NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I EMNE TEP 4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

(Bokmål)

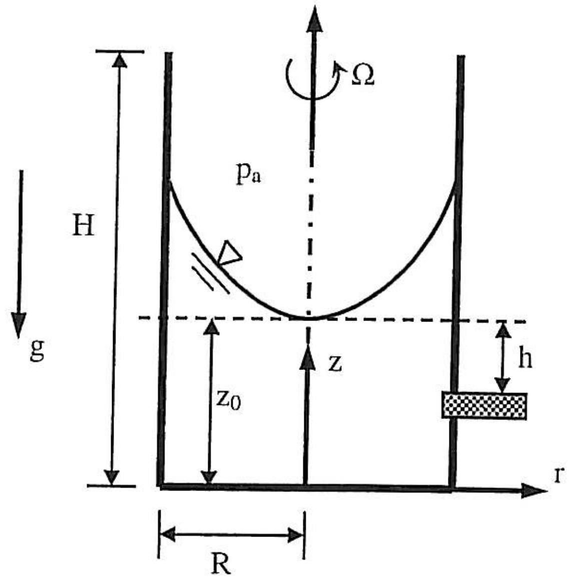
Torsdag 7. desember 2006
Tid: 0900 – 1300

Studiepoeng: 7,5

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Sensuren faller innen 08.01.07

Oppgave 1.



Et åpent sylindrisk kar roterer om sin vertikale akse (z) med konstant vinkelhastighet Ω. Karet inneholder en væske med tetthet ρ, og det forutsettes at Ω ikke er så stor at væsken renner over kanten av karet eller at noe område på bunnen blir liggende tørt. Sylinderen har høyden H og radius R, og avstanden langs z-aksen fra bunnen opp til væskeoverflatens laveste punkt betegnes z_0. Tyngdens akselerasjon er g og atmosfæretrykket er p_a. Legg koordinatsystemet som vist i figuren.

a) Vis at trykket i væsken kan skrives

$$p(r,z) = p_a + \rho g(z_0 - z) + \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2}$$

b) Finn en likning for væskeoverflaten.

I en dybde h under z_0 sitter en sylindrisk plugg i veggen på karet. Pluggens diameter d er så liten at væsketrykket kan regnes konstant over endeflaten til pluggen inne i karet.

c) Finn kraften fra væsken på pluggens endeflate.

d) Pluggen faller ut og det oppstår en strømning gjennom hullet. Finn utstrømningshastigheten i forhold til karet når den relative væskebevegelsen inne i karet neglisjeres.

Oppgave 2.

I et plant strømningsfelt av et ideelt (friksjonsfritt) inkompressibelt fluid med tetthet ρ er hastighetskomponenten $v_r = 0$ for alle r, mens

$$v_\theta = \omega r, \quad r \le r_0 \qquad (1)$$

$$v_\theta = \frac{A}{r}, \quad r > r_0 \qquad (2)$$

Her er ω og r_0 kjente konstanter. Tyngekraften neglisjeres.

a) Bestem konstanten A slik at v_θ blir kontinuerlig ved $r = r_0$. Finn virvlingens z-komponent ζ samt sirkulasjonen Γ i hele området $0 < r < \infty$.

b) Finn trykket p for $0 < r < \infty$, når det er oppgitt at $p = p_\infty$ for $r = \infty$.

c) Anta så at v_θ er gitt som i (1) for $r \le r_0$ slik som før, mens

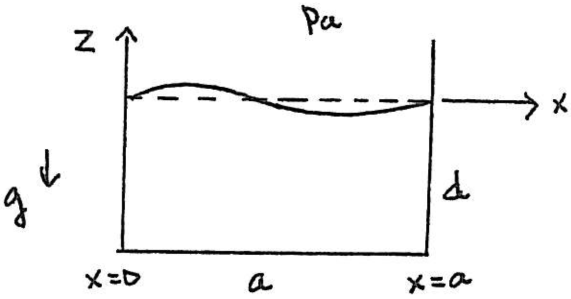
$$v_\theta = \frac{\omega r_0}{(r/r_0)^\alpha} \quad \text{for } r > r_0 \qquad (3)$$

Her er α en gitt konstant > 1. Finn nå ζ og p for $r > r_0$. Grensebetingelsen er $p = p_\infty$ for $r = \infty$ slik som før.

Oppgitt: Eulers likninger i polarkoordinater reduserer seg i vårt tilfelle til

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

Oppgave 3



Figuren viser en vanntank sett fra siden. Bredden av tanken er a. Anta uniforme forhold i y-retning (inn i papirplanet). Stillevannsdybden er d. Nivået $z = 0$ faller sammen med stillevannsnivået. Atmosfæretrykket er p_a.

a) Det oppgis at hastighetspotensialet for de stasjonære svingemodene i tanken kan skrives slik:

$$\phi = A \cos kx \cosh k(z+d) \cos \omega t. \qquad (1)$$

Her er A en gitt konstant. Gi først en kort utledning av den frie overflatebetingelse i lineær bølgeteori,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z=0), \qquad (2)$$

og bestem deretter dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$ ut fra (1) og (2).

b) Vis hvordan den kinematiske grensebetingelse ved den vertikale veggen $x = a$ bestemmer de tillatte verdier av bølgetallet k.

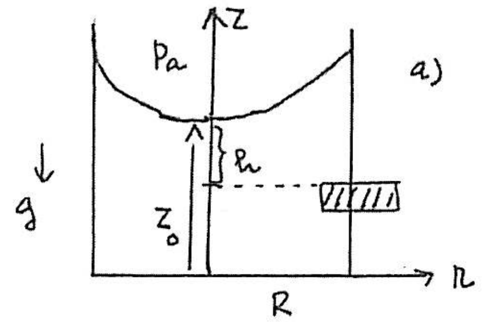
c) Utsvinget av den frie overflate kan skrives som

$$\eta = a \sin \omega t.$$

Uttrykk amplituden $a = a(x)$ ved A og de andre konstantene, og skissér η for laveste svingemode som funksjon av x ved tidspunktet $\omega t = \pi/2$.

TEP 4105 Fluidmekanikk. Eksamen 7. desember 2006

Løsning Oppgave 1



a) I det roterende koordinatsystemet er forholdene statiske og akselerasjonen lik null

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\Omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + gz\right) = 0.$$

Altså $\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + gz = C.$

Konstanten C bestemmes av at $p = p_a$ for $r = 0$, $z = z_0$:

$$\frac{p_a}{\rho} + gz_0 = C.$$

Altså $\underline{p = p_a + \rho g(z_0 - z) + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2}$

b) Ved væskens overflate er $p = p_a \Rightarrow \underline{z = z_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}}$

c) På pluggens endeflate virker trykket

$$p(r = R, z = z_0 - h) = p_{plugg} = p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 R^2$$

Kraft på pluggen: $\underline{F} = p_{plugg} \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = \underline{\left(p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 R^2\right)\cdot\frac{\pi}{4}d^2}$

d) Bernoullis ligning fra et punkt rett innenfor hullet (der trykket fremdeles er p_{plugg} fordi hastigheten er neglisjert) til strålen like utenfor åpningen:

$$\frac{p_{plugg}}{\rho} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\simeq 0} + \cancel{g(z_0 - h)} = \frac{p_a}{\rho} + \frac{v_{ut}^2}{2} + \cancel{g(z_0 - h)}$$

$$\frac{1}{2}v_{ut}^2 = \frac{p_{plugg}}{\rho} - \frac{p_a}{\rho} = gh + \frac{1}{2}\Omega^2 R^2$$

$\underline{v_{ut} = \sqrt{2gh + \Omega^2 R^2}}$, relativt til karet.

TEP4105 Fluidmekanikk. 7. desember 2006

Løsning Oppgave 2

Gitt $V_\theta = \omega r$ for $r \le r_0$, $V_\theta = A/r$ for $r > r_0$.

a) Kontinuitet av V_θ for $r = r_0$ gir $\underline{A = \omega r_0^2}$.

Virvling $\vec{\zeta} = (\nabla \times \vec{V})$; z-komponent $\zeta = (\nabla \times \vec{V})_z =$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}}_{0} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta). \qquad \text{(Formelark)}$$

$$\left.\begin{aligned} r \le r_0: \quad \zeta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\omega) = 2\omega \\ r > r_0: \quad \zeta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\omega r_0^2}{r}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \zeta \text{ diskontinuerlig ved } r = r_0$$

Sirkulasjon $\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s}$

$$\left.\begin{aligned} r \le r_0: \quad \Gamma &= \omega r \cdot 2\pi r = 2\pi\omega r^2 \\ r > r_0: \quad \Gamma &= \frac{\omega r_0^2}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\omega r_0^2 \end{aligned}\right\} \quad \Gamma \text{ er kontinuerlig ved } r = r_0$$

b) Da $\zeta = 0$ for $r > r_0$ kan Bernoulli benyttes på utsiden:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \frac{p_\infty}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V^2_{(\infty)}}_{0}$$

Utside: $\underline{p} = p_\infty - \frac{1}{2}\rho V_\theta^2(r) = \underline{p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{\omega^2 r_0^4}{r^2}}$

Innside: Da $\zeta \ne 0$ for $r < r_0$ må Eulerlign. benyttes:

$$\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \text{dvs.} \quad \rho\omega^2 r = \frac{\partial p}{\partial r}$$

Integrerer: $p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + C$. Da $p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r_0^2$ for $r = r_0$, er

$$p_\infty - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r_0^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r_0^2 + C, \qquad C = p_\infty - \rho\omega^2 r_0^2.$$

På innside altså: $\underline{p = (p_\infty - \rho\omega^2 r_0^2) + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2}$

TEP 4105 Fluidmekanikk. 7. desember 2006

Løsning Oppgave 2 c)

c) Anta nå at $V_\theta = \dfrac{\omega r_0}{(r/r_0)^\alpha} = \dfrac{\omega r_0^{\alpha+1}}{r^\alpha}$ på utsiden, $\alpha > 1$.

Da er på utsiden $\zeta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\omega r_0^{\alpha+1} \cdot r^{1-\alpha}\right)$

$$\underline{\zeta = -\,\omega r_0^{\alpha+1} \cdot (\alpha-1) \cdot r^{-\alpha-1} \neq 0.}$$

Da må Eulerligningen benyttes også på utsiden.

$$\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \Rightarrow \rho\omega^2 r_0^{2\alpha+2} \cdot r^{-2\alpha-1} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

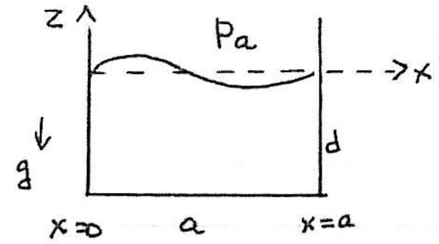
Integrerer: $p = \rho\omega^2 r_0^{2\alpha+2}\displaystyle\int r^{-2\alpha-1}\,dr = -\frac{\rho\omega^2 r_0^{2\alpha+2}}{2\alpha} \cdot r^{-2\alpha} + C$

Da $p(\infty) = p_\infty$ fås $C = p_\infty$. Dermed

$$\underline{p} = p_\infty - \frac{\rho\omega^2 r_0^{2\alpha+2}}{2\alpha}\, r^{-2\alpha} = \underline{p_\infty - \frac{\rho\omega^2 r_0^2}{2\alpha}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\alpha}}$$

$\alpha = 1$ gir $\underline{p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho\,\frac{\omega^2 r_0^4}{r^2}}$, som før.

<u>Løsning Oppgave 3</u>



a) Kinematisk overflatebetingelse (forelesn.):

$$\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{O(a)} + \underbrace{u\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{O(a^2)} = \underbrace{w}_{O(a)}, \quad z = \eta.$$

Neglisjerer $O(a^2)$ leddet og erstatter $z=\eta$ med $z=0$:

$$\underline{\frac{\partial \eta}{\partial t} = w = \frac{\partial \phi}{\partial z}}, \quad z = 0 \qquad (1)$$

Dynamisk overflatebetingelse (Bernoulli) ved fri overflate:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + g\eta = C, \quad z = \eta.$$

Velger $C = p_a/\rho$, slik at $\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{O(a)} + \underbrace{\frac{1}{2}V^2}_{O(a^2)} + \underbrace{g\eta}_{O(a)} = 0$

Neglisjerer $O(a^2)$ og erstatter igjen $z=\eta$ med $z=0$:

$$\underline{\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad z = 0.} \qquad (2)$$

Deriverer (2) med hensyn på t og setter inn i (1):

$$(3) \qquad \underline{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0} \qquad \text{Fri overflatebetingelse.}$$

Setter $\phi = A\cos kx \cosh k(z+d)\cos \omega t$ inn i (3):

$$-\omega^2 A \cos kx \cosh kd \cos \omega t + gkA\cos kx \sinh kd \cos \omega t = 0$$

$$\underline{\omega^2 = gk\tanh kd}. \quad \text{Dispersjonsrelasjonen.}$$

Løsning Oppgave 3 b

b) Kinematisk betingelse ved sideveggene: $u = 0$.

$$u = \partial\phi/\partial x = -Ak \sin kx \cosh k(z+d) \cos\omega t .$$

$x = 0$: $u = 0$ automatisk.

$x = a$: $u = 0 \Rightarrow \sin ka = 0$, $ka = n \cdot \pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\underline{k = n\pi/a}$$

c) $\eta = a \cdot \sin\omega t$, hvor amplituden $a = a(x)$.

Fra ligning (2) på forrige side er $\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}$, $z = 0$.

Det gir $\eta = \frac{\omega A}{g} \cos kx \cosh kd \sin\omega t \equiv a \cdot \sin\omega t$.

Altså $\underline{a = \frac{\omega A}{g} \cos kx \cosh kd}$

Laveste svingemode: $n = 1 \Rightarrow k = \pi/a$ og

$$\eta = \frac{\omega A}{g} \cos\frac{\pi x}{a} \cdot \cosh kd \cdot \sin\omega t$$

$\omega t = \pi/2$ gir $\underline{\eta = \frac{\omega A}{g} \cos\frac{\pi x}{a} \cdot \cosh kd}$