NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK



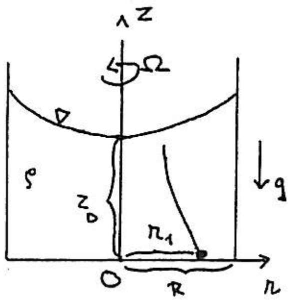
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

**KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F1**
(Linje Fysikk og matematikk)
Onsdag 13. august 2003
Tid: 0900 – 1400
Vekttall: 2,5

Sensuren faller i uke 36.

Hjelpemidler: C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

## Oppgave 1




Et sylindrisk kar med radius R roterer omkring den vertikale z-aksen med konstant vinkelhastighet $\Omega$. Legg origo O på bunnen av karet, som vist på figuren. Avstanden fra O til bunnen av den frie overflaten er kjent, lik $z_0$. Vannets tetthet er $\rho$. Se bort fra atmosfæretrykket.

a) Finn trykket p(r,z) i vannet, og finn formen av den frie overflate.

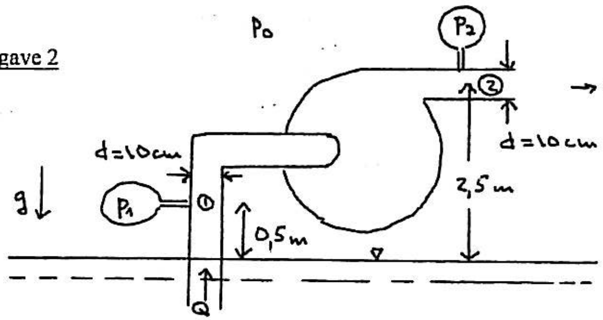
b) Finn volumet V av vannet i karet.

c) En vimpel ("buoyant streamer"), med tetthet mindre enn vann, er festet til bunnen i avstand $r_1$ fra origo (se fig.). Dersom karet ikke roterte, ville vimpelen stå i vertikal posisjon. Finn hvilken form $r = r(z)$ vimpelen får når karet roterer.

Hint: I ethvert punkt vil vimpelen stå vinkelrett på isobaren gjennom punktet.



## Oppgave 2

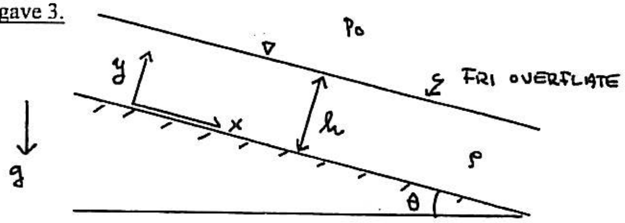



En vannpumpe med effekt P = 2,8 kW trekker vann opp av et basseng, og avleverer det under trykket $p_2$ = 160 kPa. Anta stasjonære forhold. Atmosfæretrykket er $p_0$ = 101 kPa. Manometeret ved 1 viser trykket $p_1$ = 90 kPa. Anta uniforme hastighetsprofiler i rørene, både ved 1 og 2. Sett $\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

a) Finn vannets hastighet V ved 1, og finn volumgjennomstrømningen Q.

b) Hvor stor er $-w_s$, det tilførte arbeid per masseenhet? Finn pumpens friksjonshøyde $h_f$.

## Oppgave 3.




En væske med tetthet $\rho$ og kinematisk viskositet $\nu$ renner laminært og stasjonært nedover et skråplan som har helningsvinkelen $\theta$. Væskefilmens konstante tykkelse er h. Væskefilmen har fri overflate mot atmosfæren; atmosfæretrykket er $p_0$. Strømningen er todimensjonal, med strømlinjer som overalt er parallelle med x-aksen. Tyngdens akselerasjon er g.

a) Skriv opp x- og y-komponentene av Navier-Stokes' ligning, idet du benytter koordinatsystemet på figuren. Ligningene skrives slik at de eneste ukjente størrelser er trykket p samt hastigheten $u = u(y)$ i x-retningen. Vis at størrelsen K, definert ved

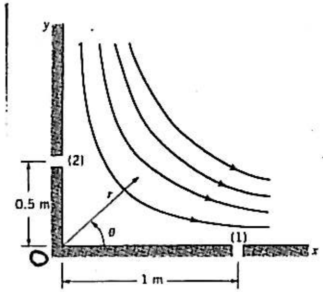
$$K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \sin\theta ,$$

er en konstant, uavhengig av x og y.

b) Forklar hvilke to grensebetingelser væsken må tilfredsstille. Vis at $\partial p / \partial x = 0$.

c) Finn ved integrasjon hastighetsprofilet u(y).

Oppgave 4




En potensialstrømning i 1. kvadrant er gitt, som vist på figuren. Origo er O. Strømfunksjonen i plane polarkoordinater er oppgitt til å være

$$\psi = 2r^2 \sin 2\theta .$$

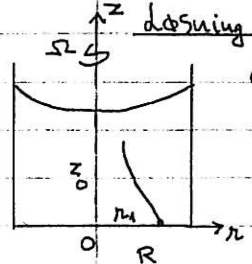
a) Vis at $\psi$ tilfredsstiller Laplaces ligning samt grensebetingelsene på de faste flatene.

b) Hvis trykket i punkt (1) er 30 kPa, hvor stort er trykket i punkt (2)? Anta tettheten $\rho = 10^3 \, kg/m^3$. Se bort fra tyngden.

c) Finn hastighetspotensialet $\phi$ (enkleste form).

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. Kontinuasjonseksamen 13 August 2003

## Løsning Oppgave 1




a) Eulerligningen i det roterende system

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\Omega^2\vec{e}_r + \vec{g}, \quad \vec{g} = (0,0,-g) \Rightarrow$$

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + gz\right) = 0, \text{ altså}$$

$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \rho g z + C.$$ Da $p = 0$ ved $r = 0, z = z_0$,

fås $C = \rho g z_0$.

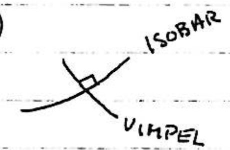
Altså $\underline{p(r,z) = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 + \rho g(z_0 - z)}$ ①

Fri overflate, $p = 0$, gir $\underline{z = z_0 + \frac{r^2\Omega^2}{2g}}$

b) Volum $\underline{V} = 2\pi\int r\,dr\cdot z = 2\pi\int_0^R r\,dr\left(z_0 + \frac{r^2\Omega^2}{2g}\right)$

$$= 2\pi z_0\int_0^R r\,dr + \frac{\pi\Omega^2}{g}\int_0^R r^3\,dr = \underline{\pi R^2\left(z_0 + \frac{\Omega^2R^2}{4g}\right)}.$$

c)




For isobarene ($p =$ konst.) er $dp = 0$

Differensierer ①: $0 = \rho\Omega^2 r\,dr - \rho g\,dz$

Altså $dz/dr = r\Omega^2/g$.

Kurvene vinkelrett på isobarene (GL = "gradient lines") har vinkelkoeffisient lik den negative inverse av vinkelkoeffisienten ovenfor:

$$\left.\frac{dz}{dr}\right|_{GL} = -\frac{g}{r\Omega^2}$$

Separerer ligningen, og sløyfer GL:

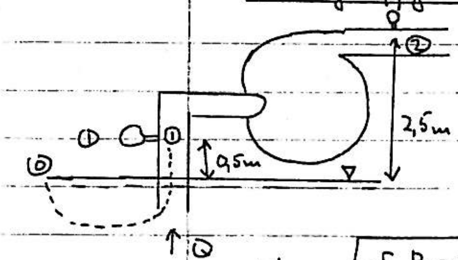
$$\frac{dr}{r} = -\frac{\Omega^2}{g}dz \quad \Rightarrow \quad \ln r = -\frac{\Omega^2}{g}z + \text{konst.}$$

Altså $\underline{r = r_1 e^{-\Omega^2 z/g}}$, $r = r_1$ ved $z = 0$.



SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. 13. august 2003

## Løsning Oppgave 2




→ Q   $d = 10$ cm, $P = 2,8$ kW

a) $p_0 = 101$ kPa, $p_1 = 90$ kPa, $p_2 = 160$ kPa

Bernoulli fra overflaten ⓪ opp til ① gir

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\underbrace{V_0^2}_{=0} + gz_0 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz_1$$

$$\underline{V} = \sqrt{2\left[\frac{p_0 - p_1}{\rho} + g(z_0 - z_1)\right]} = \sqrt{2\left(\frac{101-90}{10^3}\cdot 10^3 - 10\cdot 0,5\right)} = \underline{3,46 \text{ m/s}}$$

Samme hastighet $V$ ved ① og ②.

Volumgjennomstrømning $\underline{Q} = A\cdot V = \frac{\pi d^2}{4}\cdot V = \frac{\pi}{4}0,10^2\cdot 3,46 = \underline{0,027 \text{ m}^3/\text{s}}$

b) Effekt $\underline{P} = (-w_s)\cdot\rho\cdot Q$ gir $\underline{-w_s} = \frac{P}{\rho Q} = \frac{2,8\cdot 10^3}{10^3\cdot 0,027} = \underline{104 \text{ m}^2/\text{s}^2}$

Mekanisk energiligning gjennom pumpen, langs strømlinje fra ⓪ til ②:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\underbrace{V_0^2}_{=0} + gz_0 = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz_2\right) + w_s + gh_f$$

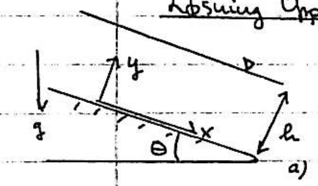
$$gh_f = \frac{p_0 - p_2}{\rho} + g(z_0 - z_1) - \frac{1}{2}V^2 - w_s$$

$$= 101 - 160 - 10\cdot 2,5 - \frac{1}{2}\cdot 3,46^2 + 104 = 14$$

$$\underline{h_f = 1,4 \text{ m}}$$

SI01009 FLUIDMEKANIKK 13. august 2003

## Løsning Oppgave 3




$\vec{g} = (g\sin\theta, -g\cos\theta)$

Navier-Stokes:

$x$: $$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \nu\frac{d^2u}{dy^2} \quad ①$$

$y$: $$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\theta \quad ②$$

Skriver ② slik: $\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma\cos\theta$, $p = -\gamma y\cos\theta + f(x)$, hvor $f(x)$ er vilkårlig. Deriverer: $\partial p/\partial x = f'(x)$, uavhengig av $y$.

Skriver ① slik:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta = \mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

Venstre side avhenger bare av $x$, høyre side bare av $y$ ⇒

$K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ er konstant, uavhengig av $x$ og $y$.

b) Grensebetingelser: $u = 0$ ved $y = 0$, og

$\tau(y) = \mu\frac{du}{dy}\Big|_h = 0$ ved fri overflate.

Da $K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ er konstant, må $\partial p/\partial x$ være konstant.

Kan evalueres i fri overflate, hvor $p = p_0 =$ konstant.

Altså $\partial p/\partial x = 0$ overalt i væsken.

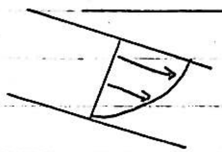
c) $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{K}{\mu}$, $\frac{du}{dy} = \frac{K}{\mu}y + C_1$, $u(y) = \frac{K}{2\mu}y^2 + C_1 y + C_2$.

Grensebet. $u(0) = 0$ gir $C_2 = 0$.

—"— $\frac{du}{dy}\Big|_h = 0$ gir $C_1 = -\frac{K}{\mu}h$.

Da $K = -\gamma\sin\theta$ fås profilet

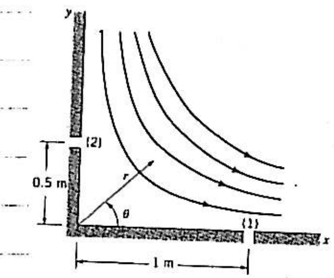
$$u(y) = \frac{gh}{\nu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right)\sin\theta$$





SI01009 FLUIDMEKANIKK 13. august 2003

## Løsning Oppgave 4




a) $\psi = 2r^2\sin 2\theta$

Laplaces ligning $\nabla^2\psi = 0$.

Polarkoordinater: $\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$

$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 4r\sin 2\theta$, $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 8r\sin 2\theta$

$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = -8r^2\sin 2\theta$, altså $\nabla^2\psi = 8\sin 2\theta - 8\sin 2\theta = \underline{0}$

Grensebetingelser: $\psi = 0$ for $\theta = 0$ og $\theta = \frac{1}{2}\pi$; stemmer med at $\psi =$ konstant på en fast flate.

b) For potensialstrømning kan Bernoulli benyttes mellom vilkårlige punkter: $p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$.

Må finne hastighetene i (1) og (2).

$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 4r\cos 2\theta$, $V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -4r\sin 2\theta$ ⇒

$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = 16r^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) = 16r^2$.

Det gir $V_1^2 = 16r_1^2 = 16\ m^2/s^2$, $V_2^2 = 16\cdot r_2^2 = 4\ m^2/s^2$.

$\underline{p_2} = p_1 + \frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2) = 30\cdot 10^3 + \frac{1}{2}\cdot 10^3\cdot(16 - 4) = \underline{36\ kPa}$

c) $V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = 4r\cos 2\theta$ gir $\phi = 2r^2\cos 2\theta + f_1(\theta)$, $f_1$ vilkårlig

$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -4r\sin 2\theta$ gir $\phi = -4r^2\int\sin 2\theta\, d\theta = 2r^2\cos 2\theta + f_2(r)$, $f_2$ vilkårlig.

Enkleste løsning fås ved $f_1 = f_2 = 0$, ⇒

$$\underline{\phi = 2r^2\cos 2\theta}$$