NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555/9950 1795

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

Tirsdag 8. desember 2009
Tid: 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller innen 8. januar 2010

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

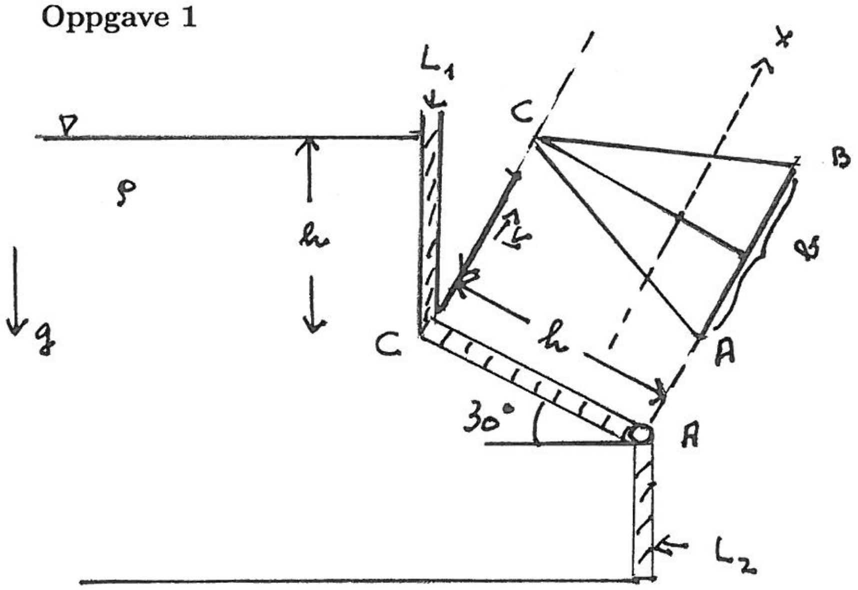


FIG.1

En trekantet luke ABC i en dam er hengslet gjennom grunnlinjen AB. Sidekantene AC og BC i luka er like. Lengden AB = b, og avstanden mellom toppunktet og grunnlinjen er h. Luka holdes på plass av en kraft K som står vinkelrett på luka, og som angriper i toppunktet C.

(a) Hvor stor er kraften F fra vannet på luka?

(b) Hvor stor må kraften K minst være for å holde luka på plass? Se bort fra lukas tyngde.

[Hint: Innfør ξ-aksen parallelt med lukas plan.]

Oppgitt: For en likebent trekant med grunnlinje b og høyde h ligger centroiden (flatesentret) en avstand $h/3$ over grunnlinjen. Flatens treghetsmoment omkring x−aksen gjennom centroiden er $I_{xx} = bh^3/36$.

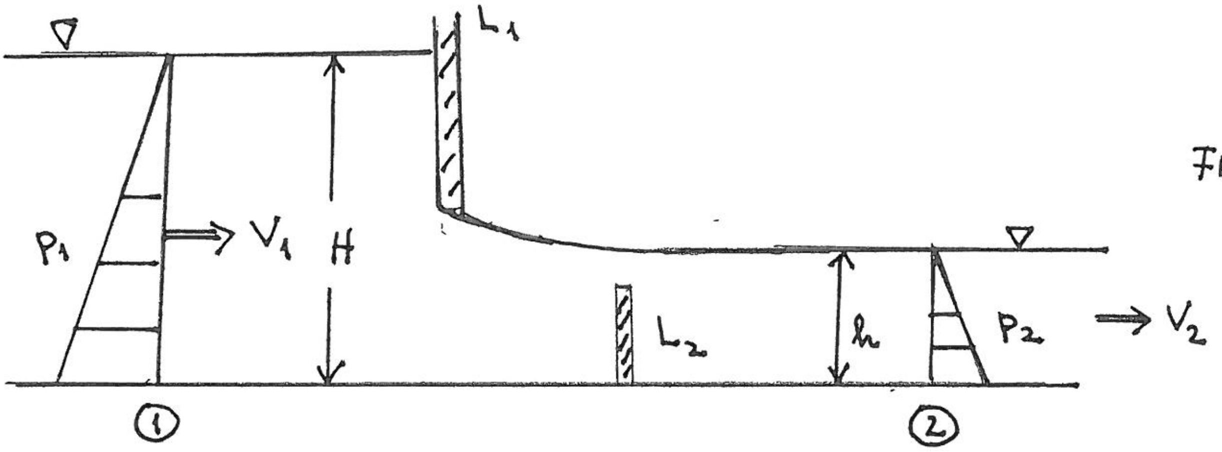
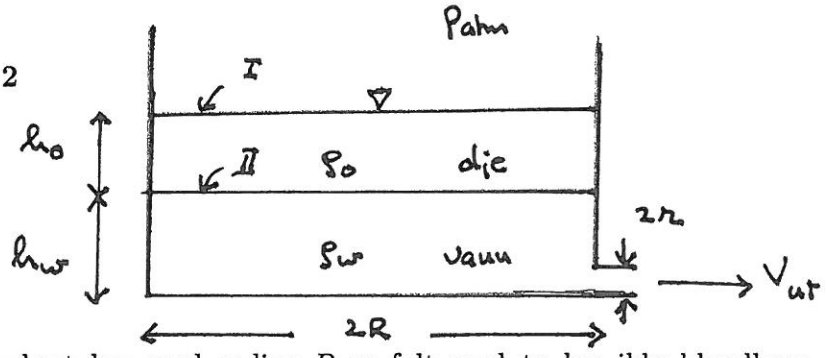


FIG. 2

(c) Den skrå veggen med luke fjernes, slik at vann renner ut. Vertikalveggene L_1 og L_2 blir stående. Når stasjonære forhold har innstilt seg, er forholdene som på figur 2. Anta uniforme forhold inn i planet. Ved innløp 1 er $H = 3$ m, ved utløp 2 er $h = 1,5$ m. Trykkene ved 1 og 2 er hydrostatiske (varierer lineært med høyden). Sett $\rho = 10^3$ kg/m^3, $g = 10$ m/s^2. Hva er utgangshastigheten V_2? Og hvor stor horisontal kraft F_L utøver vannet på veggene L_1 og L_2 tilsammen, per lengdeenhet inn i planet?

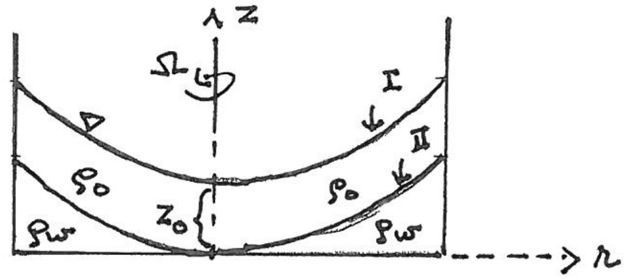
Oppgave 2

FIG.1



(a) Et sirkulært kar med radius R er fylt med to lag ikke-blandbare væsker, et nedre lag (vann) med tetthet ρ_w, og et øvre lag (olje) med tetthet ρ_o. Lagenes høyder er ved et gitt tidspunkt lik henholdvis h_w og h_o. Atmosfæretrykket er p_{atm}. Vann renner ut av en liten sirkulær åpning nederst; åpningens radius er r. Finn utløpshastigheten V_{ut} når du tar hensyn til at væskehøydene varierer med tiden. Viskositeten neglisjeres.

FIG.2



(b) Utløpet stenges, og karet settes i rotasjon omkring z-aksen med konstant vinkelfrekvens Ω. Når likevekt har innstilt seg er forholdene som på figur 2, nemlig at Ω er valgt slik at nedre interfase (II) berører bunnen. Legg koordinatsystemet som på figuren, med origo på bunnen. Det oppgis at trykkene i de to lagene kan skrives på formen

$$p_o = \frac{1}{2}\rho_o\Omega^2 r^2 - \gamma_o z + C_o,$$

$$p_w = \frac{1}{2}\rho_w\Omega^2 r^2 - \gamma_w z + C_w,$$

hvor $\gamma_o = \rho_o g, \gamma_w = \rho_w g$, og C_o, C_w er to konstanter. Bestem disse konstantene uttrykt ved høyden z_0 mellom væskelagene (se figuren), og finn ligningene for interfasene (overflatene) I og II.

(c) Finn til slutt verdiene av z_0 og Ω uttrykt ved de opprinnelig gitte konstantene R, h_w og h_o. (Hint: Benytt at lagenes volumer er konstante.)

Oppgave 3

Gitt en todimensjonal potensialstrømning hvor sammenhengen mellom posisjonen $z = x + iy$ i det komplekse plan og det komplekse potensial $w = \phi + i\psi$ er

$$z = c \cosh w. \tag{1}$$

Her er c en positiv konstant. Det oppgis at (1) tilsvarer

$$x = c \cosh \phi \cos \psi, \quad y = c \sinh \phi \sin \psi. \tag{2}$$

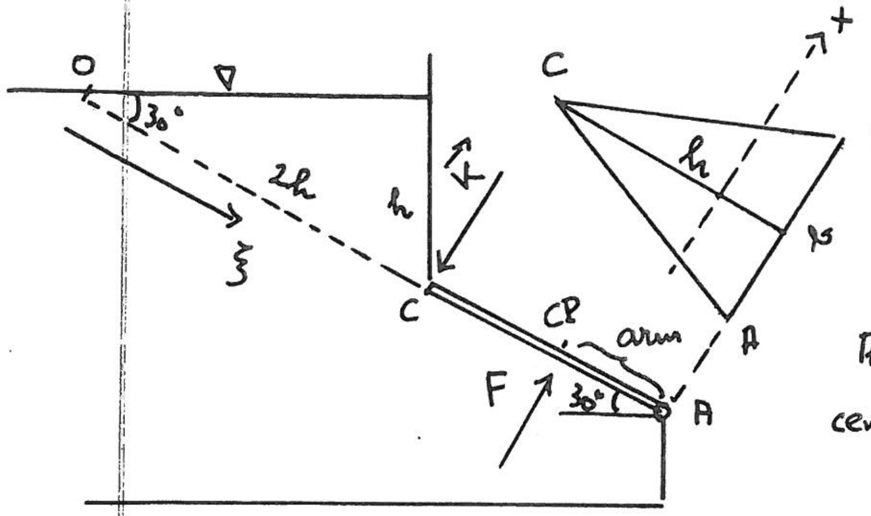
Alle størrelser antas dimensjonsløse.

(a) Eliminér hastighetspotensialet ϕ fra (2), og vis at strømlinjene er hyperbler med halvakser $a = c \cos \psi, b = c \sin \psi$. Forklar hvordan strømningen kan tolkes som en strømning mellom to faste flater.

(b) Sett i det følgende at halvaksen $b = c \sin \psi = 0$, slik at strømningen foregår mellom to horisontale plan med kanter i $x = c$ og $x = -c$. Tegn figur, angi verdiene av ψ på de to planene, og finn volumgjennomstrømningen Q mellom planene. Betrakt intervallet $-c \leq x \leq c$ på x-aksen, gå ut fra $\psi = \psi(x)$, og finn den vertikale hastigheten $v = v(x)$ i dette intervallet. Lag en skisse av $v(x)$.

(c) Finn trykket $p = p(x)$ i samme intervall på x-aksen, når trykket $p = p_0$ i origo er kjent. Væskens tetthet er ρ.

Løsning Oppgave 1



Legger ξ-aksen med origo i vannspeilet.
Avstand til centroiden: ξ_{CG}
Avstand til trykksenteret: ξ_{CP}.
Avstand fra grunnlinjen AB til centroiden er $h/3$ (oppgitt).

a) $\xi_{CG} = (2h + h) - h/3 = 8h/3.$

Dybde av centroiden: $h_{CG} = \xi_{CG} \cdot \sin 30° = 4h/3.$

Arealet av luka: $A = bh/2.$

Kraft på luka fra vannet: $\underline{F} = \gamma h_{CG} \cdot A = \gamma \cdot \frac{4h}{3} \cdot \frac{1}{2} bh = \underline{\frac{2}{3} \gamma b h^2}$

b) Momentbalanse omkring grunnlinjen AB: $K \cdot h = F \cdot \text{arm}$, hvor armen fra grunnlinjen til trykksentret CP må finnes.

Av
$$\xi_{CP} - \xi_{CG} = \frac{I_{xx}}{\xi_{CG} \cdot A}$$ finnes

$$\xi_{CP} - \xi_{CG} = \frac{\frac{1}{36} b h^3}{\frac{8h}{3} \cdot \frac{1}{2} bh} = \frac{h}{48}, \quad \xi_{CP} = \frac{8h}{3} + \frac{h}{48} = \frac{43}{16} h.$$

Det gir
$$\text{arm} = 3h - \xi_{CP} = 3h - \frac{43}{16} h = \frac{5}{16} h.$$

Momentbalansen dermed $K \cdot h = \left(\frac{2}{3} \gamma b h^2\right) \cdot \frac{5}{16} h$

$$\underline{K = \frac{5}{24} \gamma b h^2}$$

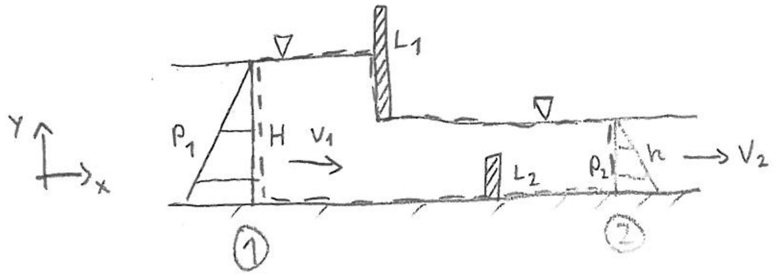
TEP 4105 Fluidmekanikk, 8. desember 2009.

Løsning Oppgave 1c

setter: $g = 10\ m/s^2$, $\rho = 10^3\ \frac{kg}{m^3}$ $\Rightarrow \gamma = 10^4\ \frac{kg}{m^2 s^2}$.

$b = 1\ m$

(b er lengden inn i planet).



Kontinuitetsligningen: $HV_1 = hV_2$ gir $3V_1 = 1.5V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{2}V_2$

Bernoulli for overflaten:

$$\cancel{p_0} + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma H = p_0 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma h \Rightarrow \frac{1}{2}\rho\frac{1}{4}V_2^2 + \gamma H = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma h$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8}\rho V_2^2 = \gamma(H-h) \Rightarrow \underline{V_2 \simeq 2\sqrt{10}\ m/s}$$

Fra kontinuitetsligningen: $\underline{V_1 = \frac{1}{2}V_2 \approx \sqrt{10}\ m/s}$

Impulsbalanse: $F_1 - F_2 + F = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{inn}$ hvor

$F_1 = \gamma h_{CG} \cdot A = \gamma \cdot \frac{1}{2} H \cdot H \cdot b \Rightarrow F_1 \simeq 4.5 \cdot 10^4 N$ er

trykkraften i 1. Tilsvarende er $F_2 \simeq 1.13 \cdot 10^4 N$

trykkraft i 2.

F er den ukjente kaften på vannet.

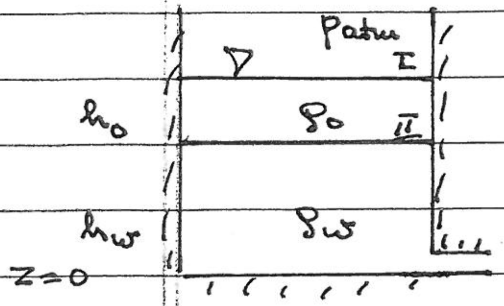
$\dot{M}_{UT} = \rho V_2^2 h b \approx 6 \cdot 10^4\ \frac{kg\,m}{s^2}$, $\underline{\dot{M}_{inn}} \simeq 3 \cdot 10^4\ \frac{kg\,m}{s^2}$.

Altså; $4.5 \cdot 10^4 - 1.13 \cdot 10^4 + F = 6 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^4$

$$\Rightarrow \underline{F/b = -3.7 \cdot 10^3 N}$$

Kraft på flatene, er følgelig: $F_L = -F = \underline{3.7\ kN.}$

Løsning Oppgave 2 (a)



a) Interfasenes hastighet er like:

$$V_{II} = V_{I}.$$

Bernoulli fra I til II:

$$p_{atm} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho_o V_I^2} + \rho_o g H = p_{II} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho_o V_{II}^2} + \rho_o g h_w$$

($z=0$ på bunnen). Det gir

$$p_{II} = p_{atm} + \rho_o g(H - h_w) = p_{atm} + \gamma_o \cdot h_o, \quad \gamma_o = \rho_o g$$

Trykk p_{II} er kontinuerlig over interfasen.

Bernoulli fra II til utløpet: $\gamma_w = \rho_w g$.

$$p_{II} + \tfrac{1}{2}\rho_w V_{II}^2 + \gamma_w \cdot h_w = p_{atm} + \tfrac{1}{2}\rho_w V_{ut}^2,$$

da trykket i den frie stråle er lik atmosfæretrykket. Som før er $V_{II} = V_I$

Kontinuitetsligningen: $V_I \cdot R^2 = V_{ut} \cdot r^2$, $V_I = V_{ut} \cdot r^2/R^2$

Setter inn:

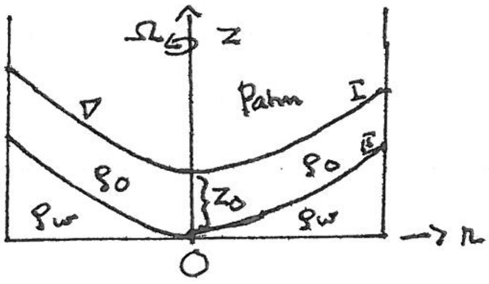
$$(\cancel{p_{atm}} + \gamma_o h_o) + \tfrac{1}{2}\rho_w \cdot V_{ut}^2 \frac{r^4}{R^4} + \gamma_w \cdot h_w = \cancel{p_{atm}} + \tfrac{1}{2}\rho_w V_{ut}^2.$$

$$\tfrac{1}{2}\rho_w V_{ut}^2 \left[1 - \frac{r^4}{R^4}\right] = \gamma_o h_o + \gamma_w h_w$$

$$V_{ut} = \sqrt{\frac{2(\gamma_o h_o + \gamma_w h_w)}{\rho_w (1 - r^4/R^4)}} = \sqrt{\frac{2g(\rho_o h_o + \rho_w h_w)}{\rho_w (1 - r^4/R^4)}}$$

TEP 4105 Fluidmekanikk. 8. des. 2009 (4)

Løsning Oppgave 2 (b)



Gitt $p_o = \frac{1}{2}\rho_o \Omega^2 r^2 - \gamma_o z + C_o$, olje (1)

$p_w = \frac{1}{2}\rho_w \Omega^2 r^2 - \gamma_w z + C_w$, vann. (2)

I origo, $r = z = 0$, er trykket $p_{origo} = p_{atm} + \gamma_o z_o$, da rotasjonen har ingen innvirkning på trykket.

Av (2) følger da $\underline{C_w = p_{atm} + \gamma_o z_o}$

I punktet $r = 0$, $z = z_o$ er trykket lik p_{atm}.

Av (1) følger $\underline{C_o = p_{atm} + \gamma_o z_o = C_w.}$

Da fås fra (1) og (2)

$$p_o = \frac{1}{2}\rho_o \Omega^2 r^2 - \gamma_o (z - z_o) + p_{atm} \quad (3)$$

$$\underline{p_w = \frac{1}{2}\rho_w \Omega^2 r^2 - \gamma_w z + \gamma_o z_o + p_{atm}} \quad (4)$$

Fri overflate (I) : $p_o = p_{atm}$ gir, innsatt i (3),

$$\cancel{p_{atm}} = \frac{1}{2}\rho_o \Omega^2 r^2 - \gamma_o (z - z_o) + \cancel{p_{atm}}.$$

$$\underline{z_I = z_o + \frac{1}{2g}\Omega^2 r^2}$$

Nedre interface (II) er en isobar, med trykk $p_w = p_{atm} + \gamma_o z_o$

Innsetting i (4) gir

$$\cancel{p_{atm}} + \cancel{\gamma_o z_o} = \frac{1}{2}\rho_w \Omega^2 r^2 - \gamma_w z + \cancel{\gamma_o z_o} + \cancel{p_{atm}}$$

$$\text{d.v.s.}\quad \gamma_w \cdot z = \frac{1}{2}\rho_w \Omega^2 r^2, \qquad \underline{z_{II} = \frac{1}{2g}\Omega^2 r^2}$$

Differansen mellom nivåene til flatene I og II altså z_o, for alle r.

(c) $$\text{Volum (vann)} = \int_0^R z_{II} \cdot 2\pi r\, dr = \frac{1}{2g}\Omega^2 \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4g}\pi \Omega^2 R^4$$

Da Volum (vann) $= \pi R^2 \cdot h_w$, fås $\underline{\Omega = \frac{2}{R}\sqrt{g h_w}}$

$$\text{Volum (olje)} = \int_0^R \underbrace{(z_I - z_{II})}_{z_o} \cdot 2\pi r\, dr = 2\pi z_o \cdot \int_0^R r\, dr = \pi R^2 \cdot z_o.$$

Da Volum (olje) $= \pi R^2 \cdot h_o$ fås $\underline{z_o = h_o}$.

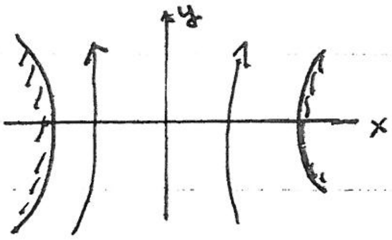
Løsning Oppgave 3

$z = c \cdot \cosh w \Rightarrow x = c\cosh\phi\cos\psi, \quad y = c\sinh\phi\sin\psi$

a) Da $\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$ følger

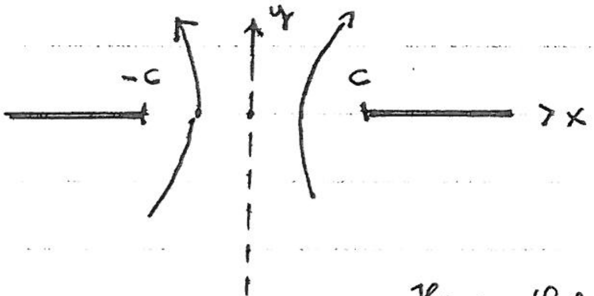
$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\psi} - \frac{y^2}{c^2\sin^2\psi} = 1.$$

For gitt ψ en hyperbel med halvakser $a = c\cos\psi$, $b = c\sin\psi$.



En av hyperblene kan erstattes av fast flate. Altså strømning mellom to faste flater.

b) $b = c\sin\psi = 0$ gir $\psi = 0$ eller $\psi = \pi$.



Høyre kant: $1 = \cosh\phi\cos\psi \quad (x = c)$

$\Rightarrow \phi = 0, \ \psi = 0.$

Venstre kant: $-1 = \cosh\phi\cos\psi \quad (x = -c)$

$\Rightarrow \phi = 0, \ \psi = \pi.$

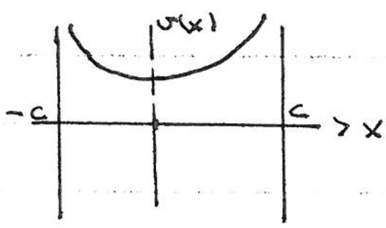
Høyre flate altså $\psi = 0$, venstre flate $\psi = \pi$.

Volumgjennomstrømning $Q = |\Delta\psi| = \pi$

På intervallet $-c \le x \le c$ er $u = 0$, $v = -\partial\psi/\partial x$ langs y-retningen.

$y = 0 \Rightarrow x = c\cdot\cos\psi, \quad \psi = \arccos(x/c) \Rightarrow$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - x^2/c^2}} > 0$$



c) I origo er $v_0 = \frac{1}{c}$.

Bernoulli $p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p(x) + \frac{1}{2}\rho v^2(x) \Rightarrow$

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\cdot\frac{1}{c^2} = p(x) + \frac{1}{2}\rho\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{1 - x^2/c^2}$$

$$p(x) = p_0 - \frac{\rho}{2c^4}\frac{x^2}{1 - x^2/c^2}$$