

Contents

1	Introduzione	2
1.1	Intervalli di confidenza (Bilaterali)	7
1.2	Intervalli di confidenza (Unilaterali)	9
1.3	Esempio:	9
1.4	Intervallo di confidenza	10
1.5	Integrali Monte Carlo	11
1.6	Intervallo di confidenza di Bernoulli	11

1 Introduzione

$$X_1 = 1.7$$

$$X_2 = 1.82$$

$$X_3 = 1.73$$

$$X_4 = 1.7$$

$$X_5 = 1.8$$

$\hat{\theta}$? Altezza della popolazione

Possibile soluzione :

$$\hat{\theta}_a = \frac{1}{n} \sum_4^5 x_i = \frac{1.7 + 1.82 + 1.73 + 1.7 + 1.8}{5} = \frac{8.75}{5} = 1.75$$

$$\hat{\theta}_b = \frac{\min(x_i) + \max(x_i)}{2} = \frac{3.52}{2} = 1.76$$

$$\hat{\theta}_c = \frac{1}{3} \sum_2^4 x_i = \frac{1}{3}(1.8 + 1.73 + 1.7) = \frac{5.23}{3} = 1.743$$

Scartiamo il più *piccolo* e il *massimo*, calcolando poi la **media** dei rimanenti

Stima parametrica (Point) Parametric Estimation

Ipotesi: - Esiste un parametro θ incognito n dati a disposizione $\{X_1, X_2, X_n\}$

Legge di probabilità che descrive il fenomeno che ha generato i dati

Formula generica: Bayes

$$P(\theta/X_1 \dots X_n) = \frac{P(X_1 \dots X_n/\theta)P(\theta)}{P(X_1 \dots X_n)}$$

Verosomiglianza (likelihood)

MLE Maximum Likelihood Estimation (Stima a Massima Verosomiglianza)

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} L(\theta) = \operatorname{argmax} [f(X_1 \dots X_n / \theta)]$$

Esempio (Legge -> Distribuzione di Poisson)

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2 \dots X_n / \theta) &= f(X_1 / \theta) \cdot f(X_2 / \theta) \dots f(X_n / \theta) \\ &= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_1}{\theta}} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_2}{\theta}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_n}{\theta}} \\ &= \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_i x_i} \end{aligned}$$

Esempio (MLE Ipotesi di Bernoulli)

$$X_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$P\{X_i = 1\} = 1 - P\{X_i = 0\}$$

$$P\{X_i = x\} = P^x (1 - P)^{1-x} \quad x \in \{0, 1\}$$

Dove **X** è una *variabile aleatoria* e **x** una *variabile sperimentale*

$$f(x_1 \dots x_n / P) = P^{x_1} (1 - P)^{1-x_1} \cdot P^{x_2} (1 - P)^{1-x_2} \dots P^{x_n} (1 - P)^{1-x_n} =$$

$P^{\sum_i x_i} (1 - P)^{n - \sum_i x_i} \longrightarrow$ Bisogna trovare il **massimo** della funzione

$$\begin{aligned}
\log(f(x_1 \dots x_n/P)) &= \sum_1^n x_i \log P - (n - \sum_i^n x_i) \log(1 - P) \\
&= \frac{d}{dP} [\log(f)] = 0 = \frac{1}{\hat{P}} \sum_i^n x_i - \frac{n - \sum_i^n x_i}{(1 - \hat{P})} \\
&= (1 - \hat{P}) \sum_i^n x_i = \hat{P} (n - \sum_i^n x_i) \\
&= \hat{P} = \frac{\sum_i^n x_i}{n} \quad \text{MLE}
\end{aligned}$$

Esercizio 1 Probabilità che Oneto dia 30L (Lode)

$$n = 120$$

$$\sum_i^{120} x_i = 18$$

$$\hat{P} = \frac{18}{120} = 0.15 \rightarrow 15\%$$

Esercizio 2 N studenti da 30 e lode

$$n_1 = 18 \leftarrow \text{Oneto}$$

$$n_2 = 20 \leftarrow \text{Anguilla}$$

$$n_{1,2} = 10 \leftarrow 30L \text{ sia con Oneto che con Anguilla}$$

$$N = ? \quad \text{Studenti da } \mathbf{30 \text{ e Lode}}$$

$$\hat{P}_1 \approx \frac{n_{1,2}}{n_2}$$

$$\hat{P}_1 \approx \frac{n_1}{N}$$

$$\frac{n_{1,2}}{n_2} = \frac{n_1}{N}$$

$$\Rightarrow N = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_{1,2}} \rightarrow \frac{18 \cdot 20}{10} = 36$$

MLE POISSON

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2 \dots x_n / \lambda) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_2}}{x_2!} \dots \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_n}}{x_n!} \\&= \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_i x_i}}{x_1! x_2! \dots x_n!}\end{aligned}$$

Formula generica: $\lambda = \frac{\sum_i x_i}{n}$ MLE

Esercizio 3 Stima del numero di incidenti medio in auto n = 10

$$x_1 = \{4, 0, 6, 5, 2, 1, 2, 0, 4, 3\}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{27}{10} = 2.7$$

$$P\{x \leq 2\} = e^{-2.7} \left(\frac{2.7^0}{0!} + \frac{2.7^1}{1!} + \frac{2.7^2}{2!} \right) \approx .4936 \rightarrow 49.36\%$$

Probabilità che non ci siano più di **2 incidenti**

MLE UNIFORME

$$f(x_1, x_2 \dots x_n / \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & 0 < x_i < \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \max\{x_i\}$$

$$\frac{\hat{\theta}}{2} = \frac{\max\{x_i\}}{2}$$

MLE GAUSSIANA

$$f(x_1, x_2 \dots x_n / \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sigma^n} e^{\frac{-\sum_i (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\log[f] = -\frac{n}{2} \log 2\pi - n \log \sigma - \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{d \log f}{d \mu} = 0 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \longrightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_i x_i}{n}$$

$$\frac{d \log f}{d \sigma} = 0 = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{4\sigma^4} \longrightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n}}$$

Esercizio primo

$$x_1 = 1.7$$

$$x_2 = 1.82$$

$$x_3 = 1.73$$

$$x_4 = 1.7$$

$$x_5 = 1.8$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{1.7 + 1.82 + 1.73 + 1.7 + 1.8}{5} = 1.75$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{0.05^2 + 0.07^2 + 0.02^2 + 0.05^2 + 0.05^2}{5}} \approx 0.051$$

Intervalli di confidenza normali TODO

Intervalli di confidenza gaussiani σ^2 Nota

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$\hat{\mu} \longleftarrow \mu$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$P(-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < +1.96) = 0.95$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow P\left(-1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &P\left(\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Esempio: Sistema di comunicazione $\sigma^2 = 4$ $n = 9$

$$x_1 = \{5.85, 12, 15, 7, 9, 7.5, 6, 5, 10.5\}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i = \frac{1}{9} \sum_i^n x_i = \frac{81}{9} = 9$$

$$P\left(9 - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < \mu < 9 + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right) = 0.95$$

$$p\left(9 - 1.96 \frac{2}{3} < \mu < 9 + 1.96 \frac{2}{3}\right) = 0.95$$

$\longrightarrow [7.693, 10.31] \rightarrow \mu$ si trova tra 7.693 e 10.31

In generale Prob = $1 - \alpha$

$$\left(\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \text{Si rileva dalle tavole}$$

1.1 Intervalli di confidenza (Bilaterali)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i$$

$$x_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} \sim \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\mathcal{Z} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{Var}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(x)$$

Supponiamo che σ sia nota:

$$\Pr \left\{ -z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < +z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr \left\{ -z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{m}}} < +z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr \left\{ -z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < \bar{x} - \mu < +z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \right\}$$

$$\Pr \left\{ -\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < -\mu < -\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \right\} =$$

$$\Pr \left\{ \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \right\} = 1 - \alpha$$

1.2 Intervalli di confidenza (Unilaterali)

$$\Pr \{z < z_\alpha\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr \left\{ \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{m}}} < z_\alpha \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr_r \left\{ \bar{x} - \mu < z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr \left\{ -\mu < -\bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr \left\{ \bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < \mu \right\} = 1 - \alpha$$

$$\mu \in \left(\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{m}}, +\infty \right)$$

1.3 Esempio:

Pesca stagionale dei salmoni (*Fisso intervallo -> trovo n*)

Ad ogni stagione il peso medio dei salmoni è diverso ma $\sigma = 0.3$ Kg

Intervallo di confidenza al 95%, quindi $\alpha = 0.05$

$$(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq 0.1 \quad \sqrt{n} \geq \frac{1.96}{0.1} \sigma$$

$$n \geq \left(\frac{1.96}{0.1} 0.3 \right)^2 = 5.88^2 \approx 34.6 \leftarrow \text{salmoni}$$

1.4 Intervallo di confidenza

con *media* e *varianza* **incognite**

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sigma \quad \text{Non nota}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i^2 - n\bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i\bar{x}) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_i x_i^2 + \frac{n\bar{x}^2}{n-1} - 2\bar{x} \frac{\bar{x}n}{n-1} \end{aligned}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim T_n - 1 \quad (\text{T studenti con } n \text{ gradi di libertà})$$

Esempio: Trasimittente (μ) e ricevitore ($\mu + \text{rumore}$)

$$95\%(7.69, 10.31) \quad \hat{\mu} = 9, \sigma^2 = 4$$

$$X_i \{5, 8.5, 12, 15, 7, 9, 7.5, 6.5, 10.5\}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{9} \sum_i X_i = \frac{81}{9} = 9$$

$$s^2 = \frac{1}{8} \sum_i (X_i^2 - 9.81) \approx 9.5 \quad s = 3.082$$

$$\mu \in \left(9 - 2.306 \frac{3.082}{3}, 9 + 2.306 \frac{3.082}{3} \right) = (6.63, 11.37)$$

Si può dimostrare che $T_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \mathbb{E}[S] \geq z_{\alpha} \sigma$

1.5 Integrali Monte Carlo

$$\theta = \mathbb{E}[f(u)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)p(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du$$

Esempio :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = ? \quad \mathbb{E}[\sqrt{1-x^2}] \quad n = 100$$

$$X_i = \sqrt{1-U_i^2} \quad X = \{X_1, X_2 \dots X_{100}\}$$

$$\hat{\theta} = \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}, 99 \frac{s}{\sqrt{100}} \rightarrow \text{Per vedere se il risultato è corretto (confidenza)}$$

1.6 Intervallo di confidenza di Bernoulli

n esperimenti

Binomiale

media np

varianza np(1-p)

$$\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_i^n X_i \quad X_i \in \{0, 1\}$$

$$X = n\hat{P} \quad P_r\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}} \approx 1 - \alpha\}$$

$$\text{Dove } z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$\frac{x - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\begin{aligned}
\rho_r \left\{ -z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{x - mp}{\sqrt{mp(1 - \hat{p})}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} &\cong 1 - \alpha \\
\rho_r \left\{ \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1 - p)}{m}} < \mu < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - p)}{m}} \right\} &\simeq 1 - \alpha
\end{aligned} \tag{1}$$