NORGES TEKNISK NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG
FLUIDDYNAMIKK

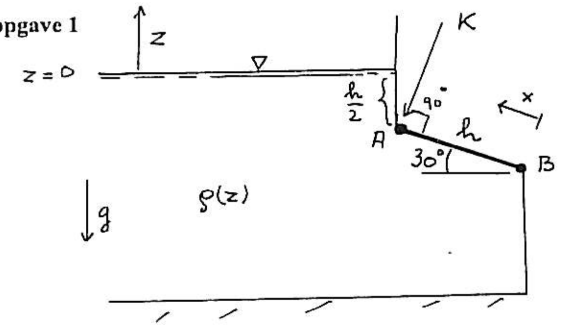
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIO 1009 – FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F (Linje Fysikk og matematikk)

Dato: 7. august 1999
Tid: kl. 0900 – 1400

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



I et basseng med saltvann øker saltinnholdet (saliniteten) med dybden. Anta at tettheten ρ (z) dermed øker lineært med dybden, etter formelen

$$\rho(z) = \rho_0(1-kz)\ .$$

Her er nivået z = 0 den frie overflate, ρ_0 er tettheten ved denne overflate, og k er en gitt positiv konstant. Tyngdens akselerasjon er g. Se bort fra atmosfæretrykket.

(a)Vis, for eksempel ved å starte med Eulers ligning, at det hydrostatiske trykket er

$$p(z) = -\gamma_o z\left(1-\frac{1}{2}kz\right),\ hvor\ \gamma_o = \rho_o g\ .$$

(b) Figuren viser en kvadratisk luke AB, med sidekant h, som er hengslet i nedre sidekant B. Hvor stor må kraften K minst være for at luka ikke skal åpne seg? Hint: Ta momentbalansen omkring B, idet du innfører koordinaten x fra B opp til et vilkårlig punkt på luka. Sett ~~in~~ p = p(x).

Oppgave 2

Gitt en horisontal vannstråle med bredde H_o hvor hastigheten er V_o, konstant over strålens tverrsnitt. Strålen er plan, dvs. dens utstrekning antas uendelig innover i papirplanet (i z-retningen). Atmosfæretrykket er p_o. Se bort fra tyngdekraften. Vannets viskositet neglisjeres.

(a)

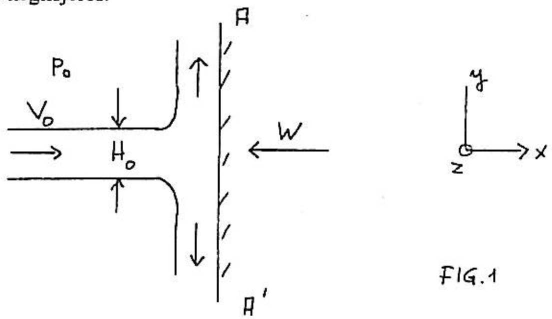


FIG.1

Hvor stort er trykket p inne i strålen? Begrunn svaret.
Strålen treffer en vertikal plate A – A' som skyves mot venstre med konstant hastighet W (se figur 1). Hvor stor er den horisontale kraft F_{plate} vannet utøver mot platen? Regn per lengdeenhet i z-retningen.

(b)

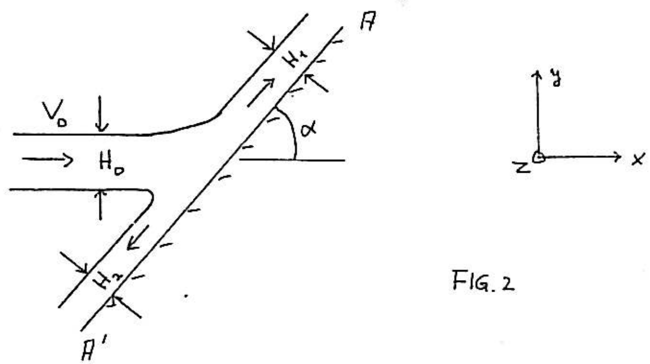
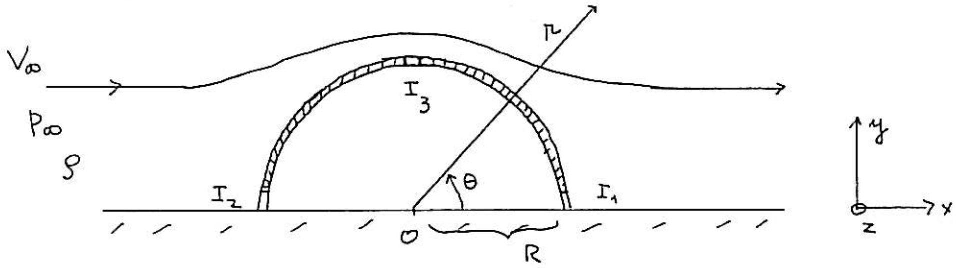


FIG. 2

Platen A – A' antas så å være i ro, men holdes i posisjon slik at den danner en vinkel α med x-aksen (figur 2). Den treffes av samme horisontale vannstråle som før. Hva er nå x- og y-komponentene av den kraft $\vec{F}_{plate}$ (per enhet i z-retningen) som vannet utøver mot platen?

(c) Når vannstrålen i figur 2 treffer platen deler den seg i to grenstrømmer, parallelt med platen. Finn grenstrømmenes høyder H_1 og H_2.

Oppgave 3



En igloo har form av en halvsylinder med radius R. Se bort fra veggtykkelsen, og se bort fra luftas tyngde og viskositet. Lufta har tettheten ρ. Det blåser en konstant vind på tvers mot iglooen, med opprinnelig hastighet V_∞. Legg origo i punktet O.

(a) Luftas hastighetskomponenter på utsiden ($r \geq R$) er

$$V_r = V_\infty\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,,\quad V_\theta = -V_\infty\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta\,.$$

Finn herav hastighetspotensialet ϕ og strømfunksjonen Ψ på utsiden.

(b) Anta at det er to små åpninger i veggen, én på baksiden ved I_1 ($\theta = 0$) og én på forsiden ved I_2 ($\theta = 180^\circ$), og at veggen ellers er tett. Finn trykket p_{in} inne i iglooen.

(c) Finn den vertikale nettokraft F_y (per lengdeenhet i z-retningen) som lufta utøver mot iglooen.

(d) Anta så at det lages et tredje hull i veggen, i posisjon I_3 ($\theta = 90^\circ$). Forklar kvalitativt hvilken luftstrømning som oppstår inne i iglooen.

Oppgave 4 (halv vekt)

Gitt det komplekse potensial

$$w(z) = Uz^{\pi/\alpha}$$

hvor U(>0) er en gitt hastighet, og α en gitt vinkel i området $0<\alpha<\pi$.

(a) Sett $z = re^{i\theta}$, finn hastighetspotensialet Φ og strømfunksjonen Ψ som funksjon av r og θ, og skisser strømlinjebildet når $0<\theta<\alpha$.

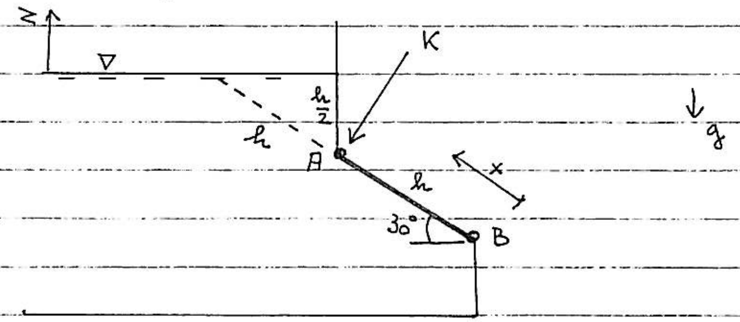
(b) Benytt formelen

$$V^2 = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{d\overline{w}}{d\overline{z}}$$

til å finne fluidets fart V. Har strømningen et stagnasjonspunkt?

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK 7. august 1999 ①

Løsning, Oppgave 1



(a) Eulers ligning $0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$ gir i z-retningen

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \text{ , altså } \underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{\frac{dp}{dz}} = -\rho g = -\underbrace{\rho_0 g}_{\gamma_0}(1-kz)$$

Integrerer: $p(z) = -\gamma_0\int(1-kz)dz = -\gamma_0(z - \frac{1}{2}kz^2) + \text{konstant}.$

Da det hydrostatiske trykk er null ved overflaten, får

$$\underline{p(z) = -\gamma_0 z(1 - \tfrac{1}{2}kz)}$$

(b) Uttrykker z ved x: Av figuren er $-z = [h + (h-x)]\cdot\sin 30^\circ$

$\therefore$ $\underline{z = \frac{x}{2} - h}$, $\underline{p(x) = -\gamma_0\left(\frac{x}{2}-h\right)\left[1 - \frac{k}{2}\left(\frac{x}{2}-h\right)\right]}$

Tar momentbalanse omkring B:

$$h\int_0^h x\cdot p(x)dx = K\cdot h$$

$$-\gamma_0\left\{\int_0^h x\left(\frac{x}{2}-h\right)dx - \frac{k}{2}\int_0^h x\left(\frac{x}{2}-h\right)^2 dx\right\} = K\cdot \cancel{h}.$$

Regner ut $\int_0^h x\left(\frac{x}{2}-h\right)dx = \Big|_0^h \frac{1}{6}x^3 - \frac{h}{2}x^2 = -\frac{1}{3}h^3,$

$$\int_0^h x\left(\frac{x}{2}-h\right)^2 dx = \int_0^h\left(\frac{1}{4}x^3 - hx^2 + h^2x\right)dx = \Big|_0^h \frac{1}{16}x^4 - \frac{h}{3}x^3 + \frac{h^2}{2}x^2 = \frac{11}{48}h^4.$$

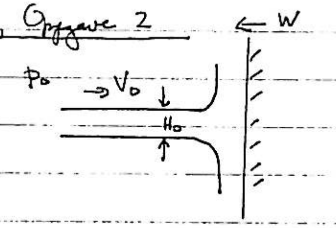
$$\Rightarrow \quad -\gamma_0\left[-\frac{1}{3}h^3 - \frac{k}{2}\cdot\frac{11}{48}h^4\right] = K\cdot\cancel{h}$$

$$\underline{K = \frac{1}{3}\gamma_0 h^3\left(1 - \frac{11}{32}kh\right)}$$

7. august 1999 ②

Løsning, Oppgave 2

a)

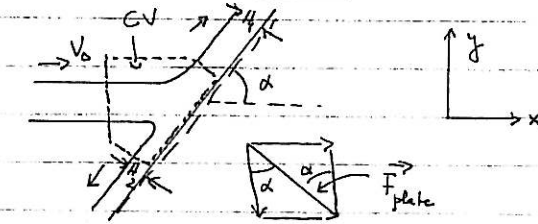


Inne i strålen er $p = p_0$. Hvis $p \neq p_0$, ville det være en tranversal kraft på strålen som ville forandre dens tverrsnitt. Når platen skyves mot venstre med hastighet W, er den relative hastighet av vannet lik $(V_0 + W)$.

Da strålens tverrsnitt, per m lengde inn i planet, er H_0, blir F_{plate} lik den relative impulsfluksen inn:

$$\underline{F_{plate} = \rho(V_0 + W)^2\cdot H_0}$$

b)



Når viskositeten er null, er skjærkraften null, og den eneste kraft er normalkraften mot platen.

Innfallende impulsfluks $\rho V_0^2 H_0$. Dens komponent normalt på platen er $\rho V_0^2 H_0 \cdot \sin\alpha$. Altså $F_{plate} = \rho V_0^2 H_0 \cdot \sin\alpha$.

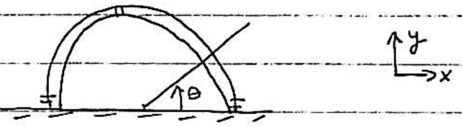
Komponenter av $\vec{F}_{plate}$:

$$\underline{(F_{plate})_x = \rho V_0^2 H_0 \sin^2\alpha \text{ , } (F_{plate})_y = -\rho V_0^2 H_0 \sin\alpha\cos\alpha}$$

c) Bernoulli anvendt på strålen gir at hastighetene i begge grenene er lik V_0. Kontinuitet: $V_0 H_0 = V_0 H_1 + V_0 H_2 \Rightarrow$ $H_0 = H_1 + H_2$. Ingen viskositet gir null kraft langs platen: $\dot{M}_{UT} = \dot{M}_{INN}$ langs platen. Dvs. $\rho V_0^2 H_1 - \rho V_0^2 H_2 = \rho V_0^2 H_0 \cdot \cos\alpha$, eller $H_1 - H_2 = H_0 \cos\alpha$. De to ligningene gir

$\underline{H_1 = \frac{1}{2}H_0(1+\cos\alpha), \quad H_2 = \frac{1}{2}H_0(1-\cos\alpha)}$. Stemmer for $\alpha = 0$ og $\alpha = 90^\circ$.

Løsning, Oppgave 3



a) Utsiden:

$V_r = V_\infty\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$, $\qquad V_\theta = -V_\infty\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$

Av $V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$ eller $V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$ finnes ved integrasjon

$$\underline{\Phi = V_\infty\left(r+\frac{R^2}{r}\right)\cos\theta}$$

Tilsvarende, av $V_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$ eller $V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$ finnes

$$\underline{\Psi = V_\infty\left(r-\frac{R^2}{r}\right)\sin\theta}$$

b) For potensialstrømning er Bernoullis konstant den samme overalt.

Altså $\frac{p_\infty}{\rho} + \frac12 V_\infty^2 = \frac{p(R,\theta)}{\rho} + \frac12 V_\theta^2(R,\theta)$

Innsetting av $V_\theta(R,\theta) = -2V_\infty\sin\theta$ gir $\underline{p(R,\theta) = p_\infty + \frac12\rho V_\infty^2(1-4\sin^2\theta)}$.

Når $\theta = 0$ eller 180° blir $\underline{p = p_{in} = p_\infty + \frac12\rho V_\infty^2}$. Overtrykk.

c)

$$\underline{F_y} = \int_0^\pi \left\{\left(p_\infty + \tfrac12\rho V_\infty^2\right) - \left[p_\infty + \tfrac12\rho V_\infty^2(1-4\sin^2\theta)\right]\right\}\sin\theta\cdot R\,d\theta$$

$$= 2\rho V_\infty^2 R\int_0^\pi \sin^3\theta = \underline{\frac83\rho V_\infty^2 R} \qquad \text{Løftekraft.}$$

d) Med ekstra hull ved $\theta = 90^\circ$:

$p_{in}(\theta = 0,\pi) = p_\infty + \frac12\rho V_\infty^2$, overtrykk i forhold til atmosfæren

$p_{in}(\theta = \frac\pi2) = p_\infty - \frac32\rho V_\infty^2$, undertrykk — " —.

Lavest trykk ved taket inne i igloen. Derfor strømning inn gjennom åpningene ved $\theta = 0, \pi$ og ut gjennom åpningen i taket.

Løsning, Oppgave 4

a) $w(z) = U z^{\pi/\alpha}$.

Da $w = \Phi + i\Psi$ og $z = re^{i\theta}$, fås

$$\Phi + i\Psi = Ur^{\pi/\alpha}\cdot e^{i\pi\theta/\alpha} = Ur^{\pi/\alpha}\left(\cos\frac{\pi\theta}{\alpha} + i\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)$$

ɔ:

$$\underline{\Phi = Ur^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}}, \qquad \underline{\Psi = Ur^{\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}}$$

b)

$$V^2 = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{d\bar w}{d\bar z}$$

Deriverer den gitte formel: $\frac{dw}{dz} = \frac{U\pi}{\alpha}\cdot z^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$.

Tar den kompleks konjugerte: $w(\bar z) = U\bar z^{\pi/\alpha}$, som gir

$$\frac{dw(\bar z)}{d\bar z} = \frac{U\pi}{\alpha}\bar z^{\frac{\pi}{\alpha}-1}.$$

Altså $V^2 = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{d\bar w}{d\bar z} = \left(\frac{U\pi}{\alpha}\right)^2 (z\bar z)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} = \left(\frac{U\pi}{\alpha}\right)^2 r^{2\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)}$

Fart $\underline{V = \frac{U\pi}{\alpha}\cdot r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}}$

Da $\alpha < \pi$ er $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$, og stagnasjonspunktet $V = 0$ ligger i origo.