

KU LEUVEN

TOEGEPASTE MECHANICA 2

DEEL DYNAMICA

CASE 2014-2015

Auteurs:

Laurent DOSSCHE
Jakob FESTRAETS
Peter LACKO

Begeleiders:

Wim DESMET
Jos VANDER SLOTEN

27 november 2014

Inhoudsopgave

1	Groepsleden	2
2	Transformatiematrices	2
3	Kinematica	3
3.1	Opgave 1	3
3.1.1	Rotatiesnelheid	3
3.1.2	Rotatieversnelling	4
3.2	Opgave 2	5
3.2.1	Snelheid	5
3.2.2	Versnelling	6
3.3	Opgave 3	8
3.4	Opgave 4	8
3.4.1	Snelheid	8
3.4.2	Versnelling	9
4	Dynamica	11
4.1	Opgave 1	11
4.1.1	Impuls	11
4.1.2	Verandering van impuls	11
4.2	Opgave 2	12
4.2.1	Impulsmoment	12
4.2.2	Verandering van impulsmoment	13
4.3	Opgave 3	15
4.4	Opgave 4	15
4.5	Opgave 5	15

1 Groepsleden

Onze groep bestaat uit de volgende leden.

1. Laurent DOSSCHE, Bachelor in de ingenieurswetenschappen, 2de jaar.
2. Jakob FESTRAETS, Bachelor in de ingenieurswetenschappen, 2de jaar.
3. Peter LACKO, Bachelor in de ingenieurswetenschappen, 2de jaar.

2 Transformatiematrices

- De matrix in (1) is de transformatiematrix om coördinaten van het bewegend $x'y'z'$ -assenstelsel naar het wereldassenstelsel om te zetten. Dit bewegend assenstelsel heeft een draaing met een hoek α rond de x-as.

$$R^{x'y'z' \rightarrow xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1)$$

- Het $x''y''z''$ -assenstelsel heeft dezelfde oriëntatie als het $x'y'z'$ -assenstelsel. Hier is dus geen transformatiematrix vereist.
- De matrix in (2) is de transformatiematrix om coördinaten van het $x'''y'''z'''$ -assenstelsel naar het $x''y''z''$ -assenstelsel om te zetten. Dit eerste bewegend assenstelsel heeft een draaing met een hoek β rond de x-as.

$$R^{x'''y'''z''' \rightarrow x''y''z''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Het $x''''y''''z''''$ -assenstelsel heeft dezelfde oriëntatie als het $x'''y'''z'''$ -assenstelsel. Hier is dus geen transformatiematrix vereist.
- De matrix in (3) is de transformatiematrix om coördinaten van het $x''''y''''z''''$ -assenstelsel of van het $x''''y''''z''''$ -assenstelsel naar het wereldassenstelsel (xyz) om te zetten. Hierbij worden de coördinaten eerst omgezet naar het $x'y'z'$ -assenstelsel en pas daarna naar het wereldassenstelsel. Dit kan met volgende matrixvermenigvuldiging.

$$\begin{aligned} R^{x''''y''''z'''' \rightarrow xyz} &= R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \cdot R^{x'''y'''z''' \rightarrow x''y''z''} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- De transpose van bovenstaande matrices geeft vanzelfsprekend de transformatiematrices om coördinaten in de omgekeerde richting te transformeren.

3 Kinematica

3.1 Opgave 1

3.1.1 Rotatiesnelheid

Om de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\vec{\omega}_{tot}$ te berekenen zetten we eerst alle rotatiesnelheidsvectoren om naar het $x'y'z'$ -assenstelsel. $\vec{\omega}_g$ en $\vec{\omega}_i$ staan hier al in, dus we moeten enkel $\vec{\omega}_w$ nog omzetten.

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'_w &= R^{x'''y'''z''' \rightarrow x'y'z'} \cdot \vec{\omega}'''_w \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4}$$

Als we al deze vectoren optellen krijgen we $\vec{\omega}'_{tot}$ ¹

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'_{tot} &= \vec{\omega}'_g + \vec{\omega}'_i + \vec{\omega}'_w \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ \omega_i \\ \omega_g + \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5}$$

Na omvorming naar het wereldassenstelsel krijgen we de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\vec{\omega}_{tot}$.

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{tot} &= R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \cdot \vec{\omega}'_{tot} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ \omega_i \\ \omega_g + \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_w \cdot \cos(\beta) \\ \omega_i \cos(\alpha) - \sin(\alpha)(\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) \\ \omega_i \sin(\alpha) + \cos(\alpha)(\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6}$$

¹Notatie: het aantal accenten als superscript bij vectoren duidt op het assenstelsel waar de vector in is uitgedrukt.

3.1.2 Rotatieversnelling

Om de ogenblikkelijke totale rotatieversnellingsvector $\vec{\alpha}_{tot}$ te berekenen maken we gebruik van formule (7).

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^k \frac{d\omega_i}{dt} \vec{e}_{\omega_i} + \sum_{i=1}^k \vec{\omega}_i \frac{d\vec{e}_{\omega_i}}{dt} \quad (7)$$

met:

$$\vec{\omega}_i \frac{d\vec{e}_{\omega_i}}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} \vec{\omega}_j \times \vec{\omega}_i \quad (8)$$

Concreet wordt dit:

$$\vec{\alpha}_{tot} = \vec{\alpha}_g + \vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_w + \vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_w + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_w \quad (9)$$

$\vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_w$ en $\vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_w$ zijn termen die duiden op de verandering van oriëntatie van $\vec{\omega}_w$. Zijn oriëntatie is namelijk afhankelijk van $\vec{\omega}_g$ en $\vec{\omega}_i$. $\vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_i$ is om dezelfde reden toegevoegd.

$\vec{\alpha}_g$, $\vec{\alpha}_i$, $\vec{\omega}_g$ en $\vec{\omega}_i$ zijn reeds uitgedrukt in het $x'y'z'$ -assenstelsel. $\vec{\omega}_w$ werd al in (4) naar dit assenstelsel getransformeerd. Hieronder wordt $\vec{\alpha}_w$ getransformeerd.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'_w &= R^{x''y''z'' \rightarrow x'y'z'} \cdot \vec{\alpha}''_w \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ -\alpha_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Uitgewerkt wordt $\vec{\alpha}_{tot}$:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'_{tot} &= \vec{\alpha}'_g + \vec{\alpha}'_i + \vec{\alpha}'_w + \vec{\omega}'_g \times \vec{\omega}'_i + \vec{\omega}'_g \times \vec{\omega}'_w + \vec{\omega}'_i \times \vec{\omega}'_w \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_w \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ -\alpha_w \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ 0 & \omega_i & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ -\omega_w \cdot \cos(\beta) & 0 & \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & \omega_i & 0 \\ -\omega_w \cdot \cos(\beta) & 0 & \omega_w \cdot \sin(\beta) \end{vmatrix} \quad (11) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta \\ \alpha_i - \omega_g \omega_w \cos \beta \\ \alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{tot} &= R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \cdot \vec{\alpha}'_{tot} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta \\ \alpha_i - \omega_g \omega_w \cos \beta \\ \alpha_g + \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta \end{bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

De uitwerking wordt hier achterwege gelaten wegens te complex.

3.2 Opgave 2

3.2.1 Snelheid

Om de ogenblikkelijke snelheid \vec{v}_c van het punt C te berekenen hebben wij voor een combinatie van methodes gekozen. Ten eerste is er een samengestelde beweging met het $x'y'z'$ -assenstelsel als bewegend assenstelsel. Hierdoor heeft de sleepsnelheid in (16) een component veroorzaakt door de translatie van het vliegtuig met snelheid \vec{v}_v en een component veroorzaakt door de rotatie van het vliegtuig met rotatiesnelheid $\vec{\omega}_g$. Ten tweede maken we gebruik van de methode van som van rotaties om de relatieve snelheid in (17) van de eerder vermelde samengestelde beweging te berekenen. We moeten eerst echter de afstandsvectoren berekenen.

$$\vec{r}_{AB}' = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\vec{r}_{BC}' = \begin{bmatrix} -(l_3 \sin \beta + l_4 \cos \beta) \\ 0 \\ -l_3 \cos \beta + l_4 \sin \beta \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\vec{r}_{AC}' = \begin{bmatrix} l_1 - (l_3 \sin \beta + l_4 \cos \beta) \\ 0 \\ l_2 - l_3 \cos \beta + l_4 \sin \beta \end{bmatrix} \quad (15)$$

De sleepsnelheid uitgedrukt in het $x'y'z'$ -assenstelsel.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{sleep}' &= \vec{v}_v' + \vec{\omega}_g' \times \vec{r}_{AC}' \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ l_1 - (l_3 \sin \beta + l_4 \cos \beta) & 0 & l_2 - l_3 \cos \beta + l_4 \sin \beta \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ v_v + \omega_g (l_1 - \cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Ook de relatieve snelheid wordt in het $x'y'z'$ -assenstelsel uitgedrukt. $\vec{\omega}_w$ is niet opgenomen in de formule omdat deze geen bijdrage bij de snelheid van C levert.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{rel}' &= \vec{\omega}_i' \times \vec{r}_{BC}' \\ &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & \omega_i & 0 \\ -(l_3 \sin \beta + l_4 \cos \beta) & 0 & -l_3 \cos \beta + l_4 \sin \beta \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) \\ 0 \\ -\omega_i (-\cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Na optelling van de sleepsnelheid en relatieve snelheid bekomen we (18).

$$\vec{v}_c' = \begin{bmatrix} \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) \\ -\cos(\beta) l_4 \omega_g - \sin(\beta) l_3 \omega_g + l_1 \omega_g + v_v \\ \omega_i (\cos(\beta) l_4 + \sin(\beta) l_3) \end{bmatrix} \quad (18)$$

3.2.2 Versnelling

De versnelling wordt op dezelfde manier bepaald. We nemen opnieuw het $x'y'z'$ -assenstelsel als bewegend assenstelsel voor de samengestelde beweging.

$$\vec{a}'_{tot} = \vec{a}'_{sleep} + \vec{a}'_{rel} + \vec{a}'_{comp} \quad (19)$$

met:

$$\begin{aligned} \vec{a}'_{sleep} &= \vec{a}'_v + \vec{\alpha}'_g \times \vec{r}'_{AC} + \vec{\omega}'_g \times (\vec{v}'_c - \vec{v}'_a) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \alpha_g \\ l_1 - (l_3 \sin \beta + l_4 \cos \beta) & 0 & l_2 - l_3 \cos \beta + l_4 \sin \beta \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) & \omega_g (l_1 - \cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) & -\omega_i (-\cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_g^2 (l_1 - \cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) \\ a_v + \alpha_g (l_1 - \cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) + \omega_g \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}'_{rel} &= \vec{\alpha}'_i \times \vec{r}'_{BC} + \vec{\omega}'_i \times (\vec{v}'_c - \vec{v}'_b) \\ &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & \alpha_i & 0 \\ -(l_3 \sin \beta + l_4 \cos \beta) & 0 & -l_3 \cos \beta + l_4 \sin \beta \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & \omega_i & 0 \\ \omega_i (\sin \beta l_4 - \cos \beta l_3) & -\omega_g (\cos \beta l_4 + \sin \beta l_3) & \omega_i (\cos \beta l_4 + \sin \beta l_3) \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) - \omega_i^2 (-\cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) \\ 0 \\ -\alpha_i (-\cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) - \omega_i^2 (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}'_{comp} &= 2 \cdot (\vec{\omega}'_g \times \vec{v}'_{rel}) \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) & 0 & \omega_i (\cos(\beta) l_4 + \sin(\beta) l_3) \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \omega_g \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Hieronder worden nog enkele termen van bovenstaande formules nader verklaard:

- In de derde term van de sleepsnelheid staat $\vec{v}'_c - \vec{v}'_a$. Hierbij is \vec{v}'_c de snelheid van het punt C dat in (18) al berekend werd. \vec{v}'_a is de snelheid van het punt waar $vec\omega_g$ aangrijpt. In dit geval punt A. De snelheid van punt A

is gelijk aan \vec{v}'_v .

$$\vec{v}'_c - \vec{v}'_a = \vec{v}'_c - \vec{v}'_v = \begin{bmatrix} \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) \\ \omega_g (l_1 - \cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) \\ \omega_i (\cos(\beta) l_4 + \sin(\beta) l_3) \end{bmatrix} \quad (23)$$

- De tweede term van de relatieve snelheid bevat de snelheid van het punt B. Die wordt hieronder in detail uitgewerkt.

$$\begin{aligned} \vec{v}'_b &= \vec{v}'_v + \vec{\omega}'_g \times \vec{r}'_{AB} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ l_1 & 0 & l_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ v_v + l_1 \omega_g \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Als we formule (20),(21) en (22) in (19) invullen krijgen we:

$$\vec{a}'_{tot} = \begin{bmatrix} -\omega_g^2 (l_1 - \cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) + \alpha_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) - \omega_i^2 (-\cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) \\ a_v + \alpha_g (l_1 - \cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) + 3 \omega_g \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) \\ -\alpha_i (-\cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) - \omega_i^2 (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) \end{bmatrix} \quad (25)$$

De volledige uitwerking naar het wereldassenstelsel zou te complex worden. Hieronder wordt dus louter de formule gegeven.

$$\vec{\alpha}_{tot} = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \cdot \vec{\alpha}'_{tot} \quad (26)$$

3.3 Opgave 3

Zowel het $x'y'z'$ -assenstelsel als het $x''y''z''$ -assenstelsel zijn vast aan het vliegtuig gemonteerd. Dit heeft als gevolg dat de relatieve component van de snelheid van het punt C gelijk is met zowel het $x'y'z'$ -assenstelsel als het $x''y''z''$ -assenstelsel als bewegend assenstelsel. Dit geeft voor de versnelling dezelfde coriolis bijdrage als bij opgave 2.

$$\begin{aligned}
 \vec{a}'_{comp} &= 2 \cdot (\vec{\omega}'_g \times \vec{v}'_{rel}) \\
 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ \omega_i(\sin(\beta)l_4 - \cos(\beta)l_3) & 0 & \omega_i(\cos(\beta)l_4 + \sin(\beta)l_3) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega_g\omega_i(\sin(\beta)l_4 - \cos(\beta)l_3) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{27}$$

3.4 Opgave 4

3.4.1 Snelheid

Om de snelheid van het punt D te bepalen zullen we dezelfde werkwijze als bij opgave 2 hanteren (een combinatie van samengestelde beweging en som van rotaties). We beginnen echter met de afstandsvectoren.

$$\vec{r}'_{AB} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\vec{r}'_{BD} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}l_4 \\ 0 \\ \frac{1}{4}l_3 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\vec{r}'_{AD} = \begin{bmatrix} l_1 + \frac{3}{4}l_4 \\ 0 \\ l_2 + \frac{1}{4}l_3 \end{bmatrix} \tag{30}$$

De sleepsnelheid uitgedrukt in het $x'y'z'$ -assenstelsel.

$$\begin{aligned}
 \vec{v}'_{sleep} &= \vec{v}'_v + \vec{\omega}'_g \times \vec{r}'_{AD} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ l_1 + \frac{3}{4}l_4 & 0 & l_2 + \frac{1}{4}l_3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ v_v + \omega_g(l_1 + \frac{3}{4}l_4) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{31}$$

Ook de relatieve snelheid wordt in het $x'y'z'$ -assenstelsel uitgedrukt.

$$\begin{aligned}
\vec{v}'_{rel} &= \vec{\omega}'_i \times \vec{r}'_{BD} \\
&= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & \omega_i & 0 \\ \frac{3}{4}l_4 & 0 & \frac{1}{4}l_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\omega_i l_3 \\ 0 \\ -\frac{3}{4}\omega_i l_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{32}$$

Na optelling van de sleepsnelheid en relatieve snelheid bekomen we (33).

$$\vec{v}'_d = \begin{bmatrix} 1/4 \omega_i l_3 \\ v_v + \omega_g (l_1 + 3/4 l_4) \\ -3/4 \omega_i l_4 \end{bmatrix} \tag{33}$$

3.4.2 Versnelling

De versnelling van het punt D wordt op volledig dezelfde manier bepaald als de versnelling van het punt C als in 3.2.2. Hieronder worden enkel de formules met hun uitwerking neergeschreven vermits de werkwijze eerder al werd verduidelijkt.

$$\begin{aligned}
\vec{a}'_{sleep} &= \vec{a}'_v + \vec{\alpha}'_g \times \vec{r}'_{AD} + \vec{\omega}'_g \times (\vec{v}'_d - \vec{v}'_a) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \alpha_g \\ l_1 + \frac{3}{4}l_4 & 0 & l_2 + \frac{1}{4}l_3 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ \frac{1}{4}\omega_i l_3 & \omega_g (l_1 + \frac{3}{4}l_4) & -\frac{3}{4}\omega_i l_4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\omega_g^2 (l_1 + \frac{3}{4}l_4) \\ a_v + \alpha_g (l_1 + \frac{3}{4}l_4) + \frac{1}{4}\omega_g \omega_i l_3 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}'_{rel} &= \vec{\alpha}'_i \times \vec{r}'_{BD} + \vec{\omega}'_i \times (\vec{v}'_d - \vec{v}'_b) \\
&= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & \alpha_i & 0 \\ \frac{3}{4}l_4 & 0 & \frac{1}{4}l_3 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & \omega_i & 0 \\ \frac{1}{4}\omega_i l_3 & \omega_g (l_1 + \frac{3}{4}l_4) - l_1 \omega_g & -\frac{3}{4}\omega_i l_4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/4 \alpha_i l_3 - 3/4 \omega_i^2 l_4 \\ 0 \\ -3/4 \alpha_i l_4 - 1/4 \omega_i^2 l_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}'_{comp} &= 2 \cdot (\vec{\omega}'_g \times \vec{v}'_{rel}) \\
&= 2 \cdot \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ \frac{1}{4} \omega_i l_3 & 0 & -\frac{3}{4} \omega_i l_4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \omega_g \omega_i l_3 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\vec{v}'_d - \vec{v}'_a = \vec{v}'_d - \vec{v}'_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \omega_i l_3 \\ \omega_g (l_1 + \frac{3}{4} l_4) \\ -\frac{3}{4} \omega_i l_4 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}'_b &= \vec{v}'_v + \vec{\omega}'_g \times \vec{r}'_{AB} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega_g \\ l_1 & 0 & l_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ v_v + l_1 \omega_g \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{38}$$

De uiteindelijke oplossing:

$$\vec{a}'_{tot} = \begin{bmatrix} -\omega_g^2 (l_1 + \frac{3}{4} l_4) + \frac{1}{4} \alpha_i l_3 - \frac{3}{4} \omega_i^2 l_4 \\ a_v + \alpha_g (l_1 + \frac{3}{4} l_4) + \frac{3}{4} \omega_g \omega_i l_3 \\ -\frac{3}{4} \alpha_i l_4 - \frac{1}{4} \omega_i^2 l_3 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\vec{\alpha}'_{tot} = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \cdot \vec{\alpha}'_{tot} \tag{40}$$

4 Dynamica

4.1 Opgave 1

4.1.1 Impuls

De snelheid van het punt D en van het punt C die nodig is om de ogenblikkelijke impulsvector van het landingsgestel en het wiel te berekenen, werd al berekend in respectievelijk (33) en (18).

- Landingsgestel

$$\vec{p}_l' = m_l \vec{v}_d' = \begin{bmatrix} m_l \frac{1}{4} \omega_i l_3 \\ m_l (v_v + \omega_g (l_1 + \frac{3}{4} l_4)) \\ -m_l \frac{3}{4} \omega_i l_4 \end{bmatrix} \quad (41)$$

- Wiel

$$\vec{p}_w' = m_w \vec{v}_c' = \begin{bmatrix} m_w \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) \\ m_w (-\cos(\beta) l_4 \omega_g - \sin(\beta) l_3 \omega_g + l_1 \omega_g + v_v) \\ m_w \omega_i (\cos(\beta) l_4 + \sin(\beta) l_3) \end{bmatrix} \quad (42)$$

4.1.2 Verandering van impuls

Ook de versnelling van de punten D en C zijn hier nodig en werden eerder al berekend in (39) en (25).

- Landingsgestel

$$\frac{d\vec{p}_l'}{dt} = m_l \vec{a}_d' = \begin{bmatrix} m_l (-\omega_g^2 (l_1 + \frac{3}{4} l_4) + \frac{1}{4} \alpha_i l_3 - \frac{3}{4} \omega_i^2 l_4) \\ m_l (a_v + \alpha_g (l_1 + \frac{3}{4} l_4) + \frac{3}{4} \omega_g \omega_i l_3) \\ m_l (-\frac{3}{4} \alpha_i l_4 - \frac{1}{4} \omega_i^2 l_3) \end{bmatrix} \quad (43)$$

- Wiel

$$\frac{d\vec{p}_w'}{dt} = m_w \vec{a}_c' = \begin{bmatrix} m_w (-\omega_g^2 (l_1 - \cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) + \alpha_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3) - \omega_i^2 (-\cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3)) \\ m_w (a_v + \alpha_g (l_1 - \cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) + 3 \omega_g \omega_i (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3)) \\ m_w (-\alpha_i (-\cos(\beta) l_4 - \sin(\beta) l_3) - \omega_i^2 (\sin(\beta) l_4 - \cos(\beta) l_3)) \end{bmatrix} \quad (44)$$

4.2 Opgave 2

4.2.1 Impulsmoment

- Landingsgestel

Zowel punt C als punt D zitten vast aan het landingsgestel en hebben dus bijgevolg dezelfde hoeksnelheid. Voor $\vec{\omega}_c$ zie (5).

Om de inertiematrix van het landingsgestel te kunnen gebruiken in onze formule dienen we ze eerst om te zetten naar het $x'y'z'$ -assenstelsel.

$$\begin{aligned}
 I'_l &= R^{x'''y'''z''' \rightarrow x'y'z'} I_l''' \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{l,x''x'''} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l,y''y'''} & 0 \\ 0 & 0 & I_{l,z''z'''} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta)I_{l,x''x'''} & 0 & \sin(\beta)I_{l,z''z'''} \\ 0 & I_{l,y''y'''} & 0 \\ -\sin(\beta)I_{l,x''x'''} & 0 & \cos(\beta)I_{l,z''z'''} \end{bmatrix} \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{L}'_l &= I'_l \vec{\omega}'_d = I'_l \vec{\omega}'_c \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta)I_{l,x''x'''} & 0 & \sin(\beta)I_{l,z''z'''} \\ 0 & I_{l,y''y'''} & 0 \\ -\sin(\beta)I_{l,x''x'''} & 0 & \cos(\beta)I_{l,z''z'''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_w \cos(\beta) \\ \omega_i \\ \omega_g + \omega_w \sin(\beta) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\cos^2(\beta)I_{l,x''x'''}\omega_w + \sin(\beta)I_{l,z''z'''}(\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) \\ I_{l,y''y'''}\omega_i \\ \sin(\beta)\cos(\beta)I_{l,x''x'''}\omega_w + \cos(\beta)I_{l,z''z'''}(\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) \end{bmatrix} \quad (46)
 \end{aligned}$$

- Wiel

Het impulsmoment van het wiel wordt bijna op exact dezelfde wijze berekend.

$$\begin{aligned}
 I'_w &= R^{x''''y''''z'''' \rightarrow x'y'z'} I_w'''' \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{w,x''''x''''} & 0 & 0 \\ 0 & I_{w,y''''y''''} & 0 \\ 0 & 0 & I_{w,z''''z''''} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta)I_{w,x''''x''''} & 0 & \sin(\beta)I_{w,z''''z''''} \\ 0 & I_{w,y''''y''''} & 0 \\ -\sin(\beta)I_{w,x''''x''''} & 0 & \cos(\beta)I_{w,z''''z''''} \end{bmatrix} \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{L}'_w &= I'_w \vec{\omega}'_c \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta)I_{w,x''''x''''} & 0 & \sin(\beta)I_{w,z''''z''''} \\ 0 & I_{w,y''''y''''} & 0 \\ -\sin(\beta)I_{w,x''''x''''} & 0 & \cos(\beta)I_{w,z''''z''''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_w \cos(\beta) \\ \omega_i \\ \omega_g + \omega_w \sin(\beta) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\cos^2(\beta)I_{w,x''''x''''}\omega_w + \sin(\beta)I_{w,z''''z''''}(\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) \\ I_{w,y''''y''''}\omega_i \\ \sin(\beta)\cos(\beta)I_{w,x''''x''''}\omega_w + \cos(\beta)I_{w,z''''z''''}(\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) \end{bmatrix} \quad (48)
 \end{aligned}$$

4.2.2 Verandering van impulsmoment

• Landingsgestel

Om de verandering van impulsmomentvector te kunnen berekenen, werken we eerst de relatieve component uit.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\vec{L}_l'}{dt} \right)_{rel} &= I_l' \vec{\alpha}_d' = I_l' \vec{\alpha}_c' \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) I_{l,x''''x''''} & 0 & \sin(\beta) I_{l,z''''z''''} \\ 0 & I_{l,y''''y''''} & 0 \\ -\sin(\beta) I_{l,x''''x''''} & 0 & \cos(\beta) I_{l,z''''z''''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta \\ \alpha_i - \omega_g \omega_w \cos \beta \\ \alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) I_{l,x''''x''''} (\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta) + \sin(\beta) I_{l,z''''z''''} (\alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta) \\ I_{l,y''''y''''} (\alpha_i - \omega_g \omega_w \cos \beta) \\ -\sin(\beta) I_{l,x''''x''''} (\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta) + \cos(\beta) I_{l,z''''z''''} (\alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta) \end{bmatrix} \\
 &\quad (49)
 \end{aligned}$$

De volledige vergelijking ² voor de verandering van het impulsmoment gaat als volgt (met $\vec{\Omega}_c$ gelijk aan $\vec{\omega}_c$).

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}_l'}{dt} &= \left(\frac{d\vec{L}_l'}{dt} \right)_{rel} + \vec{\Omega}_c' \times \vec{L}_l' \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) I_{l,x''''x''''} (\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta) + \sin(\beta) I_{l,z''''z''''} (\alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta) \\ I_{l,y''''y''''} (\alpha_i - \omega_g \omega_w \cos \beta) \\ -\sin(\beta) I_{l,x''''x''''} (\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta) + \cos(\beta) I_{l,z''''z''''} (\alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -\omega_w \cos(\beta) & \omega_i & \omega_g + \omega_w \sin(\beta) \\ -\cos^2(\beta) I_{l,x''''x''''} \omega_w + \sin(\beta) I_{l,z''''z''''} (\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) & I_{l,y''''y''''} \omega_i \sin(\beta) \cos(\beta) & I_{l,x''''x''''} \omega_w + \cos(\beta) I_{l,z''''z''''} (\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) \end{vmatrix} \\
 &\quad (50)
 \end{aligned}$$

De vergelijking wordt niet verder uitgewerkt omdat dat ons te ver zou drijven in het louter uitrekenen van determinanten. Het uiteindelijke resultaat is uitgedrukt in het $x'y'z'$ -assenstelsel en moet nog vermenigvuldigd worden met een transformatiematrix om ze naar het wereldassenstelsel om te zetten.

$$\frac{d\vec{L}_l}{dt} = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \frac{d\vec{L}_l'}{dt} \quad (51)$$

• Wiel

De verandering van het impulsmoment van het wiel wordt bijna op exact dezelfde wijze berekend.

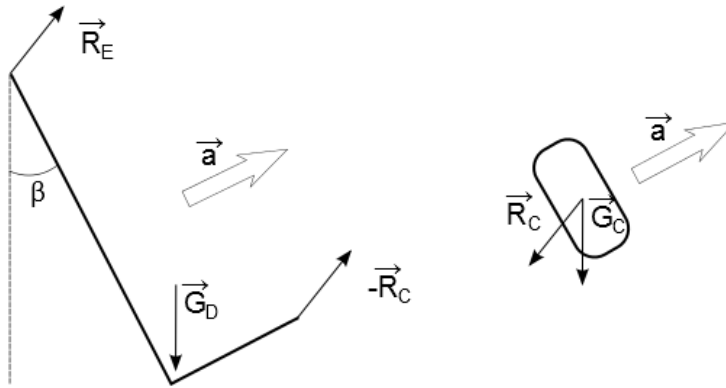
$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\vec{L}_w'}{dt} \right)_{rel} &= I_w' \vec{\alpha}_c' \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) I_{w,x''''x''''} & 0 & \sin(\beta) I_{w,z''''z''''} \\ 0 & I_{w,y''''y''''} & 0 \\ -\sin(\beta) I_{w,x''''x''''} & 0 & \cos(\beta) I_{w,z''''z''''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta \\ \alpha_i - \omega_g \omega_w \cos \beta \\ \alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) I_{w,x''''x''''} (\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta) + \sin(\beta) I_{w,z''''z''''} (\alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta) \\ I_{w,y''''y''''} (\alpha_i - \omega_g \omega_w \cos \beta) \\ -\sin(\beta) I_{w,x''''x''''} (\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta) + \cos(\beta) I_{w,z''''z''''} (\alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta) \end{bmatrix} \\
 &\quad (52)
 \end{aligned}$$

²Hier worden $I_{l,x''''x''''}$, $I_{l,y''''y''''}$ en $I_{l,z''''z''''}$ afgekort als respectievelijk $I_{l,x''''}$, $I_{l,y''''}$ en $I_{l,z''''}$ om de omvang van de matrix te beperken.

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_w'}{dt} &= \left(\frac{d\vec{L}_w'}{dt} \right)_{rel} + \vec{\Omega}'_c \times \vec{L}_w' \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\beta)I_{w,x''''x''''}(\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta) + \sin(\beta)I_{w,z''''z''''}(\alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta) \\ I_{w,y''''y''''}(\alpha_i - \omega_g \omega_w \cos \beta) \\ -\sin(\beta)I_{w,x''''x''''}(\alpha_w \cos(\beta) - \omega_i \omega_g + \omega_i \omega_w \sin \beta) + \cos(\beta)I_{w,z''''z''''}(\alpha_g - \alpha_w \sin(\beta) + \omega_i \omega_w \cos \beta) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -\omega_w \cos(\beta) & \omega_i & \omega_g + \omega_w \sin(\beta) \\ -\cos^2(\beta)I_{w,x''''x''''}\omega_w + \sin(\beta)I_{w,z''''z''''}(\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) & I_{w,y''''y''''}\omega_i \sin(\beta) \cos(\beta) & I_{w,x''''x''''}\omega_w + \cos(\beta)I_{w,z''''z''''}(\omega_g + \omega_w \sin(\beta)) \end{vmatrix} \\
&\quad (53)
\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_w'}{dt} = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \frac{d\vec{L}_w'}{dt} \quad (54)$$

4.3 Opgave 3



Figuur 1: Vrijlichaamsdiagramma van landingsgestel en wiel

Uit het vrijlichaamsdiagram van het landingsgestel volgt volgend krachterevenwicht:

$$-\vec{R}_c + \vec{G}_d + \vec{R}_b = m_l \cdot \vec{a}_d \quad (55)$$

4.4 Opgave 4

4.5 Opgave 5