Fra Kreyszig (10th), avsnitt 6.1

$\boxed{2}$ Siden

$$(a - bt)^2 = a^2 - 2abt + b^2t^2$$

og $\mathcal{L}$ er lineær, er

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(a-bt)^2\} &= a^2\mathcal{L}(1) - 2ab\mathcal{L}(t) + b^2\mathcal{L}(t^2) \\ &= a^2\frac{1}{s} - 2ab\frac{1}{s^2} + b^2\frac{2}{s^3}\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ Siden

$$\begin{aligned}f(t) &= 1.5\sin(3t - \frac{\pi}{2}) \\ &= 1.5\sin 3t\cos\frac{\pi}{2} - 1.5\cos 3t\sin\frac{\pi}{2} \\ &= -1.5\cos 3t,\end{aligned}$$

er

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = -\frac{1.5s}{s^2 + 3^2}$$

$\boxed{10}$ Her må vi først finne uttrykket for $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} k & 0 < t < c \\ 0 & t > c \end{cases}$$

Transformerer:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f\} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^c \mathrm{e}^{-st} k\,\mathrm{d}t \\ &= k\left[\frac{1}{(-s)}\,\mathrm{e}^{-st}\right]_0^c \\ &= \underline{\frac{k}{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-cs}\right)}\end{aligned}$$

$\boxed{24}$ Gitt funksjoner $F(s), G(s)$ og konstanter a, b. La $f(t) = \mathcal{L}^{-1}F$ og $g(t) = \mathcal{L}^{-1}G$. Siden $\mathcal{L}$ er lineær, er

$$a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g = \mathcal{L}(af(t) + bg(t))$$

Anvend $\mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}^{-1}(a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g) = af(t) + bg(t)$$

og bruk at $\mathcal{L}f = F(s), f(t) = \mathcal{L}^{-1}F, \mathcal{L}g = G(s), g(t) = \mathcal{L}^{-1}G$

$$\mathcal{L}^{-1}(aF(s) + bG(s)) = a\mathcal{L}^{-1}F + b\mathcal{L}^{-1}G$$

dvs. $\mathcal{L}^{-1}$ er lineær.

32 Vi ser bare p tilfellet $a \neq b$. Delbrøksoppspaltning gir

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)$$

når $a \neq b$. Dermed blir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right) &= \frac{1}{b-a}\left(\mathcal{L}\left(\frac{1}{s+a}\right) - \mathcal{L}\left(\frac{1}{s+b}\right)\right) \\ &= \frac{1}{b-a}(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}). \end{aligned}$$

33 Siden

$$F(s) = \mathcal{L}(t^3) = \frac{3!}{s^4}$$

gir s-forskyvningsloven at

$$\mathcal{L}(t^3 e^{-2t}) = F(s+2) = \frac{3!}{(s+2)^4}$$

40 Siden

$$F(s) = \frac{4}{s^2 - 2s - 3} = \frac{4}{(s-1)^2 - 4}$$

kan vi bruke s-forskyvningsloven, sinh - transformasjonen og linearitet av $\mathcal{L}^{-1}$, til finne

$$\begin{aligned} e^{-t}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s+1)) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2 \cdot 2}{s^2 - 2^2}\right) = 2\sinh 2t \end{aligned}$$

Dvs.

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = 2e^t \sinh 2t$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 6.2

4 Transformerer begge sider av likhetstegnet

$$\mathcal{L}(y'' + 9y) = \mathcal{L}(10e^{-t}).$$

Siden $\mathcal{L}$ er lineær,

$$\mathcal{L}(y'') = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y,$$
$$\mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s+1},$$

finner vi

$$s^2Y + 9Y = 10\frac{1}{s+1},$$

dvs.

$$Y = 10\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+9}.$$

Delbrksoppspaltning (OBS!)

$$\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+9} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$

$$\Longrightarrow 1 = (s^2+9)A + (Bs+C)(s+1)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \mathcal{O}(1):& \qquad 9A + C = 1 \\ \mathcal{O}(s):& \qquad B + C = 0 \\ \mathcal{O}(s^2):& \qquad A + B = 0 \end{aligned}$$

Dvs.

$$A = -B = C = \frac{1}{10}$$

og

$$Y = \frac{1}{s+1} + \frac{1-s}{s^2+9}.$$

Inverstransformerer begge sider av likningen,

$$\begin{aligned} y = \mathcal{L}^{-1}(y) &= \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}(\frac{3}{s^2+9}) - \mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+9}) \\ &= e^{-t} + \frac{1}{3}\sin 3t - \cos 3t \end{aligned}$$

PS: Sjekk at svaret oppfyller likningen og initialbetingelsene.

13

$$y' - 6y = 0, \qquad y(-1) = 4$$

Her er initialbetingelsen gitt for $t_0 = -1 \neq 0$. En måte å løse dette på er å finne en løsning $\tilde{y}(t) = y(t+t_0)$ som er tidsforskyvet i forhold til $y(t)$, slik at initialbetingelsen blir $\tilde{y}(0) = 4$. Differensialligningen for $\tilde{y}(t)$ blir helt lik:

$$\tilde{y}' - 6\tilde{y} = 0, \qquad \tilde{y}(0) = 4$$

Transformerer og løser for $\tilde{Y}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\tilde{y}' - 6\tilde{y}\} &= \mathcal{L}\{0\}\\ s\tilde{Y} - \tilde{y}(0) - 6\tilde{Y} &= 0\\ \tilde{Y} &= \frac{4}{s-6}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{y}(t) = 4\mathrm{e}^{6t}$$

Tidsforskyver tilbake igjen for å få det korrekte svaret:

$$\underline{y(t) = 4\mathrm{e}^{6(t+1)}}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 6.3

$\boxed{6}$

$$\begin{aligned}f(t) &= \begin{cases} \sin \pi t, & 2 < t < 4 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}\\ &= \sin \pi t(u(t-2) - u(t-4)).\end{aligned}$$

Siden

$$\begin{aligned}\sin \pi t &= \sin(\pi(t-2) + 2\pi) = \sin \pi(t-2)\\ &= \sin \pi(t-4),\end{aligned}$$

er

$$f(t) = \sin \pi(t-2)u(t-2) - \sin \pi(t-4)u(t-4)$$

og t-forskyvningsloven gir da at

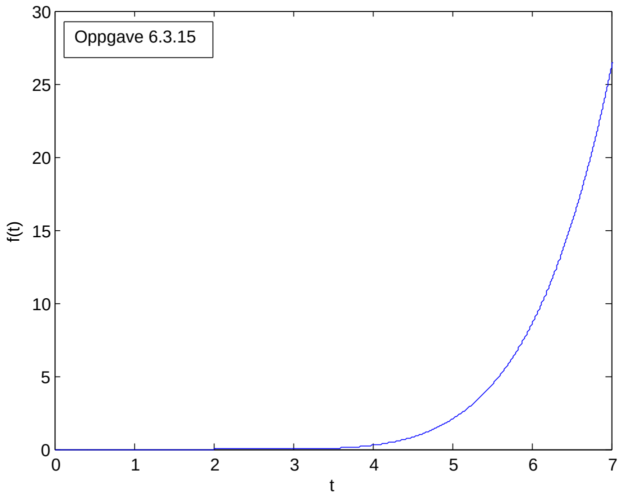
$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= e^{-2s}\mathcal{L}(\sin \pi t) - e^{-4s}\mathcal{L}(\sin \pi t)\\ &= (e^{-2s} - e^{-4s})\frac{\pi}{s^2 + \pi^2}\end{aligned}$$

$\boxed{15}$

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s^6}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^6}\right)(t-2)\\ &= \frac{1}{5!}(t-2)^5 u(t-2)\end{aligned}$$

$\boxed{25}$

$$y'' + y = r(t), \qquad\qquad y(0) = y'(0) = 0$$



Høyresiden $r(t)$ kan uttrykkes med heaviside-funksjonen:

$$\begin{aligned} r(t) &= \begin{cases} 2t & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases} \\ &= 2t + (2 - 2t)u(t-1) \end{aligned}$$

Transformerer begge sider av differensialligningen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' + y\} &= \mathcal{L}\{2t + (2-2t)u(t-1)\} \\ s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y &= \frac{2}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} - 2\mathcal{L}\{tu(t-1)\} \\ Y(s^2+1) &= \frac{2}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} - 2e^{-s}\mathcal{L}\{t+1\} \\ Y &= \frac{1}{s^2+1}\left[\frac{2}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} - 2e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)\right] \\ &= 2\frac{1}{(s^2+1)s^2}\left[1 - \mathrm{e}^{-s}\right] \end{aligned}$$

Delbrøksoppspaltning gir:

$$Y = 2\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)\left[1 - \mathrm{e}^{-s}\right]$$

$$\begin{aligned} => \qquad y(t) &= 2\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{-s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)\right\}\right) \\ &= 2t - 2\sin t - 2u(t-1)\Big[(t-1) - \sin(t-1)\Big] \end{aligned}$$