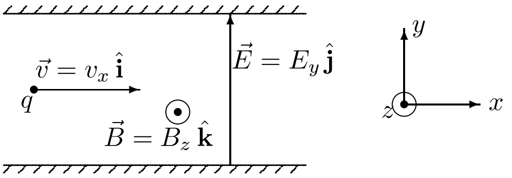
 TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme

Øving 9, løsningsskisse.
Magnetfelt.

Oppgave 1. Lorentzkrafta: Hastighetsfilter.



Lager først et koordinatsystem etter opplysningene i teksten. $\vec{v}$, $\vec{E}$, og $\vec{B}$ er alle normalt på hverandre og legger dem da langs hver sin akse som figuren viser.
Når det ikke er noen avbøyning av partikler, har vi i følge Newtons lov at resulterende Lorentzkraft er lik null, elektrisk og magnetisk kraft oppveier hverandre. Begge krefter går i y-retning, og vi får ifølge høyrehåndsregelen

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) = q\left(E_y\,\hat{\mathbf{j}} + v_x \cdot B_z(-\hat{\mathbf{j}})\right) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = v_x \cdot B_z \\ \Rightarrow \quad v_x &= \frac{E_y}{B_z} = \frac{300\,\mathrm{V}/0,020\,\mathrm{m}}{0,100\,\mathrm{T}} = \underline{1,5\cdot 10^5\,\mathrm{m/s}}. \qquad (\text{enhetsregning: T} = \mathrm{Vs/m^2}) \end{aligned}$$

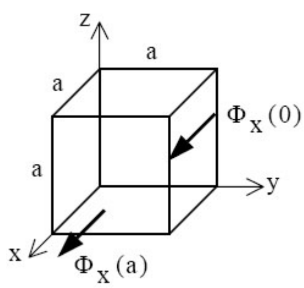
Oppgave 2. Gauss' lov for B-feltet.

Gauss lov for $\vec{B}$-feltet er gitt ved $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ (integralform) eller $\mathrm{div}\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (differensialform). Gjelder ikke dette for et gitt B-felt, kan feltet ikke være fysisk mulig. Matematisk sett er det altså et vektorfelt, men kan ikke være et gyldig magnetfelt.

Det er enklest å sjekke om Gauss lov på differensialform er oppfylt:

a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k(1+1+1) = 3k \neq 0.$
b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k(1+0-1) = 0.$
c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k(1-1-1) = -k \neq 0.$
d) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k(y-x+(x-y)) = 0.$
Følgelig er b) og d) mulige mens a) og c) ikke er mulige.

Ved å bruke integralformen gjør vi det forståelsesmessig enklere, men regnemessig mye vanskeligere:



Beregner netto fluks ut av f.eks. en kube med sidekant a plassert med ene hjørnet i origo (slik vi også gjorde det for E-feltet i øving 2). Fluksen ut av kuben blir

$$\Delta\Phi_B = \Delta\Phi_x + \Delta\Phi_y + \Delta\Phi_z$$

med

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_x &= \Phi_x(x=a) - \Phi_x(x=0) \\ &= \int_0^a\!\int_0^a B_x(x=a)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \int_0^a\!\int_0^a B_x(x=0)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^a\!\int_0^a \left[B_x(x=a) - B_x(x=0)\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

og tilsvarende for $\Delta\Phi_y$ og $\Delta\Phi_z$.

a)
$$\left.\begin{array}{lcl} B_x(x=a) - B_x(x=0) = ka & \Rightarrow & \Delta\Phi_x = ka\cdot a^2 \\ B_y(y=a) - B_y(y=0) = ka & \Rightarrow & \Delta\Phi_y = ka\cdot a^2 \\ B_z(z=a) - B_z(z=0) = ka & \Rightarrow & \Delta\Phi_z = ka\cdot a^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_B = 3ka^3 \neq 0$$

b)
$$\left.\begin{array}{lcl} B_x(x=a) - B_x(x=0) = ka & \Rightarrow & \Delta\Phi_x = ka\cdot a^2 \\ B_y(y=a) - B_y(y=0) = kz - kz = 0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_y = 0 \\ B_z(z=a) - B_z(z=0) = -ka & \Rightarrow & \Delta\Phi_z = -ka\cdot a^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_B = 0.$$

c)
$$\left.\begin{array}{lcl} B_x(x=a) - B_x(x=0) = ka & \Rightarrow & \Delta\Phi_x = ka\cdot a^2 \\ B_y(y=a) - B_y(y=0) = -ka & \Rightarrow & \Delta\Phi_y = -ka\cdot a^2 \\ B_z(z=a) - B_z(z=0) = -ka & \Rightarrow & \Delta\Phi_z = -ka\cdot a^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_B = -ka\cdot a^2 \neq 0.$$

d)
$$\left.\begin{array}{lcl} B_x(x=a,y,z)-B_x(x=0,y,z)=kay & \Rightarrow & \Delta\Phi_x=\frac{1}{2}ka^4 \\ B_y(x,y=a,z)-B_y(x,y=0,z)=-kax & \Rightarrow & \Delta\Phi_y=-\frac{1}{2}ka^4 \\ B_z(x,y,z=a)-B_z(x,y,z=0)=kax-kay & \Rightarrow & \Delta\Phi_z=\frac{1}{2}ka^4-\frac{1}{2}ka^4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\Phi_B=0.$$

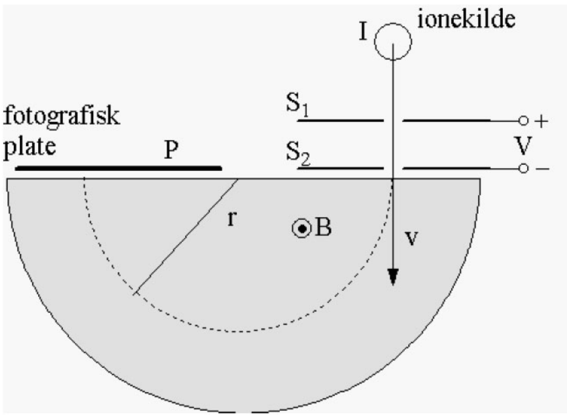
I d) er $\Delta\Phi_x$ er beregnet:

$$\Delta\Phi_x=\int_0^a \mathrm{d}z\int_0^a kay\,\mathrm{d}y=(a-0)\cdot ka\frac{1}{2}(a^2-0^2)=\frac{1}{2}ka^4$$

og tilsvarende for $\Delta\Phi_y$ og $\Delta\Phi_z$.

Konklusjonen blir som over; a) er umulig som B-felt, mens b) og c) er OK.

Oppgave 3. Massespektrometer.



a) Hastigheten til protonet idet det når aperturen i den negative plata finnes ved å se på energien. Elektrisk potensiell energi er lik kinetisk energi:

$$\begin{aligned} q_\mathrm{p}V &= \frac{1}{2}m_\mathrm{p}v^2 \\ \Rightarrow \quad v &= \left(\frac{2q_\mathrm{p}V}{m_\mathrm{p}}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{2\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 3,0\cdot 10^3\,\mathrm{V}}{1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}\right)^{1/2} \\ &= 7,587\cdot 10^5\,\mathrm{m/s.} = \underline{7,59\cdot 10^5\,\mathrm{m/s}}. \end{aligned}$$

Avstanden $d=1,000$ mm mellom platene har ingen betydning.

b) Vi finner treffposisjon på den fotografiske plata ved å se på krafta som virker på protonet i det magnetiske feltet. Krafta er $F_\mathrm{p}=|q_\mathrm{p}\vec{v}\times\vec{B}|=q_\mathrm{p}vB$ fordi hastighetsvektoren $\vec{v}$ og det magnetiske feltet $\vec{B}$ står vinkelrett på hverandre. Krafta står vinkelrett på både $\vec{v}$ og $\vec{B}$ slik at krafta peker radielt innover i en sirkel. Protonet følger altså en sirkel med radius r_p og akselerasjonen er gitt ved sentripetalakselerasjonen F_s:

$$F_\mathrm{p}\equiv F_\mathrm{s} \quad\Rightarrow\quad q_\mathrm{p}vB=m_\mathrm{p}\cdot\frac{v^2}{r_\mathrm{p}} \quad\Rightarrow\quad r_\mathrm{p}=\frac{m_\mathrm{p}v}{q_\mathrm{p}B}.$$

Protonet treffer den fotografiske plata i en avstand L_p fra aperturen:

$$L_\mathrm{p}=2r_\mathrm{p}=2\frac{m_\mathrm{p}v}{q_\mathrm{p}B}=2\cdot\frac{1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot 7,587\cdot 10^5\,\mathrm{m/s}}{1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,400\,\mathrm{T}}=\underline{3,96\,\mathrm{cm}}.$$

c) Massen til de to positive partiklene finnes ved å se på uttrykkene for krafta som virker for henholdsvis protonet, partikkel 1 og partikkel 2:

Protonet: $F_\mathrm{p}=q_\mathrm{p}vB=\frac{m_\mathrm{p}v^2}{r_\mathrm{p}} \quad\Rightarrow\quad q_\mathrm{p}B=\frac{m_\mathrm{p}v}{r_\mathrm{p}}.$ Her er $v=\sqrt{\frac{2V\cdot q_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p}}}$ og $r_\mathrm{p}=\frac{1}{2}L_\mathrm{p}$.

Partikkel 1: $F_1=2q_\mathrm{p}v_1B=\frac{m_1v_1^2}{r_1} \quad\Rightarrow\quad 2q_\mathrm{p}B=\frac{m_1v_1}{r_1}$ (1), der $v_1=\sqrt{\frac{2V\cdot 2q_\mathrm{p}}{m_1}}$ og $r_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}L_\mathrm{p}=\frac{5}{4}r_\mathrm{p}$.

Partikkel 2: $F_2=2q_\mathrm{p}v_2B=\frac{m_2v_2^2}{r_2} \quad\Rightarrow\quad 2q_\mathrm{p}B=\frac{m_2v_2}{r_2}$ (2), der $v_2=\sqrt{\frac{2V\cdot 2q_\mathrm{p}}{m_2}}$ og $r_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}L_\mathrm{p}=\frac{5}{2}r_\mathrm{p}$.

Setter inn uttrykket for v_1 i likn. (1) samt $r_1=\frac{5}{4}r_\mathrm{p}$, og løser mhp. m_1:

$$(2q_\mathrm{p}B)^2=\left(\frac{m_1}{r_1}\right)^2\cdot\frac{2V\cdot 2q_\mathrm{p}}{m_1} \quad\Rightarrow\quad \underline{m_1=\frac{2q_\mathrm{p}B^2\left(\frac{5}{4}r_\mathrm{p}\right)^2}{2V}=5,2\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}.$$

Massen m_2 løses tilsvarende fra likning (2):

$$(2q_\mathrm{p}B)^2=\left(\frac{m_2}{r_2}\right)^2\cdot\frac{2V\cdot 2q_\mathrm{p}}{m_2} \quad\Rightarrow\quad \underline{m_2=\frac{2q_\mathrm{p}B^2\left(\frac{5}{2}r_\mathrm{p}\right)^2}{2V}=21\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}.$$

Det er flere måter å finne løsningen på. Kan også først finne relative masser fra uttrykkene for partikkel 1 og 2:

$$\frac{m_1v_1}{r_1}=\frac{m_2v_2}{r_2}, \quad \text{samt} \quad \frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad\Rightarrow\quad \frac{m_2}{m_1}=\frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{r_2}{r_1}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{m_2}{m_1}=4.$$

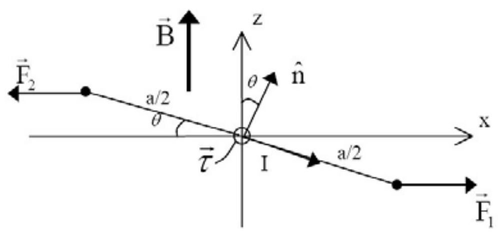
Fra uttrykkene for protonet og partikkel 2 finner vi tilsvarende sammenhengen mellom m_2 og protonmassen m_p:

$$2\frac{m_\text{p}v}{r_\text{p}} = \frac{m_2 v_2}{r_2}, \quad \text{samt} \quad \frac{v}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{2m_\text{p}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_\text{p}} = \frac{v}{v_2}\cdot\frac{2r_2}{r_\text{p}} = \sqrt{\frac{m_2}{2m_\text{p}}}\cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_\text{p}} = \frac{25}{2}\,.$$

Massene blir da

$$\underline{m_2 = \frac{25}{2}\cdot m_\text{p} = 21\cdot 10^{-27}\,\text{kg}}\,, \quad \text{og} \quad \underline{m_1 = \frac{1}{4}m_2 = \frac{25}{8}\cdot m_\text{p} = 5,2\cdot 10^{-27}\,\text{kg}}\,.$$

Oppgave 4. Kraftmoment i magnetfelt.



a) Strømmene parallelt xz-planet vil gi to motsatt rettede krefter i y-retningen (langs samme akse) som ikke vil gi noe dreiemoment. Strømmene parallelt y-aksen gir krefter som virker langs forskjellige akser i x-retning. Disse gir opphav til dreiemoment.

Da $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$ er like store og motsatt retta vil dreiemomentet bli det samme om ethvert punkt. Om origo får vi $\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ hvor $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ er "arm" for hhv. $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$. Retning er ut av arket oppover.

La oss først regne ut krafta $\vec{F}_1$ pga. strømmen i (positiv) y-retning:

$$\vec{F}_1 = I\vec{\ell}_1 \times \vec{B} = I\left(a\,\hat{\mathbf{j}} \times B\,\hat{\mathbf{k}}\right) = IaB\,\hat{\mathbf{i}}\,,$$

og helt tilsvarende pga. strømmen i negativ y-retning:

$$\vec{F}_2 = I\vec{\ell}_2 \times \vec{B} = I\left(-a\,\hat{\mathbf{j}} \times B\,\hat{\mathbf{k}}\right) = -IaB\,\hat{\mathbf{i}}\,.$$

Kraftmomentet pga. $\vec{F}_1$ blir (høyrehåndsregel!)

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \frac{a}{2}\cdot\sin\theta\cdot|\vec{F}_1|\,(-\hat{\mathbf{j}}\,) = -\frac{a^2}{2}\cdot\sin\theta\cdot IB\,\hat{\mathbf{j}}\,,$$

og helt tilsvarende kraftmomentet pga. $\vec{F}_2$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \frac{a}{2}\cdot\sin\theta\cdot|\vec{F}_2|\,(-\hat{\mathbf{j}}\,) = -\frac{a^2}{2}\cdot\sin\theta\cdot IB\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Totalt kraftmoment på strømsløyfa blir da

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \underline{-Ia^2\cdot\sin\theta\cdot B\,\hat{\mathbf{j}}}\,.$$

b) Det magnetiske moment er $\vec{\mu} = IA\,\hat{\mathbf{n}} = Ia^2\,\hat{\mathbf{n}}$, og idet vi innser at θ er lik vinkelen mellom $\vec{\mu}$ og $\vec{B}$ (dvs. mellom $\hat{\mathbf{n}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$) og at $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}$, ser vi at vi kan skrive

$$\underline{\vec{\mu}\times\vec{B} = Ia^2\,\hat{\mathbf{n}} \times B\,\hat{\mathbf{k}} = Ia^2B(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\,) = \vec{\tau}}\,,$$

som skulle vises.

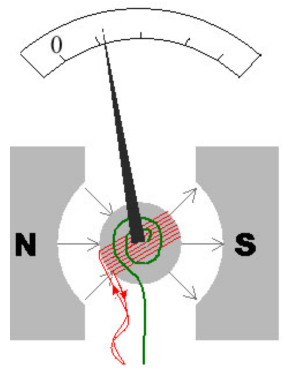
Utledningen tilsvarer den gjort i kap. 27.7 i Young & Freedman Ed. 12.

c) Med N sløyfer blir $\vec{\mu} = NIa^2\,\hat{\mathbf{n}}$. Ved likevekt er $\tau + \tau_\text{mek} = 0$, der τ er kraftmoment fra magnetisk kraft som gitt i a):

$$\tau = \mu B\sin\theta = NIa^2B\cdot 1$$

og $\tau_\text{mek} = -D\cdot\alpha$. Dette gir

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{I} &= \frac{Na^2B}{D} = \frac{100\cdot 4,00\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2\cdot 1,00\cdot 10^{-3}\,\text{T}}{1,00\cdot 10^{-7}\,\text{Nm/rad}} \\ &= 400\,\text{rad/A} = \underline{0,4\,\text{rad/mA} = 23^\circ\ \text{per mA}}\,.\end{aligned}$$



Oppgave 5. Flervalgsoppgaver.

Oppgave:	a	b	c	d
Rett svar:	E	D	C	C

Detaljer om spørsmålene:

a) **E** Vanskelig oppgave hvis man begynner å regne i detaljer på Gauss' lov. Bruk heller geometri og symmetribetraktninger! Ifølge Gauss' lov er total elektrisk fluks gjennom ei lukka flate som omslutter en punktladning q lik $\Phi = q$. Av symmetrigrunner må det passere like stor andel av denne fluksen gjennom de resterende 7 kubene som skal til for å lage en større kube med q i sentrum (8 oktanter i 3-dimensjonalt system) Hver av disse kubene har 3 "hosliggende" sideflater der D er parallell med flata og ingen fluks går gjennom dem. Videre har de 8 kubene 3 "motstående" sideflater, hvor den skraverte flata er en av dem (en kube har 6 sideflater!). Av symmetrigrunner må det gå like mye fluks gjennom alle disse 3. Vi har altså $3 \times 8 = 24$ slike likeverdige sideflater, og fluks gjennom hver av dem blir da $\Phi/24 = q/24$.

b) **D** Feil å påstå at $V = 0$ i en leder. Kravet er $V =$ konstant, vi kan velge $V = 0$ der det passer oss.

c) **C** For at en partikkel skal gå rett fram må den magnetiske og den elektriske krafta være like stor for partikkelen: $qE = qvB$. Dette gir krav at hastigheten må være lik for alle partikler $v = E/B$, uansett ladningen og massen på partikkelen. Nå er ikke samme hastighet noe oppgitt svaralternativ. Men fordi energien $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, må også $E_k/m = \frac{1}{2}v^2$ være lik for partiklene.

d) **C** Høyrehåndsregel gir retning langs positiv z-akse, så A eller C er rett. Innsetting av tallverdi gir at C blir rett: Vinkel mellom I og B er $180° - 50° = 130°$. $F = IB\ell \sin 130° = 1,61\,\mathrm{N}$.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 10. mars 11.