

KU LEUVEN

TOEGEPASTE MECHANICA 2

DEEL DYNAMICA

---

## CASE 2014-2015

---

*Auteurs:*

Laurent DOSSCHE  
Jakob FESTRAETS  
Peter LACKO

*Begeleiders:*

Wim DESMET  
Jos VANDER SLOTEN

27 november 2014

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Groepsleden</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Transformatiematrices</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Kinematica</b>	<b>3</b>
3.1	Opgave 1 . . . . .	3
3.1.1	Rotatiesnelheid . . . . .	3
3.1.2	Rotatieversnelling . . . . .	3
3.2	Opgave 2 . . . . .	4
3.3	Opgave 3 . . . . .	4
3.4	Opgave 4 . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Dynamica</b>	<b>4</b>
4.1	Opgave 1 . . . . .	4
4.2	Opgave 2 . . . . .	4
4.3	Opgave 3 . . . . .	4
4.4	Opgave 4 . . . . .	4
4.5	Opgave 5 . . . . .	4

# 1 Groepsleden

Onze groep bestaat uit de volgende leden.

1. Laurent DOSSCHE, Bachelor in de ingenieurswetenschappen, 2de jaar.
2. Jakob FESTRAETS, Bachelor in de ingenieurswetenschappen, 2de jaar.
3. Peter LACKO, Bachelor in de ingenieurswetenschappen, 2de jaar.

# 2 Transformatiematrices

- De matrix in (??) is de transformatiematrix om coördinaten van het bewegend  $x'y'z'$ -assenstelsel naar het wereldassenstelsel om te zetten. Dit bewegend assenstelsel heeft een draaing met een hoek  $\alpha$  rond de x-as.

$$R^{x'y'z' \rightarrow xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1)$$

- Het  $x''y''z''$ -assenstelsel heeft dezelfde oriëntatie als het  $x'y'z'$ -assenstelsel. Hier is dus geen transformatiematrix vereist.
- De matrix in (??) is de transformatiematrix om coördinaten van het  $x'''y'''z'''$ -assenstelsel naar het  $x''y''z''$ -assenstelsel om te zetten. Dit eerste bewegend assenstelsel heeft een draaing met een hoek  $\beta$  rond de x-as.

$$R^{x'''y'''z''' \rightarrow x''y''z''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Het  $x''''y''''z''''$ -assenstelsel heeft dezelfde oriëntatie als het  $x'''y'''z'''$ -assenstelsel. Hier is dus geen transformatiematrix vereist.
- De matrix in (??) is de transformatiematrix om coördinaten van het  $x''''y''''z''''$ -assenstelsel of van het  $x'''y'''z'''$ -assenstelsel naar het wereldassenstelsel ( $xyz$ ) om te zetten. Hierbij worden de coördinaten eerst omgezet naar het  $x'y'z'$ -assenstelsel en pas daarna naar het wereldassenstelsel. Dit kan met volgende matrixvermenigvuldiging.

$$\begin{aligned} R^{x''''y''''z'''' \rightarrow xyz} &= R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \cdot R^{x'''y'''z''' \rightarrow x''y''z''} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- De transpose van bovenstaande matrices geeft vanzelfsprekend de transformatiematrices om coördinaten in de omgekeerde richting te transformeren.

## 3 Kinematica

### 3.1 Opgave 1

#### 3.1.1 Rotatiesnelheid

Om de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector  $\vec{\omega}_{tot}$  te berekenen zetten we eerst alle rotatiesnelheidsvectoren om naar het  $x'y'z'$ -assenstelsel.  $\vec{\omega}_g$  en  $\vec{\omega}_i$  staan hier al in, dus we moeten enkel  $\vec{\omega}_w$  nog omzetten.

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'_w &= R^{x'''y'''z''' \rightarrow x'y'z'} \cdot \vec{\omega}'''_w \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4}$$

Als we al deze vectoren optellen krijgen we  $\vec{\omega}'_{tot}$ <sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'_{tot} &= \vec{\omega}'_g + \vec{\omega}'_i + \vec{\omega}'_w \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_g + \omega_i + \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5}$$

Na omvorming naar het wereldassenstelsel krijgen we de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector  $\vec{\omega}_{tot}$ .

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{tot} &= R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \cdot \vec{\omega}'_{tot} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_g + \omega_i + \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ -(\omega_g + \omega_i + \omega_w \cdot \sin(\beta)) \cdot \sin(\alpha) \\ (\omega_g + \omega_i + \omega_w \cdot \sin(\beta)) \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6}$$

---

<sup>1</sup>Notatie: het aantal accenten als superscript bij vectoren duidt op het assenstelsel waar de vector in is uitgedrukt.

### 3.1.2 Rotatieversnelling

Om de ogenblikkelijke totale rotatieversnellingsvector  $\vec{\alpha}_{tot}$  te berekenen maken we gebruik van formule (??).

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^k \frac{d\omega_i}{dt} \vec{e}_{\omega_i} + \sum_{i=1}^k \vec{\omega}_i \frac{d\vec{e}_{\omega_i}}{dt} \quad (7)$$

met:

$$\vec{\omega}_i \frac{d\vec{e}_{\omega_i}}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} \vec{\omega}_j \times \vec{\omega}_i \quad (8)$$

Concreet wordt dit:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_g + \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_g \quad (9)$$

## 3.2 Opgave 2

## 3.3 Opgave 3

## 3.4 Opgave 4

# 4 Dynamica

## 4.1 Opgave 1

## 4.2 Opgave 2

## 4.3 Opgave 3

## 4.4 Opgave 4

## 4.5 Opgave 5