NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

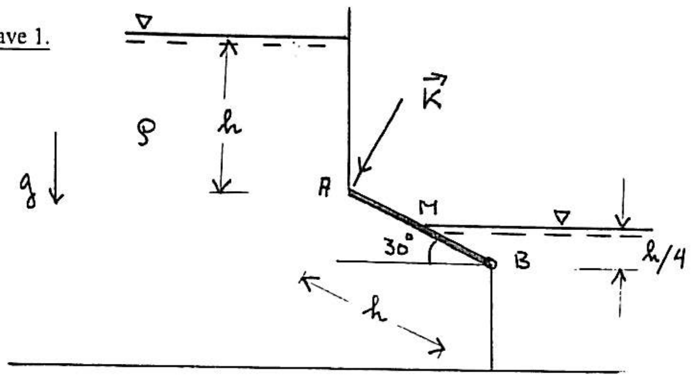
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F (Bokmål)
(Linje Fysikk og matematikk)
Mandag 4. desember 2000
Tid: 0900 – 1400

Sensuren faller i uke 52.

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1.

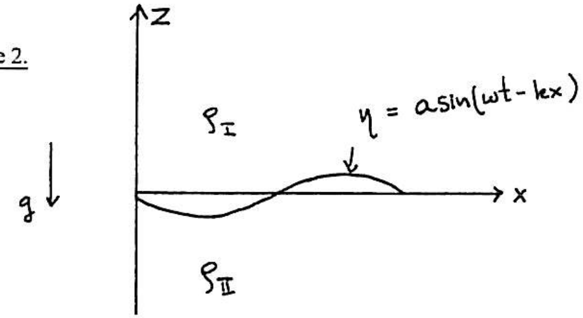


I en dam er det en kvadratisk luke AB med sidekant h. Luka kan svinge fritt om en aksling gjennom B. På utsiden er det også vann, som står opp til midtpunktet M på luka. En ytre kraft $\vec{K}$, som står vinkelrett på luka, holder luka på plass. Hvor stor må K være?

[Oppgitt, for dem som ønsker å benytte formel fra vedlagte formelark: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment om en akse parallell med x-aksen gjennom centroiden lik

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12}.]$$

Oppgave 2.



To ikke-blandbare ideelle væsker I og II er overlagret hverandre:

Øvre væske I med konstant tetthet ρ_I fyller hele området fra grenseflaten $\eta = a\sin(\omega t - kx)$ opp til $z = +\infty$, mens nedre væske II med konstant tetthet ρ_{II} fyller hele området fra grenseflaten ned til $z = -\infty$.

a) Skriv ned den kinematiske, og den dynamiske, betingelse ved grenseflaten. Linearisér ligningene, idet du setter Bernoulli-konstantene i områdene I og II lik null. Det oppgis at hastighetspotensialene kan skrives slik:

$$\Phi_I = A\,e^{-kz}\cos(\omega t - kx), \qquad \text{område I}$$

$$\Phi_{II} = B\,e^{kz}\cos(\omega t - kx), \qquad \text{område II.}$$

Finn konstantene A og B uttrykt ved ω, a og k.

b) Finn dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$. Sjekk resultatet i grensetilfellet $\rho_I \to 0$.

c) Finn de dynamiske trykkene p_{dI} og p_{dII} i områdene I og II. Finn, ved integrasjon over alle z, middelverdien $\overline{P(t)}$ av den totale energifluksen

$$P(t) = P_I(t) + P_{II}(t),$$

og sjekk igjen grensetilfellet $\rho_I \to 0$.

Oppgitt: I området II er

$$P_{II}(t) = \int_{-\infty}^{\eta}\left(p_{dII} + \frac{1}{2}\rho_{II}V^2\right)u\,dz \quad ,$$

og tilsvarende i området I.

Oppgave 3.

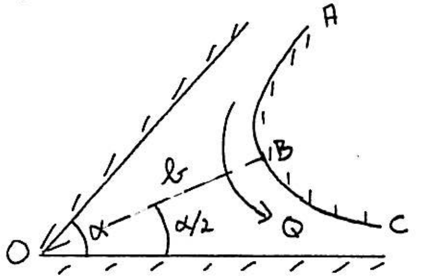
Det komplekse potensialet

$$w(z) = Uz^{\pi/\alpha}$$

er gitt, hvor U(>0) er en konstant. α er en gitt vinkel i området $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Potensialet beskriver en todimensjonal ideell strømning inne i en kile med åpningsvinkel α.

a) Sett $z = r e^{i\theta}$, og finn hastighetspotensialet Φ og strømfunksjonen Ψ, samt hastighetskomponentene V_r og V_θ, alle som funksjoner av r og θ. Skissér strømlinjebildet.

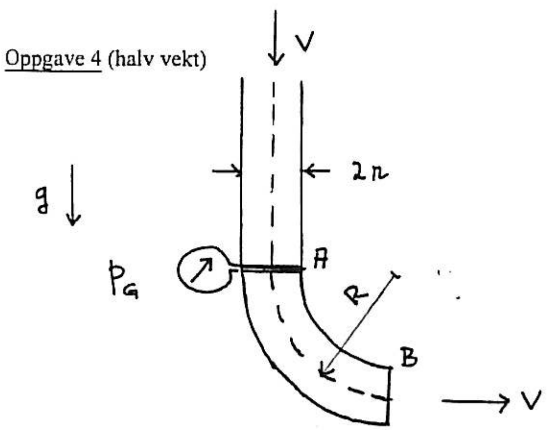
b)



Anta så at én av strømlinjene (ABC på figuren) erstattes av en fast flate. Avstanden mellom kilens toppunkt O og det nærmeste punkt B på flaten (tilsvarende $\theta = \frac{1}{2}\alpha$) er gitt, lik b. Finn volumgjennomstrømningen Q i kanalen, uttrykt ved U, b og α, ved å integrere V_r over en sirkelbue med toppunkt i O og radius lik b. Kunne du ha innsett resultatet for Q direkte, uten å regne?

c) Finn trykket p i væsken, når trykket i O er kjent, lik p_0. Væskens tetthet er ρ. Er svaret realistisk for store verdier av r?

Oppgave 4 (halv vekt)

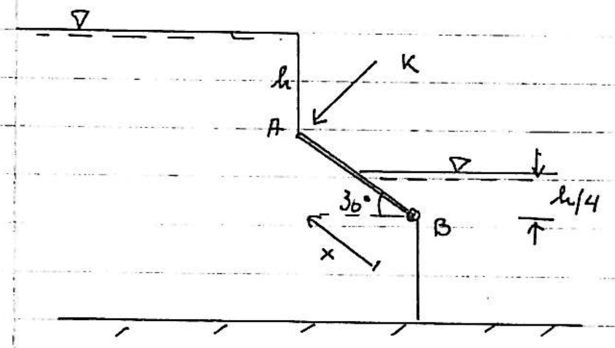


Vann med tetthet ρ strømmer stasjonært gjennom et sirkulært rør med konstant radius $r = 12\,\text{cm}$. Middelhastigheten er V = 8,0 m/s. Til røret er sveiset fast et kvartsirkel-formet bend AB i posisjon A, med samme radius r. Midtlinjens radius er R = 80 cm. Se bort fra bendets tyngde. Ved A måles gage-trykket p_G = 6 kPa. Sett g = 10 m/s^2.

Finn den kraft $\bar{F}_{sveis}$ som sveisen må overføre for å holde bendet når vannet strømmer igjennom.

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK 4. desember 2000 ①

Løsning Oppgave 1



På innsiden er trykket $p = \gamma\left(h + \frac{h-x}{2}\right) = \frac{1}{2}\gamma(3h - x)$, når x-aksen er valgt som på figuren.

Kraftmomentet M_{indre} omkring B fra vannet på innsiden altså

$$\underline{M_{indre}} = h\int_0^h p\,x\,dx = \frac{1}{2}\gamma h\int_0^h (3hx - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma h\Big|_0^h\left(\frac{3}{2}hx^2 - \frac{1}{3}x^3\right) = \underline{\frac{7}{12}\gamma h^4}.$$

På utsiden er $p = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{h}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\gamma(h - 2x)$.

Kraftmoment M_{ytre} fra utsiden:

$$\underline{M_{ytre}} = h\int_0^{h/2} p\,x\,dx = \frac{1}{4}\gamma h\int_0^{h/2}(hx - 2x^2)\,dx = \frac{1}{4}\gamma h\Big|_0^{h/2}\left(\frac{1}{2}hx^2 - \frac{2}{3}x^3\right) = \underline{\frac{1}{96}\gamma h^4}$$

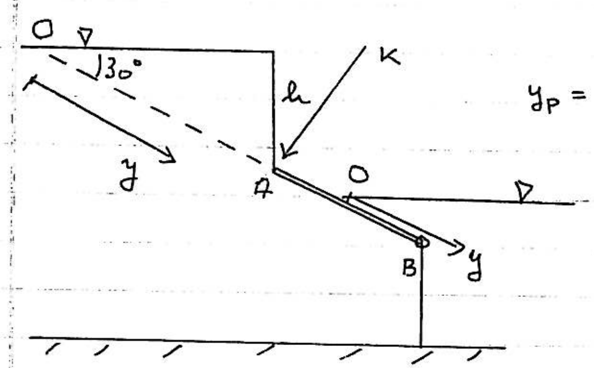
Momentbalanse omkring B gir

$$K\cdot h = M_{indre} - M_{ytre} = \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{96}\right)\gamma h^4 = \frac{55}{96}\gamma h^4$$

$$\underline{K = \frac{55}{96}\gamma h^3}$$

② 4. desember 2000

Oppgave 1, alternativ løsningsmetode



Benytter $y_p = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A}$, hvor $I_{xc} = \frac{1}{12}bh^3$ generelt.

På innsiden legges origo O som vist, i vannspeilet, med y-aksen parallelt med luken. Da er $y_c = 2h + \frac{1}{2}h = \frac{5}{2}h$, og $A = h^2$.

Altså $y_p = \frac{5}{2}h + \frac{\frac{1}{12}h^4}{\frac{5}{2}h\cdot h^2} = \frac{38}{15}h$.

Avstand fra B til trykksenteret: $3h - y_p = \frac{7}{15}h$.

Kraft på innsiden: $F_{indre} = \gamma h_c A = \frac{5}{4}\gamma h^3$.

Altså $\underline{M_{indre}} = \left(\frac{5}{4}\gamma h^3\right)\cdot\frac{7}{15}h = \underline{\frac{7}{12}\gamma h^4}$, som før.

På utsiden legges origo O i ytre vannspeil, som vist.

Da er $y_c = \frac{1}{4}h$, $I_{xc} = \frac{1}{12}h\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{h^4}{96}$.

$A = \frac{1}{2}h^2$, $h_c = \frac{1}{8}h \Rightarrow F_{ytre} = \gamma h_c A = \gamma\cdot\frac{1}{8}h\cdot\frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{16}\gamma h^3$.

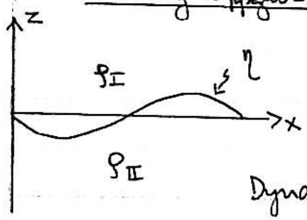
$y_p = \frac{1}{4}h + \frac{\frac{1}{96}h^4}{\frac{1}{4}h\cdot\frac{1}{2}h^2} = \frac{1}{3}h$.

Avstand fra B til trykksenteret på utsiden: $\frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}h$

$\Rightarrow \underline{M_{ytre}} = \left(\frac{1}{16}\gamma h^3\right)\cdot\frac{1}{6}h = \underline{\frac{1}{96}\gamma h^4}$, som før.

Da M_{indre} og M_{ytre} er som før, blir også K den samme.

Løsning Oppgave 2



(a) Kinematisk betingelse:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} = w\,, \text{ for } z=\eta$$

Dynamisk betingelse: $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + g\eta = C, \quad z=\eta$$

Setter $C=0$, og lineariserer:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_I}{\partial z}, \quad z=0 \qquad ①$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}, \quad z=0 \qquad ②$$

Tilsvarende for Bernoulli:

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial t} + \frac{p_I}{\rho_I} + g\eta = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} + \frac{p_{II}}{\rho_{II}} + g\eta = 0$$

Da $p_I = p_{II}$ ved grenseflaten, kan trykket elimineres:

$$\rho_I \frac{\partial \Phi_I}{\partial t} + \rho_I g\eta = \rho_{II}\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} + \rho_{II} g \eta \qquad ③$$

Av ① og ②, når en setter inn $\eta = a\sin(\omega t - kx)$ og de gitte uttrykkene for Φ_I og Φ_{II}:

$$\left.\begin{aligned} a\omega\cos(\omega t-kx) &= -kA\cos(\omega t-kx) \\ a\omega\cos(\omega t-kx) &= kB\cos(\omega t-kx) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A = -\frac{a\omega}{k}, \quad B = \frac{a\omega}{k}$$

Innsetting for A og B gir

$$\Phi_I = -\frac{\omega a}{k}e^{-kz}\cos(\omega t-kx), \qquad \Phi_{II} = \frac{\omega a}{k}e^{kz}\cos(\omega t-kx).$$

Oppgave 2, forts.

b) Dispersjonsrelasjonen: Innsetting av Φ_I og Φ_{II} i ③ gir

$$\rho_I\frac{\omega^2 a}{k}\sin\theta + \rho_I g a\sin\theta = -\rho_{II}\frac{\omega^2 a}{k}\sin\theta + \rho_{II} g a \sin\theta,$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = kg\frac{\rho_{II}-\rho_I}{\rho_{II}+\rho_I} \qquad (\theta = \omega t - kx).$$

Når $\rho_I \to 0$ vil $\omega^2 = kg$, som stemmer for dypvannsbølger.

c) Dynamisk trykk $p_d = -\rho\,\partial\Phi/\partial t$ generelt.

Altså

$$p_{dI} = -\rho_I\frac{\partial \Phi_I}{\partial t} = -\frac{\rho_I\omega^2 a}{k}e^{-kz}\sin\theta$$

$$p_{dII} = -\rho_{II}\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} = \frac{\rho_{II}\omega^2 a}{k}e^{kz}\sin\theta$$

Energifluks i I: $$P_I(t) = \int_\eta^\infty \Big(p_{dI} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho_I V^2}_{\text{neglisjeres}}\Big)u_I\,dz \simeq \int_0^\infty p_{dI}\cdot u_I\,dz$$

til laveste orden.

Innsetting for p_{dI}, samt for $u_I = -\omega a e^{-kz}\sin\theta$, gir

$$P_I(t) = \frac{\rho_I\omega^3 a^2}{k}\sin^2\theta\int_0^\infty e^{-2kz}dz = \frac{\rho_I\omega^3a^2}{2k^2}\sin^2\theta$$

Middelverdi $$\overline{P_I(t)} = \frac{\rho_I\omega^3a^2}{4k^2}$$

Tilsvarende er

$$P_{II}(t) = \int_{-\infty}(p_{dII} + \tfrac{1}{2}\rho_{II}V^2)u_{II}\,dz \simeq \int_{-\infty}^0 p_{dII}\cdot u_{II}\,dz$$

Innsetting for p_{dII}, samt for $u_{II} = \omega a e^{kz}\sin\theta$, gir

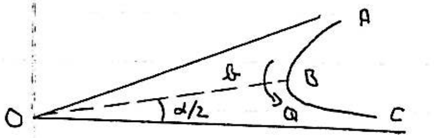
$$P_{II}(t) = \frac{\rho_{II}\omega^3a^2}{k}\sin^2\theta\int_{-\infty}^0 e^{2kz}dz = \frac{\rho_{II}\omega^3a^2}{2k^2}\sin^2\theta$$

Middelverdi $$\overline{P_{II}(t)} = \frac{\rho_{II}\omega^3a^2}{4k^2}$$

Σ: $$\overline{P(t)} = \frac{\rho_I+\rho_{II}}{4k^2}\omega^3a^2.$$

Når $\rho_I \to 0$ vil $$\overline{P}(t) = \frac{\rho_{II}}{4k^2}\omega^3a^2 = \frac{\rho_{II}\omega^2a^2}{2k}\underbrace{\left(\frac{\omega}{2k}\right)}_{\text{gruppehastighet } c_g} = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\rho_{II}ga^2\right)}_{E_{II}}c_g = E_{II}\cdot c_g \text{, st.}$$

Løsning Oppgave 3



$$w(z) = U \cdot e^{\pi/\alpha}$$

(a) $\Phi + i\Psi = U r^{\pi/\alpha} \cdot e^{i\pi\theta/\alpha} = U r^{\pi/\alpha}\left(\cos\frac{\pi\theta}{\alpha} + i\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) \Rightarrow$

$\Phi = U r^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}$, $\quad\Psi = U r^{\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}$

Fra formelark er $V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$, $\quad V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$

Altså $V_r = \frac{\pi U}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\cdot\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}$, $\quad V_\theta = -\frac{\pi U}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\cdot\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}$

(b) Integrerer over sirkelbuen med toppkt. i O og radius lik b:

$$\underline{Q} = \int_0^{\alpha/2} V_r\cdot b\,d\theta = \frac{\pi U}{\alpha} b^{\pi/\alpha}\underbrace{\int_0^{\alpha/2}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}\,d\theta}_{\alpha/\pi} = \underline{U\cdot b^{\pi/\alpha}}$$

Kan innses direkte: $\Psi(r,\theta=0) = 0$, $\quad\Psi(r=b,\theta=\frac{\alpha}{2}) = U\cdot b^{\pi/\alpha}$

$\underline{Q}$ = differansen i Ψ = $\underline{U\cdot b^{\pi/\alpha}}$, som stemmer.

(c) For potensialstrømning er Bernoulli-konstanten den samme overalt. Altså kan vi skrive

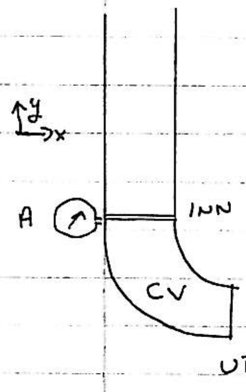
$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho V_0^2 + p_0}_{\text{Origo}} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho V^2 + p}_{\text{Vilkårlig punkt}}$$

Da $V_0 = 0$ i origo, og $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = \left(\frac{\pi U}{\alpha}\right)^2 r^{2(\frac{\pi}{\alpha}-1)}$, fås

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\pi U}{\alpha}\right)^2 r^{2(\frac{\pi}{\alpha}-1)}$$

Urealistisk svar for så store r at $p < 0$.

Løsning Oppgave 4



Legger kontrollvolumet rundt selve bendet.

Summen av alle kreftene på vannet i bendet:

$\sum\vec{F} = \dot{\vec{M}}_{UT} - \dot{\vec{M}}_{INN}$, hvor

$\dot{\vec{M}}_{UT} = \int_{UT}\rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA$, $\quad\dot{\vec{M}}_{INN} = -\int_{INN}\rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA$

Her er

$\dot{M}_{UT,x} = \rho V^2\cdot A$, $\quad A = \pi r^2 = 0{,}0452\ m^2$.

$\dot{M}_{UT,y} = 0$, $\quad\dot{M}_{INN,x} = 0$, $\quad\dot{M}_{INN,y} = -\rho V^2\cdot A$

Impulsbalansen i x-retning: $\sum F_x = F_{sveis,x}$

— " — i y-retning: $\sum F_y = -p_G\cdot A - W_G + F_{sveis,y}$, hvor

W_G er vannets tyngde:

$\underline{W_G} = \gamma\cdot A\cdot\frac{\pi R}{2} = 10^4\cdot 0{,}0452\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}80}{2} = \underline{568\ N}$, og hvor

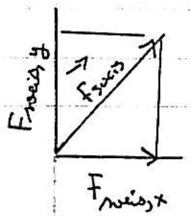
$\underline{p_G\cdot A} = 6\cdot 10^3\cdot 0{,}0452 = \underline{271\ N}$.

Altså blir $\underline{F_{sveis,x}} = \rho V^2 A = 10^3\cdot 64\cdot 0{,}0452 = \underline{2893\ N}$,

og

$F_{sveis,y} = \rho V^2 A + p_G A + W_G = 2893 + 271 + 568$

$\underline{F_{sveis,y} = 3732\ N}$



$\vec{F}_{sveis}$ virker altså oppover mot høyre.