FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Hosten 2015.
Veiledning: 12. og 15. oktober. Innleveringsfrist: Fredag 16. oktober kl 16.

Øving 8

Oppgave 1

Et system er definert ved en indre energi $U = U(S, V, N)$ (der S, V, N er hhv entropi, volum, og antall partikler i systemet)

$$U = \frac{aS^3}{NV}.$$

Her er a en positiv dimensjonsbeheftet konstant.
Generelt er indre energi U gitt ved, for et $p - V$-system med variabelt partikkeltall

$$U = TS - pV + \mu N.$$

I tillegg har vi TdS-ligningen (snudd litt om)

$$dU = TdS - pdV + \mu dN.$$

Fra denne får vi de intensive variablene (T, p, μ) (de generaliserte kreftene) ved å derivere den indre energi med hensyn på de generaliserte forskyvningene og partikkeltall

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} \\ p &= -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} \\ \mu &= \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}. \end{aligned}$$

Ved å differensiere U og sammenligne med uttrykket for dU, finner vi Gibbs-Duhem-relasjonen

$$0 = SdT - Vdp + Nd\mu,$$

som viser at det må finnes en ligning $f(p, T, \mu) = 0$ som gir tilstandsligningen uttrykt ved intensive variable alene.
Fra ligningene for T, p, μ finner vi, når vi bruker uttrykket for U

$$\begin{aligned} T &= \frac{3aS^2}{NV} \\ p &= \frac{aS^3}{NV^2} \\ \mu &= -\frac{aS^3}{N^2V}. \end{aligned}$$

Fra disse kan en så eliminere de ekstensive variable og finne sammenheng mellom kun p, T, μ.

Vi skal nå bruke dette systemet som arbeidssubstans i en Carnot-maskin. Systemet starter ved høy temperatur T_2 i punkt A, ekspanderer isotermt til punkt B, ekspanderes så adiabatisk til punkt C, komprimeres isotermt til punkt D ved lav temperatur T_1, og komprimeres til slutt adiabatisk tilbake til punkt A.

a) Vis at entropien S er gitt ved

$$S = \sqrt{\frac{NVT}{3a}}.$$

b) Vis at

$$U = pV = \sqrt{\frac{N}{27a}}\;\; V^{1/2}\;\; T^{3/2}.$$

c) Vis at

$$\begin{aligned} U_B &= \sqrt{\frac{V_B}{V_A}}\;\; U_A, \\ U_C &= \frac{T_1}{T_2}\;\; \sqrt{\frac{V_B}{V_A}}\;\; U_A, \\ U_D &= \frac{T_1}{T_2}\;\; U_A. \end{aligned}$$

d) Beregn utført arbeid og tilført varme i denne prosessen, og beregn derav maskinens virkningsgrad.

Oppgave 2

Et elektron har kvantisert magnetisk moment

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{m_e}\,\boldsymbol{S}.$$

Her er $-e$, m_e og $\boldsymbol{S}$ hhv ladningen, massen og spinnet til elektronet. I et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$ vil elektronspinnets komponent S_z i magnetfeltets retning kun ha to mulige verdier, $\pm\hbar/2$, slik at den potensielle energien $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ (jf grunnleggende magnetostatikk) kun kan ha verdien $E_- = -\mu_B B$ eller $E_+ = \mu_B B$, svarende til at $\boldsymbol{\mu}$ peker i hhv samme retning som $\boldsymbol{B}$ eller motsatt retning av $\boldsymbol{B}$. Her er $\mu_B = e\hbar/2m_e$ en såkalt Bohr-magneton.

I termisk likevekt er sannsynligheten $p(s)$ for at elektronet befinner seg i den ene eller den andre av de to mulige tilstandene (med $s = \pm 1$ svarende til $E_\pm$)

$$p(s) = C\,e^{-sx},$$

dvs proporsjonal med *Boltzmannfaktoren*. Her er C en normeringskonstant, og $x = \mu_B B/kT$ er en dimensjonsløs størrelse som angir spinnets potensielle energi i magnetfeltet relativt den tilgjengelige termiske energien kT.

a) Beregn normeringskonstanten C, og bestem dermed partisjonsfunksjonen $Z = 1/C$.

b) Elektronets midlere magnetiske moment m er gitt ved

$$m = \langle \mu \rangle = \sum_{s=\pm 1} (-s)\,\mu_B\,p(s).$$

[Minustegn foran s fordi $s = 1$ tilsvarer $\boldsymbol{\mu}$ i negativ z-retning.] Med N slike elektroner, hva blir systemets magnetisering M (dvs magnetisk moment pr volumenhet)? Vis at dette resultatet er i samsvar med Curies lov, $M \sim 1/T$, for høye temperaturer (evt svakt magnetfelt). Hva blir M dersom $\mu_B B \gg kT$? Enn hvis $T = 0$? Er disse svarene rimelige?

Oppgave 3

a) Energi-funksjonen for en enkelt harmonisk oscillator er gitt ved

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Her er m massen til oscillatorene, og k er en fjærkonstant med dimenson N/m i SI-systemt (NB! må ikke forveksles med Boltzmanns konstant k_B, som vi også trenger i denne oppgaven). Skriv ned og beregn tilstandssummen Z for en samling av N slike uavhengige en-dimensjonale harmoniske oscillatorer. Anta at alle masser og fjærkonstanter er like.

b) Beregn, ved direkte bruk av Z, hva varmekapasiteten til dette systemet er. Hvordan samsvarer dette med det du forventer fra ekvipartisjonsprinsippet? c) Hva blir trykket i dette systemet? Gi svaret du får en fysisk tolkning.

d) Legg nå til et anharmonisk ledd (et ledd som ikke er p formen $1/2kx^2$) i energi-funksjonen til hver av oscillatorene, slik at den blir på formen

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + \alpha x^4.$$

Her er α en konstant med dimensjon N/m^3 og kan betraktes som en anharmonisk fjærkonstant. Beregn varmekapasiteten for en slik samling av anharmoniske oscillatorer når vi antar at α er svært liten (mer presist $\alpha \ll k^2\beta$, der $\beta = 1/k_BT$), slik at vi kan skrive

$$e^{-\beta\alpha x^4} \approx 1 - \beta\alpha x^4$$

for alle x som bidrar signifikant til integralene i Z. (Husk den gaussiske konvergensfaktoren). Forklar hvorfor svaret ikke kan utledes fra ekvipartisjonsprinsippet.

Oppgave 4

En rotator med treghetsmoment I som roterer med vinkelfrekvens ω, har en kinetisk energi assosiert med rotasjonen gitt ved

$$E_k^{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{L}{I}\right)^2 = \frac{L^2}{2I},$$

der L er dreiempulsen. Kvantemekanisk blir da de tillatte energiene til denne rotatoren bestemt av Schrödinger-ligningen

$$E_k^{rot}\psi = \frac{L_{op}^2}{2I}\psi = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}\psi; l = (0, 1, 2, 3, ...),$$

der L_{op} er dreieimpuls-operatoren.

a) Sett opp et uttrykk for tilstandsummen Z for N uavhengige slike rotatorer, der alle rotatorene har samme treghetsmoment I.

b) Definer en karakteristisk temperatur ved å sette termisk energi k_BT_0 lik energinivå-forskjellen mellom energi-nivåene for $l = 0$ og $l = 1$. Estimer denne temperaturen for det to-atomige molekylet N_2.

c) Beregn, ved direkte bruk av uttrykket for tilstandssummen Z, hva spesifikk varme er i grensene $T \gg T_0$ og $T \ll T_0$. Sammenlign svarene du får med det vi forventer fra ekvipartisjonsprisnippet.

Noen svar og opplysninger:

Oppgave 1b: Jorda, N_2: $T < 3900$ K.

Oppgave 2b: $m = \mu_B \tanh x$. $\tanh x = x$ for $x \ll 1$. $\tanh x = 1$ for $x \gg 1$.