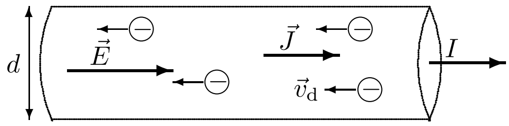
# TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

# Øving 8, løsningsskisse.
## Likestrømskretser. Lorentzkrafta.

### Oppgave 1. Strøm i en leder.

a) Når vi antar at strømmen og driftshastigheten er konstant over tverrsnittet av wiren får vi at driftshastigheten $v_d$ er gitt ved likningen

$$\frac{I}{A} = J = n|q|v_d, \qquad \left(\text{enheter: } \frac{\text{C/s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{atom}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{C}}{\text{atom}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}\right),$$




der $I = 1,00\,\text{A}$ og arealet $A = \pi r^2 = \pi(d/2)^2 = 3,142 \cdot 10^{-2}\,\text{cm}^2$.

Med ett fritt atom per kopperatom vil $n$ være lik tettheten av kopperatomer. Denne finnes fra massetettheten $\rho_{\text{Cu}}$, antall atomer per mol, $N_{\text{A}}$ og molvekt for kopper, $M$ (enhetsregning viser at brøken er satt rett opp!):

$$n = \frac{\rho_{\text{Cu}} \cdot N_{\text{A}}}{M} = \frac{8,92\,\text{g/cm}^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}\,(\text{mol})^{-1}}{63,5\,\text{g/mol}} = 8,456 \cdot 10^{22}\,\text{cm}^{-3}\,.$$

Dermed fra første likning

$$v_d = \frac{I}{n|q|A} = \frac{1,00\,\text{A}}{8,456 \cdot 10^{22}\,\text{cm}^{-3} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 3,142 \cdot 10^{-2}\,\text{cm}^2} = \underline{2,35 \cdot 10^{-3}\,\text{cm/s} = 8,5\,\text{cm/time}}(!)$$

(Til sammenlikning er midlere termiske hastighet bestemt av $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = 3\frac{1}{2}k_BT \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3k_{\text{B}}T}{m}} \approx 10^5$ m/s. )

b) Strømtettheten blir

$$J = \frac{I}{A} = \frac{1,00\,\text{A}}{3,142 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2} = 3,183 \cdot 10^5\,\text{A/m}^2 = \underline{3,2 \cdot 10^5\,\text{A/m}^2} \;\; (= 0,32\,\text{A/mm}^2)\,.$$

Fordi ladningene er negative (=elektroner), vil retningen på $J$ være motsatt av $v_d$, dvs. mot høyre i figuren. Med oppgitt resistivitet og lengde blir resistansen

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} = 1,72 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m} \cdot \frac{10,0\,\text{m}}{3,142 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2} = \underline{55\,\text{m}\Omega}\,.$$

Det elektriske feltet er gitt ved Ohms lov:

$$E = \rho J = 1,72 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m} \cdot 3,183 \cdot 10^5\,\text{A/m}^2 = 5,475 \cdot 10^{-3}\,\text{V/m} = \underline{5,5\,\text{mV/m}} \;\; (= 5,5\,\text{V/km})\,.$$

Lite, men ikke ubetydelig for lange overføringer. Retningen til $\vec{E}$ samme som for $\vec{J}$, mot høyre i figuren.

### Oppgave 2. Resistans i aluminiumsledning.

Motstand i de hver av de to Al-trådene:

$$R_{\text{Al}} = \frac{L}{\sigma A} = \frac{0,300\text{ m}}{3,546 \cdot 10^7\;\Omega^{-1}\text{m}^{-1} \cdot 0,700 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2} = \underline{12,09\,\text{m}\Omega}.$$

Total motstand i Al-tråder og resistor blir da : $R_{\text{tot}} = R_{\text{Al}} + 2R = 10,024\,\Omega$.

Spenningsfallet 1,500 V fordeler seg da over Al-trådene (tilsammen) $V_{\text{Al}} = 1,500\,\text{V} \cdot \frac{0,0242}{10,024} = \underline{3,62\,\text{mV}}$, og over resistoren: $V_R = 1,50\,\text{V} \cdot \frac{10,0}{10,024} = 1,496\,\text{V} = \underline{1,50\,\text{V}}$.

b) Strømstyrke: $I = \dfrac{V}{R_{\text{tot}}} = \dfrac{1,500\,\text{V}}{10,024\,\Omega} = 0,1496\,\text{A} \; = \underline{0,150\,\text{A}}$. Effekt: $P = VI = 1,50\,\text{V} \cdot 0,150\,\text{A} = \underline{0,225\,\text{W}}$.

**Oppgave 3. Motstandsnettverk.**

a) Først er det en fordel å innse at vi her har:

{parallellkobling av $R_1$, $R_2$ og $R_3$} i serie med {parallellkobling av $R_4$ og $R_0 = 0$} i serie med {$R_5$}.

Motstanden $R_4$ er med andre ord "kortsluttet", slik at det ikke vil gå noen strøm gjennom $R_4$. (Sagt på en annen måte: Vi har samme potensial på hver side av $R_4$, men da kan det heller ikke gå noen strøm gjennom denne motstanden.) Total motstand blir dermed

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} + R_5 \;=\; \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + R_5 \,.$$

b) Det er vel klart at den totale strømmen $I$ må bli den samme som strømmen $I_5$ gjennom $R_5$. Dessuten er det klart at $I$ må fordele seg på de 3 strømmene gjennom $R_1$, $R_2$ og $R_3$: $I = I_1 + I_2 + I_3$. Vi har i punkt a) allerede konkludert med at det ikke vil gå noen strøm gjennom $R_4$: $I_4 = 0$.

Spenningsfallet over de tre øverste motstandene er det samme:

$$V' = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3$$

Spenningsfallet over $R_5$ blir

$$V'' = R_5 I_5 = R_5 I = R_5 \frac{\mathcal{E}}{R}$$

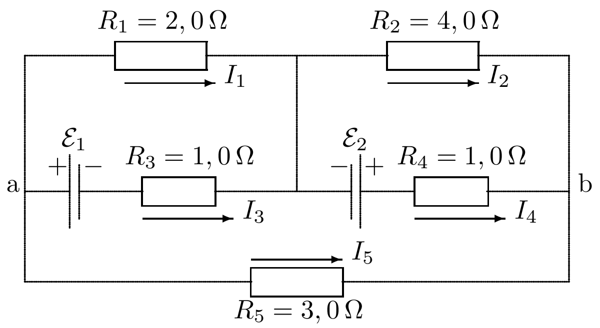
Disse to må tilsammen utgjøre den påtrykte spenningen: $\quad \mathcal{E} = V' + V''$.
Dermed er

$$V' = \mathcal{E} - V'' = \mathcal{E} - R_5 \frac{\mathcal{E}}{R} = \underline{\mathcal{E}\left(1 - \frac{R_5}{R}\right)}$$

og

$$\underline{I_1 = \frac{V'}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V'}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V'}{R_3},} \qquad \text{med} \quad \underline{V' = \mathcal{E}\left(1 - \frac{R_5}{R}\right)}.$$

**Oppgave 4. Kirchhoffs regler.**




Vi har tre masker og tre maskelikninger. Vi kan i disse ha tre ukjente strømmer hvorav $I_5$ må være en av disse. Ved knutepunktregler for knutepunktene a og b eliminerer vi to strømmer:

$$I_3 = -I_1 - I_5 \qquad\qquad I_4 = -I_2 - I_5. \tag{1}$$

De tre maskene (øvre venstre, øvre høyre og nederste) med omløpsretning med klokka gir:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 - R_1 I_1 + R_3 I_3 &= 0 \\ -\mathcal{E}_2 - R_2 I_2 + R_4 I_4 &= 0 \\ -\mathcal{E}_1 - R_3 I_3 + \mathcal{E}_2 - R_4 I_4 + R_5 I_5 &= 0 \end{aligned}$$

Ved bruk av knutepunktlikningene (1) og innsetting av tallverdier som oppgitt, får vi:

$$\begin{aligned} 12 - 2I_1 - 1\cdot(I_1 + I_5) &= 0 \\ -9 - 4I_2 - 1\cdot(I_2 + I_5) &= 0 \\ -12 + 1\cdot(I_1 + I_5) + 9 + 1(I_2 + I_5) + 3I_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3I_1 + I_5 &= 12 \\ 5I_2 + I_5 &= -9 \\ I_1 + I_2 + 5I_5 &= 3 \end{aligned}$$

Her kan vi f.eks. i tredje likning sette inn $I_1 = 4 - \frac{1}{3}I_5$ fra første likning og $I_2 = -\frac{9}{5} - \frac{1}{5}I_5$ fra andre likning, og får

$$\begin{aligned} 4 - \frac{1}{3}I_5 - \frac{9}{5} - \frac{1}{5}I_5 + 5I_5 &= 3 \\ I_5 &= \underline{\frac{12}{67} = 0,18 \quad \text{(ampere).}} \end{aligned}$$

**Oppgave 5.** ***RC*-krets I (oppvarming til neste).**

a) Ved $t = 0^+$ er ladning og spenning på kondensatoren null slik at hele spenningsfallet er over motstanden og dermed $I_0 = \mathcal{E}/R = \underline{0{,}12\ \text{A}}$.
Når kondensatoren er ladd helt opp er spenningen lik ems'en $\mathcal{E}$, slik at $Q_\text{f} = C\mathcal{E} = 10,0\,\mu\text{F}\cdot 12\,\text{V} = \underline{0,12\,\text{mC}}$.
Tidskonstanten er kretsen er (fra utregning, gjenkjenning eller ved å se på eksempel i forelesning):
$\tau = RC = 100\,\Omega\cdot 10,0\,\mu\text{F} = 1000\,\mu\text{s} = \underline{1,00\,\text{ms}}$.

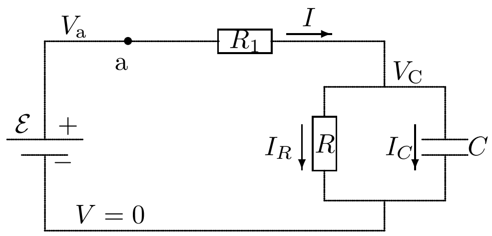
b) Arbeidet (energien) er $U = VQ$ når potensialet (spenningen) til batteriet er konstant $V = \mathcal{E}$ og $Q$ er ladningen batteriet har levert, dvs. sluttladningen $Q_\text{f} = C\mathcal{E}$. Dette gir

$$W_\text{bat} = \mathcal{E}\cdot\mathcal{E}C = 12\,\text{V}\cdot 0,12\,\text{mC} = \underline{1,4\,\text{mJ}}.$$

Halvparten av dette går til potensiell energi i kondensatoren: $W_C = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = 0,72\,\text{mJ}$, mens den andre halvparten tapes dissipativt i motstanden: $W_R = \int_0^\infty R\,I^2\text{d}t = 0,72\,\text{mJ}$.

c) Eksponentialuttrykket $1 - e^{-t/\tau} = 0,999$ når $e^{-t/\tau} = 0,001 \quad\Rightarrow\quad t = -\ln(0,001)\cdot\tau = 6,91\cdot\tau = \underline{6,9\,\text{ms}}$.

**Oppgave 6.** ***RC*-krets II.**




Til alle punktene trenger vi Kirchhoffs strømlov som gir $I = I_R + I_C$, dermed har vi bare to ukjente strømmer. Videre Kirchhoffs spenningslov, som f.eks. kan skrives $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$.

a) Umiddelbart etter bryteren er slått på har ikke kondensatoren rukket å få noen ladning: $Q_\text{C} = 0$ og $V_\text{C} = Q_\text{C}/C = 0$. Hele spenningsfallet fra $\mathcal{E}$ er altså over motstanden $R_1$ med strøm $I = \mathcal{E}/R_1$. Hele denne strømmen går til kondensatoren fordi $I_\text{R} = V_\text{C}/R = 0$, altså $I_\text{C} = I = \mathcal{E}/R_1$. Svarene er altså:

$$\underline{Q_\text{C} = 0, \quad V_\text{C} = 0, \quad I_\text{R} = 0, \quad I = I_\text{C} = \mathcal{E}/R_1.}$$

b) Etter svært lang tid er kondensatoren fullt oppladd, og ingen strøm går til den, $\underline{I_\text{C} = 0}$. Da er $I = I_R$ og $V_C = I_R R = IR$. Da må fra Kirchhoff $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$:

$$\underline{I = I_\text{R} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R}},$$

$$\underline{V_\text{C} = RI_\text{R} = \mathcal{E}\frac{R}{R_1 + R}},$$

$$\underline{Q_\text{C} = V_\text{C}C = \mathcal{E}\frac{RC}{R_1 + R}}.$$

c) Vi har to ukjente strømmer, og trenger to likninger. Den ene er Kirchhoffs spenningslov $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$, den andre er at $V_C = V_R$ (eller egentlig Kirchhoffs spenningslov på masken med $R$ og $C$). Denne siste gir

$$\frac{Q_C}{C} = I_R R \quad\Rightarrow\quad I_R = \frac{Q_C}{RC}$$

Vi velger da $I_C$ og $Q_C$ som de to ukjente, men siden disse er knyttet sammen med $I_C = \text{d}Q_C/\text{d}t$ har vi bare én ukjent, $I_C$. Vi søker derfor etter en likning for $I_C$, som vi får fra spenningsloven $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$:

$$\mathcal{E} = R_1(I_R + I_C) + \frac{Q_C}{C} = R_1\frac{Q_C}{RC} + R_1 I_C + \frac{Q_C}{C} = \frac{Q_C}{C}\left(\frac{R_1}{R} + 1\right) + R_1 I_C$$

Derivasjon av denne likningen gir en differensiallikning for $I_C$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\text{d}Q_C}{\text{d}t}\frac{1}{C}\left(\frac{R_1}{R} + 1\right) + R_1\frac{\text{d}I_C}{\text{d}t} \\
\frac{\text{d}I_C}{\text{d}t} &= -I_C\frac{1}{R_1 C}\left(\frac{R_1}{R} + 1\right) \\
\frac{\text{d}I_C}{\text{d}t} &= -I_C\frac{1}{\tau}, \quad \text{der} \quad \tau = \frac{R_1 RC}{R_1 + R}.
\end{aligned}$$

Dette er en førsteordens diff.likning med løsning

$$I_C(t) = Ae^{-t/\tau}$$

der vi fra startbetingelsen i a) har at $A = I_C(0) = \mathcal{E}/R_1$.

Resten av størrelsene blir:

$$\begin{aligned}
Q_C(t) &= \int_0^t I_C(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}}{R_1}\int_0^t e^{-t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}}{R_1}(-\tau)\left(e^{-t/\tau}-1\right) = \underline{\mathcal{E}\frac{RC}{R_1+R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}, \\
V_C(t) &= \frac{Q_C}{C} = \underline{\mathcal{E}\frac{R}{R_1+R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}, \\
I_R(t) &= \frac{Q_C}{RC} = \underline{\mathcal{E}\frac{1}{R_1+R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}, \\
I(t) &= I_C(t)+I_R(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}e^{-t/\tau} + \mathcal{E}\frac{1}{R_1+R}\left(1-e^{-t/\tau}\right) = \underline{\frac{\mathcal{E}}{R_1}\frac{1}{R_1+R}\left(Re^{-t/\tau}+R_1\right)}.
\end{aligned}$$

Vi kan konstantere at grenseverdiene for $t = 0^+$ og $t \to \infty$ i a) og b) stemmer ved innsetting i disse svarene.

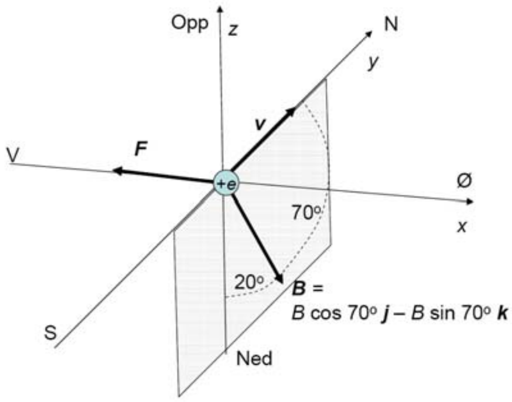
## Oppgave 7. Lorentzkrafta: Vektorregning.

Velger $x$-retning øst og $y$-retning nord og dermed $z$-retning oppover.
Da er

$$\vec{B} = [0, B\cos 70°, -B\sin 70°] \quad \text{og} \quad \vec{v} = [0, v, 0]$$

og krafta vil falle i $-x$-retning (høyrehåndsregelen):

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q\vec{v}\times\vec{B} = q\begin{bmatrix} 0 & v & 0 \\ 0 & B\cos 70° & -B\sin 70° \\ \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \\
&= qvB\sin 70°(-\hat{\mathbf{i}}) \\
&= 1,60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\cdot 10,0\cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s}\cdot 0,60\cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}\cdot 0,940(-\hat{\mathbf{i}}) \\
&= \underline{9,02\cdot 10^{-17}\ \mathrm{N}\ (-\hat{\mathbf{i}})}.
\end{aligned}$$




Alternativt kan vi sette direkte $|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin\theta$, med $\theta$ = vinkel mellom $\vec{v}$ og $\vec{B}$, altså $\theta = 70°$. Høyrehåndsregelen viser at $\vec{F}$ må falle langs negativ $x$-retning, dvs. vestover, og altså med tallverdi:

$$F = qvB\sin 70° = \underline{9,02\cdot 10^{-17}\ \mathrm{N}}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 10. feb. 15.