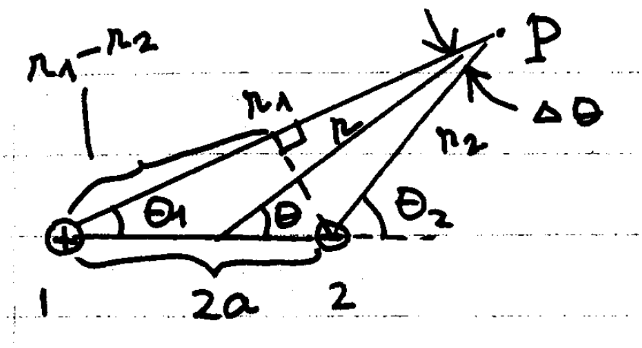
NTNU

TEP4105: Fluidmekanikk

Løsningsforslag til Øving 10
Høst 2015

Fluidmekanisk dipol

Definerer geometrien som vist i følgende figur:



For en enkel linjekilde så har vi

$$\Phi_{kilde} = m \ln r \qquad \text{og} \qquad \Psi_{kilde} = m\theta \tag{1}$$

Superponerer og får dublettens potensial Φ uttrykt som

$$\Phi = m(\ln r_1 - \ln r_2) = m \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right). \tag{2}$$

Av figuren gjør vi tilnærmingen

$$r_1 - r_2 = 2a\cos\theta. \tag{3}$$

Løser ligning 3 mhp. r_1 og setter inn i ligning 2;

$$\Phi = m \ln\left(\frac{r_2 + 2a\cos\theta}{r_2}\right) \approx m \ln\left(1 + \frac{2a}{r}\cos\theta\right) \approx \frac{2a}{r} m\cos\theta = \frac{\lambda}{r}\cos\theta, \tag{4}$$

hvor vi har brukt $r_2 \approx r$ i den første approksimasjonen og Taylorutvikling av $\ln(1+x)$ (som gir $\ln(1+x) \approx x$) i den andre. Begge approksimasjoner er basert på antagelsen at vi går tilstrekkelig langt unna dipolen. Dipolstyrken er innført som $\lambda = 2am$.

Tilsvarende for dublettens strømfunksjon:

$$\Psi = m(\theta_1 - \theta_2). \tag{5}$$

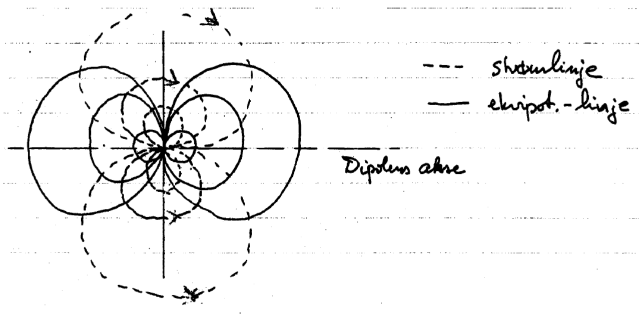
Fra figuren har vi

$$\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta \approx \frac{2a\sin\theta}{r}, \tag{6}$$

altså,

$$\Psi = -\frac{\lambda}{r}\sin\theta \tag{7}$$

Strømlinjer og ekvipotensiallinjer er skissert på neste side.



Potensialteori

a

Vi har gitt strømfunksjonen

$$\Psi = \mathcal{A} r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right). \tag{8}$$

Feltligningen er Laplaces ligning, $\nabla^2 \Psi = 0$. Fra formelarket (polarkoordinater) har vi

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}. \tag{9}$$

De deriverte er gitt som;

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{2}{3}\mathcal{A} r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = \frac{4}{9}\mathcal{A} r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \tag{10}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -\frac{4}{9}\mathcal{A} r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right). \tag{11}$$

Innsatt får vi $\nabla^2 \Psi = 0$, altså er feltligningen oppfylt.

Grensebetingelsen langs en fast flate er at strømfunksjonen skal være konstant. Merk at potensialteorien er en ideell, *friksjonsfri*, teori; heftbetingelsen gjelder ikke her!

For flaten AO har vi $\theta = \pi$, som innsatt gir Ψ=0. Tilsvarende for flaten OB, som har $\theta = -\pi/2$, som også gir $\Psi = 0$. Strømfunksjonen er konstant langs flatene, altså er grensebetingelse oppfylt.

b

Den enkleste måten å finne volumstrømmen mellom to punkter på er å ta differansen mellom strømfunksjonene i nevnte punkter. Altså;

$$Q = \Psi(P) - \Psi(0) = \Psi(P). \tag{12}$$

Setter inn $r = a$ og $\theta = 0$ og får

$$Q = \Psi(a, 0) = (A) a^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}(A) a^{\frac{2}{3}} \tag{13}$$

Solvind

a

Varmeledningsligningen

$$\frac{d}{dr}\left(Kr^2\frac{dT}{dr}\right) = 0, \tag{14}$$

med termisk konduktivitet $K = \alpha T^{\frac{5}{2}}$, gir

$$r^2 T^{\frac{5}{2}}\frac{dT}{dr} = C_1. \tag{15}$$

En integrasjon til gir

$$T^{\frac{7}{2}} = \frac{C_2}{r}, \tag{16}$$

hvor C_2 inneholder C_1 og alle eventuelle prefaktorer, mens den nye integrasjonskonstanten forsvinner ved grensebetingelsen $T(r \to \infty) = 0$. Konstanten C_2 bestemmes fra grensebetingelsen $T(r = r_0) = T_0$, som gir

$$T(r) = T_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{2}{7}}. \tag{17}$$

b

Ligning (2) og (3) i oppgaveteksten gir

$$\frac{dp}{dr} = -\rho\frac{GM}{r^2} = -\frac{p}{RT}\frac{GM}{r^2}, \tag{18}$$

som gir differensialligningen

$$\frac{dp}{p} = -\frac{GM}{RT}\frac{dr}{r^2}, \tag{19}$$

hvor $T = T(r)$ er temperaturen vi fant i oppgave a. Det resulterende integralet blir

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = -\frac{GM}{RT_0}\frac{1}{r_0^{\frac{2}{7}}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^{\frac{12}{7}}} \tag{20}$$

Ved å utføre integralet kommer man til slutt frem frem til

$$p(r) = p_0\exp\left(\frac{7GM}{5RT_0r_0}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{5}{7}} - 1\right]\right). \tag{21}$$

c

I stor avstand har vi

$$T(r \to \infty) = 0 \tag{22}$$

$$p(r \to \infty) = p_0\exp\left(-\frac{7GM}{5RT_0r_0}\right) \neq 0 \tag{23}$$

At temperaturen går mot null mens trykket går mot en endelig verdi er et paradoks (jmf. ideell gasslov). Fysisk betyr dette at koronaen ikke kan være i statisk likevekt, da dette ville innebære et kompressibelt trykk langt ute. Da et slikt trykk ikke eksisterer vil koronaen gi opphav til bevegelse, nemlig en solvind.

Trykket og temperaturen er skissert nedenfor.