Abgabe 1 für Computergestützte Methoden

Gruppe *(Ihre Gruppennummber)*, *(Ihre Namen)*

(Abgabedatum)

Inhaltsverzeichnis

1 Der zentrale Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS) ist ein fundamentales Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie, das die Verteilung von Summen unabhängiger, identisch verteilter (*i.i.d.*) Zufallsvariablen (ZV) beschreibt. Er besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Summe einer großen Anzahl solcher ZV annähernd normalverteilt ist, unabhängig von der Verteilung der einzelnen ZV. Dies ist besonders nützlich, da die Normalverteilung gut untersucht und mathematisch handhabbar ist.

1.1 Aussage

Sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge von *i.i.d.* ZV mit dem Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ und der Varianz $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$, wobei $0 < \sigma^2 < \infty$ gelte. Dann konvergiert die standardisierte Summe Z_n dieser ZV für $n \to \infty$ in Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung:[1]

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1). \tag{1}$$

Das bedeutet, dass für große n die Summe der ZV näherungsweise normalverteilt ist mit Erwartungswert $n\mu$ und Varianz $n\sigma^2$:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2). \tag{2}$$

1.2 Erklärung der Standardisierung

Um die Summe der ZV in eine Standardnormalverteilung zu transformieren, subtrahiert man den Erwartungswert $n\mu$ und teilt durch die Standardabweichung $\sigma\sqrt{n}$. Dies führt zu der obigen Formel (1). Die Darstellung (2) ist für $n \to \infty$ nicht wohldefiniert.

1.3 Anwendungen

Der ZGS wird in vielen Bereichen der Statistik und der Wahrscheinlichkeitstheorie angewendet. Typische Beispiele sind:

- *(ergänzen Sie hier einen Anwendungsfall für den ZGS)*
- *(ergänzen Sie hier einen weiteren Anwendungsfall)*

[1] Der zentrale Grenzwertsatz hat verschiedene Verallgemeinerungen. Eine davon ist der **Lindeberg-Feller-Zentrale-Grenzwertsatz** [1, Seite 328], der schwächere Bedingungen an die Unabhängigkeit und die identische Verteilung der ZV stellt.

2 Bearbeitung zur Aufgabe 1

(ergänzen Sie hier Ihre Lösung zur Aufgabe 1)

Literatur

[1] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 3. edition, 2013.