FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.
Veiledning: 2. november og 5. november. Innleveringsfrist: Fredag 6. november kl 16.

Øving 11

Oppgave 1
Vi ser på et kuleskall med indre radius r_1 ved temperaturen T_1 og ytre radius r_2 ved temperaturen T_2. Det vil nå flyte en varmestrøm fra det indre til det ytre kuleskallet bestemt av Fouriers lov

$$\mathbf{j} = -\kappa \nabla T.$$

Her er κ materialets varmeledningsevne. La denne være gitt ved

$$\kappa = aT^{\nu},$$

der ν er en dimensjonsløs konstant. a er en positiv dimensjonsbeheftet konstant.

Anta stasjonære forhold slik at både den innerste og ytterste kuleflata er i kontakt med to temperatur-reservoarer ved hhv T_1 og T_2. Regn ut den stasjonære temperaturprofilen $T(r)$ som funksjon av $r_1 < r < r_2$.

Oppgave 2
En Carnot maskin har maksimum virkningsgrad blant alle varmemaskiner. Likevel er maskinen ubrukelig for praktiske formål, fordi syklusen er totalt reversibel, dvs kvasistatisk. *Effekten* til en Carnot maskin er dermed 0 siden arbeidet er endelig, men tiden det tar å utføre arbeidet er uendelig lang! Vi skal nå se på en modifikasjon av Carnot-syklusen, med bruk av Fouriers lov, som gjør Carnot-maskinen til en praktisk innretning med endelig effekt. Ideen er som følger. Under den isoterme ekspansjonene og den isoterme kompresjonen holdes arbeidssubstansen henholdsvis ved temperaturene T_{1w} (høy temperatur) og T_{2w} (lav temperatur). Temperaturen til høytemperatur-reservoaret der varme tas fra er T_1, og temperaturen til lavtemperatur-reservoaret der varmes sendes ut av maskinen er T_2. Det vil derfor gå en varmestrøm fra T_1-reservoaret til arbeidssubstansen gitt ved

$$\frac{dQ_1}{dt} = \tilde{K}_1 \quad (T_1 - T_{1w}).$$

og likeledes en varmestrøm fra arbeidssubstansen til T_2-reservoaret gitt ved

$$\frac{dQ_2}{dt} = \tilde{K}_2 \quad (T_{2w} - T_2).$$

Her er $\tilde{K}_1$ og $\tilde{K}_2$ parametre som angir styrken på varmestrømmene og er en kombinasjon av materialparametre og geometriske parametre. Vi lar nå varigheten av den isoterme ekspansjonen være Δt_1 og varigheten av den isoterme kompresjonen være Δt_2. Altså er tiden for å gjennomføre de isoterme prosessene $\Delta t_1 + \Delta t_2$. La tiden for å gjennomføre begge de adiabatiske prosessene være gitt ved $\alpha(\Delta t_1 + \Delta t_2)$, der α er et positivt tall. Totaltiden for å gjennomføre hele syklusen er dermed gitt ved $\Delta t = (1 + \alpha)(\Delta t_1 + \Delta t_2)$.

Effekten P av denne maskinen er

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Q_1 - Q_2}{(1 + \alpha)(\Delta t_1 + \Delta t_2)}.$$

a) Ta utgangspunkt i at prosessen er reversibel slik at $Q_1/T_{1w} = Q_2/T_{2w}$. Vis at

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{T_{1w}}{T_{2w}} \quad \frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1} \quad \frac{T_{2w} - T_2}{T_1 - T_{1w}}.$$

b) Bruk dette til å vise at effekten er gitt ved

$$P = \frac{1}{1+\alpha}\ \frac{\tilde{K}_1\tilde{K}_2(T_{1w}-T_{2w})(T_{2w}-T_2)(T_1-T_{1w})}{\left[\tilde{K}_2 T_{1w}(T_{2w}-T_2)+\tilde{K}_1 T_{2w}(T_1-T_{1w})\right]}.$$

Effekten P kan optimaliseres ved å se på T_{1w} og T_{2w} som parametre, og så maksimalisere P under variasjon av (T_{1w}, T_{2w}). Vi må med andre ord løse ligningene

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial T_{1w}} &= 0,\\ \frac{\partial P}{\partial T_{2w}} &= 0,\end{aligned}$$

Vi finner da de optimaliserte verdiene av T_{1w} og T_{2w} (skal ikke vises!)

$$\begin{aligned}T_{1w} &= T_1 - \frac{T_1-\sqrt{T_1T_2}}{1+\sqrt{\tilde{K}_1/\tilde{K}_2}},\\ T_{2w} &= T_2 + \frac{\sqrt{T_1T_2}-T_2}{1+\sqrt{\tilde{K}_2/\tilde{K}_1}}.\end{aligned}$$

c) Vis at virkningsgraden ved maksimal effekt er gitt ved

$$\eta = 1-\frac{T_{2w}}{T_{1w}} = 1-\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Oppgave 3

Regn i to-dimensjonale polarkoordinater, og vis at funksjonen

$$n(\mathbf{r},t) = \frac{N}{4\pi Dt}\ \ e^{-\frac{r^2}{4Dt}},$$

er en løsning til diffusjonsligningen i to dimensjoner

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\ \ \nabla^2 n.$$

Her er D diffusjonskonstanten og $r^2 = x^2+y^2$. Laplace-operatoren i to dimensjoner er gitt ved

$$\nabla^2 n = \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial n}{\partial r}.$$