

## 4 - 1 - TRIPPELINTEGRALER - LF

- 1 Her er det bare å antiderivere slik som i dobbeltintegraler. Husk å holde tungen beint i munnen på hvilken variabel du antideriverer:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^2 \left( x_1^2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=3} dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^2 3x_1^2 x_2 + \frac{9}{2} \, dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^2 \left( \frac{3}{2} x_1^2 x_2^2 + \frac{9}{2} x_2 \right)_{x_2=0}^{x_2=2} dx_1 \\
 &= \int_0^1 6x_1^2 + 9 \, dx_1 = 2x_1^3 + 9x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} = 11
 \end{aligned}$$



Dersom integranden måles i masse per volum, forteller det innerste integralet deg hvor mye masse per areal som sitter over punktet med koordinater  $(x_1, x_2)$ . Tenk at du er geolog og driller en sedimentprøve og måler vekten av den for å estimere masse per areal under punktet der du står. Eller at du står på taket av et hus eller og driller ned i huset og veier - treffer du bare isolasjon og luft er det lav vekt per areal, treffer du tilfeldigvis mønsåsen eller en sperre eller en lafestokk eller midt i en vegg, er det høyere vekt per areal.



For å forstå de to innerste integralene må du tenke at du står ved siden av huset og lurer på hvor mye masse det er i huset per meter hus, tenk at du kapper huset med en motorsag på forskjellige steder, og måler masse per meter for hvert tverrsnitt bortover.



**[2]** Her er en annen rekkefølge:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_2 dx_3 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^3 \left( \frac{1}{2} x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3 \right)_{x_2=0}^{x_2=2} dx_3 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^3 2x_1^2 + 2x_3 \, dx_3 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \left( 2x_1^2 x_3 + x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=3} dx_1 \\
 &= \int_0^1 6x_1^2 + 9 \, dx_1 \\
 &= 2x_1^3 + 9x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} = 11
 \end{aligned}$$

Jeg sa du skulle gjøre det på alle seks måter, men det er vel litt overkill.

**[3]** Planet som går gjennom  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  og  $(0, 0, 1)$  er  $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ , og dette skjærer  $x_1 x_2$ -planet i linjen  $x_2 = 1 - x_1$ . Det innerste integralet, altså det som regner ut masse per areal over et punkt i  $x_1 x_2$ -planet, er

$$\int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3.$$

Denne funksjonen må nå dobbeltintegreres over korrekt område i  $x_1 x_2$ -planet:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1$$

Å regne det ut er bare gjøre som i oppgave 2, huske å merke tydelig hva som skal inn i hvilken variabel slik:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \left( x_1^2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=1-x_1-x_2} dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1^2 x_2 (1 - x_1 - x_2) + \frac{1}{2} (1 - x_1 - x_2)^2 \, dx_2 dx_1
 \end{aligned}$$

og så videre.

**[4]** Dette området ser ut som pyramiden i Giza, og flaten  $x_3 = 1 - |x_1| - |x_2|$  skjærer  $x_1 x_2$ -planet i  $|x_1| + |x_2| = 1$ . Det konseptuelt enkleste er å bruteforce integralet og sette opp ett integral

for hver kvadrant i  $x_1x_2$ -planet:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ & + \int_0^1 \int_0^{1+x_1} \int_0^{1+x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ & + \int_0^1 \int_0^{-1-x_1} \int_0^{1+x_1+x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ & + \int_0^1 \int_0^{-1+x_1} \int_0^{1-x_1+x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \end{aligned}$$

5 Massesenteret til et rektangel er ikke så spennende, men vi kan ta tetraederet. Massen er

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \rho(x) \, dx &= \rho \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= \rho \int_0^1 \int_0^{1-x_1} 1 - x_1 - x_2 \, x_2 dx_1 \\ &= \rho \int_0^1 \left( x_2 - x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 \right)_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} dx_1 \\ &= \rho \int_0^1 1 - x_1 - x_1(1 - x_1) - \frac{1}{2}(1 - x_1)^2 \, dx_1 = \frac{\rho}{6} \end{aligned}$$

(dette kunne vi også funnet med formelen for volum av pyramide) slik at massesenteret blir

$$\frac{1}{\iiint_{\Omega} \rho(x) \, dx} \begin{pmatrix} \iiint_{\Omega} x_1 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_2 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_3 \rho(x) \, dx \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_2 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \end{pmatrix}.$$

Dette ser ut som tre forskjellige integraler, men på grunn av symmetrien i problemet er det er egentlig bare ett. Vi beregner

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1(1 - x_1 - x_2) \, dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 x_1 \left( x_2 - x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 \right)_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1(1 - x_1)^2 \, dx_1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

og massesenteret sitter følgelig i

$$6 \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_2 dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_3 dx_3 dx_2 dx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

**[6]** Dette blir helt forferdelig:

$$\iiint_{\Omega} f = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \int_{-\sqrt{1-x_2^2-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_2^2-x_1^2}} f(x) dx_3 dx_2 dx_1$$

**[7]** Dette blir determinanten til matrisen ganget med volumet til enhetskuben, altså  $4 \cdot 1$ .

$$\boxed{8} \quad |g'(s, \theta, z)| = \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & -s \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & s \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = s$$

**[9]** Integrasjonsområdet er bildet av en rektangulær boks under sylinderkoordinatavbildningen, så dette integralet blir veldig greit:

$$\begin{aligned} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (s^2 + z^2) s ds d\theta dz &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^3 s^3 + sz^2 ds d\theta dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{2}s^2z^2 \right)_{s=0}^{s=3} d\theta dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} + \frac{9}{2}z^2 d\theta dz \\ &= 2\pi \int_0^5 \frac{81}{4} + \frac{9}{2}z^2 dz = \pi \left( \frac{5 \cdot 81}{2} + 125 \cdot 3 \right) \end{aligned}$$

**[10]** Funksjonen

$$x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = s$$

ser ut som en fotballkjegle som står på hodet, og skjærer kuleskallet

$$x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{1 - s^2}$$

i  $s = 1/\sqrt{2}$ , så volumet er

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_s^{\sqrt{1-s^2}} s dz ds d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} (\sqrt{1-s^2} - s) s ds d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} s \sqrt{1-s^2} - s^2 ds d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{3}(1-s^2)^{3/2} - \frac{1}{3}s^3 \right)_{s=0}^{s=1/\sqrt{2}} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3} ((1/2)^{3/2} - 1) - \frac{1}{3 \cdot 2^{3/2}} d\theta = \frac{4}{3}\pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

På grunn av oppgaveformuleringen sitter det et identisk volum på undersiden av  $x_1x_2$ -planet, så korrekt volum blir

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_s^{\sqrt{1-s^2}} s dz ds d\theta = \frac{8}{3}\pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

- 11** Ulikhetene  $0 \leq x_3 \leq 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  blir  $0 \leq z \leq 1 - s$  i sylinderkoordinater. Denne kjeglen står motsatt av den i forrige oppgave og skjærer  $x_1x_2$ -planet i enhetssirkelen. Siden  $x_2 \geq 0$  er kjeglen kappa i to langs et vertikalt plan gjennom midten av kjeglen, så volumet blir

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{1-s} z s dz d\theta ds &= \int_0^1 \int_0^\pi \left( \frac{1}{2}z^2 s^2 \right)_{z=0}^{z=1-s} d\theta ds \\
 &= \int_0^1 \int_0^\pi \left( \frac{1}{2}(1-s)^2 s^2 \right) d\theta ds \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-s)^2 s^2 ds = \frac{\pi}{60}.
 \end{aligned}$$

- 12**  $g' (r, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{vmatrix} = r^2 \sin \phi.$

- 13** Massesenter er gitt ved

$$\frac{1}{\iiint_{\Omega} \rho(x) dx} \begin{pmatrix} \iiint_{\Omega} x_1 \rho(x) dx \\ \iiint_{\Omega} x_2 \rho(x) dx \\ \iiint_{\Omega} x_3 \rho(x) dx \end{pmatrix}.$$

En kvart enhetskule i kulekoordinater som ligger slik at  $x_1 \geq 0$  og  $x_2 \geq 0$ , beskrives av ulikhetene

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

og siden massetettheten er konstant, kansellerer denne. På grunn av symmetri vet vi at  $x_1$ -koordinaten er 0:

$$\iiint_{\Omega} x_1 \, dx = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi d\theta dr = 0$$

samt at  $x_2$ - og  $x_3$ -koordinatene må være like:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x_2 \, dx &= \iiint_{\Omega} x_3 \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r^3 \sin 2\varphi \, d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\pi r^3 \, d\theta dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Volumet til en kvart enhetskule er  $\pi/3$ , så vi kan nå beregne

$$\frac{\rho \iiint_{\Omega} x_2 \, dx}{\rho \iiint_{\Omega} dx} = \frac{\pi/8}{\pi/3} = \frac{3}{8}$$

slik at massesenteret sitter i  $(0, 3/8, 3/8)$ . Dette skalerer selvfølgelig til vilkårlig radius, slik at om radien er  $r$  er massesenteret i  $(0, 3r/8, 3r/8)$ . For en åttedels kule er det bare å bytte ut  $\pi$  med  $\pi/2$  i integrasjonsgrensene for  $\theta$  og bruke at alle koordinatene må være like, slik at massesenteret sitter i  $(3/8, 3/8, 3/8)$ . Samme med halvkulen, bruk symmetri og bruk  $2\pi$  som øvre grense i  $\theta$  og oppdag at massesenteret sitter i  $(0, 0, 3/8)$ .

- 15** Her er det nok best å bruke sylinderkoordinater. Flaten  $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4}$  blir  $z = \sqrt{s^2 - 4}$  i sylinderkoordinater, så vi kan integrere oss fra langs  $s = 0$  til  $s = \sqrt{4 + z^2}$  innerst, og få

$$\int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4+z^2}} sdsd\theta dz = \pi \int_0^{\sqrt{5}} 4 + z^2 \, dz = \frac{17\sqrt{5}}{3}\pi.$$

- 16** Når  $\varphi$  går fra 0 til  $\pi$ , går  $\cos \varphi$  fra 1 til  $-1$ , så likningen

$$r = 4 - \cos(\varphi).$$

beskriver en slags litt pæreformet sak i  $\mathbb{R}^3$ . Det er nok best å integrere seg fra 0 til denne kurven i  $r$  først. Volumet blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{4-\cos \varphi} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi (4 - \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{6} (5^4 - 3^4).$$

**[17]** Det som er skummelt her er at vi har

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

så dersom vi skriver  $E(r, \theta, \phi)$ , sier vi

$$E(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + \theta^2 + \phi^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix}$$

men mener egentlig

$$E(r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Det ryddigste er derfor å skrive

$$E = h(r, \theta, \phi) = f(g(r, \theta, \phi))$$

og så holde nøye styr på hva vi mener med  $f$ ,  $g$  og  $h$ . La oss først derivere  $f$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_1^2}{|x|^5} & -3\frac{x_1 x_2}{|x|^5} & -3\frac{x_1 x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_2 x_1}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_2^2}{|x|^5} & -3\frac{x_2 x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_3 x_1}{|x|^5} & -3\frac{x_3 x_2}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_3^2}{|x|^5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|x|^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{|x|^5} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{pmatrix} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|x|^3} I - \frac{3}{|x|^5} x x^T \right) \end{aligned}$$

Kulekoordinater er gitt ved

$$g(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}$$

slik at

$$g'(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} h'(r, \theta, \phi) &= f'(g(r, \theta, \phi)) g'(r, \theta, \phi) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left( I - 3 \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \right) \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

som vi kan gange ut og forenkle, men i dette tilfellet er det faktisk enklere å sette kulekoordinatene inn i uttrykket for  $E$  (nå med korrekt notasjon)

$$E = h(r, \theta, \phi) = f(g(r, \theta, \phi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} r^{-2} \cos \theta \sin \phi \\ r^{-2} \sin \theta \sin \phi \\ r^{-2} \cos \phi \end{pmatrix}$$

og så derivere på direkten:

$$\begin{aligned} E = h'(r, \theta, \phi) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} -2r^{-3} \cos \theta \sin \phi & -r^{-2} \sin \theta \sin \phi & r^{-2} \cos \theta \cos \phi \\ -2r^{-3} \sin \theta \sin \phi & r^{-2} \cos \theta \sin \phi & r^{-2} \sin \theta \cos \phi \\ -2r^{-3} \cos \phi & 0 & -r^{-2} \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} -2 \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ -2 \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ -2 \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$