FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2015.

Løsningsforslag til øving 7

Oppgave 1

a) Med gass, og arbeid pdv, har vi $df = du - Td\sigma - \sigma dT = -pdv - \sigma dT$, som betyr at $\sigma = -(\partial f/\partial T)_p = +k\partial(T \ln z)/\partial T$. Konstant p i gass-systemet er analogt til konstant magnetfelt h i et magnetisk system, men temperaturen T opptrer på samme vis uansett type system, så uttrykket for entropien σ blir det samme.

b) Den deriverte av $\cosh x$ er $\sinh x$, og $\tanh x = \sinh x/\cosh x$. Dermed:

$$\begin{aligned}
\sigma &= k\frac{\partial}{\partial T}\left[T \ln\left(2\cosh \beta h\right)\right] \\
&= k\left[\ln 2 + \ln\cosh\beta h + T\frac{1}{2\cosh\beta h}\cdot 2\sinh\beta h \cdot (-h/kT^2)\right] \\
&= k\left[\ln 2 + \ln\cosh\beta h - \beta h \tanh\beta h\right].
\end{aligned}$$

Dvs, en funksjon av produktet βh, som antydet i oppgaveteksten. Hvis vi nå spør "hva er σ som funksjon av m og T?" (analogt til $\sigma(V,T)$ i gass-system), innser vi at σ blir en funksjon av kun m, dvs uavhengig av T, siden $m = m(\beta h)$. For å bestemme funksjonen $\sigma(m)$ må vi invertere $m(\beta h)$, dvs bestemme funksjonen $y(m)$, med $y \equiv \beta h$. Vi har $\tanh x = (z - 1/z)/(z + 1/z) = (z^2 - 1)/(z^2 + 1)$, der vi har innført $z = e^x$. Dermed:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \\
(z^2 + 1)m &= z^2 - 1 \\
z^2 &= \frac{1+m}{1-m} \\
x &= \beta h = \ln\sqrt{\frac{1+m}{1-m}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+m}{1-m}.
\end{aligned}$$

Vi trenger også $\cosh x$ uttrykt ved m:

$$\begin{aligned}
m &= \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} \\
\Rightarrow m^2\cosh^2 x &= \cosh^2 x - 1 \\
\Rightarrow \cosh x &= \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}.
\end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned}
\sigma &= k\left[\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+m) - \frac{1}{2}\ln(1-m) - \frac{1}{2}m\ln(1+m) + \frac{1}{2}m\ln(1-m)\right] \\
&= k\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right],
\end{aligned}$$

som vi skulle vise.

c) Antall mikrotilstander W i et system med i alt N spinn og et antall N_+ spinn som peker med magnetfeltet og et antall N_- spinn som peker mot magnetfeltet, må være bestemt ved hvor mange ulike måter vi kan "trekke" N_+ med spinn "opp" og N_- med spinn "ned", dvs

$$W = \frac{N!}{N_+!N_-!}.$$

Og vi har sammenhengene $N = N_+ + N_-$ og $Nm = N_+ - N_-$, som gir

$$N_+ = \frac{1}{2}(1+m)N \quad \text{og} \quad N_- = \frac{1}{2}(1-m)N.$$

Med Boltzmanns prinsipp blir entropien følgelig

$$\begin{aligned}
S &= k \ln W = k(\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!) \\
&= k(N \ln N - N - (N_+ \ln N_+ - N_+) - (N_- \ln N_- - N_-)) \\
&= k(-N_+ \ln \frac{N_+}{N} - N_- \ln \frac{N_-}{N}) \\
&= kN(-\frac{1}{2}(1+m)\ln((1+m)/2) - \frac{1}{2}(1-m)\ln((1-m)/2)) \\
&= Nk\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right],
\end{aligned}$$

dvs det samme som funnet i punkt b.
[Spesialtilfeller: Hvis T er forskjellig fra null, vil $h = 0$ gi $m = 0$, som er rimelig: Like stor sjanse for spinn opp og spinn ned, og i middel null magnetisk moment pr spinn. Uttrykket for σ gir $\sigma(0) = k \ln 2$, som er rimelig: Med $h = 0$ er det $W = 2$ like sannsynlige mikrotilstander pr spinn. Den andre ytterlighet er at $\beta h \gg 1$ (evt $\beta h \ll -1$), dvs magnetfeltet er så sterkt at alle spinn foretrekker å ligge i samme retning som det påtrykte feltet. Da blir $m = \tanh \beta h \simeq 1$ (evt $m \simeq -1$ hvis $h < 0$), og entropien blir $\sigma(1) = k(\ln 2 - (1/2) \cdot 2 \ln 2 - (1/2) \cdot 0) = 0$. (Det siste leddet i parentesen blir null fordi x går raskere mot null enn $\ln x$ går mot minus uendelig når x går mot null.) Igjen et rimelig resultat: Med alle spinn i samme retning er det kun $W = 1$ mikrotilstand som er mulig.]

d) Når magnetfeltet h skrus på isotermt, vil magnetiseringen $m = \tanh \beta h$ øke. Når så magnetfeltet slås av igjen, uten termisk kobling til omgivelsene, vil systemets entropi ikke endre seg, ettersom σ bare avhenger av m. Uendret magnetisering, $m_1 = m_2$ betyr $\tanh \beta_1 h_1 = \tanh \beta_2 h_2$, og dermed $\beta_1 h_1 = \beta_2 h_2$, eller

$$T_1 = T_2 h_1 / h_2 < T_2.$$

For en ideell paramagnet (dvs ingen vekselvirkning mellom nabospinn) vil $T_1 \to 0$ når $h_1 \to 0$. I praksis vil det være en viss vekselvirkning mellom nabospinn, slik at et gitt spinn vil erfare et magnetfelt $B \neq 0$ selv om det ytre feltet skrus helt av.