

4 - 2 - NABLAOPERATOREN - LF

- 1 Melina har kjefta mye på meg opp gjennom for å regne ut kryssproduktet på teite måter. Husk å puste med nesen - det er bra for blodtrykket:
<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11178300/>

- 2 For sylinderkoordinater er jacobimatrisen gitt ved

$$|g'(s, \theta, z)| = \begin{pmatrix} \cos \theta & -s \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & s \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den første og siste kolonnen er allerede korrekt normaliserte, mens for den i midten er det bare å dele ut s . Basisen er altså

$$(e_s \quad e_\theta \quad e_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

For kulekoordinater har vi

$$g'(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

og normaliserer vi kolonnene, får vi kulekoordinatbasisen

$$(e_r \quad e_\theta \quad e_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta & \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Merk at e_r er det samme som koordinatene til x på enhetskuleskallet, og at e_θ er enhetsstangvektoren til enhetssirkelen i x_1x_2 -planet.

- 3 Dette blir pent og likner mer på den varianten du lærte på gymnaset:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_r}{r^2}$$

- 5 Jacobimatrisen blir identitetsmatrisen, divergensen blir tre og rotasjonen null.

- 6 Jacobimatrisen blir

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, divergensen blir null og rotasjonen

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 7 Det elektriske feltet fra en punktladning q plassert i origo er

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3},$$

og jacobimatrisen var det siste vi beregna i 4111:

$$\nabla E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_1^2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_2x_1}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_2^2}{|x|^5} & -3\frac{x_2x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_3x_1}{|x|^5} & -3\frac{x_3x_2}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_3^2}{|x|^5} \end{pmatrix}$$

Dersom $x \neq 0$, er

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{x}{|x|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_k}{|x|^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_k^2}{|x|^5} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{|x|^3} - \frac{3}{|x|^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{x}{|x|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} -3\frac{x_3x_2}{|x|^5} + 3\frac{x_3x_2}{|x|^5} \\ -3\frac{x_1x_3}{|x|^5} + 3\frac{x_1x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_1x_2}{|x|^5} + 3\frac{x_1x_2}{|x|^5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Siste ord er ikke helt sagt her, vent i spenning til økt 4-5.

- 8 Denne er litt morsom. Dersom skiven er sentrert i origo og har rotasjonshastigheten ω gitt i radianer per sekund, er hastighetsvektoren i punktet med koordinater $(s, \theta, 0)$ gitt ved

$$\begin{aligned} v &= r\omega e_\theta \\ &= r\omega(-e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta) \\ &= \omega(-e_1 x_2 + e_2 x_1) = \omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Divergensen til denne er null, men rotasjonen er $2e_3\omega$. Jeg vet ikke om det finnes noe godt norsk ord for størrelsen $\frac{1}{2}\nabla \times f$, men på engelsk kalles denne "rotation", mens det vi kaller "rotasjon" kaller de "curl".

- 10 Denne blir null.

11

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla \cdot g) &= \nabla \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right), \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right), \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \right) \\
&= \left(\nabla \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}, \nabla \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}, \nabla \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3} \right).
\end{aligned}$$

12 Også null.

13 Rotasjonen til f er

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

og tar vi dobbelrotasjonen, får vi

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\
&= \nabla^T (\nabla \cdot f) - \Delta f
\end{aligned}$$

Merk bruken av ∇^T som er gradientoperatoren på høykant istedet for lavkant. Mer om denne i økt 4-6.

14 Da jeg starta semesteret, tenkte jeg at det ikke var nødvendig å være så nøye på dette med rad- og kolonnevektorer og nablaoperatoren, men nå i andre enden av semesteret, ser jeg at det tvinger seg fram. Poenget med denn oppgaven er av vi må definere

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}$$

for hvis ikke denne står på høykant, blir ting klønete å skrive opp senere.