NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555
Antall sider: 4, pluss 4 sider formelliste.
Hver oppgave teller likt under sensuren, hvis ikke annerledes oppgitt.

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

Torsdag 6. desember 2012
Tid: 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller innen 7. januar 2013

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i samsvar med NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

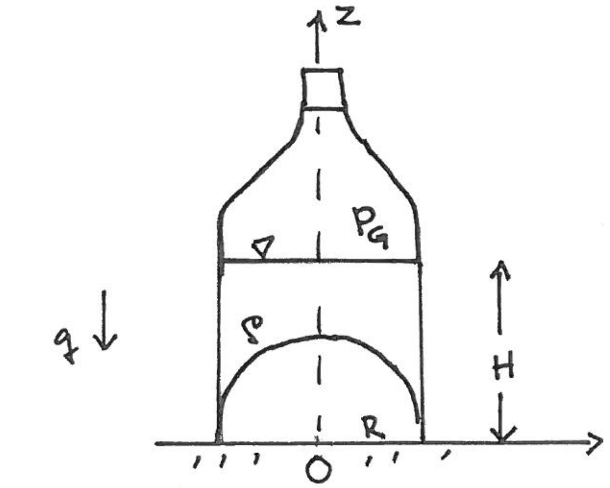


FIG.1

Bunnen av en champagneflaske har form av et halvkuleformet skall med radius R. Væskens tetthet er ρ og dens høyde er H (se figur 1). Gasstrykket over den frie overflate (gage-trykket) er p_G. Tyngdens akselerasjon er g. Legg koordinatsystemet (r, z) som på figuren, med origo i punktet O.

a) Hvor stor er den totale vertikale kraft F på bunnen? Uttrykk svaret ved R, H, p_G og $\gamma = \rho g$.

b)

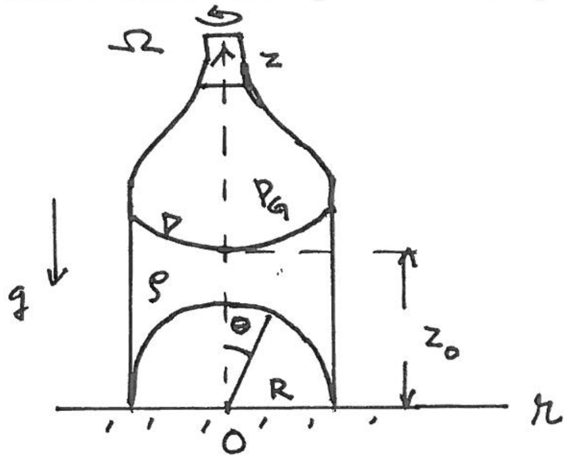


FIG. 2

Flasken settes heretter i rotasjon omkring z-aksen med konstant vinkelhastighet Ω. Etter at likevekt har innstilt seg, er forholdene som på figur 2. Gasstrykket p_G over væsken er det samme som før. Trykket i væsken oppgis å ha formen

$$p = C - \gamma z + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2, \quad C = \text{konstant.} \tag{1}$$

Bestem C uttrykt ved p_G og z_0 (se figur 2), og finn ligningen for den frie overflate uttrykt ved z_0, Ω, g og r.

Vis at trykket p_s på halvkulens overflate kan skrives som

$$p_s = p_G + \gamma(z_0 - R\cos\theta) + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 R^2 \sin^2\theta \tag{2}$$

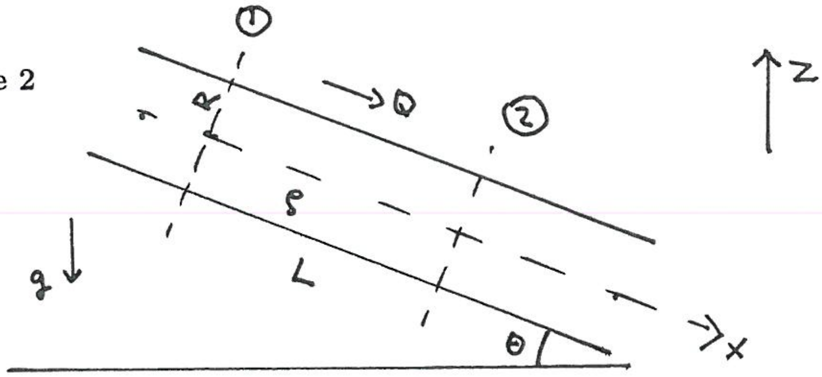
c) Finn sammenhengen mellom z_0, H og de andre konstantene. [Hint: Gjør bruk av at volumet av væsken er det samme som før rotasjonen.]

d) Finn nå vertikalkraften F på bunnen ved å benytte ligning (2) og integrere over θ. Følgende vinkelintegraler oppgis:

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{4}.$$

Vis, ved innsetting av z_0 fra punkt c), at F er den samme som før. Hvorfor må det være slik?

Oppgave 2



Gitt en stasjonær strømning i et sirkulært rør med radius R. Røret danner en vinkel θ med horisontalen. Væsken har tetthet ρ, og dynamisk viskositet $\mu = \rho\nu$. Betrakt en lengde $x_2 - x_1 = L$ av røret, beliggende mellom snittene 1 og 2 . Tyngdens akselerasjon er g. Strømningen er drevet av tyngden alene, slik at trykket er uavhengig av koordinaten x i lengderetningen ($\partial p/\partial x = 0$). Middelhastigheten (midlet over tverrsnittet) er V.

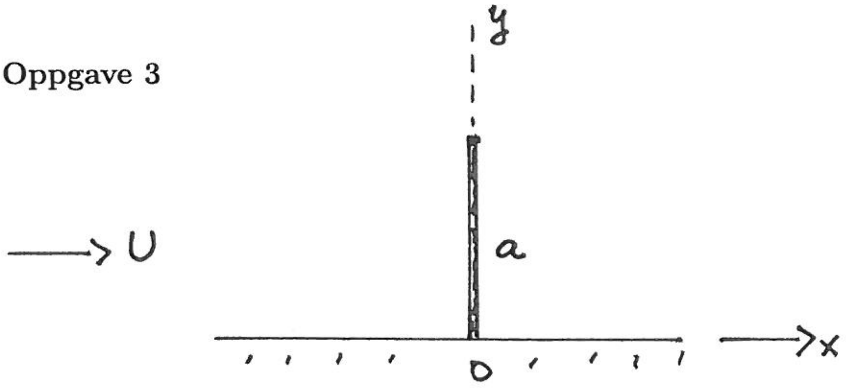
a) Benytt energiligningen til å finne friksjonshøyden h_f uttrykt ved $\Delta z = z_1 - z_2$. Bruk deretter impulsligningen til å finne h_f uttrykt ved skjærspenningen τ_w ved veggen, $\gamma = \rho g$, L og R.

b) Anta at en pumpe settes inn i røret og driver væsken oppover, med samme hastighet V (i tallverdi) som ovenfor. Hvorfor er friksjonshøyden h_f den samme som før? Trykkdifferansen $\Delta p = p_2 - p_1$ antas kjent. Finn størrelsen w_s i energiligningen (se formelarket), og regn ut hvor stor effekt P pumpen må yte. Svaret uttrykkes ved volumstrømmen Q, Δz, Δp, og $\gamma = \rho g$.

c) Pumpen tas vekk, og vi går tilbake til strømningen i punkt a) ovenfor. Sett opp Navier-Stokes' ligning i x-retning, og finn herav hastighetsprofilet $u(r)$. Finn nå volumstrømmen Q ved å integrere over tverrsnittet, og skriv svaret for $u(r)$ slik at det foruten r inneholder R og Q.

$$\text{Oppgitt} : \nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right).$$

Oppgave 3



Gitt en stasjonær strømning i xy-planet, for $y > 0$, omkring en vertikal plate av høyde a og med nedre kant plassert i origo. Se figuren. I stor avstand fra platen er strømningen uniform, med konstant hastighet U i x-retningen. Det komplekse potensial for strømningen oppgis å være

$$w(z) = U\sqrt{z^2 + a^2}.$$

a) Kvadrér $w(z)$, dvs. dann $w^2(z) = U^2(z^2 + a^2)$, og finn herav to ligninger som inneholder hastighetspotensialet ϕ og strømfunksjonen ψ. Eliminér ϕ, slik at du får en algebraisk ligning for $\psi(x, y)$. Ligningen er av 4. grad, men er enkel å løse. Skriv ned løsningen.

b) Finn den komplekse hastighet $w'(z)$, ut fra uttrykket for $w(z)$. Betrakt heretter bare strømningen i planet $x = 0$. Hvor stor er den horisontale hastighetskomponent $u(y)$ i området $y > a$? Og hva er den vertikale hastighetskomponent $v(y)$ på platens overflate (på høyre side) i området $0 < y < a$? Er svarene realistiske nær kanten $y = a$?

TEP4105 FLUIDMEKANIKK

Formelliste basert på White, Fluid Mechanics

Overflatespenning: $\Delta p = T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

Strømlinjer: $dy/dx = v/u$

Atmosfæren: $p(z)/p_a = [T(z)/T_o]^{5,26}$

Kraft på plane flater: $F = \gamma h_{CG} A$

$$\xi_{CP} = \xi_{CG} + \frac{I_{xx}}{\xi_{CG} A}$$

Med $y_{CP} = \xi_{CG} - \xi_{CP}$:

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx}}{\xi_{CG} A} = -\frac{I_{xx} \sin\theta}{h_{CG} A}$$

Tilsvarende $x_{CP} = -\frac{I_{xy}}{\xi_{CG} A} = -\frac{I_{xy} \sin\theta}{h_{CG} A}$

Kraft på krumme flater:

$$F_H = \gamma h_{CG} A_x \quad , \quad F_V = \gamma \mathcal{V}$$

Reynolds' transportteorem:

$$\frac{d}{dt} \int_{SYST} \phi \, d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \phi \, d\mathcal{V} + \int_{cs} \phi \, \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

Impulsligningen: $\sum \vec{F} = \dot{\vec{M}}_{UT} - \dot{\vec{M}}_{INN}$

hvor $\dot{\vec{M}}_{UT} = \int_{UT} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$

$$\dot{\vec{M}}_{INN} = -\int_{INN} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Energiligningen:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{cs} \rho \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \quad ,$$

hvor $\hat{h} = \hat{u} + p/\rho$ er spesifikk entalpi.

Mekanisk energiligning for inkompressibel strømning langs strømlinje:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 \right) + w_s + gh_f \quad ,$$

hvor $\hat{u}_2 - \hat{u}_1 = q + gh_f$.

Bernoulli: $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = C$, langs strømlinje

Kontinuitetsligningen:

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Euler: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$

Navier-Stokes: $$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} \ , \ \nu = \mu / \rho$$

Strømfunksjonen ψ, kartesiske koordinater:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \ , \ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \psi = -\varsigma_z \ , \ \text{hvor } \vec{\varsigma} = \nabla \times \vec{V} \ \text{ er virvlingen}$$

Planpolare koordinater:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \ , \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\nabla^2 \psi = -\varsigma_z \ , \quad \text{hvor} \quad \left(\nabla \times \vec{V}\right)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \ \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

Hastighetspotensial ϕ : $\vec{V} = \nabla \phi$

Singulariteter:

$$\psi_{kilde} = m\theta \ , \quad \phi_{kilde} = m \ \ell n \ r$$

$$\psi_{virvel} = -K \ \ell n \ r \ , \quad \phi_{virvel} = K\theta$$

Sirkulasjon: $$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Løft og drag: $$L = C_L \cdot \frac{1}{2}\rho U^2 \cdot A \ , \quad D = C_D \cdot \frac{1}{2}\rho U^2 \cdot A$$

Reynolds tall: $Re = UL/\nu$

Kutta-Joukowski: $L = -\rho U\Gamma$ (per lengdeenhet).

Vannbølger (G. Moes kompendium):

$$\phi = \frac{ga}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\cos(\omega t - kx) = \frac{a\omega}{k}\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\cos(\omega t - kx)$$

Dispersjonsrelasjon:

$$\omega^2 = gk \tanh kd$$

Bernoulli:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = \text{konst.}$$

Kinematisk overflatebetingelse:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x} = w, \quad \text{ved} \quad z = \eta$$

Dynamisk trykk: $p_d = -\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$

Komplekst potensial: $w(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$

Kompleks hastighet: $w'(z) = u - iv = Ve^{-i\theta}$

Blasius' teorem: $F_x - iF_y = \dfrac{1}{2}i\rho\oint_c\left(\dfrac{dw}{dz}\right)^2 dz$