Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.4

1 Kjerneregelen gir $u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$, $u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y$ osv. Med $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ og $\theta(x,y) = \arctan(y/x)$ får vi

$$
\begin{aligned}
r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta \\
r_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta \\
\theta_x &= \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-r\sin\theta}{r^2} = \frac{-\sin\theta}{r} \\
\theta_y &= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}
\end{aligned}
$$

Av dette får vi:

$$
\begin{aligned}
u_x = v_y \Rightarrow & u_r r_x + u_\theta \theta_x = v_r r_y + v_\theta \theta_y \\
\Rightarrow & u_r \cos\theta + u_\theta \frac{-1}{r}\sin\theta = v_r \sin\theta + v_\theta \frac{1}{r}\cos\theta
\end{aligned}
$$

Da dette skal holde for alle verdier av θ, får vi $u_r = \frac{1}{r} v_\theta, v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$. Samme resultat følger av å bruke $u_y = -v_x$.

10

$$f(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$$

Her virker det enklest å bruke ligning (7), med $z = re^{i\theta}$:

$$f(z) = \ln r + i\theta$$

$$=> \quad u(r,\theta) = \ln r, \qquad v(x,y) = \theta$$

Som gir

$$u_r = \frac{1}{r}, \quad u_\theta = 0, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 1$$

og Cauchy-Riemann-ligningene

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

er dermed oppfylt.
For at funksjonen skal være analytisk må den også være kontinuerlig. Ser at funksjonen $f(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ er definert for alle z i det åpne området (domenet) gitt ved $z \neq 0$, men er ikke kontinuerlig her (og derfor heller ikke analytisk), pga. diskontinuiteten langs negativ x-akse. Men den er analytisk i det åpne området (domenet) hvor negativ x-akse og origo er fjernet.

18

$$u = x^3 - 3xy^2$$
$$u_{xx} = 6x$$
$$u_{yy} = -6x$$

Så u er harmonisk. For å finne en harmonisk konjugert funksjon setter vi opp Cauchy-Riemann ligningene:

$$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2$$
$$v_x = -u_y = 6xy$$

Integrerer den første med hensyn på y, og deriverer resultatet med hensyn på x, og får:

$$v = 3x^2y - y^3 + h(x)$$
$$v_x = 6xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$

Og vi ser at dette samsvarer med Cauchy-Riemann-ligningene om $\mathrm{dh/dx} = 0$, altså $h = c$ for en reell konstant c.

De korresponderende analytiske funksjonene til $u = x^3 - 3xy^2$ er altså

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + 3ix^2y - iy^3 + ic \\ (&= (x+iy)^3 + ic = z^3 + ic) \end{aligned}$$

for c en reell konstant.

19 Funksjonen u er *ikke* harmonisk, siden

$$u_{xx} = \mathrm{e}^{-x}\sin 2y \neq 4\mathrm{e}^{-x}\sin 2y = -u_{yy}$$

30a,b,c $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analytisk.

a)

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = \text{konst.} \\ \Longrightarrow\ & u_x = 0 = u_y \\ \Longrightarrow\ & v_x = -u_y = 0, v_y = u_x = 0 \qquad \text{(Cauchy-Riemann)} \\ \Longrightarrow\ & v = \text{konst.} \\ \Longrightarrow\ & f = \text{konst.} \end{aligned}$$

b) Som i a)

c)

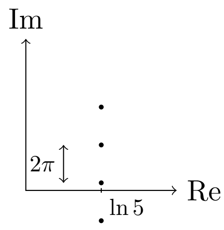
$$\begin{aligned} &0 = f'(z) = u_x + iv_x \\ \Longrightarrow\ & u_x = 0 = v_x \\ \Longrightarrow\ & u_y = -v_x = 0, v_y = u_y \qquad \text{(Cauchy-Riemann)} \end{aligned}$$

Dvs. u og v konst og dermed $f = \text{konst.}$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.5

$\boxed{20}$

$$\begin{aligned} 4+3i &= 5e^{i\phi}, \quad \phi = \arctan\frac{3}{4} \approx 0.64 \\ e^z = e^x e^{iy} &= 5e^{i\phi} = 5e^{i(\phi+n2\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \implies e^x &= 5, \quad y = \phi + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \implies z &= \ln 5 + i(\phi + n2\pi), \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.6

$\boxed{13}$

$$\begin{aligned} \cos(-z) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-iz} + e^{iz}\right) \\ &= \cos z \\ \sin(-z) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{-iz} - e^{iz}\right) \\ &= -\sin z \end{aligned}$$

$\boxed{17}$ Skal finne alle $z = x + iy$ som oppfyller

$$\cosh(2z) = 0$$

Bruker at $\cosh z = \cos(iz)$:

$$\cos(2iz) = 0$$

$$\begin{aligned} => \quad 2iz &= \frac{\pi}{2} + m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \\ z &= -\frac{\pi}{4}(1+2m)i \end{aligned}$$

Som også kan skrives som:

$$\underline{z = \frac{\pi}{4}(1+2n)i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...} \quad (n = -1 - m)$$

Alternativ metode:
Bruker definisjonen av cosh:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2} &= 0 \\
e^{2x+2yi}+e^{-2x-2yi} &= 0 \\
e^{2x}(\cos(2y)+i\sin(2y))+e^{-2x}(\cos(2y)-i\sin(2y)) &= 0 \\
\cos(2y)\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)+i\sin(2y)\left(e^{2x}-e^{-2x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

For at dette skal gjelde må både realdelen og imaginærdelen av uttrykket være lik 0:

$$\cos(2y)\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)=0 \quad (1) \qquad \text{og} \qquad \sin(2y)\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)=0 \quad (2)$$

Ligning (1) er kun oppfylt for $2y=\pi/2+n\pi, \quad n=0,\pm1,\pm2,....$
For disse y-verdiene er $\sin(2y)\neq 0$, og for at ligning (2) skal være oppfylt må vi dermed ha $x=0$. Løsningene $z=x+iy$ blir

$$\begin{aligned}
z &= \frac{\pi}{4}i+\frac{n\pi}{2}i \\
&= \underline{\frac{\pi}{4}(1+2n)i, \qquad n=0,\pm1,\pm2,...}
\end{aligned}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.7

$\boxed{15}$

$$\begin{aligned}
\ln(e^i) &= \text{Ln}(e^i)+2n\pi i, \qquad n=0,\pm1,\pm2,... \\
&= \ln\left|(e^i)\right|+i\cdot\text{Arg}(z)+2n\pi i \\
&= 0+i\cdot\text{Arg}(\cos(1)+i\sin(1))+2n\pi i \\
&= i\cdot 1+2n\pi i \\
&= \underline{(1+2n\pi)i, \qquad n=0,\pm1,\pm2,...}
\end{aligned}$$

$\boxed{17}$

$$\begin{aligned}
\ln(i^2)=\ln(-1) &= \ln|-1|+\pi i+2\pi n i \\
&= \underline{\pi(1+2n)i, \qquad n=0,\pm1,\pm2,...}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\ln(i) &= 2\left(\ln|i|+\frac{\pi}{2}i+2\pi m i\right) \\
&= \underline{\pi(1+4m)i, \qquad m=0,\pm1,\pm2,...}
\end{aligned}$$

$\boxed{26}$

$$\begin{aligned}
i^{\frac{i}{2}} &= e^{\frac{i}{2}\text{Ln}(i)} \\
&= e^{\frac{i}{2}\left(0+\frac{\pi}{2}i\right)} \\
&= \underline{e^{\frac{-\pi}{4}}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{30a}}$ $w = \arccos z$ betyr at

$$z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$$

Multipliser med $2e^{iw}$

$$\begin{aligned}
&(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0 \\
\Longleftrightarrow &(e^{iw} - z)^2 + 1 - z^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow &e^{iw} - z = \sqrt{z^2 - 1} \\
\Longleftrightarrow &iw = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \\
&w = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})
\end{aligned}$$

Obs: $\sqrt{z^2 - 1}$ har 2 distinkte verdier og ln har ∞ mange distinkte verdier.