac{n - \sum_i x_i}{(1-\hat{P})} \\
&= (1-\hat{P}) \sum_i x_i = \hat{P}(n - \sum_i x_i) \\
&= \hat{P} = \frac{\sum_i x_i}{n} \quad \text{MLE}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1 Probabilità che Oneto dia 30L (Lode)
$n = 120$
$\sum_i^{120} x_i = 18$
$\hat{P} = \frac{18}{120} = 0.15 \rightarrow 15\%$

Esercizio 2 N studenti da 30 e lode
$n_1 = 18 \leftarrow$ Oneto
$n_2 = 20 \leftarrow$ Anguita
$n_{1,2} = 10 \leftarrow$ 30L sia con Oneto che con Anguita
$N = ?$ Studenti da **30 e Lode**

$$\hat{P_1} \approx \frac{n_1 2}{n_2} \qquad \hat{P_1} \approx \frac{n_1}{N} \qquad \frac{n_{1,2}}{n_2} = \frac{n_1}{N}$$

$\implies N = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_{1,2}} \rightarrow \frac{18 \cdot 20}{10} = 36$

MLE POISSON

$$f(x_1, x_2 \dots x_n/\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!}$$
$$= \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_i x_i}}{x_1!x_2!\dots x_n!}$$

Formula generica: $\lambda = \frac{\sum_i x_i}{\lambda}$ MLE

Esercizio 3 Stima del numero di incidenti medio in auto n = 10
$x_1 = \{4, 0, 6, 5, 2, 1, 2, 0, 4, 3\}$
$\hat{\lambda} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{27}{10} = 2.7$

$$P\{x \leq 2\} = e^{-2.7}(\frac{2.7^0}{0!} + \frac{2.7^1}{1!} + \frac{2.7^2}{2!}) \approx .4936 \rightarrow 49.36\%$$

Probabilità che non ci siano più di **2 incidenti**

MLE UNIFORME

$$f(x_1, x_2 \dots x_n/\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & 0 < x_i < \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\hat{\theta} = \max\{x_i\}$
$\frac{\hat{\theta}}{2} = \frac{\max\{x_i\}}{2}$

MLE GAUSSIANA

$$f(x_1, x_2 \dots x_n/\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$(\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\sigma^n}e^{\frac{-\sum_i(x_i-\mu)^2}{2\sigma}}$$

$log[f] = -\frac{n}{2}log2\pi - nlog\sigma - \frac{\sum_i(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

$\frac{dlogf}{d\mu} = 0 = \frac{\sum_i(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \longrightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_i x_i}{n}$

$\frac{dlogf}{d\sigma} = 0 = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_i(x_i-\mu)^2}{4\sigma^4} \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum_i(x_i-\mu)^2}{n}}$

Esercizio primo

$x_1 = 1.7$

$x_2 = 1.82$

$x_3 = 1.73$

$x_4 = 1.7$

$x_5 = 1.8$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{1.7 + 1.82 + 1.73 + 1.7 + 1.8}{5} = 1.75$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{0.05^2 + 0.07^2 + 0.02^2 + 0.05^2 + 0.05^2}{5}} \approx 0.051$$

Intervalli di confidenza normali TODO

Intervalli di confidenza gaussiani σ^2 Nota

$x_1mx_2 \dots x_n$

$\hat{\mu} \longleftarrow \mu$

$\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$P(-1.96 < \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < +1.96) = 0.95$$

$$\longrightarrow P(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} - \mu < 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$
$$P(\overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Esempio: Sistema di comunicazione $\sigma^2 = 4 \quad n = 9$

$$x_1 = \{5.85, 12, 15, 7, 9, 7.5, 6, 5, 10.5\}$$
$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_i^n x_i = \frac{1}{9}\sum_i^n x_i = \frac{81}{9} = 9$$

$$P\left(9 - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{m}} < \mu < 9 + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right) = 0.95$$
$$p\left(9 - 1.96\frac{2}{3} < \mu < 9 + 1.96\frac{2}{3}\right) = 0.95$$
$\longrightarrow [7.693, 10.31] \rightarrow \mu$ si trova tra 7.693 e 10.31

In generale Prob $= 1 - \alpha$

$(\overline{x} - z_a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \rightarrow$ Si rileva dalle tavole

1.1 Intervalli di confidenza (Bilaterali)

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i^n x_i$$

$$x_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\overline{X} \sim (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\mathcal{Z} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad Var(\frac{x}{2}) = \frac{1}{\sigma^2} Var(x)$$

Supponiamo che σ sia nota:

$$\Pr\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < +z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{m}}} < +z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < \bar{x} - \mu < +z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right\}$$

$$\Pr\left\{-\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < -\mu < -\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right\} =$$

$$\Pr\left\{\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right\} = 1 - \alpha$$

1.2 Intervalli di confidenza (Unilaterali)

$$\Pr\{z < z_\alpha\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left\{\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{m}}} < z_\alpha\right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr_r\left\{\bar{x} - \mu < z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left\{-\mu < -\bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left\{\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < \mu\right\} = 1 - \alpha$$

$$\mu \in \left(\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{m}}, +\infty\right)$$

1.3 Esempio:

Pesca stagionale dei salmoni (*Fisso intervallo -> trovo* n)
Ad ogni stagione il peso medio dei salmoni è diverso ma $\sigma = 0.3$ Kg
Intervallo di confidenza al 95%, quindi $\alpha = 0.05$

$$(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq 0.1 \quad \sqrt{n} \geq \frac{1.96}{0.1}\sigma$$

$$n \geq (\frac{1.96}{0.1}0.3)^2 = 5.88^2 \approx 34.6 \leftarrow \text{salmoni}$$

1.4 Intervallo di confidenza

con *media* e *varianza* **incognite**

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sigma \quad \text{Non nota}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i^n \left(x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_i \left(x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i\bar{x}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_i x_i^2 + \frac{n\bar{x}^2}{n-1} - 2\bar{x}\frac{\bar{x}n}{n-1}$$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim T_n - 1 \quad \text{(T studenti con n gradi di libertà)}$$

Esempio: Trasimttente (μ) e ricevitore (μ + rumore)

$$95\%(7.69, 10.31) \quad \hat{\mu} = 9, \sigma^2 = 4$$

$X_i\{5, 8.5, 12, 15, 7, 9, 7.5, 6.5, 10.5\}$
$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{9}\sum_i^n X_i = \frac{81}{9} = 9$
$s^2 = \frac{1}{8}\sum_i (X_i^2 - 9.81) \approx 9.5 \quad s = 3.082$

$$\mu \in (9 - 2.306\frac{3.082}{3}, 9 + 2.306\frac{3.082}{3}) = (6.63, 11.37)$$

Si può dimostrare che $T_{\frac{\alpha}{2} \cdot n-1}\mathbb{E}[S] \geq z_\alpha \sigma$

1.5 Integrali Monte Carlo

$$\theta = \mathbb{E}[f(u)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)p(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du$$

Esempio :
$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = ?\ \mathbb{E}[\sqrt{1-x^2}] \quad n = 100$
$X_i = \sqrt{1-U_i^2} \quad X = \{X_1, X_2 \ldots X_100\}$
$\hat{\theta} = \overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}, 99 \frac{s}{\sqrt{100}}$ $\rightarrow$ Per vedere se il risultato è corretto *(confidenza)*

1.6 Intervallo di confidenza di Bernoulli

n esperimenti
Binomiale
media np
varianza np(1-p)

$$\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i \quad X_i \in \{0, 1\}$$

$$X = n\hat{P} \quad P_r\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}} \approx 1 - \alpha\}$$

Dove z = $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$$\frac{x - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$
\begin{aligned}
\rho_r \left\{ -z_{\frac{a}{2}} < \frac{x - mp}{\sqrt{mp(1-\hat{p})}} < z_{\frac{a}{2}} \right\} \cong 1 - \alpha \\
\rho_r \left\{ \hat{p} - z_{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{m}} < \mu < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-p)}{m}} \right\} \simeq 1 - \alpha
\end{aligned} \tag{1}
$$

2 Intervalli di confidenza

Se σ^2 è nota allora:

$$
X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_i^n X_i
$$

$$
\begin{aligned}
\mu \in (-\infty, \overline{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \\
\mu \in (\overline{X} - z_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \overline{X} + z_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) \quad p_r(1-\alpha) \\
\mu \in (-\infty, \overline{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \\
\mu \in (\overline{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty)
\end{aligned}
$$

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \overline{X})$
Se σ^2 è ignota allora:

$$
\mu \in (\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}, n - 1 \frac{s}{\sqrt{n}}) \quad \sigma^2 \to s^2 = z \to t
$$

2.1 Intervallo di confidenza nella varianza

$$
(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2 \quad X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)
$$

$$p_r \left\{ \mathcal{X}^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \leq \mathcal{X}_{\frac{\alpha}{2},n-1} \right\}$$

$$p_r \left\{ \frac{s^2(n-1)}{\mathcal{X}_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2(n-1)}{\mathcal{X}^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right\} = 1-\alpha$$

$$\sigma^2 \in \left(\frac{s^2(n-1)}{\mathcal{X}^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{s^2(n-1)}{\mathcal{X}_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right) \quad p_r = 1-\alpha$$

Esempio: Laminatoio n = 4 $X_i = \{0.123, 0.124, 0.126, 0.12\}$spessore in **mm**

Svolgimento

$$\frac{1}{4}\sum_i^4 X_i = \frac{0.493}{4} = 0.12325$$

$$\frac{1}{4-1}\sum_i^4 (X_i - 0.12325)^2 = 1.875 \cdot 10^{-5}$$

$$\sigma^2 \in \left(\frac{s^2(n-1)}{9.348}, \frac{s^2(n-1)}{0.216} \right)$$

Dove **9.348** e **0.216** sono ricavati dalle tabelle

Facciamo la radice:

$\sigma \in (0.0014, 0.0093) \rightarrow 95\%$

2.2 Intervallo di confidenza

della differenza di due medie:

N campioni

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i^n X_i$$

M campioni

$$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_i^m Y_i$$

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

$$\mathcal{N}(0,1) \sim \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, \overline{X} - \overline{Y} + z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} - \overline{Y} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

Se σ_1^2, σ_2^2 non sono note:

$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i^n (X_i - \overline{X})$

$(n-1)\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \mathcal{X}_{n-1}^2$

$s_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i^m (X_i - \overline{Y})$

$(n-1)\frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \sim \mathcal{X}_{n-1}^2$

Possiamo andare avanti solo se $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2}$

$$(n-1)\frac{s_1^2}{\sigma^2} + (n-1)\frac{s_2^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_{n+m-2}^2$$

$$\underset{\sim \mathcal{N}(0,1)}{\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}}} \longrightarrow \underset{\sim T_{n+m-2}}{\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}}}$$

$S_p = \frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$

Se σ sono ignote ma uguali

$\mu_1 - \mu_2 \in (\overline{X} - \overline{Y} - T_{\frac{\alpha}{2},n+m-2}\sqrt{s^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})})$
$\overline{X} - \overline{Y} + T_{\frac{\alpha}{2},n+m-2}\sqrt{s^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}$

2.3 Intervallo di previsione

$X_1, \dots X_n, X_{n+1} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_i^n X_i \quad \overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
$\overline{X}_n - X_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n}) \to (\mu - \mu, \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n})$
$\sigma^2(1+\frac{1}{n}) \ \frac{X_n - X_n+1}{\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\qquad s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i(X_i - \overline{X}_n)^2$

$$X_{n+1} \in (\overline{X}_n - T_{\frac{\alpha}{2},n-1}s_n\sqrt{1+\frac{1}{n}}, \overline{X}_n + T_{\frac{\alpha}{2},n-1}s_n\sqrt{1+\frac{1}{n}}) \longrightarrow P_r(1-\alpha)$$

Esempio smartwatch contapassi $\boldsymbol{n = 7}$

LUN	6922	X_1	GIO	7432	X_4
MAR	5333	X_2	VEN	6252	X_5
MER	7420	X_3	SAB	7005	X_6

$$DOM \quad 6752 \quad X_7$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_i^m X_i = \frac{47016}{7} \approx 6717$$

$$1-\alpha = 95\% \quad \alpha = 5\%$$

$$t_{0.0025,6} = 2.997$$

$$S_n = \sqrt{S_n^2} = 7.333.8$$

$$x_{n+1} \in (6717 - 2.447 \cdot 733397\sqrt{1+\frac{1}{7}}, 6717 + 2.447 \cdot 73397\sqrt{1+\frac{1}{7}})$$

$X_{n+1} \in (9796, 8637) \mu \in (6037, 7396)$

2.4 Qualità di uno stimatore

$X = X_1 \dots X_n$ $\theta \leftarrow$ parametro $d(x) \leftarrow$ stimatore di θ

$\boldsymbol{(d(x) - \theta)^2}$ $\mathbb{E}[\boldsymbol{(d(x) - \theta)^2}]$

Errore Quadratico (*misura della qualità*) Errore Quadratico Medio (*M.S.E*)
Rischio $r(d, \theta) = \mathbb{E}[(d - \theta)^2]$ Lo stimatore "ottimo" sarà quello con il rischio minimo
-> d con r minimo θ

Esempio $d^*(x) = 4$ se$\theta = 4 \Rightarrow d^* =$ stimatore ottimo(per tutti gli altri valori non va

2.5 Proprietà di uno stimatore

Def: $b_\theta(d) = \mathbb{E}[d] - \theta \rightarrow$ bias o polarizzazione Uno stimatore non è **polarizzato** se $b_\theta(d) = 0$

Esempio : $X_1 \dots X_n$ θmedia
$d_1(X_1 \dots X_n) = X_1$
$d_2(X_1 \dots X_n) = \frac{X_1 + X_2}{2}$
$d_3(X_1 \dots X_n) = \frac{X_1 + X_2 + \dots X_n}{n}$ Tutti questi sono **unbiased**

2.6 Stimatore unbaieseo

$r(d, \theta) = \mathbb{E}[(d(x) - \theta)^2] = \mathbb{E}[(d(x) - \mathbb{E}[d(x)])^2] = Var(d)$
tra gli stimatori non polarizzati di ottimo è quello con la varianza minima

2.7 Valutazione di uno stimatore

$$X = X_1 \dots X_n \quad \theta =?$$

Dove θ è un *parametro* e $d(x)$ è uno *stimatore* di θ

$r(d, \theta)$(mse) rischio $\qquad b_\theta(d) = \mathbb{E}[d] - \theta$
se $b_\theta(d) = 0 \Rightarrow r(d, \theta) = Var(d)$

se $b_\theta(d) \neq 0$? $r(d, \theta)$ = ?

$$\begin{aligned} r(d, \theta) = \mathbb{E}[(d(x) - \theta)^2] &= \mathbb{E}[(d(x) - \mathbb{E}[d] + \mathbb{E}[d] - \theta)^2] \\ &= \mathbb{E}[(d - \mathbb{E}[d])^2 + (\mathbb{E}[d] - \theta)^2 - 2(d - \mathbb{E}[d])(\mathbb{E}[d] - \theta)] \\ &= \mathbb{E}[(d - \mathbb{E}[d])^2] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[d] - \theta)^2] - 2(\mathbb{E}[d] - \theta) \cdot \mathbb{E}[(d - \mathbb{E}[d])] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(d, \theta) &= \mathbb{E}[(d - \mathbb{E}[d])^2] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[d] - \theta)^2] \\ &= Var(d) + b_\theta(d)^2 \leftarrow \text{bias}^2 \end{aligned}$$

2.8 Esempio:

Stimatore della media di una *distribuzione uniforme*

$\mathbb{E}[X_i] = \theta/2 \qquad d_1 = 2\frac{1}{n}\sum_i^n X_i$
$X_1, X_2 \dots X_n \qquad d_2 = \max X_i$

$d_1 : \mathbb{E}[d_1] = \frac{2}{n}\sum_i \mathbb{E}[X_i] = \frac{2}{n} n \frac{\theta}{2} = \theta$

$r(d_1,\theta) = Var(d_1) = \frac{4}{n^2} n Var(X_i) = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \boldsymbol{\frac{\theta^2}{3n}} \Leftarrow$ *Unbiased*

$$F_2(x) = P_r\{d_2(x) \le x\} = P_r\{\max X_1 \le x\}$$
$$= P_r\{X_1 \le, \forall i \in 1\} = \prod_{i=1}^{n} P_r\{X_i \le x\} = (\frac{x}{\theta})^n$$
$$f_2(x) = \frac{d}{dx} F_2(x) = n\frac{x^{n-1}}{\theta^n} \quad x \le \theta$$

$$\mathbb{E}[d_2] = \int_0^\theta x f_x(x)\,dx = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} x^n\,dx = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^\theta\right] = \frac{n}{n+1}\theta$$

$$\mathbb{E}[d_2^2] = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^2 f(x)\,dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\bigg|_0^\theta\right] = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

$Var(d_2) = \mathbb{E}[d^2] - \mathbb{E}[d_2]^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 = \boldsymbol{\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2}$

$r(d_2,\theta) = Var(d_2) + (\mathbb{E}[d_2] - \theta)^2 = \boldsymbol{\frac{2\cdot\theta^2}{(n+1)(n+2)}}$

$n \ge 4 \quad r(d_2,\theta) < r(d_1,\theta) \qquad d_3 = \frac{n+1}{n} d_2$

In sintesi

$$r(d_1, \theta) = \frac{\theta^2}{3n} \Leftarrow \text{Unbiased}$$
$$r(d_2, \theta) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \Leftarrow \text{Biased}$$
$$r(d_3, \theta) = \frac{\theta^2}{n^2+2n} \Leftarrow \text{Unbiased}$$
$$r(d_4, \theta) = \frac{\theta^2}{(n+1)^2} \Leftarrow \text{Biased}$$

3 Test di ipotesi

Ipotesi: Affermazione rispetto a uno o più parametri di una distribuzione Ipotesi da confutare: H_0 (ipotesi nulla)

Esempio :

$$\begin{aligned} X_1 \dots X_n &\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ H_0 &: \mu = 0 \\ H_a &: \mu \neq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Diamo per scontato che l'ipotesi sia **vera**
Dobbiamo cercare di *confutarla*

Definizione Regione critica tale che:

$(X_1 \dots X_n) \in C \to H_0$è rifiutata
$(X_1 \dots X_n) \notin C \to H_0$è accettata
$\alpha =$ Livello di **significatività** del test ($\alpha = 10\%, 5\% \dots$)

Procedimento

- Fisso alpha
- Suppongo che α sia vera
- calcolo stima di μ
- verifico che non sia "*troppo distante*"

$X_1 \dots X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_a : \mu \neq \mu_0$
$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$

Regione critica $\{(X_1 \dots X_n) : |\overline{X} - \mu_0| > c\}$
$P_{r_{\mu_0}} \left\{ |\overline{X} - \mu_0| > c \right\} = \alpha$
$P_{r_{\mu_0}} \left\{ \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right\} = \alpha$
$P_{r_{\mu_0}} \{ |z| > z_\alpha \} = \alpha$

Esempio (5 transimissioni)
$\boldsymbol{n = 5}$ $\qquad H_0 : \mu = 8$
$\overline{X} = 9.5$ $\qquad \alpha = 5\%$

Ipotizzando che H_0 sia vera:

$$\frac{|\overline{X} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|9.5 - 8|}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \approx 1.68$$

Se:
$\alpha = P_r$(rifiuto H_0 / H_0 vera)
$\alpha \uparrow$ più *"facile"* rifiutare l'ipotesi
$\alpha \downarrow$ più *"difficile"* rifiutare l'ipotesi

3.1 Metolodogia alternativa

$$Ts = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow \text{Statistica di test}$$

$P-$value = **probabilità** di ottenere un valore più "anomalo" di quello osservato

Esempio: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$

$n = 5$ $\qquad H_0 : \mu = 8$

$\overline{X} = 8.5$ $\qquad H_a : \mu \neq 8$

$$\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|8.5 - 8|}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2} 0.5 \approx 0.559$$

$$P\{|z| > 0.559\} = 2P\{z > 0.559\} \approx 2 \cdot 0.288 = 0.579 \rightarrow \text{P-value}$$

Se $\boldsymbol{\overline{X} = 11.5}$:

$$\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|11.5 - 8|}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \approx 3.913$$

$$P\{|z| > 3.913\} = 2P\{z > 3.913\} \leq 0.00005 \rightarrow \underline{\text{Rifiuto ipotesi } H_0}$$

3.2 Test di Hp unilaterale

$$H_0 : \mu = \mu_0 (\mu \leq \mu_0) \qquad\qquad H_a : \mu > \mu_0$$

$$C = \{(X_1 \ldots n) \cdot \overline{X} - \mu_0 > c\}$$

$$P_{r_{\mu_0}}\{\overline{X} - \mu_0 > c\} = P_r\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\} = P_{r_{\mu_0}}\{z > z_a\} = \alpha$$

Statistica test $\boldsymbol{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_\alpha}$ **accetto**

3.3 Test di ipotesi

H_0	H_a	TS	Livello α	P - Value
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{1}}$	Rifiuto H_0 se $TS > \frac{z\alpha}{2}$	$2P(z \geq \|TS\|)$

Altre ipotesi :

H_0	H_a	TS	Livello α	P - Value
$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{2}}$	$H_0 \quad z_\alpha > TS$	$P(z \geq TS)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	//	$H_0 \quad z_\alpha < -TS$	$P(z \leq TS)$

3.4 Uguaglianza media di due popolazioni

$X_1 \dots X_n \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_2^2)$	$Y_i \dots Y_m \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i^n X_i$	$\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_i^m Y_i$
$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^2$	$S_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2$

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m}$$

H_0	H_a	TS		
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu \neq \mu_2$	$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\sigma_{1/n}^2 + \sigma_{2/m}^2}}$	Livello α	P - Value
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu \neq \mu_2$	$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}}$	rif. $\|TS\| > z_{\frac{\alpha}{2}}$	$2P(z \geq \|TS\|)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu \neq \mu_2$	$S_i \in$ T-student		

4) T-test per coppie di dati Se X_1 e X_2 **<u>NON</u>** sono indipendenti

$W_i = X_i - Y_i$

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

ES Manutenzione (n guasti) tagliand