Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4120 Matematikk 4K
Høst 2015

Løsningsforslag — Øving 3

Chapter 6.7

Systemer av ODE.

Vi bruker

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\} &= \frac{1}{s^2},\\ \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} &= F(s-a)\end{aligned}$$

$\boxed{6.7{:}9}$ Løs IVP.

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2, & y_1(0) &= 1,\\ y_2' &= -y_1 + 3y_2, & y_2(0) &= 0.\end{aligned}$$

Løsning:

$$\begin{aligned}sY_1 - y_1(0) &= Y_1 + Y_2\\ sY_2 - y_2(0) &= -Y_1 + 3Y_2,\\ &\Rightarrow\\ (1-s)Y_1 + Y_2 &= -1\\ -Y_1 + (3-s)Y_2 &= 0.\end{aligned}$$

Dette er et lineært ligningssystem med løsning

$$\begin{aligned}Y_1 &= \frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}\\ Y_2 &= -\frac{1}{(s-2)^2}.\end{aligned}$$

Vi transformerer tilbake, og får

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{2t} - te^{2t}\\ y_2 &= -te^{2t}.\end{aligned}$$

Chapter 11.1

Fourier-rekken til f er gitt ved

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{11.1:2}}$ La $n > 0$ være gitt. Finn fundamentalperioden til

$$f(x) = \cos nx.$$

Løsning:
Vi må finne det minste positive tallet p slik at $f(x+p) = f(x)$ for alle x. Vi har at

$$f(x+p) = \cos(n(x+p)) = \cos(nx + np)$$

Ettersom cos har fundamentalperiode 2π, er dette lik $\cos nx$ hvis og bare hvis $np = k2\pi$ for en $k \in \mathbb{Z}$. Dvs. $p = \frac{k}{n} 2\pi$. Det minste positive tallet på denne formen er

$$p = \frac{2\pi}{n}.$$

På samme måte finner vi at fundamentalperioden til $\sin nx$ er $p = \frac{2\pi}{n}$.

For $\cos \frac{2\pi x}{k}$ og $\sin \frac{2\pi x}{k}$ setter vi $n = \frac{2\pi}{k}$ og finner at $p = \frac{2\pi}{n} = k$.

For $\cos \frac{2\pi n x}{k}$ og $\sin \frac{2\pi n x}{k}$ setter vi $m = \frac{2n\pi}{k}$ og finner at $p = \frac{2\pi}{m} = k/n$.

$\boxed{\text{11.1:15}}$ Finn Fourier-rekken til

$$f(x) = x^2, \qquad 0 < x < 2\pi,\ f(x+2\pi) = f(x).$$

Løsning:
Vi bruker at integralet av en periodisk funksjon med periode p over et intervall med lengde p er uhavhengig av *hvor* intervallet ligger:

Bevis. La f være periodisk med periode p. La $a \in \mathbb{R}$. Da er

$$\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x + \int_p^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Gjør substitusjonen $y = x - p$ i det siste integralet. Dette gir $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, $x = p \iff y = 0$ og $x = a + p \iff y = a$, og dermed er

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(y+p)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Husk også at produktet av to funksjoner med periode p, igjen er en funksjon med periode p. $\square$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6\pi}\Big|_0^{2\pi} x^3 \\
&= \frac{8\pi^3}{6\pi} = \frac{4}{3}\pi^2. \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\Big|_0^{2\pi}\frac{x^2\sin nx}{n} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\Big|_0^{2\pi} - \frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\sin nx\right) \\
&= \frac{4\pi}{n^2\pi} = \frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\Big|_0^{2\pi} -\frac{x^2\cos nx}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\left(\Big|_0^{2\pi}\frac{x\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)\right) \\
&= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{n\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\cos nx\right) \\
&= -\frac{4\pi}{n}.
\end{aligned}
$$

Dette gir Fourier-rekken

$$
a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \pi\frac{\sin nx}{n}\right)
$$

$\boxed{\text{11.1:17}}$ Finn Fourier-rekken til

$$
f(x) = \begin{cases} x+\pi, & -\pi < x < 0, \\ -x+\pi, & 0 < x < \pi, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x).
$$

Løsning:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\pi^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{(opplagt ut ifra tegningen.)} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}(-x+\pi)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}
$$

sub: $y = -x$ i det første integralet gir

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x+\pi)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\Big|_0^{\pi}\frac{-x\sin nx}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x + \pi\int_0^{\pi}\cos nx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\Big|_0^{\pi}(-\cos nx) + \frac{\pi}{n}\Big|_0^{\pi}\sin nx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} + 0\right) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ odde}, \\ 0, & n \text{ jevn}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

sub: $y = -x$ i det første integralet gir

$$b_n = 0.$$

Dette gir Fourier-rekken

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

$\boxed{\text{11.1:21}}$ Finn Fourier-rekken til

$$f(x) = \begin{cases} -x-\pi, & -\pi < x < 0, \\ -x+\pi, & 0 < x < \pi, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

Løsning:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{(opplagt ut ifra tegningen.)} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x-\pi)\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

sub: $y = -x$ i det første integralet gir

$$a_n = 0.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x-\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

sub: $y = -x$ i det første integralet gir

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\Big|_{0}^{\pi}\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + \pi\int_{0}^{\pi}\sin nx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\cos n\pi}{n} - \frac{1}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\sin nx - \frac{\pi}{n}\Big|_{0}^{\pi}\cos nx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos n\pi - 0 - \frac{\pi}{n}(\cos n\pi - 1)\right) \\ &= \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Dette gir Fourier-rekken

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Chapter 11.2

$\boxed{\text{11.2:1}}$ Avgjør om følgende funksjoner er odde eller jevne.

$$e^x,\ e^{-|x|},\ x^3 \cos nx,\ x^2 \tan \pi x,\ \sinh x - \cosh x.$$

Løsning:
Vi kan observere følgende: Hvis f er både odde og jevn, så er $f(x) = 0$ for alle x. Bevis: La $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$f(x) = f(-x) = -f(x)$$

der den første likheten følger av at f er jevn og den andre likheten følger av at f er odde. Dermed er $2f(x) = 0$.

a) $f(x) = e^x$ er hverken odde eller jevn fordi f.eks.

$$\begin{aligned} f(-1) &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \\ &\neq \begin{cases} -e & = -f(1) \\ e & = f(1). \end{cases} \end{aligned}$$

b) $f(x) = e^{-|x|}$ jevn fordi

$$f(-x) = e^{-|-x|} = e^{-|x|} = f(x).$$

f er ikke odde fordi f ikke er konstant lik 0.

c) $f(x) = x^3 \cos nx$ er odde fordi

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \cos(-nx) \\ &= -x^3 \cos nx \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

f er ikke jevn fordi f ikke er konstant lik 0.

d) $f(x) = x^2 \tan \pi x$ er odde fordi $\tan x$ er odde og

$$f(-x) = (-x)^2 \tan(-\pi x) = -x^2 \tan \pi x = -f(x).$$

e) $f(x) = \sinh x - \cosh x$ er hverken odde eller jevn fordi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh x - \cosh x \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= -e^{-x}. \end{aligned}$$

$\boxed{11.2{:}6}$ Avgjør om produktet av en odde og en jevn funksjon er odde eller jevn.

Løsning:
Produktet av en odde og en jevn funksjon er en odde funksjon.

Bevis. La f være en odde funksjon og la g være en jevn funksjon. Definer funksjonen h som produktet $h(x) = f(x)g(x)$. Vi må vise at $h(-x) = -h(x)$ for alle x. La $x \in \mathbb{R}$ da er

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= -f(x)g(-x) \\ &= -f(x)g(x) \\ &= -h(x). \end{aligned}$$

□

$\boxed{11.2{:}10}$ Avgjør om funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} -x-4, & -4 < x < 0, \\ -x+4, & 0 < x < 4, \end{cases} \qquad g(x+8) = g(x).$$

er odde eller jevn. Finn Fourier-rekken. (se figur s.491)

Løsning:
Av figuren s.491 er det åpenbart at g er odde. Et algebraisk bevis er som følger:

La $x \in \mathbb{R}$ og skriv $x = 8q + r$ slik at q er et heltall og $-4 < r \leq 4$ er *resten* etter divisjon av x med 8. Da er

$$\begin{aligned}
g(-x) &= g(-r - 8q) \\
&= g(-r) \\
&= \begin{cases} -(-r) - 4, & -4 < -r < 0 \\ -(-r) + 4, & 0 < -r < 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} r - 4, & 0 < r < 4 \\ r + 4, & -4 < r < 0 \end{cases} \\
&= -\begin{cases} -r - 4, & -4 < r < 0 \\ -r + 4, & 0 < r < 4 \end{cases} \\
&= -g(r) \\
&= -g(r + 8q) \\
&= -g(x).
\end{aligned}$$

I oppgave 11.1:21 fant vi at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi, & -\pi < x < 0, \\ -x + \pi, & 0 < x < \pi, \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

hadde Fourier-rekke

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}x\right) &= \begin{cases} -\frac{\pi}{4}x - \pi, & -\pi < \frac{\pi}{4}x < 0, \\ -\frac{\pi}{4}x + \pi, & 0 < \frac{\pi}{4}x < \pi, \end{cases} \\
&= \frac{\pi}{4}\begin{cases} -x - 4, & -4 < x < 0, \\ -x + 4, & 0 < x < 4, \end{cases} \\
&= \frac{\pi}{4}g(x).
\end{aligned}$$

Dermed er $g(x) = \frac{4}{\pi} f\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ med Fourier-rekke

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)}{n}.$$

$\boxed{11.2{:}17}$ Avgjør om funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0, \\ -x + 1, & 0 < x < 1, \end{cases} \qquad g(x + 2) = g(x).$$

er odde eller jevn. Finn Fourier-rekken. (se figur s.491)

Løsning:
Av figuren s.491 er det åpenbart at g er jevn. Et algebraisk bevis kan gjøres som i oppgave 11.2.10. I oppgave 11.1:17 fant vi at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0, \\ -x + \pi, & 0 < x < \pi, \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

hadde Fourier-rekke

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} f(\pi x) &= \begin{cases} \pi x + \pi, & -\pi < \pi x < 0, \\ -\pi x + \pi, & 0 < \pi x < \pi, \end{cases} \\ &= \pi \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0, \\ -x + 1, & 0 < x < 1, \end{cases} \\ &= \pi g(x). \end{aligned}$$

Dermed er $g(x) = \frac{1}{\pi} f(\pi x)$ med Fourier-rekke

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

$\boxed{11.2{:}24}$ Finn

a) cosinus-Fourier-rekken

og

b) sinus-Fourier-rekken

til funksjonen $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2, \\ 1, & 2 < x < 4. \end{cases}$$

Tegn de to periodiske utvidelsene.

Løsning: a)
Vi utvider f til en jevn periodisk funksjon på $\mathbb{R}$ med periode $2L = 8$. Cosinus-Fourier-rekken til f er da

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \int_0^4 f(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} 2 = 1/2. \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_2^4 \cos\frac{n\pi}{4}x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{n\pi}\bigg|_2^4 \sin\frac{n\pi}{4}x \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \\
&= \begin{cases} 0, & n \mod 2 = 0, \\ -\frac{2}{n\pi}, & n \mod 4 = 1, \\ \frac{2}{n\pi}, & n \mod 4 = 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \\
&= 1/2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(4n-3)\pi}\cos\left(\frac{(4n-3)\pi}{4}x\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(4n-1)\pi}\cos\left(\frac{(4n-1)\pi}{4}x\right)
\end{aligned}$$

Løsning: b)
Vi utvider f til en odde periodisk funksjon på $\mathbb{R}$ med periode $2L = 8$. Sinus-Fourier-rekken til f er da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

der

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_2^4 \sin\frac{n\pi}{4}x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\frac{4}{n\pi}\bigg|_2^4 \cos\frac{n\pi}{4}x \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & n \mod 4 = 0, \\ \frac{2}{n\pi}, & n \mod 2 = 1, \\ -\frac{4}{n\pi}, & n \mod 4 = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{4} x\right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-2)\pi} \sin\left(\frac{(4n-2)\pi}{4} x\right). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{11.2:29}}$ Finn

a) cosinus-Fourier-rekken

og

b) sinus-Fourier-rekken

til funksjonen $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \sin x.$$

Tegn de to periodiske utvidelsene.

Løsning: a)
Vi utvider f til en jevn periodisk funksjon på $\mathbb{R}$ med periode $2L = 2\pi$. Cosinus-Fourier-rekken til f er da

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi} \Big|_0^{\pi} \cos x = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi \sin(1+n)x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \sin(1-n)x\,\mathrm{d}x\right), \qquad \text{(se s.A52 (11))} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+n}\bigg|_0^\pi \cos(1+n)x + \frac{1}{1-n}\bigg|_0^\pi \cos(1-n)x\right), \qquad n \geq 2 \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{1+n} + \frac{(-1)^{n+1}-1}{1-n}\right) \\
&= \frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\frac{2}{1-n^2} \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ odde}, \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ jevn}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vi ser at denne formelen også holder for $n = 1$. Dermed er

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1-(2n)^2}\cos 2nx.
\end{aligned}$$

Løsning: b)

Den odde utvidelsen til f er helt enkelt $\sin x$ med sinus-Fourier-rekke

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \sin x.$$