NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- og PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

3. august 2009
Tid: 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller innen 24. august

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1.

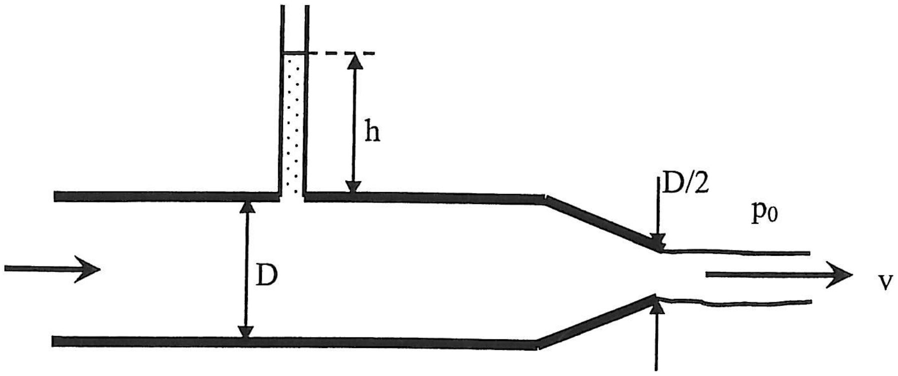
For å beskrive en to-dimensjonal stasjonær strømning av inkompressibel og friksjonsfri fluid inn mot den faste veggen y = 0, benyttes strømfunksjonen

$$\psi(r,\theta) = \tfrac{1}{2} A r^2 \sin(2\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad A = \text{konstant} > 0 \tag{1}$$

a) Finn hastighetskomponentene v_r og v_θ i henholdsvis r- og θ-retning, og vis at origo er et stagnasjonspunkt.

b) Vis at hastighetsfeltet er virvlingsfritt, og finn hastighetspotensialet $\varphi(r,\theta)$.

Oppgave 2



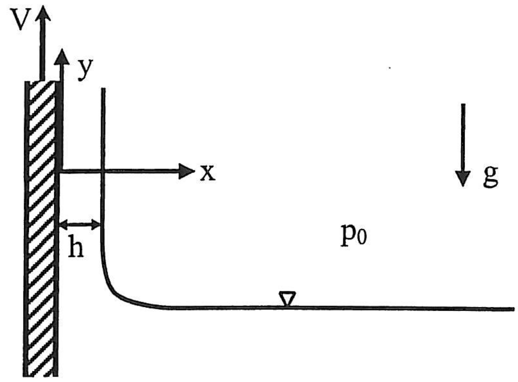
Et rør med diameter D ender i et munnstykke med utløpsdiameter $D/2$ mot atmosfæren. Røret ligger i rett horisontal linje på bakken og det er påmontert en tynn vertikal manometergren som er åpen mot atmosfæren. I røret strømmer det vann av tetthet ρ og uten viskositet. Vannets stigehøyde i manometerrøret er h, atmosfæretrykket er p_0, og tyngdens akselerasjon er g. Trykket kan regnes konstant over tverrsnittet av røret.

a) Bestem trykket inne i røret.

b) Finn hastigheten v i utløpet av munnstykket.

c) Finn kraften som virker fra strømningen på munnstykket.

Oppgave 3.



En væske med viskositetskoeffisient μ og tetthet ρ trekkes opp fra et reservoar ved hjelp av et vertikalt transportbelte med konstant hastighet V. Væsken danner en film med konstant tykkelse h og med strømlinjer parallelt med den viste y-aksen langs båndet. Atmosfæretrykket er p_o, tyngdens akselerasjon er g og tangensialspenning mellom væskefilm og atmosfæren neglisjeres.

a) I det oppgitte (faste) aksesystemet, vis at bevegelsesligningen for væsken blir

$$0 = -\rho g + \mu \frac{d^2 v}{dx^2}$$

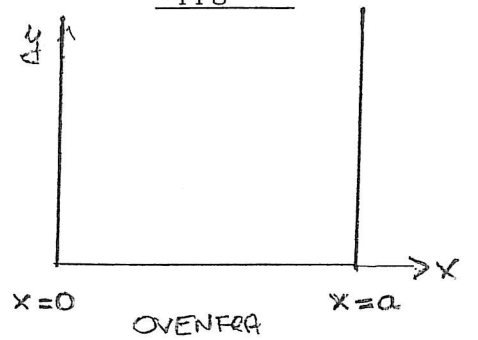
b) Angi grensebetingelsene på hastighetskomponenten i y-retning, og vis at hastighetsprofilet gjennom filmen er gitt ved

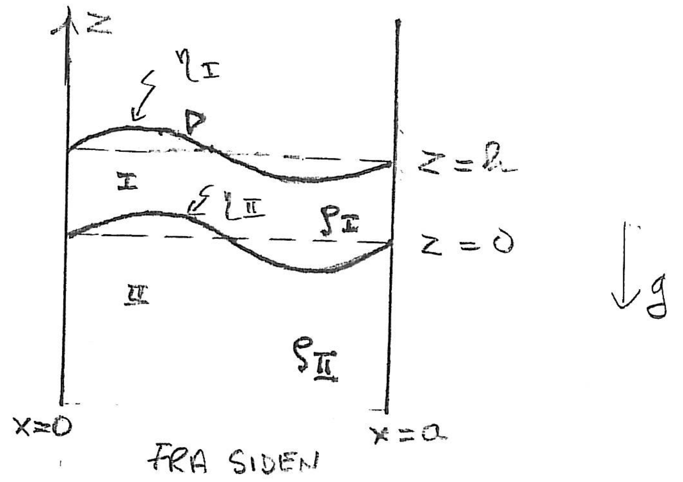
$$v = \frac{g}{\nu} x \left(\frac{x}{2} - h \right) + V$$

hvor $\nu = \mu / \rho$.

c) Skisser typiske hastighetsprofil for tilfellene: $v(h) > 0$, $v(h) < 0$ og $v(h) = 0$ og bestem til slutt hastigheten V slik at netto volumstrøm i filmen blir lik null.

Oppgave 4





Oppgaven går ut på å analysere de stasjonære svingningene i et system av to overlagrede ideelle væsker I og II i en tank. Tankens bredde i x-retningen er a, mens bredden i y-retningen antas uendelig stor. Øvre væske I er et sjikt med høyde h, mens nedre væske II kan antas uendelig dyp. Dersom systemet er i ro, er den frie overflaten beliggende i høyde $z = h$, mens nedre grenseflate (interfasen) er i høyde $z = 0$. De konstante tettheter er henholdvis ρ_I og ρ_{II}. Se bort fra atmosfæretrykk, viskositet og overflatespenning. Det oppgis at hastighetspotensialene i de to områdene kan skrives på formen

$$\phi_I = (Ae^{-kz} + Be^{kz}) f(x) \cos \omega t,$$

$$\phi_{II} = Ce^{kz} f(x) \cos \omega t,$$

hvor A, B, C er konstanter.

1) Gjør bruk av inkompressibilitetsbetingelsen, samt den kinematiske betingelsen ved de vertikale veggene $x = 0$ og $x = a$, til å bestemme formen av funksjonen $f(x)$. Bestem hvilke diskrete verdier bølgetallet k kan ha.

2) Forklar hvorfor en kan i lineær bølgeteori skrive den kinematiske og den dynamiske grensebetingelse ved interfasen slik (Bernoulli-konstanten settes lik null):

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} = \frac{\partial \phi_I}{\partial z}, \quad \frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \frac{p_I}{\rho_I} + g\eta_I = 0, \quad z = 0.$$

De samme ligninger gjelder for væske II ved $z = 0$.

Benytt trykkbetingelsen ved interfasen til å vise at ϕ_I og ϕ_{II} må tilfredsstille følgende differensialligning:

$$\rho_I \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} - \rho_{II} \frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial t^2} + g(\rho_I - \rho_{II}) \frac{\partial \phi_{II}}{\partial z} = 0, \quad z = 0.$$

Eksamen i TEP 4105 Fluidmekanikk, 3. august 2009

Løsning Oppgave 1

Gitt $\psi = \frac{1}{2} A r^2 \sin 2\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $A > 0$

a) $V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \underline{A r \cos 2\theta}$

$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\underline{A r \sin 2\theta}$

$\Rightarrow V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = A^2 r^2 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) = A r^2$

$\underline{V^2 = 0 \text{ i origo, } r = 0}$. Derfor er origo et stagnasjonspunkt.

b) Fra formelark: $\zeta_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}$

Innsatt: $\underline{\zeta_z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-A r^2 \sin 2\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(A r \cos 2\theta)$

$= -2A \sin 2\theta + 2A \sin 2\theta = \underline{0}$

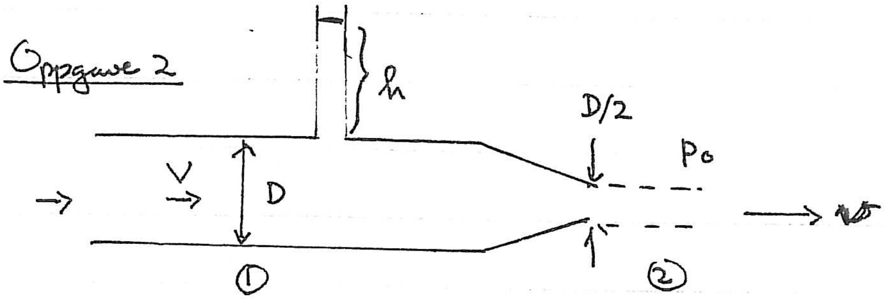
Altså virvlingsfritt (potensial) hastighetsfelt.

Hastighetspotensial ϕ må oppfylle $\frac{\partial \phi}{\partial r} = A r \cos 2\theta$

Enkleste løsning $\underline{\phi = \frac{1}{2} A r^2 \cos 2\theta}$

Eksamen i TEP4105 Fluidmekanikk, 3. august 2009.

Oppgave 2



Hastighet inne i røret er V; utløpshastighet er v.

a) Trykket inne i røret er p_0 pluss det hydrostatiske trykk:

$$\underline{p = p_0 + \gamma \cdot h} \quad , \quad \gamma = \rho g .$$

b) Horisontal Bernoulli (ser bort fra atmosfæretrykket p_0):

$$\frac{\gamma \cdot h}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{2} v^2$$

Sammenhengen mellom V og v finnes av kontinuitetsligningen:

$$V \cdot \frac{\pi D^2}{4} = v \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^2 = v \cdot \pi \frac{D^2}{16} \quad ; \quad V = \frac{1}{4} v .$$

Bernoulli altså $\frac{\gamma h}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{16} = \frac{1}{2} v^2$, $gh = \frac{15}{32} v^2$

$$\underline{v = \sqrt{\frac{32}{15} g h}}$$

c) Bruker $\sum F = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN}$, hvor

$\sum F = p \cdot \frac{\pi D^2}{4} + F$; her er F kraft på vannet i CV mellom snittene ① og ②. Trenger bare gage-trykket $\gamma \cdot h$.

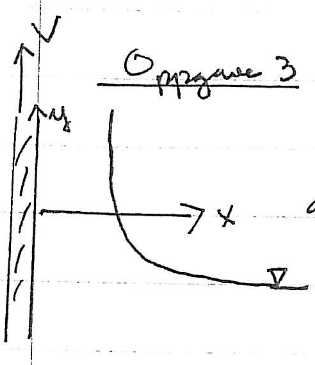
$$\dot{M}_{UT} = \rho v^2 \cdot \frac{\pi D^2}{16} \quad , \quad \dot{M}_{INN} = \rho V^2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN} = \rho \cdot \frac{32}{15} g h \cdot \frac{\pi D^2}{16} - \rho \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{32}{15} g h \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \frac{1}{10} \rho g h \pi D^2$$

$$\frac{\rho g h}{4} \pi D^2 + F = \frac{1}{10} \rho g h \pi D^2 \quad , \quad F = -\frac{3}{20} \rho g h \pi D^2$$

Kraft på munnstykket har motsatt fortegn, og er altså $\underline{\frac{3}{20} \rho g h \pi D^2}$, rettet mot høyre.

Eksamen i TEP4105 Fluidmekanikk, 3. august 2009



Oppgave 3

Væskehastighet (u, v).

a) Kontinuitetsligning. $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

I filmen er $u = 0$, altså $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $v = v(x)$.

Navier-Stokes i x-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \underbrace{\nabla^2 u}_{0}$, $\Rightarrow$

p = konstant på tvers av filmen.

p avhenger ikke av y, på grunn av symmetri.

Altså $p = p_0$ i filmen.

Navier-Stokes i y-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{0} - g + \nu \underbrace{\nabla^2 v}_{d^2v/dx^2}$

Altså $\underline{0 = -\rho g + \mu \frac{d^2 v}{dx^2}}$, $\mu = \rho\nu$

b) Grensebetingelser: Ved $x = 0$ er $v = V$ (beltets hastighet).

Ved $x = h$ er $\tau = \mu \frac{dv}{dx} = 0$.

Integrerer $\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{g}{\nu}$ to ganger:

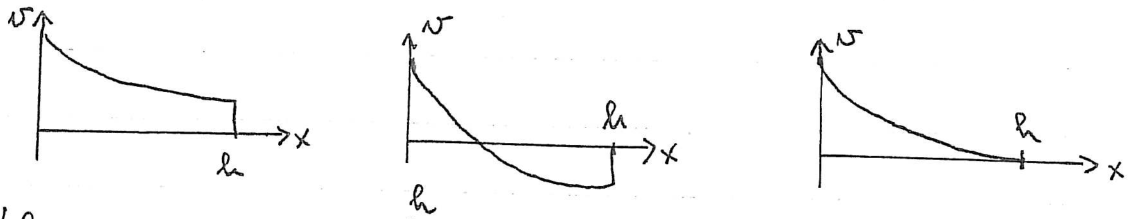
$$\frac{dv}{dx} = \frac{g}{\nu} \cdot x + C_1, \quad v = \frac{g}{2\nu}x^2 + C_1 x + C_2$$

Av $v(0) = V$ følger $V = C_2$.

Av $\left.\frac{dv}{dx}\right|_h = 0$ følger $\frac{g}{\nu} \cdot h + C_1$.

$\Rightarrow$ $\underline{v = \frac{gx}{\nu}\left(\frac{1}{2}x - h\right) + V}$

c)



Volumstrøm $Q = \int_0^h v\,dx = 0$ gir, med $v = \frac{g}{\nu}\left(\frac{1}{2}x^2 - hx\right) + V$,

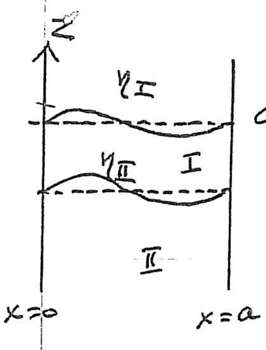
$$\frac{g}{\nu}\int_0^h \left(\frac{1}{2}x^2 - hx\right)dx + V \cdot h = 0, \quad \underline{V = \frac{g}{3\nu}h^2}$$

TEP4105 KONTINUASJONSEKSAMEN 3. AUGUST 2009

Løsning Oppgave 4

Gitt $\phi_I = (Ae^{-kz} + Be^{kz}) f(x) \cos\omega t$,

$\phi_{II} = Ce^{kz} f(x) \cos\omega t$.



a) Inkompressibilitetsbetingelsen i område I er $\nabla^2 \phi_I = 0$,

$\Rightarrow f''(x) + k^2 f(x) = 0$, som gir løsning av formen $\sin kx$ og $\cos kx$.

Men kinematisk betingelse ved veggene $x = 0$ og $x = a$ er at horisontalhastighet $\partial\phi_I/\partial x = 0$.

Dermed kan ikke løsningen $f(x) = \sin kx$ brukes.

Igjen bare $f(x) = \cos kx$, slik at

$$\underline{\phi_I = (Ae^{-kz} + Be^{kz}) \cos kx \cos\omega t.}$$

Da $\sin ka = 0$ følger $\underline{k = \frac{\pi}{a} \cdot n}$, hvor $n = 1, 2, \ldots$

I område II er tilsvarende

$$\underline{\phi_{II} = Ce^{kz} \cos kx \cos\omega t}$$

b) Kinematisk betingelse i interfasen $\frac{\partial \eta_{II}}{\partial t} + u\frac{\partial \eta_{II}}{\partial x} = w$ gir, i lineær teori, $\frac{\partial \eta_I}{\partial t} = \frac{\partial \phi_I}{\partial z}$, $z = 0$.

Tilsvarende gir dynamisk betingelse i interfasen

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \frac{p_I}{\rho_I} + \frac{1}{2}V_I^2 + g\eta_{II} = 0 \text{ i lineær teori at}$$

(z=0) $\quad \frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \frac{p_I}{\rho_I} + g\eta_{II} = 0$. Ganger med ρ_I:

$$\rho_I \frac{\partial \phi_I}{\partial t} + p_I + \rho_I g \eta_{II} = 0$$

Tilsvarende: $\rho_{II} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} + p_{II} + \rho_{II} g \eta_{II} = 0$. $\qquad p_I = p_{II}$ i interfasen

Subtraherer:

$$\rho_I \partial\Phi_I/\partial t - \rho_{II} \partial\phi_{II}/\partial t + (\rho_I - \rho_{II}) g \eta_{II} = 0$$

Tidsderivasjon gir, med bruk av $\partial\eta_{II}/\partial t = \partial\phi_{II}/\partial z$, at

$$\underline{\rho_I \partial^2\Phi_I/\partial t^2 - \rho_{II} \partial^2\phi_{II}/\partial t^2 + (\rho_I - \rho_{II}) g\, \partial\phi_{II}/\partial z = 0, \quad z = 0}$$