4 - 1 - TRIPPELINTEGRALER

TMA4121 skal handle om de store partielle differensiallikningsmodellene som ligger i bånn for klassisk fysikk. Før vi kan gå løs på dette, må vi ha noen versjoner av analysens fundamentalteorem i tre romlige variable, og før vi kan gjøre det, har vi et integral vi må ta unna - trippelintegralet. Vi integrerer $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ over et område $\Omega \in \mathbb{R}^3$, og vi tenker på f som massetetthet og på Ω utstrekningen til en ting du ønsker å finne den totale massen til. Fysikere skriver

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV$$

men matematikere liker bedre å skrive

$$\iiint_\Omega f(x)\, dx \qquad \text{eller} \qquad \iiint_\Omega f \qquad \text{eller bare} \qquad \int_\Omega f$$

Det enkleste er å integrere over en rektangulær boks, og integralene utføres fra innerst til ytterst slik som med dobbeltintegraler. La $f(x) = x_1^2 x_2 + x_3$.

$\boxed{1}$ Regn ut

$$\iiint_\Omega f(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x_1^2 x_2 + x_3 \; dx_3 dx_2 dx_1.$$

Dersom f er massetetthet, hvordan tolkes det innerste integralet? Hva med de to innerste?

Forhåpentligvis ser du at integrasjonsrekkefølgen kan gjøres på seks forskjellige måter.

$\boxed{2}$ Regn ut integralet på de fem andre måtene.

Trippelintegraler blir hårete om integrasjonsdomenet er uggent. La oss prøve.

$\boxed{3}$ Gjenta når Ω er et tetraeder med hjørner i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$.

$\boxed{4}$ Hva om Ω er definert ved ulikhetene $0 \leq x_3 \leq 1 - |x_1| - |x_2|$?

Hvis $\rho(x)$ er massetetthet i vekt per volum og Ω er en klump med masse, er trippelintegralet til ρ over Ω klumpens totale masse. Massesenteret er gitt ved

$$\frac{1}{\iiint_\Omega \rho(x)\,dx}\begin{pmatrix}\iiint_\Omega x_1\rho(x)\,dx\\ \iiint_\Omega x_2\rho(x)\,dx\\ \iiint_\Omega x_3\rho(x)\,dx\end{pmatrix}$$

Dersom ρ er konstant, er massesenteret en geometrisk egenskap ved Ω som kalles **sentroiden**.

$\boxed{5}$ Finn sentroidene til Ω i oppgave 3 og oppgave 4.

Hvis du vil trippelintegrere en funksjon f over et domene Ω som ikke er rektangulært, kan det fort bli noe svineri.

$\boxed{6}$ Sett opp formelen for massesenteret til en halv enhetskule i kartesiske koordinater.

Heldigvis finnes det koordinatskift. Trikset er det samme som for dobbeltintegraler - man må finne en parametrisering av integrasjonsområdet Ω hvis definisjonsmengde D er en rektangulær boks eller noe annet enkelt, og så kompenserer man for volumendringen med parametriseringens jacobideterminant. La $g : D \to \Omega$ være en koordinatavbildning gitt ved $y = g(x)$. Volumet til Ω er

$$\int_\Omega = \int_D |g'(x)|\,dx$$

der $|g'(x)|$ er determinanten til jacobimatrisen til g.

$\boxed{7}$ En koordinatavbildning $g : D \to \Omega$ er gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Finn volumet av $f(D)$ dersom D er enhetskuben.

Det finnes to koordinattransformasjoner som brukes mye i fysikk. Dersom integrasjonsområdet er formet som en sylinder parallell med z-aksen, bruker man sylinderkoordinater:[1]

$$x = g(s, \theta, z) = \begin{pmatrix} s\cos\theta \\ s\sin\theta \\ z \end{pmatrix}.$$

Det er selvfølgelig ikke noe problem å legge sylinderen parallelt med de andre koordinataksene. Variabelen s er den samme som r i polarkoordinater, men på neste side trenger vi r til radien i tre dimensjoner, så det er bedre å bruke s i sylinderkoordinater.

8 Finn jacobideterminanten.

Jeg kunne bedt deg om å finne massesenteret til en sylinder som var kappet på langs eller noe sånt, men du har allerede funnet massesenteret til et kakestykke, så det er ikke nødvendig. Vi får heller ta noen gamle klassikere fra TMA4105.

9 Regn ut

$$\iiint_\Omega (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dx$$

der $\Omega = \{x : 0 \le x_1^2 + x_2^2 \le 9 \text{ og } 0 \le x_3 \le 5\}$.

10 Finn volumet av den delen av kjeglen

$$x_3^2 \ge x_1^2 + x_2^2$$

som ligger innenfor kuleskallet $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

11 Regn ut

$$\iiint_\Omega x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx$$

der legemet Ω er gitt ved $0 \le x_3 \le 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x_2 \ge 0$.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system

Den andre viktige transformasjonen er kulekoordinater:[2]

$$y = g(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Her er r avstanden til origo, θ vinkelen med x_1-aksen (altså den samme som i polarkoordinater), og ϕ vinkelen med x_3-aksen (altså en ny vinkel du antagelig ikke har sett før).

$\boxed{12}$ Finn jacobideterminanten.

$\boxed{13}$ Finn massesenteret til en åttendels kule, en kvart kule og en halvkule, alle med konstant massetetthet.

Også her får vi ta noen klassikere fra TMA4105.

$\boxed{15}$ La Ω være det romlige legemet som er avgrenset av flaten $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4}$ samt planene $x_3 = 0$ og $x_3 = \sqrt{5}$. Regn ut volumet av Ω.

$\boxed{16}$ Finn volumet av legemet som er avgrenset av flaten oppgitt i kulekoordinater ved

$$r = 4 - \cos(\varphi).$$

[2]https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system