

# Øving 3, løsningskisse.

## Ledere og elektrisk felt. Gauss' lov.

### Oppgave 1. Overflateladningstetthet på ladet metalloverflate.

a)  $\sigma_{\text{maks}} = \epsilon_0 E_{\text{maks}} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ V/m} = \underline{27 \mu\text{C/m}^2}$ .  
(farad = F = C/V fra f.eks. Angell & Lian s. 12.)

b) Det elektriske feltet ved overflata av ei ladd kule med radius  $R_{\text{min}}$  er  $E_{\text{maks}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_{\text{min}}^2}$ , som gir minste mulig

radius uten overslag:  $R_{\text{min}} = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{maks}}} \right)^{1/2} = \left( \frac{1 \text{ C}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}} \right)^{1/2} = \underline{55 \text{ m}}$ .

c) På et areal  $A = (0,3 \text{ nm})^2 = 9 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$  er det 4 kvarte atom, dvs. ett atom. Midlere antall atomer per  $\text{m}^2$  blir derfor:

$$\underline{n_A = 1/A = 11 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2}}.$$

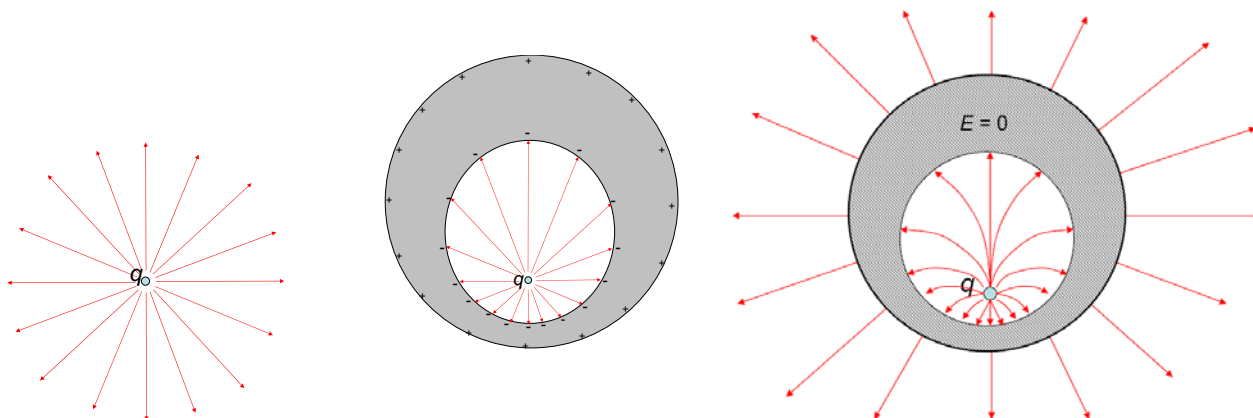
d) Ladningen for  $N$  ladde atomer er  $Q = N \cdot e$ , slik at antall elektroner per  $\text{m}^2$  blir:  $n_e = \frac{N}{A} = \frac{Q/e}{A} = \sigma_{\text{maks}}/e = 17 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2}$ . Andel av atomene i overflatelaget med et ekstra elektron:

$$n_e/n_A = 17 \cdot 10^{13}/11 \cdot 10^{18} = \underline{1,5 \cdot 10^{-5}}.$$

Dvs. bare ett av ca 65000 atomer har overskudd (eller underskudd) av ett elektron. Følgelig har ytterste atomlag mer enn nok kapasitet til å ta opp all mulig ladning på ei metalloverflate.

### Oppgave 2. Ladning på leder.

Venstre figur under viser 16 feltlinjer fra punktladningen  $+q$ . Når denne plasseres i hulrommet i lederen vil i første omgang feltlinjene stråle i samme retning og ende opp på indre metalloverflate. For å opprettholde  $E = 0$  overalt inne i lederen, vil det indueres negative motladninger fordelt som vist på figuren i midten. Det må bli størst induert ladningstetthet på den delen av hulrommets overflate som ligger nærmest punktladningen, lavere ladningstetthet på den delen av hulrommets overflate som ligger lengst unna punktladningen.



Den totale induerte ladning på hulrommets overflate er  $-q$ , ifølge Gauss' lov. Vi kan nemlig legge inn ei Gaussflate i lederen og som omslutter hulrommet men vilkårlig nær hulrommets overflate. Fordi  $E = 0$  i lederen må total nettoladning innenfor Gaussflata være lik null. Skal dette være oppfylt må vi ha en induert ladning  $-q$  på hulrommets overflate. Med denne ladningsfordelingen forsvinner det elektriske feltet overalt inne i lederen, dvs. bidraget til feltet inne i lederen fra punktladningen  $q$  kanselleres av bidraget fra den induerte ladningsfordelingen  $-q$ .

Men feltlinjene i hulrommet i midtre figur oppfyller ikke kravet om at feltlinjer skal gå normalt inn på en lederoverflate. Vi må derfor justere feltlinjene slik at de blir i figuren til høyre. Ladningstettheten forblir uendra.

Lederen var oppgitt å være elektrisk nøytral. Det betyr at vi må ha fått induert ladning  $+q$  på lederens ytre overflate, slik at total ladning på lederen blir  $q - q = 0$ . Denne ladningen vil fordele seg jamt på den ytre overflata, fordi asymmetrien som skyldes punktladningen inne i hulrommet presis kanselleres av den induerte ladningen  $-q$  på hulrommets overflate. Fra utsida ser vi altså rett og slett en kulesymmetrisk overflateladning med 16 radielt fordelte feltlinjer. Dvs.  $\underline{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}}$  med  $r$  = avstanden fra metallkulas sentrum.

### Oppgave 3. Sfærisk ladningsfordeling.

a) Ladningen i et infinitesimalt volumelement  $dV$  er lik  $dq = \rho dV$ . Dermed kan totalladningen uttrykkes

$$Q = \int_V dq = \int_V \rho dV.$$

Siden det er sfærisk symmetri, er det smart å bruke sfæriske koordinater. Volumet  $V$  er da mest hensiktsmessig beskrevet ved et kuleskall med tykkelse  $dr$ :  $dV = 4\pi r^2 dr$ .

Når  $Q$  skal regnes ut, må vi bruke det oppgitte uttrykket for  $\rho$  innenfor de gitte grensene når vi integrerer:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{r=0}^{\infty} \rho(r) 4\pi r^2 dr \\ &= \int_0^{R/2} \alpha 4\pi r^2 dr + \int_{R/2}^R 2\alpha(1 - r/R) 4\pi r^2 dr + \int_R^{\infty} 0 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi\alpha \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^{R/2} + 8\pi\alpha \left[ \frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{4R} r^4 \right]_{R/2}^R \\ &= \frac{4\pi}{3} \alpha \left\{ \left( \frac{R}{2} \right)^3 + 2 \left[ R^3 - \frac{3}{4} \frac{R^4}{R} - \left( \frac{R}{2} \right)^3 + \frac{3}{4R} \left( \frac{R}{2} \right)^4 \right] \right\} \\ &= \frac{4\pi}{3} \alpha \left( \frac{R}{2} \right)^3 \left\{ 1 + 2 \left[ 2^3 - \frac{3}{4} \cdot 2^3 - 1 + \frac{3}{8} \right] \right\} = \frac{5\pi}{8} \alpha R^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Altså er

$$\alpha = \frac{8Q}{5\pi R^3}, \quad \text{med numerisk verdi: } \alpha = \frac{8 \cdot 300 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{5\pi (50,0 \cdot 10^{-3} \text{ m})^3} = 1,222 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^3 = \underline{1,22 \text{ mC/m}^3}. \quad (2)$$

b) For alle tre områder velger vi en sfærisk Gaussflate konsentrisk med ladningsfordelingen. På grunn av symmetrien i problemstillingen er det elektriske feltet radielt retta,  $\vec{E} = E_r \hat{r}$ , hvor  $\hat{r}$  er enhetsvektor i radiell retning og  $E_r$  er kun avhengig av avstanden  $r$  fra sentrum, dvs. konstant over flata. Flatenormalvektoren er gitt ved  $d\vec{A} = dA \cdot \hat{r}$ . Fluksintegralet over den lukkede, valgte Gaussflata (med vilkårlig  $r$ ) blir da:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \oint E_r \cdot dA = E_r \oint dA = E_r 4\pi r^2 \equiv \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E} &= E_r \hat{r} = \frac{Q_{\text{encl}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Trenger da å finne ladningen som er innesluttet av Gaussflata for ulike valg av  $r$ :

For  $r < R/2$ : Her er  $\rho$  konstant og derfor

$$Q_{\text{encl}} = \rho V = \alpha \cdot \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (4)$$

som innsatt i likning (3) gir

$$\vec{E} = \frac{\alpha r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r} = \frac{8Qr}{15\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left( \frac{4}{3} \frac{r}{R} \right) \cdot \hat{r}. \quad (5)$$

For  $R/2 < r < R$ : Her er ladningen lik sum av  $Q_{\text{encl}}(r = R/2)$  og ladningen i ytre lag:

$$\begin{aligned} Q_{\text{encl}} &= \frac{4}{3} \pi \alpha \left( \frac{R}{2} \right)^3 + \int_{R/2}^r 2\alpha \left( 1 - \frac{r}{R} \right) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{6} \pi \alpha R^3 + 8\pi\alpha \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right]_{R/2}^r \\ &= \pi\alpha \left( -2 \frac{r^4}{R} + \frac{8}{3} r^3 - \frac{1}{24} R^3 \right), \end{aligned} \quad (6)$$

som innsatt i likning (3) gir det elektriske feltet

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\pi\alpha \left( -2 \frac{r^4}{R} + \frac{8}{3} r^3 - \frac{1}{24} R^3 \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} \\ &= \frac{\alpha R}{4\epsilon_0} \left( -2 \frac{r^2}{R^2} + \frac{8}{3} \frac{r}{R} - \frac{1}{24} \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \hat{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left( -2 \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{8}{3} \frac{r}{R} - \frac{1}{24} \left( \frac{r}{R} \right)^{-2} \right) \cdot \hat{r}. \end{aligned} \quad (7)$$

For  $r > R$ : Her er  $Q_{\text{encl}} = Q$ , og det elektriske feltet

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{r}. \quad (8)$$

c) **Kontinuitet:** Verdien for  $E_r$  skal bli den samme om vi setter inn i uttrykk som gjelder under grensa og over grensa. Grense ved  $r = R/2$ :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R/2^-} & \stackrel{(5)}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \hat{r} \\ & = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \hat{r} \\ \lim_{r \rightarrow R/2^+} & \stackrel{(7)}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(-2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right) \cdot \hat{r} \\ & = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \hat{r} \\ & = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \hat{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Kontinuiteten er bevart (dvs. vi har greid å regne riktig!)

Grense ved  $r = R$ :

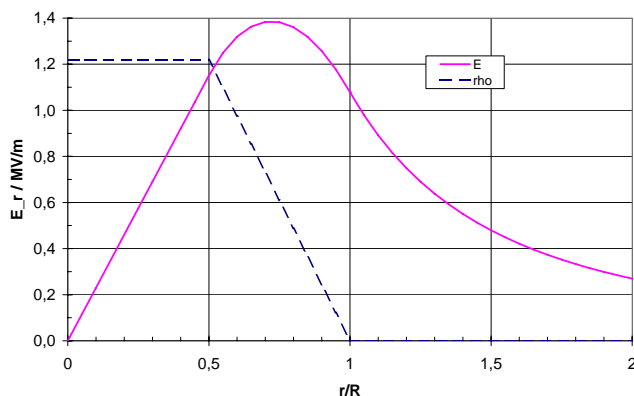
$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R^-} & \stackrel{(7)}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(-2(1)^2 + \frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{1}{24}(1)^{-2}\right) \cdot \hat{r} \\ & = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(\frac{5}{8}\right) \cdot \hat{r} \\ & = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \hat{r}, \\ \lim_{r \rightarrow R^+} & \stackrel{(8)}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \hat{r}. \end{aligned}$$

Kontinuiteten er bevart. Numerisk verdi ved grensene kan utregnes til

$$E(R) = 8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \cdot 300 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot (50,0 \cdot 10^{-3} \text{ m})^{-2} = \underline{1,08 \text{ MN/C}}.$$

$$E(R/2) = E(R) \cdot 16/15 = 1,15 \text{ MN/C}.$$

d) Figuren viser  $\frac{E_r}{\text{MV/m}}$  og  $\frac{\rho}{\text{mC/m}^3}$  som funksjon av  $r/R$ .



e) Ifølge likning (4) er ladning innenfor  $r = R/2$  lik

$$Q_{\text{encl}}(r = R/2) = \frac{4}{3}\pi\alpha(R/2)^3,$$

mens total ladning er (fra uttrykk for  $\alpha$  fra likning (2):

$$Q = \frac{5\pi R^3}{8}\alpha$$

Dermed er andel av ladningene innenfor  $r < R/2$  lik

$$\frac{Q_{\text{encl}}(r = R/2)}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi\alpha(R/2)^3}{\frac{5\pi R^3}{8}\alpha} = \frac{\frac{4}{3}(1/2)^3}{\frac{5}{8}} = \underline{\underline{\frac{4}{15}}}.$$