Fra Kreyszig (10th), avsnitt 14.1

11

$$z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = 1 + 4i$$

Segment fra z_1 til z_2:

$$C: \quad (1-t)z_1 + tz_2, \quad t \in [0,1]$$

eller, ekvivalent

$$C: \quad z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0,1]$$

Med tall

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) = (-1+2t) + i(2+2t), \quad t \in [0,1]$$

20 Uttrykket kan skrives som

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Dette er likningen til en ellipse med sentrum i $(2,-1)$ og buen til ellipsen kan parametriseres som $x - 2 = \sqrt{5}\cos t$ og $y + 1 = 2\sin t$.

En parametrisering til uttrykket blir dermed

$$z(t) = 2 + \sqrt{5}\cos t + i(-1 + 2\sin t),$$

for $0 \leq t \leq 2\pi$.

22 $\mathrm{Re}(z)$ er ikke en analytisk funksjon, så må bruke metode 2.

Parametrisering av kurven C:

$$z(t) = t + \left(1 + \frac{1}{2}(t-1)^2\right) i, \quad 1 \leq t \leq 3$$

$$=> \quad \mathrm{Re}(z(t)) = t, \qquad \mathrm{d}z = (1 + (t-1)i)\mathrm{d}t$$

Setter inn i integralet:

$$\begin{aligned}\int\limits_C \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_1^3 t\cdot(1+(t-1)i)\,\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_1^3 t\,\mathrm{d}t + i\int\limits_1^3 (t^2-t)\,\mathrm{d}t\\ &= 4 + i\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_1^3\\ &= \underline{4+\frac{14}{3}i}\end{aligned}$$

$\boxed{25}$ $f(z) = ze^{z^2}$ er analytisk i $\mathbb{C}$, og $F'(z) = f(z)$ hvis $F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2}$.
Dermed er

$$\int_C f(z)dz = F(i) - F(1) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^1) = -\sinh 1$$

$\boxed{26}$ $z + z^{-1}$ er ikke analytisk i origo, og siden enhetssirkelen omslutter origo, må vi bruke linjeintegrasjon. En parametrisering av enhetssirkelen er $z(t) = e^{it}$, da er $dz/dt = ie^{it}$ og

$$\begin{aligned}\int_C z + z^{-1}\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}(e^{it}+e^{-it})ie^{it}\mathrm{d}t\\ &= i\int_0^{2\pi}(e^{2it}+1)\mathrm{d}t\\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

$\boxed{29}$

$$\int\limits_C \mathrm{Im}\left(z^2\right)\,\mathrm{d}z$$

Siden

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(z^2\right) &= \mathrm{Im}\left(x^2 - y^2 + 2xyi\right)\\ &= 2xy,\end{aligned}$$

er funksjonen 0 langs både x-aksen og y-aksen. Trenger derfor bare å regne ut integralet fra $z = 1$ til $z = i$.

Parametriserer:

$$z(t) = (1-t) + it, \qquad 0 \le t \le 1$$

$$=> \quad \mathrm{Im}\left(z(t)^2\right) = 2(1-t)t, \qquad \mathrm{d}z = (-1+i)\,\mathrm{d}t$$

og integralet blir

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{Im}\left(z^2\right)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 2(1-t)t(-1+i)\,\mathrm{d}t\\ &= 2(-1+i)\int_0^1 (t-t^2)\,\mathrm{d}t\\ &= 2(-1+i)\cdot\frac{1}{6}\\ &= \underline{\frac{1}{3}(-1+i)}\end{aligned}$$

35

$$\left|\int_C \operatorname{Re} z dz\right| \le M\cdot L$$

der

$$\begin{aligned}M &= \max_{z\in C}|\operatorname{Re} z| = 5,\\ L &= |(1+i)-(5+5i)| = 4\sqrt{2} \quad \text{(lengden til C)}\end{aligned}$$

siden C er det rette linjestykket fra $(1+i)$ til $(5+5i)$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 14.2

4 Dersom $f(z)$ var analytisk i hele området, kunne vi deformert integrasjonsveien, og integralene ville vært lik hverandre. Da integralene ikke er lik hverandre må vi konkludere med at funksjonen ikke er analytisk i hele området.

13

$$z^4 = 1.2 \implies |z^4| = |z|^4 = 1.2 \implies |z| = \sqrt[4]{1.2} > 1$$

Dvs.

$$f(z) = \frac{1}{z^4-1.2}$$

er deriverbar og analytisk i $D : |z| < \sqrt[4]{1.2}$. Siden D er enkeltsammenhengende og $C : |z| = 1$ er en enkel lukka kurve i D, gir Cauchys integralteorem at

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

22 Re(z) er ikke en analytisk funksjon, så Cauchys teorem kan ikke brukes her.

Deler kurven opp i to deler, C_1: langs x-aksen og C_2: halvsirkelen

$$\begin{aligned}&C_1 : z(t) = t, \quad -1\le t\le 1,\\ &\qquad => \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}t, \quad \operatorname{Re}(z(t)) = t\\ &C_2 : z(t) = \cos t + i\sin t, \quad 0\le t\le \pi,\\ &\qquad => \quad \mathrm{d}z = (-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t, \quad \operatorname{Re}(z(t)) = \cos t\end{aligned}$$

Setter inn i integralet:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1} \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \cos t(-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - \int_0^{\pi} \cos t \sin t\,\mathrm{d}t + i\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{i}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{i}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi} \\
&= \underline{\frac{\pi}{2}i}
\end{aligned}$$

23 Delbrøksoppspaltning gir:

$$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

Integralet kan dermed deles opp:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_C \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi i + 2\pi i \qquad (C \text{ omslutter både } z=0 \text{ og } z=1) \\
&= \underline{4\pi i}
\end{aligned}$$

24

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$

Vi deler inn konturen i to sløyfer, C_1 til høyre for y-aksen (mot klokka) og C_2 til venstre for y-aksen (med klokka).

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i \quad \text{langs den høyre sløyfen}$$

$$\oint_{C_2} \frac{dz}{z-1} = 0 \quad \text{langs den venstre sløyfen fordi } \frac{1}{z-1} \text{ er analytisk der}$$

Og helt tilsvarende:

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z+1} = 0 \quad \text{langs den høyre sløyfen}$$

$$\oint_{C_2} \frac{dz}{z-1} = -2\pi i \quad \text{langs den venstre sløyfen (merk orienteringen)}$$

Svaret blir altså:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}(2\pi i + 0 - (0 - 2\pi i)) = 2\pi i$$