KU LEUVEN

Toegepaste Mechanica 2

Deel Dynamica

CASE 2014-2015

Auteurs:
Laurent Dossche
Jakob Festraets
Peter Lacko

Begeleiders:
Wim Desmet
Jos Vander Sloten

27 november 2014

Inhoudsopgave

1 Groepsleden

Onze groep bestaat uit de volgende leden.

1. Laurent DOSSCHE, Bachelor in de ingenieurswetenschappen, 2de jaar.
2. Jakob FESTRAETS, Bachelor in de ingenieurswetenschappen, 2de jaar.
3. Peter LACKO, Bachelor in de ingenieurswetenschappen, 2de jaar.

2 Transformatiematrices

- De matrix in (1) is de transformatiematrix om coördinaten van het bewegend $x'y'z'$-assenstelsel naar het wereldassenstelsel om te zetten. Dit bewegend assenstelsel heeft een draaing met een hoek α rond de x-as.

$$R^{x'y'z'\to xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{1}$$

- Het $x''y''z''$-assenstelsel heeft dezelfde oriëntatie als het $x'y'z'$-assenstelsel. Hier is dus geen transformatiematrix vereist.

- De matrix in (2) is de transformatiematrix om coördinaten van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het $x''y''z''$-assenstelsel om te zetten. Dit eerste bewegend assenstelsel heeft een draaing met een hoek β rond de x-as.

$$R^{x'''y'''z'''\to x''y''z''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \tag{2}$$

- Het $x''''y''''z''''$-assenstelsel heeft dezelfde oriëntatie als het $x'''y'''z'''$-assenstelsel. Hier is dus geen transformatiematrix vereist.

- De matrix in (3) is de transformatiematrix om coördinaten van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel of van het $x''''y''''z''''$-assenstelsel naar het wereldassenstelsel (xyz) om te zetten. Hierbij worden de coördinaten eerst omgezet naar het $x'y'z'$-assenstelsel en pas daarna naar het wereldassenstelsel. Dit kan met volgende matrixvermenigvuldiging.

$$\begin{aligned} R^{x'''y'''z'''\to xyz} &= R^{x'y'z'\to xyz} \cdot R^{x'''y'''z'''\to x''y''z''} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

- De transpose van bovenstaande matrices geeft vanzelfsprekend de transformatiematrices om coördinaten in de omgekeerde richting te transformeren.

3 Kinematica

3.1 Opgave 1

3.1.1 Rotatiesnelheid

Om de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\vec{\omega}_{tot}$ te berekenen zetten we eerst alle rotatiesnelheidsvectoren om naar het $x'y'z'$-assenstelsel. $\vec{\omega}_g$ en $\vec{\omega}_i$ staan hier al in, dus we moeten enkel $\vec{\omega}_w$ nog omzetten.

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_w^{'} &= R^{x'''y'''z'''\rightarrow x'y'z'} \cdot \vec{\omega}_w^{'''} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4}$$

Als we al deze vectoren optellen krijgen we $\vec{\omega}_{tot}^{'}$[1]

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_{tot}^{'} &= \vec{\omega}_g^{'} + \vec{\omega}_i^{'} + \vec{\omega}_w^{'} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_g + \omega_i + \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5}$$

Na omvorming naar het wereldassenstelsel krijgen we de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\vec{\omega}_{tot}$.

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_{tot} &= R^{x'y'z'\rightarrow xyz} \cdot \vec{\omega}_{tot}^{'} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_g + \omega_i + \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ -(\omega_g + \omega_i + \omega_w \cdot \sin(\beta)) \cdot \sin(\alpha) \\ (\omega_g + \omega_i + \omega_w \cdot \sin(\beta)) \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

[1]Notatie: het aantal accenten als superscript bij vectoren duidt op het assenstelsel waar de vector in is uitgedrukt.

3.1.2 Rotatieversnelling

Om de ogenblikkelijke totale rotatieversnellingsvector $\vec{\alpha}_{tot}$ te berekenen maken we gebruik van formule (7).

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}t} \vec{e}_{\omega_i} + \sum_{i=1}^{k} \vec{\omega}_i \frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\omega_i}}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

met:

$$\vec{\omega}_i \frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\omega_i}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{i-1} \vec{\omega}_j \times \vec{\omega}_i \tag{8}$$

Concreet wordt dit:

$$\vec{\alpha}_{tot} = \vec{\alpha}_g + \vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_w + \vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_w + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_w \tag{9}$$

$\vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_w$ en $\vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_w$ zijn termen die duiden op de verandering van oriëntatie van $\vec{\omega}_w$. Zijn oriëntatie in namelijk is afhankelijk van $\vec{\omega}_g$ en $\vec{\omega}_i$. $\vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_i$ is om dezelfde reden toegevoegd.

$\vec{\alpha}_g$, $\vec{\alpha}_i$, $\vec{\omega}_g$ en $\vec{\omega}_i$ zijn reeds uitgedrukt in het $x'y'z'$-assenstelsel. $\vec{\omega}_w$ werd al in (4) naar dit assenstelsel getransformeerd. Hieronder wordt $\vec{\alpha}_w$ getransformeerd.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_w^{'} &= R^{x'''y'''z'''\rightarrow x'y'z'} \cdot \vec{\alpha}_w^{'''} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \alpha_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

Uitgewerkt wordt $\vec{\alpha}_{tot}$:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{tot}^{'} &= \vec{\alpha}_g^{'} + \vec{\alpha}_i^{'} + \vec{\alpha}_w^{'} + \vec{\omega}_g^{'} \times \vec{\omega}_i^{'} + \vec{\omega}_g^{'} \times \vec{\omega}_w^{'} + \vec{\omega}_i^{'} \times \vec{\omega}_w^{'} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \alpha_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ 0 & \omega_i & 0 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ -\omega_w \cdot \cos(\beta) & 0 & \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & \omega_i & 0 \\ -\omega_w \cdot \cos(\beta) & 0 & \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i\omega_g + \omega_i\omega_w \sin\beta \\ \alpha_i - \omega_g\omega_w \cos\beta \\ \alpha_g + \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i\omega_w \cos\beta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{tot} &= R^{x'y'z'\rightarrow xyz} \cdot \vec{\alpha}_{tot}^{'} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i\omega_g + \omega_i\omega_w \sin\beta \\ \alpha_i - \omega_g\omega_w \cos\beta \\ \alpha_g + \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i\omega_w \cos\beta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

De uitwerking wordt hier achterwege gelaten wegens te complex.

3.2 Opgave 2

3.2.1 Snelheid

test

3.2.2 Versnelling

3.3 Opgave 3

3.4 Opgave 4

4 Dynamica

4.1 Opgave 1

4.2 Opgave 2

4.3 Opgave 3

4.4 Opgave 4

4.5 Opgave 5