NTNU

TEP4105: Fluidmekanikk

Løsningsforslag til Øving 2
Høst 2014

Oppgave 1.014

Gitt formel

$$u = B\frac{\Delta p}{\mu}(r_0^2 - r^2),$$

der

$$\mu = \left\{\frac{M}{LT}\right\}, \qquad u = \left\{\frac{L}{T}\right\}, \qquad \Delta p = \left\{\frac{M}{LT^2}\right\}, \qquad r = \{L\}.$$

Vi finner

$$B = \frac{\mu u}{\Delta p(r_0^2 - r^2)} = \frac{\left\{\frac{M}{LT}\right\}\left\{\frac{L}{T}\right\}}{\left\{\frac{M}{LT^2}\right\}\{L^2\}} = \left\{\frac{1}{L}\right\}.$$

Dimensjonen til B er dermed $\{L^{-1}\}$.

Baseballoppgave

Vi skal finne hastigheten $V(t)$, posisjonen $z(t)$ og beregne $z_{\max}$ for ballen gitt de to initialbetingelsene $V(t = 0) = V_0 = 45\text{m/s}$ og $z(t = 0) = 0$. Velger positiv retning oppover (fritt valg, men fortegn på alle størrelser må være konsistent med vårt valg av positiv retning). Newtons 2. lov for ballen gir

$$ma = m\frac{dV}{dt} = -mg - CV^2,$$

der C er drag-konstanten. Legg merke til at denne formelen forutsetter at ballen beveger seg oppover. Om hastigheten peker nedover, virker drag-leddet i motsatt retning og får motsatt fortegn.

Ligningen er en separabel diff.ligning, og vi skriver den som

$$\begin{aligned}
-dt &= \frac{m}{C}\frac{dV}{mg/C + V^2} \\
-\int dt &= \frac{m}{C}\int \frac{dV}{mg/C + V^2} \\
-t &= \frac{m}{C}\sqrt{\frac{C}{mg}}\arctan\left(\sqrt{\frac{C}{mg}}V\right) + K.
\end{aligned}$$

Vi har her brukt standard integrasjonsformelen

$$\int \frac{dx}{a^2x^2 + b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{ax}{b} + K,$$

som finnes i Rottmann matematiske formelsamling, 7. opplag på s.135. Integrasjonskonstanten K bestemmes fra initialbetingelsen $V = V_0$ når $t = 0$:

$$K = -\sqrt{\frac{m}{gC}}\arctan\left(\sqrt{\frac{C}{mg}}V_0\right) = -\sqrt{\frac{m}{gC}}\phi_0.$$

Konstanten ϕ_0 definerer vi bare for å forenkle notasjonen og spare oss endel skriving. Innsatt gir dette

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\sqrt{\frac{C}{mg}}V_0\right) &= \phi_0 - \sqrt{\frac{gC}{m}}t \\
\implies V(t) &= \sqrt{\frac{mg}{C}}\tan\left(\phi_0 - \sqrt{\frac{gC}{m}}t\right).
\end{aligned}$$

For å finne posisjonen $z(t)$ integrerer vi hastigheten med hensyn på tiden:

$$z(t) = \int \sqrt{\frac{mg}{C}} \tan\left(\phi_0 - \sqrt{\frac{gC}{m}} t\right) dt = \frac{m}{C} \ln\left[\cos\left(\phi_0 - \sqrt{\frac{gC}{m}} t\right)\right] + K',$$

der vi har brukt integrasjonsformelen

$$\int \tan(ax+b) = -\frac{1}{a} \ln[\cos(ax+b)] + K',$$

som er en triviell generalisering av formel 111 på s. 143 i Rottmann. K' bestemmer vi med initialbetingelsen $z(t=0) = 0$:

$$K' = -\frac{m}{C} \ln[\cos\phi_0],$$

så

$$z(t) = \frac{m}{C} \ln\left[\frac{\cos\left(\phi_0 - \sqrt{gC/m} \cdot t\right)}{\cos\phi_0}\right].$$

Vi har gjort to integrasjonen og bestemt to integrasjonskonstanter ved hjelp av to initialbetingelser. En trenger alltid like mange initialbetingelser som en får integrasjonskonstanter i utregningen.

Vi finner z_{max} når $V(t) = 0$ (dvs. når $dz/dt = 0$; $z(t)$ har et maksimum). Da får vi ligningen

$$t_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{m}{gC}} \phi_0$$

$$\Downarrow$$

$$z(t_{\mathrm{max}}) = z_{\mathrm{max}} = \frac{m}{C} \ln\left(\frac{1}{\cos\phi_0}\right).$$

Vi skal sammenligne med tilfellet null luftmotstand. Vi setter først inn tallverdier som gitt i oppgaven: m =145g, V_0 =45m/s, C =0.0013Ns^2/m^2, g =9.81m/s^2. Innsatt fås

$$z_{\mathrm{max}} = 58\mathrm{m} \qquad \text{og} \qquad t_{\mathrm{max}} = 3.2\mathrm{s}.$$

Med null luftmotstand blir Newtons 2. lov nå

$$m\frac{dV}{dt} = -mg \qquad \Longrightarrow \qquad V(t) = V_0 - gt.$$

Posisjonen blir

$$z(t) = \int_0^t V(t')dt' = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

(legg merke til at vi har brukt initialbetingelsene implisitt ovenfor). Bestemmer tiden t_{max} der $V = 0$:

$$t_{\mathrm{max}} = V_0/g \qquad \Longrightarrow \qquad z_{\mathrm{max}} = V_0^2/2g.$$

Tallverdier:

$$z_{\mathrm{max}} = 103\mathrm{m} \qquad \text{og} \qquad t_{\mathrm{max}} = 4.6\mathrm{s}.$$

(Vi kunne også beregnet det friksjonsfrie tilfellet ved å la drag-konstanten C gå mot null som en grenseverdi. Av rekkeutviklingen for arctan på side 113 i rottmann ser vi at for svært små C, dvs. svært små $\sqrt{C/mg} \cdot V_0$, er $\phi_0 = \arctan(\sqrt{C/mg} \cdot V_0) \approx \sqrt{C/mg} \cdot V_0$, og vi får $t_{\mathrm{max}} = V_0/g$ som vi skal. Å forenkle mer kompliserte uttrykk ved å betrakte grenseverdier der vi kjenner resultatet er en god måte å sjekke at vi har regnet riktig).

Oppgave 1.059

Vi skal bestemme det viskøse dreiemomentet på skiven, og antar å kunne se bort ifra skivens tykkelse og tykkelsen til akslingen som roterer skiven.

Med antagelsen om et lineært hastighetsprofil samt "no-slip"-betingelsen vil hastigheten variere lineært fra null på veggene til hastighet lik rotasjonshastigheten på skiven. Hastigheten til et punkt i avstand r fra sentrum av skiven er $u = \Omega r$, så hastighetsprofilen er

$$\frac{du}{dy} = \frac{\Omega r}{h} \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \mu \frac{du}{dy} = \frac{\mu \Omega r}{h},$$

der τ er skjærspenningen. τ er altså konstant fra veggene til skiven, men varierer i radiell retning. For radius r blir kraften på skiven (faktoren 2 skyldes at skiven grenser mot den viskøse væsken på to sider)

$$dF = 2\tau dA = 2\tau \cdot 2\pi r dr,$$

der $dA = 2\pi r dr$ er arealet av en svært tynn ring (bredde dr) med radius r. Kraften dF virker mot rotasjonsretningen, altså vinkelrett på vektoren $\vec{r}$ fra sentrum av skiven til punktet vi betrakter. Dreiemomentet blir

$$M = \int |\vec{r} \times d\vec{F}| = \int r \cdot dF = \int_0^R 4\pi \frac{\mu \Omega r}{h} r^2 dr = \underline{\pi \mu \frac{\Omega}{h} R^4}.$$

Tilleggsoppgave

Hvis man antar standardatmosfære har man i troposfæren ($z \leq 11$ km) følgende empiriske lov for temperaturen

$$T = T_0 - Bz = 288 - 0.0065z.$$

Bruker man denne loven så finner man at temperaturen på toppen av Galdhøpiggen ($z_G = 2469$ m) er $\underline{T_G = 272 \text{ K}}$.

Fra hydrostatikken har vi

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Kombinert med tilstandsligningen for en ideell gass, $p = \rho R T$, følger

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT},$$

hvor T er en funksjon av z. Integrasjon fra z_0 til z_G gir så

$$\begin{aligned} \frac{p_G}{p_0} &= \left(\frac{T_G}{T_0}\right)^{\frac{g}{RB}} = \left(\frac{T_G}{T_0}\right)^{5.26} \\ &\Rightarrow \quad p_G = \underline{0.749 \cdot 10^5 \text{Pa}} \end{aligned}$$

Fra tilstandsligningen $p/\rho T = p_0/\rho_0 T_0$ (R er konstant) får vi

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^{4.26} \\ &\Rightarrow \quad \rho_G = \underline{0.964 \text{kg/m}^3} \end{aligned}$$

Indeks 0 refererer til havets nivå, mens G refererer til Galdhøpiggen.