Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

Chapter 13.7

La $z \neq 0$. **Logaritmen** til z, $\ln z$, er definert som tallene

$$\ln z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2n\pi), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Dvs. hvis $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ og $-\pi < \theta \leq \pi$, så er

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2n\pi), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

Prinsipalverdien av $\ln z$ er definert som

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

(Merk at med denne definisjonen så er logaritmen ln – i motsetning til Ln – ikke en *funksjon* i vanlig forstand.)

La z og c være komplekse tall, $z \neq 0$. **Potensen** z^c er definert som tallene

$$z^c = e^{c \ln z}$$

med **prinsipalverdi** $e^{c \operatorname{Ln} z}$.

$\boxed{\text{13.7:15}}$ Finn alle verdiene av

$$\ln(e^i)$$

og tegn noen av dem i det koplekse planet.

Løsning:
Fra (0.1) får vi

$$\ln(e^i) = \ln 1 + i(1 + 2n\pi) = i(1 + 2n\pi), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Altså, punktene på imaginæraksen med mellomrom 2π startende fra i.

$\boxed{\text{13.7:17}}$ Vis at verdiene til $\ln(i^2)$ ikke er de samme som verdiene til $2\ln i$.

Løsning:
Vi finner at

$$\begin{aligned} \ln(i^2) &= \ln(-1) \\ &= \ln e^{i\pi} \\ &= \ln 1 + i(\pi + 2n\pi) \\ &= i(2n+1)\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Og at

$$\begin{aligned} 2\ln i &= 2\ln e^{i\pi/2} \\ &= 2\left(\ln 1 + i(\pi/2 + 2n\pi)\right) \\ &= i(4n+1)\pi. \end{aligned}$$

Dermed er f.eks. $\ln(i^2) \ni 3\pi i \notin 2\ln i$.

13.7:22 Finn prinsipalverdien til potensen

$$(2i)^{2i}.$$

Løsning:
Vi har at

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} 2i &= \operatorname{Ln} 2e^{i\pi/2} \\ &= \ln 2 + i\pi/2, \end{aligned}$$

så prinsipalverdien til $(2i)^{2i}$ er

$$\begin{aligned} e^{2i \operatorname{Ln} 2i} &= e^{2i(\ln 2 + i\pi/2)} \\ &= e^{-\pi + 2i\ln 2}. \end{aligned}$$

13.7:30 a) Vi definerer at

$$\arccos z = w$$

hvis $\cos w = z$.

Vis at

$$\arccos z = -i\ln(z + \sqrt{z^2-1}).$$

Løsning:

Vi må løse ligningen $\cos w = z$ for w:

$$\begin{aligned} z &= \cos w \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iw} + e^{-iw}\right) \\ &\Longleftrightarrow \\ 2ze^{iw} &= (e^{iw})^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \\ e^{iw} &= z \pm \frac{1}{2}\sqrt{4z^2 - 4} \\ &= z \pm \sqrt{z^2 - 1} \\ &\Longleftrightarrow \\ iw &= \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}). \end{aligned}$$

Dermed er $\arccos z = w = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$. Vi kan droppe "$\pm$" fordi den komplekse kvadratroten har to verdier; den ene lik det negative av den andre.

Chapter 14.1

Metode I:
Hvis f er analytisk i et simply connected domain, så finnes en analytisk funksjon F slik at $F' = f$ og

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0)$$

for alle kurver C som starter i z_0 og ender i z_1.

Metode II:
La den stykkevise glatte kurven C ha parametriseringen $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ og la f være kontinuerlig på C. Da er

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t.$$

14.1:3 Finn, og tegn kurven

$$z(t) = t + 4t^2 i, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Løsning:
Vi har at $z(t) = x(t) + iy(t)$ der $x(t) = t$ og $y(t) = 4t^2$. Vi ser at $y = 4x^2$, så kurven er delen av denne parabelen fra $x = 0$ til $x = 1$.

14.1:6 Finn, og tegn kurven

$$z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t}, \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Løsning:
Eksponetialfunksjonen vil tegne en sirkel med radius én (med klokken). Kurven er dermed en sirkel med sentrum i $1 + i$ og radius én.

$\boxed{\text{14.1:11}}$ Finn en parametrisering og tegn segmentet fra $(-1, 2)$ til $(1, 4)$.

Løsning:
La $z_0 = -1 + 2i$ og la $z_1 = 1 + 4i$. Da vil

$$\begin{aligned} z(t) &= (1-t)z_0 + tz_1 \\ &= (1-t)(-1+2i) + t(1+4i) \\ &= -1 + 2t + i(2+2t) \\ &=: x(t) + iy(t), \qquad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

være en parametrisering av den rette linjen mellom z_0 og z_1.

$\boxed{\text{14.1:12}}$ Finn en parametrisering og tegn kurven fra $(0, 0)$ til $(2, 1)$ langs aksene.

Løsning:
Her har vi to valg. Vi velger å først gå i x-retning, deretter i y-retning.

Parametrisering fra $(0, 0)$ til $(2, 0)$:

$$z_1(t) := t, \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Parametrisering fra $(2, 0)$ til $(2, 1)$:

$$z_2(t) = 2 + i(t-2), \qquad 2 \leq t \leq 3.$$

En parametrisering av kurven kan da skrives som

$$z(t) := z_1(t)\chi_{[0,2]}(t) + z_2(t)\chi_{[2,3]}(t)$$

Der funksjonen $\chi_{[a,b]}$ er definert som

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a,b], \\ 0, & t \notin [a,b]. \end{cases}$$

$\boxed{\text{14.1:20}}$ Finn en parametrisering og tegn kurven

$$4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 20.$$

Løsning:
Vi dividerer på 20 og finner at

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

er ligningen til en ellipse med sentrum i $(2,-1)$ og med halvakser $\sqrt{5}$ og 2. En parametrisering kan da være

$$x(t) = 2 + \sqrt{5}\cos t, \quad y(t) = -1 + 2\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

$\boxed{\text{14.1:22}}$ La kurven C være delen av parabelen $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$ fra $1+i$ til $3+3i$.

Finn integralet

$$\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$$

ved metode I, eller argumenter for at det ikke er mulig og bruk metode II.

Løsning:
Metode I er ikke mulig ettersom funksjonen $\operatorname{Re} z$ ikke er analytisk. For å benytte metode II må kurven C parametriseres:

La $x(t) = t+1$. Da er $y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$ og parametriseringen er gitt ved

$$z(t) := x(t) + iy(t), \qquad 0 \le t \le 2.$$

Dermed er $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = 1 + it$ og

$$\begin{aligned}
\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z &= \int_0^2 \operatorname{Re}(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 (t+1)(1+it)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 (t+1)\,\mathrm{d}t + i\int_0^2 (t^2+t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big|_0^2 \frac{1}{2}t^2 + t + i\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right) \\
&= 2 + 2 + i(8/3 + 2) \\
&= 4 + \frac{14}{3}i.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{14.1:25}}$ La C være kurven fra 1 til i langs aksene.

Finn integralet

$$\int_C z e^{z^2}\,\mathrm{d}z$$

ved metode I, eller argumenter for at det ikke er mulig og bruk metode II.

Løsning:
Integranden er analytisk i hele $\mathbb{C}$ og $ze^{z^2} = F'(z)$ der

$$F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2}.$$

Dermed er integralet uavhengig av kurven mellom endepunktene og

$$\begin{aligned}\int_C ze^{z^2}\,\mathrm{d}z &= F(i) - F(1)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i^2} - e^{1^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e\right) = -\sinh 1.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{14.1:26}}$ La C være enhetssirkelen med orientering mot klokken.

Finn integralet

$$\int_C z + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

ved metode I, eller argumenter for at det ikke er mulig og bruk metode II.

Løsning:
Integranden er ikke analytisk fordi $1/z$ ikke er analytisk i 0. Men av linearitet og av eksempel 5 får vi at

$$\begin{aligned}\int_C z + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_C z\,\mathrm{d}z + \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}\\ &= 0 + 2\pi i.\end{aligned}$$

Det første leddet er 0 fordi z er analytisk og C er en lukket kurve.

$\boxed{\text{14.1:29}}$ La C være trekanten med hjørner $0, 1$ og i og med orientering mot klokken.

Finn integralet

$$\int_C \operatorname{Im} z^2\,\mathrm{d}z$$

ved metode I, eller argumenter for at det ikke er mulig og bruk metode II.

Løsning:
Vi vet at integranden ikke er analytisk (den tilfredstiller ikke C-R). La $z = x + iy$. Da er

$$\operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2xy$$

og vi ser at integranden er ulik 0 bare på diagonalen i trekanten. En parametrisering av diagonalen er

$$z(t) = 1 - t + it, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

og dermed er

$$\begin{aligned}
\int_C \operatorname{Im} z^2 \, \mathrm{d}z &= \int_0^1 \operatorname{Im} z^2(t)\dot{z}(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2x(t)y(t)(-1+i) \, \mathrm{d}t \\
&= 2(-1+i) \int_0^1 (1-t)t \, \mathrm{d}t \\
&= 2(-1+i) \Big|_0^1 \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \\
&= 2(-1+i)(1/2 - 1/3) \\
&= \frac{-1+i}{3}.
\end{aligned}$$