Inst. for fysikk 2012 **TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme**

Øving 5, løsningsskisse.
Potensiell energi, kondensatorer, kapasitans.

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver.

a) **D.** Newtons lov – kraft er lik motkraft! (Coulombs lov gir størrelsen $F = \dfrac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$).

b) **B.** To ledere som er i kontakt har samme potensial.

c) **A.** Det vesentlige i denne oppgaven er at ledermateriale har samme potensial når de er i kontakt med hverandre (som i oppgaven over). Ladningen fordeler seg slik at dette er oppfylt, la oss si ladning Q_1 og radius R_1 for kule 1 og Q_2 og R_2 for kule 2.

Potensialet på ei kule med jamt fordelt ladning er

$$V_1 = k \cdot Q_1/R_1 \quad \text{og} \quad V_2 = k \cdot Q_2/R_2.$$

Kravet $V_1 = V_2$ gir $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$. Sum av ladning er $Q_1 + Q_2 = Q = 7{,}0$ nC. Dette gir

$$Q_2 = Q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 7,0\,\text{nC} \cdot \frac{10}{25} = 2,8\,\text{nC}.$$

d) **B.** Det elektrostatiske feltet er null overalt inni lederen. Feltet E er minus gradienten til det elektriske potensialet V. Dermed må V være konstant overalt inni lederen. Dette gjelder helt ut til og med lederens overflate, ettersom V må være kontinuerlig (i motsetning til E). Hvis V gjorde et sprang på lederens overflate ville det svare til en uendelig stor elektrostatisk kraft, noe som er ufysikalsk. Utenfor kuleskallet avtar E som en punktladning i sentrum av kula.

e) **C.** Ei ladd kule tiltrekker seg ei kule med motsatt ladning. Den vil imidlertid også tiltrekke seg en nøytral kule på grunn av polarisering av (forskyvning av ladning på) den nøytrale kula. Det er da alltid sant at minst en av kulene er ladd. Det kan være sant at begge kulene er ladet og at de er av metall. (Om en er vrang kan det være sant at ingen av kulene er (netto) ladet, men da må de ha permanent elektrisk polarisering!)

f) **B**. Med punktladningspotensialet $V(r) = kq/r$ får vi $r = k\dfrac{q}{V} = 8,99 \cdot 10^9\,\text{Vm/C} \cdot \dfrac{10 \cdot 10^{-9}\,\text{C}}{50\,\text{V}} = 1,8\,\text{m}\,.$

Oppgave 2. Potensiell energi.

a) Det er flere måter å regne ut dette, og viser her tre ulike måter:

Utregning A: Setter inn én og én ladning og beregner energi for hver:

1. ladning $-q$ settes inn fritt.
2. ladning q mot V_{21} (pot. ved ladn. 2 pga. ladn. 1): $U_2 = V_{21} \cdot q = k\dfrac{-q}{a} \cdot q.$
3. ladning q mot $V_{31} + V_{32}$ (pot. ved ladn. 3 pga. ladn. 1 og 2): $U_3 = (V_{31} + V_{32}) \cdot q = \left(k\dfrac{-q}{a} + k\dfrac{q}{\sqrt{2}a}\right) \cdot q.$
4. ladning $-q$ mot $V_{41} + V_{42} + V_{43}$: $U_4 = (V_{41} + V_{42} + V_{43}) \cdot q = \left(k\dfrac{-q}{\sqrt{2}a} + k\dfrac{q}{a} + k\dfrac{q}{a}\right) \cdot (-q).$

Totalt:

$$\begin{aligned} U &= U_2 + U_3 + U_4 = k\left(-4\frac{q^2}{a} + 2\frac{q^2}{\sqrt{2}a}\right) &(1)\\ &= k\frac{q^2}{a}\left(-4 + \sqrt{2}\right) = 8,99 \cdot 10^9\ \text{Jm/C}^2 \cdot \frac{(9,0 \cdot 10^{-6}\ \text{C})^2}{0,050\,\text{m}} \cdot (-2,586) = -37,7\ \text{J} = \underline{-38\ \text{J}}\,. &(2)\end{aligned}$$

Utregning B: Total potensiell energi for et system med punktladninger er

$$U = \sum_{i<j} k\,\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad \left(k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

der summen går over alle par av ladninger q_i og q_j i innbyrdes avstand r_{ij}. Her er alle ladninger like store i absoluttverdi. Vi har 4 par med motsatt fortegn i innbyrdes avstand $a = 0,050$ m og 2 par (diagonalt) med likt fortegn i innbyrdes avstand $\sqrt{2}a$. Dermed får vi:

$$U = k\left(-4\frac{q^2}{a} + 2\frac{q^2}{\sqrt{2}a}\right) = k\frac{q^2}{a}\left(-4+\sqrt{2}\right) ,$$

som over.

<u>Utregning C:</u> Bruke potensial i ferdig oppbygd ladningssammensetning og bruke formelen: $U = \frac{1}{2}\sum_i V_i q_i$. Her er V_1 potensialet ved ladning 1 pga. de tre andre ladningene: $V_1 = k\left(\frac{q}{a}+\frac{q}{a}+\frac{-q}{\sqrt{2}a}\right)$ osv. Forenkling $V_1 = V_4$, $V_2 = V_3$ og $q_1 = q_4 = -q$ og $q_2 = q_3 = q$ gir

$$U = \frac{1}{2}\left[2V_1(-q)+2V_2 q\right] = \frac{1}{2}k\left[2\left(\frac{q}{a}+\frac{q}{a}+\frac{-q}{\sqrt{2}a}\right)(-q)+2\left(\frac{-q}{a}+\frac{-q}{a}+\frac{q}{\sqrt{2}a}\right)q\right] = k\left(-4\frac{q^2}{a}+2\frac{q^2}{\sqrt{2}a}\right) ,$$

som over.

I energiberegninger i det videre anbefales den mest generelle utregningen C, med $\frac{1}{2}\sum_i V_i q_i \to \frac{1}{2}\int V\mathrm{d}q$ for kontinuerlige ladningsfordelinger.

b) Punktladningene Q_1 og Q_2 flyttes ikke, så innbyrdes potensiell energi for dette paret trenger vi ikke å bry oss om fordi den endres ikke når den tredje ladningen (elektronet) flyttes. Vi må regne ut potensiell energi som skyldes vekselvirkningen mellom elektronet og de to fastliggende ladningene, henholdsvis før og etter forflytningen. Alternativt kan vi regne ut potensialet fra ladningene Q_1 og Q_2 i punktene A og B, hhv V_A og V_B, og deretter endringen i potensiell energi, $\Delta U = U_B - U_A = -eV_B - (-e)V_A = -e(V_B - V_A)$. Potensialet i avstand r fra en punktladning q er

$$V(r) = k\frac{q}{r} \qquad \left(k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

dvs. Coulombpotensialet. De aktuelle avstandene her er $r_{1\mathrm{A}} = r_{2\mathrm{B}} = 0{,}60$ m (fra Q_1 til A og fra Q_2 til B) og $r_{1\mathrm{B}} = r_{2\mathrm{A}} = \sqrt{0,60^2+0,80^2}\,\mathrm{m} = 1,00\,\mathrm{m}$ (fra Q_1 til B og fra Q_2 til A). Dermed:

$$V_A = k\frac{Q_1}{r_{1\mathrm{A}}} + k\frac{Q_2}{r_{2\mathrm{A}}} \qquad \text{og} \qquad V_B = k\frac{Q_1}{r_{1\mathrm{B}}} + k\frac{Q_2}{r_{2\mathrm{B}}}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = kQ_1\left(\frac{1}{r_{1\mathrm{B}}}-\frac{1}{r_{1\mathrm{A}}}\right) + kQ_2\left(\frac{1}{r_{2\mathrm{B}}}-\frac{1}{r_{2\mathrm{A}}}\right)$$

Her er

$$Q_1 = 69\cdot 10^{-9}\mathrm{C}, \quad Q_2 = -98\cdot 10^{-9}\mathrm{C}, \quad \left(\frac{1}{r_{2\mathrm{B}}}-\frac{1}{r_{2\mathrm{A}}}\right) = 0,667\,\mathrm{m}^{-1} \quad \text{og} \quad \left(\frac{1}{r_{1\mathrm{B}}}-\frac{1}{r_{1\mathrm{A}}}\right) = -0,667\,\mathrm{m}^{-1}$$

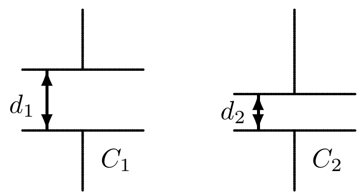
som gir

$$\Delta V = -8,99\cdot 10^{9}\ \mathrm{Vm/C}\cdot(98+69)\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\cdot 0,667\,\mathrm{m}^{-1} = -1001\ \mathrm{V}$$

og endelig

$$\underline{\Delta U = -e\cdot\Delta V = 1,00\,\mathrm{keV}}\,.$$

<u>Oppgave 3.</u> Tastatur.



Kapasitans før: $C_1 = \epsilon_0\frac{A}{d_1}$ $\left(= 8,85\,\mathrm{pF/m}\cdot\frac{50\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{0,6\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 0,738\,\mathrm{pF}\right)$.

Endring i kapasitans: $\Delta C = C_2 - C_1 = \epsilon_0 A\left(\frac{1}{d_2}-\frac{1}{d_1}\right)$.

Løser med hensyn på d_2:

$$d_2 = \frac{1}{\frac{\Delta C}{\epsilon_0 A}+\frac{1}{d_1}} = \frac{1}{\frac{0,25\,\mathrm{pF}}{8,85\,\mathrm{pF/m}\cdot 50\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}+\frac{1}{0,6\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}} = 0,45\,\mathrm{mm}.$$

Det vil si at tasten må trykkes ned:

$$\Delta d = d_1 - d_2 = \underline{0,15\,\mathrm{mm}}.$$

Alternativ løsningsmetode:
Dividerer $C_1 = \epsilon_0\frac{A}{d_1}$ med $C_2 = \epsilon_0\frac{A}{d_2}$ og får

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad \Rightarrow d_2 = d_1\frac{C_1}{C_2} = 0,6\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\frac{0,738\,\mathrm{pF}}{(0,738+0,25)\,\mathrm{pF}} = 0,45\,\mathrm{mm}.$$

Et helt tilsvarende system brukes som akselerometer i utløsermekansmen for sikkerhetsputer i biler.

Oppgave 4. Elektronisk blitz.

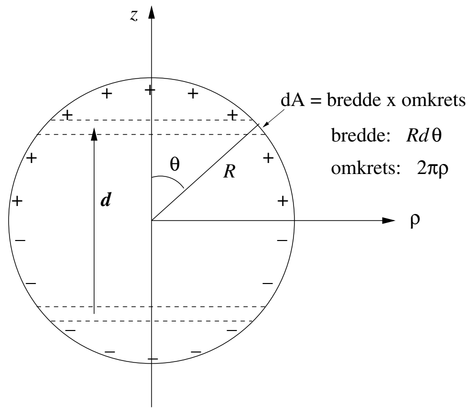
a) Energi som lagres i kondensatoren for et blink:

$$U = \frac{P \cdot t}{0,95} = \frac{600\,\mathrm{W} \cdot 0,01\,\mathrm{s}}{0,95} = 6,32\,\mathrm{J} = \underline{6,3\,\mathrm{J}}.$$

b) Energi lagret på kondensatoren er $U = \frac{1}{2}CV^2$, som løst mhp. spenningen V gir

$$V = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,32\,\mathrm{J}}{0,8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{F}}} = 126\,\mathrm{V} = \underline{0,13\,\mathrm{kV}}.$$

Oppgave 5. Dipolmoment halvkuler.



Deler kulas overflate opp i par av infinitesimale ringer i like stor avstand fra sentrum og hver med radius ρ, omkrets $2\pi\rho$ og infinitesimal bredde $R\ \mathrm{d}\theta$. Posisjonen til den positivt ladde ringen er gitt ved θ. Arealet til hver ring blir $\mathrm{d}A = (2\pi\rho) \cdot (R\,\mathrm{d}\theta)$, der $\rho = R\sin\theta$.

De to smale ringene har

innbyrdes avstand	$\vec{d} = 2z\ \hat{\mathbf{k}}\ = 2R\cos\theta\ \hat{\mathbf{k}}$
ladning	$\pm\mathrm{d}q = \pm\sigma\,\mathrm{d}A = \pm\sigma \cdot (2\pi\rho) \cdot (R\,\mathrm{d}\theta) = \pm\sigma \cdot (2\pi R\sin\theta) \cdot (R\,\mathrm{d}\theta)$
dipolmoment	$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{d}\,\mathrm{d}q = 2R\cos\theta\,\sigma \cdot (2\pi R\sin\theta) \cdot (R\,\mathrm{d}\theta)\ \hat{\mathbf{k}}\ = 4\pi R^3\sigma\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\ \hat{\mathbf{k}}$

Kulas totale dipolmoment bestemmes ved integrasjon over alle par av ringer fra $\theta = 0$ til $\pi/2$:

$$\vec{p}\ =\ \int_{\text{kula}} \mathrm{d}\vec{p} = \int_0^{\pi/2} 4\pi R^3\sigma\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\ \hat{\mathbf{k}}\ = 4\pi R^3\sigma\ \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}\ \hat{\mathbf{k}}\ = \underline{2\pi R^3\sigma\,\hat{\mathbf{k}}}\,.$$

Legg merke til at vi gjerne har to mulige (ekvivalente) strategier når dipolmomentet til et system (her: med kontinuerlig ladningsfordeling) skal beregnes. Vi skriver $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{r}\,\mathrm{d}q$ og

1) lar $\vec{r}$ angi posisjonen til ladningselementet $\mathrm{d}q$ og integrerer over *hele* ladningsfordelingen, eller
2) lar $\vec{r}$ angi avstandsvektoren mellom "symmetrisk lokaliserte" ladningselementer $-\mathrm{d}q$ og $+\mathrm{d}q$ og integrerer kun over *halve* ladningsfordelingen (typisk den positive halvdelen).

I denne oppgaven fungerte strategi 2) fint, siden vi har en "passende" symmetri. Dersom vi ikke har en passende symmetri, må vi bruke strategi 1).

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 30. jan. 12.