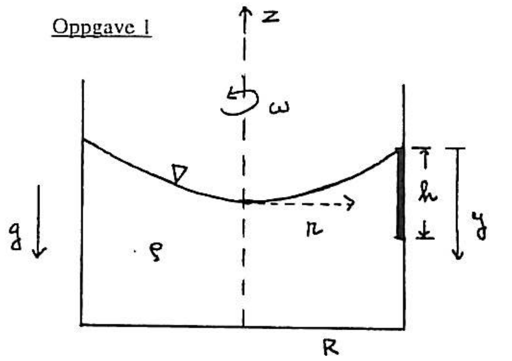
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

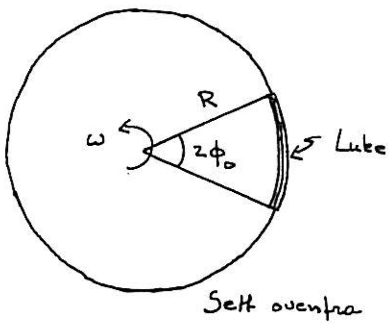
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F
(Linje Fysikk og matematikk)
Onsdag 16. desember 1998
Tid: 0900 – 1400

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1





Et sylindrisk kar med grunnflateradius R roterer om den vertikale z-aksen med konstant vinkelhastighet ω. I karet er det en inkompressibel væske med tetthet ρ. Anta stasjonære forhold. På karets sideflate er det en luke som dekker en åpningsvinkel $2\phi_0$ (se figuren). Lukas øvre kant ligger i samme nivå som væskeoverflaten ved veggen. Tyngdens akselerasjon er g. Se bort fra atmosfæretrykket.

a) Utled formelen for trykket p(r,z) i væsken.

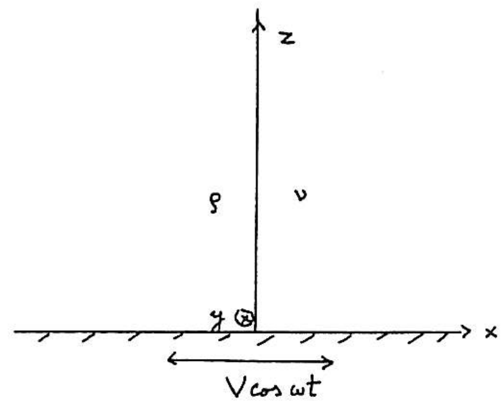
b) Finn størrelse og retning av den totale trykkraft $\vec{F}$ som vannet utøver mot luka. (Det er hensiktsmessig å skrive trykket ved veggen p(R,z) som en funksjon av avstanden y fra lukas øvre kant, se figuren.)

c) Finn avstanden y_p fra lukas øvre kant ned til kraftens angrepspunkt.

Oppgitt: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment omkring en horisontal akse x gjennom centroiden lik

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12}$$

Oppgave 2



En uendelig stor plan flate oscillerer harmonisk i x-retningen med hastighet $V\cos\omega t$ i sitt eget plan (z = 0). Området på oversiden av flaten, fra z = 0 til z = ∞, er fylt med en viskøs inkompressibel væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν. Tyngdekraften neglisjeres. På grunn av heftbetingelsen vil væsken ved veggen bli revet med i flatens bevegelse.

a) På grunn av symmetrien vil alle fysiske størrelser være uavhengig av x og y. Trykket p vil dessuten være uavhengig også av z. Hvorfor? Skriv ned Navier-Stokes' ligning for den horisontale hastigheten u(z,t). Det oppgis at løsningen av denne ligningen har formen

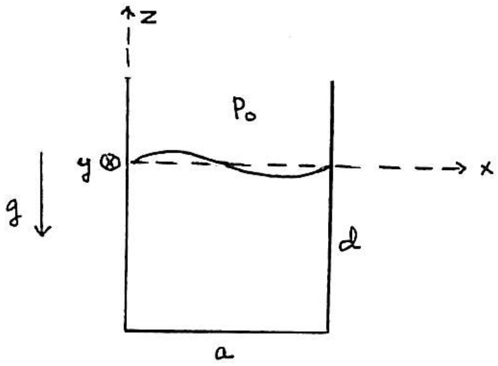
$$u(z,t) = u_0\, e^{-\beta z} \cos(\beta z - \omega t)$$

Bestem konstantene u_0 og β uttrykt ved de gitte konstanter V, ω og ν.

b) Finn hvordan skjærspenningen $\tau(0,t)$ ved overflaten varierer med t. Lag en skisse av $\tau(0,t)$, og angi faseforskyvningen mellom skjærspenningen og flatens hastighet.

c) Hvor stor er den midlere effekt $\overline{P(t)}$ som må tilføres flaten per overflateenhet for å opprettholde bevegelsen?

Oppgave 3



Figuren viser en vanntank sett fra siden. Bredden av tanken er a. Stillevannsdybden er d. Horisontale akser er x og y, vertikal akse er z, slik at nivået z = 0 faller sammen med stillevannsnivået. Anta uniforme forhold inn i papirplanet (y-retningen). Atmosfæretrykket er p_0.

Oppgaven i det følgende er å analysere de stasjonære svingemodene til den frie overflaten.

a) Sett opp den kinematiske betingelse for den frie overflaten, samt den dynamiske overflatebetingelse (Bernoullis ligning), og utled herav den frie overflatebetingelse i lineær teori:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0\,, \quad z = 0.$$

b) Hastighetspotensialet oppgis å ha formen

$$\Phi = f(x)\cosh k(z+d)\cos\omega t\,.$$

Finn ved hjelp av inkompressibilitetsbetingelsen hvilken differensialligning funksjonen f(x) må oppfylle. Finn dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$.

c) Løs differensialligningen for f(x), idet du tar hensyn til de kinematiske betingelsene ved tankens sidevegger x = 0 og x = a. Hva blir de tillatte verdier av bølgetallet k?

d) Du finner at Φ kan skrives på formen

$$\Phi = \beta\cos kx\cosh k(z+d)\cos\omega t\,,$$

hvor β er en konstant. Finn det dynamiske trykk $p_d = p_d(x,z,t)$ i vannet,uttrykt ved β og de andre konstanter.

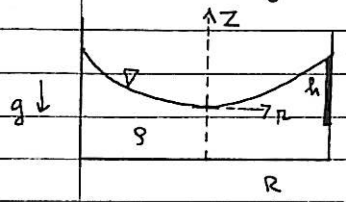
Oppgave 4 (halv vekt)

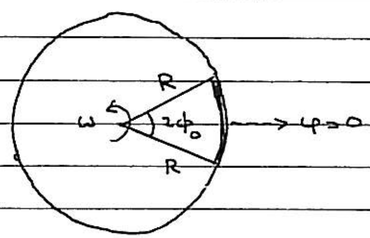
En linjekilde av styrke λ og et linjesluk av styrke $-\lambda$ er plassert på x-aksen, i posisjonene (-a,0) og (a,0) henholdsvis. Anta at $a \to 0$, $\lambda \to \infty$ slik at produktet $\mu = 2\lambda a$ = konstant. Da har vi en dipol med moment μ.

Finn det komplekse potensial w(z) i stor avstand fra dipolen, og finn herav dipolens hastighetspotensial Φ og strømfunksjon Ψ uttrykt ved μ, avstanden r fra origo, samt polarvinkelen θ.

Oppgitt: Det komplekse potensial fra en linjekilde λ i origo er $w = \frac{\lambda}{2\pi}\ell n\, z$.

Løsning Oppgave 1





a)

Eulerligningen i det roterende system:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}. \quad \text{Da } \vec{g} = (0,0,g_z) = (0,0,-g)$$

får $\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0$, dvs. $p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z + C$, $\gamma = \rho g$

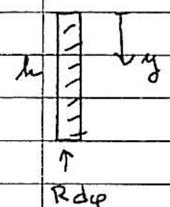
Da $p=0$ for $r = z = 0$, blir $C = 0$, som gir

$$\underline{p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z}$$

b) Fri overflate, $p=0$, gir $z = r^2\omega^2/2g$, altså $z = R^2\omega^2/2g$ ved veggen. Trykket ved veggen er $p(R,z) = \frac{1}{2}\rho R^2\omega^2 - \gamma z$

$= \gamma\left(\frac{R^2\omega^2}{2g} - z\right) \equiv \underline{\gamma\cdot y}$. Rent hydrostatisk trykk, når en regner avstanden fra lukas øvre kant.

På grunn av symmetrien er $\vec{F}$ rettet radielt. Angrepslinjen for $\vec{F}$ går gjennom lukas midtpunkt, $\varphi = 0$.



Deler inn luka i vertikale striper, hver stripe med høyde h og bredde $R\,d\varphi$. Arealet av stripen er $dA = Rh\,d\varphi$. Horisontal kraft på hver stripe er $dF = \gamma h_c\,dA = \gamma\cdot\frac{1}{2}h\cdot Rh\,d\varphi$ $= \frac{1}{2}\gamma R h^2\,d\varphi$. Komponenten av $d\vec{F}$ rettet ~~gjennom~~ parallelt med retningen $\varphi = 0$ er $dF\cdot\cos\varphi$.

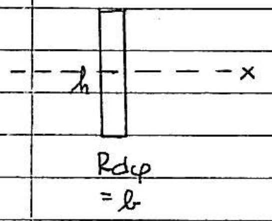
Integrerer over stripene:

$$\underline{F} = \int_{-\phi_0}^{\phi_0} dF\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}\gamma R h^2 \int_{-\phi_0}^{\phi_0}\cos\varphi\,d\varphi = \underline{\gamma R h^2\cdot\sin\varphi_0}$$

På vektorform: $\underline{\vec{F} = \gamma R h^2 \sin\varphi_0\,\vec{e}_r}$

Oppgave 1, forts.

c) Angrepspunktets dybde y_p fra øvre kant er den samme som for hver enkelt stripe.



Gitt at treghetsmomentet I_{xc} omkring centroiden (midtpunktet) er

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12} = \frac{R\,d\varphi\cdot h^3}{12}.$$

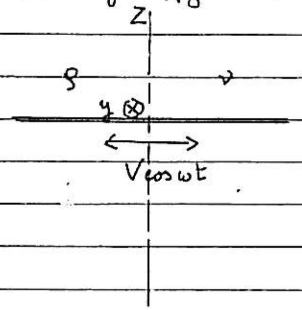
Dybden ned til trykksenteret er iflg. formelark

$$y_p = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c\cdot A}$$

Her er $y_c = \frac{1}{2}h$, $A = R\,d\varphi\cdot h$, slik at

$$\underline{y_p} = \frac{1}{2}h + \frac{\frac{1}{12}R\,d\varphi\cdot h^3}{\frac{1}{2}h\cdot R\,d\varphi} = \frac{1}{2}h + \frac{1}{6}h = \underline{\underline{\frac{2}{3}h}}$$

Løsning Oppgave 2



Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{V}$$

Bare x-komponenten av hastigheten, $u(z,t)$, er forskjellig fra null.

z-komponenten av Navier-Stokes gir

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$, altså p uavhengig av z

x-komponenten av Navier-Stokes: $\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)u = \nu\nabla^2 u$.

Da $(\vec{V}\cdot\nabla)u = u\,\partial u/\partial x = 0$, blir ligningen

$$\underline{\partial u/\partial t = \nu\nabla^2 u = \nu\,\partial^2 u/\partial z^2}, \quad u = u(z,t).$$

Oppgitt løsningsform $u(z,t) = u_0 e^{-\beta z}\cos(\beta z - \omega t)$, $z \geq 0$

Ved overflaten $z = 0$: $u(0,t) = u_0\cos\omega t = V\cos\omega t$

på grunn av heftbetingelsen. Altså $u_0 = V$.

Deriverer $u(z,t) = Ve^{-\beta z}\cos(\beta z - \omega t)$:

$$\partial u/\partial t = \omega V e^{-\beta z}\sin(\beta z - \omega t)$$

$$\partial u/\partial z = -\beta V e^{-\beta z}[\cos(\beta z - \omega t) + \sin(\beta z - \omega t)]$$

$$\partial^2 u/\partial z^2 = 2\beta^2 V e^{-\beta z}\sin(\beta z - \omega t).$$

x-komponenten av Navier-Stokes blir dermed

$$\omega V e^{-\beta z}\sin(\beta z - \omega t) = 2\nu\beta^2 V e^{-\beta z}\sin(\beta z - \omega t)$$, som gir

$$\underline{\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}$$

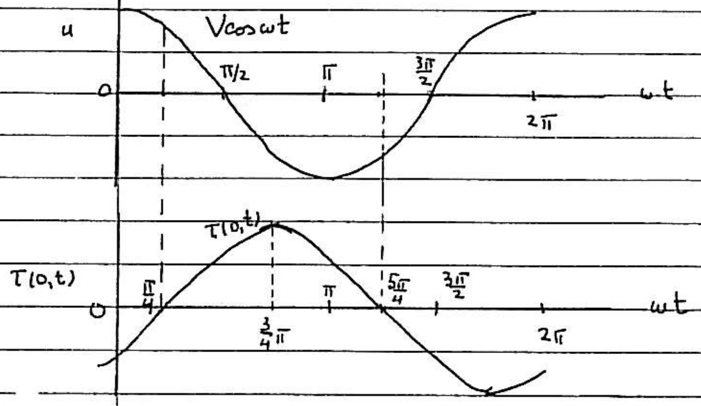
b) Skjærspenning ved veggen $\tau(0,t) = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}$

Innsetting for u:

$$\underline{\tau(0,t)} = \mu\beta V(\underbrace{\sin\omega t - \cos\omega t}_{-\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})}) = \underline{-\mu\beta V\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \tfrac{\pi}{4})}$$

Setter inn for β: $\underline{\tau(0,t) = -\rho V\sqrt{\omega\nu}\cdot\cos(\omega t + \tfrac{\pi}{4})}$

Løsning Oppgave 2, forts.



Skjærspenningen ligger $\frac{3}{4}\pi$ bak hastigheten i fase.

c)

Instantan effekt er $P(t) = -\tau(0,t)\cdot V\cos\omega t$.

Dette fordi fluidets kraft mot flaten per flateenhet er $+\tau(0,t)$. Den kraft vi må tilføre flaten for å opprettholde bevegelsen er like stor og motsatt.

Altså $P(t) = \rho V^2\sqrt{\omega\nu}\,\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\cos\omega t$.

Her er middelverdien $\overline{\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\cos\omega t}$ =

$$= \overline{(\cos\omega t\cos\tfrac{\pi}{4} - \sin\omega t\sin\tfrac{\pi}{4})\cos\omega t} = \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

slik at $\underline{\overline{P(t)} = \frac{1}{2}\rho V^2\sqrt{\frac{\omega\nu}{2}}}$

Løsning Oppgave 3

a)

Kinematisk betingelse:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big|_{z=\eta} = w(\eta) \qquad (1)$$

Bernoulli ved fri overflate:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2}V^2(\eta) + \frac{p_0}{\rho} + g\eta = C$$

Velger $C = \frac{p_0}{\rho}$, slik at

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2}V^2(\eta) + g\eta = 0 \qquad (2)$$

Ligningene (1) og (2) gjelder også i ikke-lineær teori.

Lineær approksimasjon:

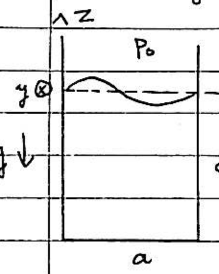
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad z = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0, \qquad z = 0$$

Herav følger fri overflatebetingelse:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \qquad z = 0.$$

Løsning Oppgave 3, forts



b) Gitt $\Phi = f(x)\cosh k(z+d)\cos\omega t$.

Inkompressibilitetsbetingelsen $\nabla\cdot\vec{V} = 0$

$\Rightarrow \nabla^2\Phi = 0$, som gir

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$. Derivasjon av Φ gir

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \qquad (1)$$

Dispersjonsrelasjonen følger av $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$, $z = 0$:

$$-\omega^2 f(x)\cosh kd\cos\omega t + gk f(x)\sinh kd\cos\omega t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = gk\tanh kd$$

c) Ligning (1) har generell løsning

$f(x) = \alpha\sin kx + \beta\cos kx$, α og β konstanter. Altså

$\Phi = (\alpha\sin kx + \beta\cos kx)\cosh k(z+d)\cos\omega t$. Det gir

$u = \partial\Phi/\partial x = k(\alpha\cos kx - \beta\sin kx)\cosh k(z+d)\cos\omega t$.

Kinematisk betingelser er $u(0,t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, og

$u(a,t) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0$. Altså

$$k = n\pi/a, \text{ hvor } n = 1, 2, 3, \ldots$$

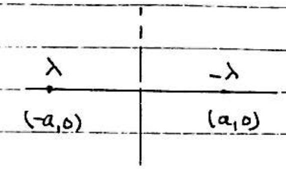
d) $\Phi = \beta\cos kx\cosh k(z+d)\cos\omega t$ følger av ovenstående.

Av Bernoulli: $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V^2}_{\text{negl.}} + gz = \frac{p_0}{\rho}$ følger

$$p_d \equiv p - (p_0 - \rho g z) = -\rho\,\partial\Phi/\partial t$$

Altså $p_d = \rho\beta\omega\cos kx\cosh k(z+d)\sin\omega t$

Løsning Oppgave 4



$\mu = 2\lambda a$

Adderer potensialene:

$$w = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\ln(z+a) - \ln(z-a)\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\ln\frac{z+a}{z-a} = \frac{\lambda}{2\pi}\ln\frac{1+a/z}{1-a/z} \simeq \frac{\lambda}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{z}\right)^2 = \frac{\lambda}{2\pi}\ln\left(1+\frac{2a}{z}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\frac{2a}{z} = \frac{\mu}{2\pi z},$$ til laveste orden i a/z.

Da $z = re^{i\theta}$ kan w skrives

$$w = \frac{\mu}{2\pi r}e^{-i\theta} = \frac{\mu}{2\pi r}\cos\theta - \frac{i\mu}{2\pi r}\sin\theta$$

Sammenligner med $w = \Phi + i\Psi$:

$$\Phi = \frac{\mu}{2\pi r}\cos\theta$$

$$\Psi = -\frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta$$