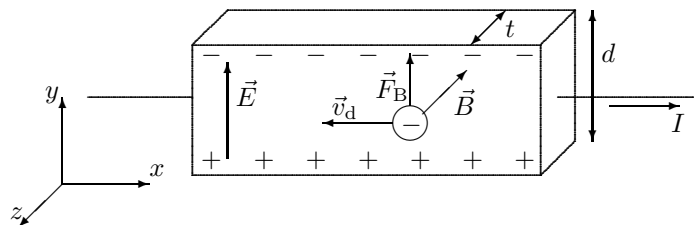


# Øving 10, løsningskisse. Magnetisk kraft på leder. Biot-Savarts lov.

## Oppgave 1. Halleffekt.



a) Strømmen går i positiv  $x$ -retning mens elektronene har hastighet i negativ  $x$ -retning (fordi retning av strømmen er definert som retning av positive ladningsbærere). La magnetfeltet gå i negativ  $z$ -retning. Med følgende vektornotasjon:

$$\vec{v}_d = -v_d \hat{i} \quad \text{og} \quad \vec{B} = -B \hat{k}$$

( $v_d$  og  $B$  er altså regnet positive), har vi følgende kraft på elektronene:

$$\vec{F}_B = q\vec{v}_d \times \vec{B} = (-e) \cdot v_d \cdot B \hat{i} \times \hat{k} = -ev_d B (-\hat{j}) = ev_d B \hat{j}.$$

Magnetisk kraft på elektronene virker altså oppover. P.g.a. denne krafta blir negativ ladning akkumulert i øverste del av biten; nederste del blir positivt ladet. Denne separasjonen av ladning resulterer i et  $E$ -felt retning oppover:  $\vec{E} = E \hat{j}$ . Potensialforskjellen  $V_H = E \cdot d$  kalles Hallspenningen. I tillegg til magnetisk kraft vil elektronene da påvirkes av en elektrisk kraft i retning nedover:

$$\vec{F}_E = (-e) \cdot \vec{E} = -eE \hat{j}.$$

Vi får en likevektssituasjon når nettokraft er lik null:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = -eE \hat{j} + ev_d B \hat{j} = \vec{0} \Rightarrow E = v_d B, \quad \text{og} \quad \text{altså} \quad V_H = E \cdot d = v_d B d \quad (\text{høyest potensial nederst}).$$

b) Med tverrsnittsarealet  $A = td$  (se figuren) er antallstettheten av ladningsbærere,  $n$ , gitt ved

$$I = nev_d A \Rightarrow n = \frac{I}{ev_d A} = \frac{I}{ev_d t d}.$$

Fra uttrykk for  $V_H$  ser vi at driftsfarten  $v_d$  kan estimeres fra målt  $V_H$  hvis  $B$  og  $d$  er kjent:  $v_d = \frac{V_H}{Bd}$ .

Vi kan da finne antallstetthet av ladningsbærere uttrykt ved Hallspenningen:

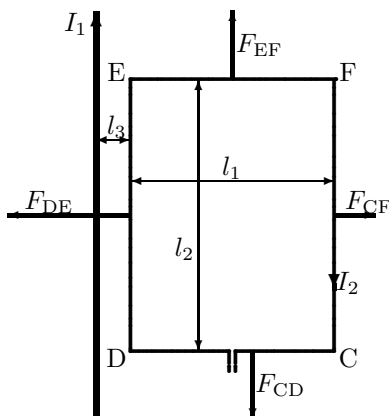
$$n = \frac{I}{ev_d t d} = \frac{IBd}{eV_H t d} = \frac{IB}{eV_H t} = \frac{2,5 \text{ A} \cdot 1,25 \text{ T}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,334 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot 0,001 \text{ m}} = 5,84 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Antall atomer pr enhetsvolum (=antallstetthet) i sølv er gitt ved massetetthet, Avogadros tall og molvekt:

$$n_a = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{10,5 \text{ g/cm}^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{107,9 \text{ g/mol}} = 5,86 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Vi ser at dette indikerer at antall ladningsbærere i sølv er tilnærmet én per atom. (Hvis en ser på eksempel 27.12 i Young & Freedman Ed. 12, ser en at slike typer beregninger ikke alltid er til å stole på – vi har ignorert kvanteeffekter og vekselvirkning mellom elektronene. Dessuten blir med så mange ladningsbærere Hallspenningen veldig lav – i Hallprober for måling av  $B$ -felt brukes halvledere med betydelig lavere  $n$ .)

## Oppgave 2. Kraft på strømførende sløyfe i ikke-uniformt magnetfelt.



Situasjonen med krefter inntegnet er vist i figuren til venstre.

Strømmen  $I_1$  setter opp et asimutalt magnetfelt  $B_\phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$  og strømmen  $I_2$  i den rektangulære lederen gir opphav til en kraft. Det ses bort fra tilførselsledningene. Retningen på kreftene er som vist i figuren til venstre med de illustrerte retningene på strømmene. Regner kun med størrelsene på kreftene i det følgende (siden retningene er definert).

Magnetfeltet langs kortsidene av rektanglet varierer med avstanden, og totalkreftene på disse sidene kan finnes ved integrasjon. Men når det spørres etter nettokraft (totalkraft) trenger man ikke regne ut disse da kreftene på øvre og nedre kortside må være motsatt like store.

Langsidene på den rektangulære lederen er parallell til lederen med strøm  $I_1$ , og de magnetiske kreftene er dermed gitt ved

$$F_{DE} = I_2 \cdot \ell_2 \cdot B(r=\ell_3) = I_2 \cdot \ell_2 \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \ell_3} = 10 \text{ A} \cdot 0,20 \text{ m} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 30 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,010 \text{ m}} = 1,20 \text{ mN}.$$

$$F_{CF} = I_2 \cdot \ell_2 \cdot B(r=(\ell_3 + \ell_1)) = I_2 \cdot \ell_2 \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\ell_3 + \ell_1)} = 10 \text{ A} \cdot 0,20 \text{ m} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 30 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,080 \text{ m}} = 0,150 \text{ mN}.$$

[Enhetsregning (hjelp i Angell & Lian):  $\frac{\text{AmA}}{\text{m}^2} \cdot \text{H} = \frac{\text{A}^2}{\text{m}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \frac{\text{CV}}{\text{m}} = \text{N}.$ ]

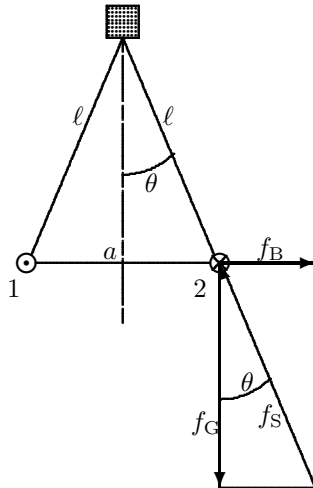
Totalt blir det en nettokraft i retning mot den rette lederen:

$$F = F_{DE} - F_{CF} = \underline{1,05 \text{ mN}}.$$

Dersom strømmen i sløyfen var valgt andre veien, ville nettokraften gått i motsatt retning.

Det blir også en intern kraft på strømsløyfa, tiltrekkende mellom parallelle ledere som fører strøm i motsatt retning. Men kreftene er motsatt like store på to motstående sidekanter (Newtons 3. lov), slik at disse ikke bidrar til nettokraften og trengs derfor ikke regnes ut. Om det skulle gjøres hadde det blitt vanskelig da lederne har endelig lengde.

### Oppgave 3. Kraft mellom to strømførende ledere.



Situasjonen er illustrert i figuren til venstre. Lederne henger i samme høyde med  $\ell = 0,080 \text{ m}$ . Avstanden mellom de strømførende lederne er  $a = 2\ell \sin \theta$ .

Magnetfeltet  $B$  rundt hver rette leder er asimetalt (sirkulært) og feltet står derfor normalt på strømretningen i den andre lederen. Uttrykk for feltet antas kjent, evt. finnes i formelsamling eller utledes fra Amperes lov. Feltet ved leder 2 pga. strømmen i leder 1 er

$$B_1(a) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi \ell \sin \theta}.$$

Bruker symbol liten  $f$  for kraft per lengde  $L$  (det er naturlig å bruke kraft per lengde da masse per lengde er gitt). Krafta på leder 2 pga. strømmen i leder 1:

$$f_B = \frac{I_2 L B_1(a)}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi \ell \sin \theta}$$

hvor her  $I_1 = I_2 = I$ . Retningen er som vist i figuren.

I tillegg til den magnetiske krafta virker tyngdekrafta  $\vec{f}_G$  og et snordrag  $\vec{f}_S$  (begge regnet per lengdeenhet). Vektorsummen av disse skal være lik null, som oppnås ved at snorkraftas horisontalkomponent er (motsatt) lik magnetisk kraft. Ved hjelp i figuren finner vi:

$$\frac{f_B}{f_S} = \sin \theta \quad \text{og} \quad \frac{f_G}{f_S} = \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{f_B}{f_G} = \tan \theta.$$

Med innsatt uttrykk for  $f_B$  og  $f_G = mg/L$ , får vi

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \ell \sin \theta} &= \frac{m}{L} g \cdot \tan \theta \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{4\pi \ell \sin \theta}{\mu_0} \cdot \frac{m}{L} g \cdot \tan \theta} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi \cdot 0,080 \text{ m} \cdot \sin 8,0^\circ}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}} \cdot 0,075 \text{ kg/m} \cdot 9,81 \text{ N/kg} \cdot \tan 8,0^\circ} \\ &= \underline{107 \text{ A}}. \end{aligned}$$

#### Oppgave 4. Biot-Savart på rektangulær strømsløyfe.

Fra oppgavetekst:

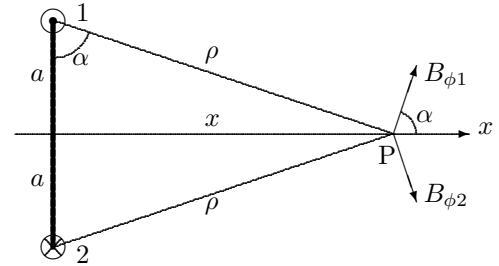
$$B_x^{(\text{sirk})}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{\rho\sqrt{\rho^2 + a^2}} \quad (2)$$

a) Vi betrakter et punkt P på midtnormalen i avstand  $x$  fra sløyfas sentrum. Avstanden til sentrum for hver side i kvadratet er  $\rho = \sqrt{x^2 + a^2}$ . Feltet i P fra hver enkelt side er da ifølge (2)

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{\rho\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

De fire sidekanter gir alle  $B$ -felt som peker bort fra kvadratet og med samme vinkel  $\alpha$  med  $x$ -aksen, der  $\cos \alpha = a/\rho$  (se figur). Cosinus-komponentene til hver  $B_\phi$  vil addere mens sinus-komponenten (normalt på  $x$ -aksen) vil nulls ut fra to motstående sidekanter. Dette gir at  $\vec{B}^{(\text{kvad})} = B_x^{(\text{kvad})} \hat{\mathbf{i}}$  med



$$B_x^{(\text{kvad})} = 4B_\phi \cos \alpha = 4 \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{\rho\sqrt{\rho^2 + a^2}} \cdot \frac{a}{\rho} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2a^2}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2a^2}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + 2a^2}}. \quad (3)$$

b) I sentrum:

$$B_x^{(\text{kvad})}(x=0) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2a^2}{(a^2)\sqrt{2a^2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{a}$$

mens fra (1)

$$B_x^{(\text{sirk})}(x=0) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{a^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1}{a}$$

Altså er

$$B_x^{(\text{kvad})}(x=0) = B_x^{(\text{sirk})}(x=0) \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = B_x^{(\text{sirk})}(x=0) \cdot 0,90.$$

som skulle vises. Feltet er altså 10% mindre i sentrum av en kvadratisk sløyfe med sidekant lik diameter i sirkulær sløyfe (strømmen er i snitt "noe lengre unna").

c) For  $x \gg a$  ser vi fra likn. (3) at

$$B_x^{(\text{kvad})}(x \gg a) \approx \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2a^2}{(x^2)\sqrt{x^2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2a^2}{x^3}$$

Dipolmomentet for sløyfa er  $\vec{\mu}^{(\text{kvad})} = I(2a)^2 \hat{\mathbf{i}} = 4Ia^2 \hat{\mathbf{i}}$ , slik at

$$\vec{B}(x \gg a) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}^{(\text{kvad})}}{x^3}.$$

For den sirkulære strømsløyfa finner vi tilsvarende fra likn. (1) at

$$\vec{B}^{(\text{sirk})}(x \gg a) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{x^3} \hat{\mathbf{i}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}^{(\text{sirk})}}{x^3},$$

idet  $\vec{\mu}^{(\text{sirk})} = I\pi a^2 \hat{\mathbf{i}}$ . Uttrykkene er altså helt like! Og når vi sammenlikner med  $E$ -feltet på aksene langt fra en elektrisk dipol,  $\vec{E}(x) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3}$ , ser vi at feltet langs aksene (henholdsvis langs  $\vec{p}$  for el. dipol og langs  $\vec{\mu}$  for magn. dipol) er nøyaktig det samme, med  $\vec{\mu}$  istedenfor  $\vec{p}$  og  $\mu_0$  istedenfor  $1/\epsilon_0$ . Vi skal finne flere analogier mellom elektrostatisken og magnetostatikken etterhvert!

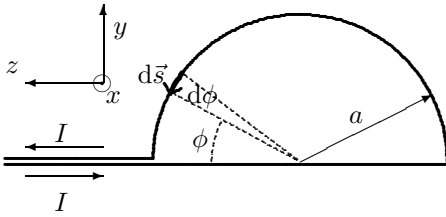
[Forresten kan elektrisk felt på aksene i stor avstand fra en elektrisk dipol, finnes fra uttrykket for potensialet  $V$  i stor avstand fra en dipol, utregnet i øving 4:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2},$$

som langs aksene  $\theta = 0$  gir

$$V(r, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r^3} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

### Ekstraoppgave (5). Biot-Savart halvsirkel.



De to tilførselsledningene ved  $z < -a$  bidrar ikke med magnetfelt, da de ligger tett og fører strøm i motsatt retning. (I Biot-Savarts lov blir  $I d\vec{s}$  motsatt like store fra hver av dem.) Vi må da finne magnetfeltet fra halvsirkelen og fra den rette lederen fra  $z = -a$  til  $z = +a$ .

Uttrykk for feltet i avstand  $x$  midt på en rett leder med lengde  $2a$  fant vi i forelesningene (eller Y&F kap. 28.3). Feltet er asimutalt retta om lederen og med strøm i negativ  $z$ -retning blir ifølge høyrehåndsregelen  $B$ -feltet på positiv  $x$ -akse retta i negativ  $y$ -retning:

$$B_{y,\text{rett}}(x) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x} \frac{1}{r}, \quad \text{med } r = \sqrt{a^2 + x^2}. \quad (4)$$

Vi har i forelesningene (og Y&F Kap. 28.5) bestemt  $B$ -feltet langs midtnormalen av en helsirkel, og fant at feltet har komponent kun normalt på sirkelen (her  $x$ -retning), fordi  $y$  og  $z$ -komponentene nulles ut når vi integrerer over sirkelen. Med en halvsirkel er ikke dette tilfellet.

La  $d\vec{s}$  være et buelement til halvsirkelen i posisjon (asimutal)vinkel  $\phi \in [0, \pi]$  fra  $z$ -aksen. Avstanden fra buelementet til punktet P er  $r = \sqrt{a^2 + x^2}$  og enhetsvektor i retning fra buelementet til punktet P betegnes  $\hat{r}$ . Merk strømretningen, en bedre figur vil gjøre seg, se f.eks. fig. 28.12 i Y&F. For alle buelement vil  $d\vec{s} \perp \hat{r}$ , slik at

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{s} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{ds}{r^2} = k_m I \cdot \frac{ds}{r^2},$$

hvor vi har tillatt oss å bruke  $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$ .  $B$ -feltet vil ha følgende komponenter:

$$d\vec{B} = [dB_x, dB_y, dB_z] = [\cos \theta dB, \sin \theta \sin \phi dB, \sin \theta \cos \phi dB].$$

Her er  $\theta$  vinkelen mellom  $\hat{r}$  og radiusvektor fra buelementet til origo, med  $\cos \theta = a/r$  og  $\sin \theta = x/r$ . Vinkelen  $\theta$  er lik for alle buelement mens  $\phi$  er avhengig av plasseringen av buelementet. Komponentene  $dB_x$  og  $dB_y$  er alltid positive for halvsirkelen mens  $dB_z$  er positiv og negativ for hver kvarte sirkel (og vi aner at resultanten blir null).

Med  $ds = a d\phi$  gir dette

$$dB_x = k_m I \cdot \cos \theta \cdot \frac{ds}{r^2} = k_m I \cdot a \cdot \frac{a d\phi}{r^3}$$

$$dB_y = k_m I \cdot \sin \theta \sin \phi \cdot \frac{ds}{r^2} = k_m I \cdot x \cdot \frac{a d\phi}{r^3} \sin \phi$$

$$dB_z = k_m I \cdot \sin \theta \cos \phi \cdot \frac{ds}{r^2} = k_m I \cdot x \cdot \frac{a d\phi}{r^3} \cos \phi$$

Ved integrasjon over halvsirkelen er  $x$ ,  $r$  samt  $a$  konstant, slik at vi får følgende integral

$$\int_0^\pi d\phi = \pi \quad \int_0^\pi \sin \phi d\phi = 2 \quad \int_0^\pi \cos \phi d\phi = 0$$

med resultat

$$B_x = k_m I \cdot a \cdot \frac{a\pi}{r^3} \quad B_y = k_m I \cdot x \cdot \frac{2a}{r^3} \quad B_z = 0$$

Dette er eneste bidraget i  $x$ -retning, mens vi for  $y$ -komponenten må legge til  $B_{y,\text{rett}}$  fra likn. (4), og svarene blir

$$\underline{B_y} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x} \frac{1}{r} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot x \cdot \frac{2a}{r^3} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a}{rx} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a}{rx} \cdot \frac{a^2}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot \frac{a^3}{r^3}$$

$$\underline{B_x} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot a \cdot \frac{\pi a}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4} \cdot \frac{a^2}{r^3}$$

$$\underline{B_z} = 0, \quad \text{med } r = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Merk dere grensetilfellet  $x \ll a$  (dvs. nærme origo). Da er  $r \approx a$  og

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad B_x = \frac{\mu_0 I}{4a}.$$

Her er  $B_y$  lik feltet nærme en lang rett leder og  $B_x$  er lik halvparten av feltet i sentrum av en sirkel med radius  $a$ .