3.1.10 For å vise at f er en injektiv (*one-to-one*) funksjon, ser vi på den deriverte,

$$f'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Vi ser at $f'(x) > 0$ for alle x. Det vil si at f er monotont voksende og derfor injektiv. Den inverse til f finner vi å la $y = f^{-1}(x)$. Da er

$$x = f(y) = \frac{y}{1+y},$$

og vi finner $f^{-1}(x)$ ved å løse for y:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{1+y} \\ (1+y)x &= y \\ x + xy - y &= 0 \\ y(x-1) &= -x \\ y &= -\frac{x}{x-1} = \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Altså er

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Vi ser at både telleren og nevneren i f er definert for alle verdier av $x \in \mathbb{R}$, men at f har en singularitet i $x = -1$. Derfor er domenet til f hele $\mathbb{R}$ utenom punktet -1. Dette kan vi skrive slik:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Tilsvarende ser vi at

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Det følger nå av egenskapene til inverse funksjoner (side 167 i boka) at verdimengdene (*range*) til f og f^{-1} er

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f) &= \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ \mathcal{R}(f^{-1}) &= \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{aligned}$$

3.1.22 Vi starter med å derivere g,

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{hvis } x \geq 0, \\ x^{-\frac{2}{3}} & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

Vi vet at
$$x^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 > 0$$
for alle x. Dermed kan vi konkludere med at $g'(x) \geq 0$ for alle x med $g'(x) = 0$ bare når $x = 0$. Ergo er g en injektiv funksjon.

For å finne g^{-1} ser vi først på tilfellet $x \geq 0$. Vi lar $y = g^{-1}(x)$ og finner at
$$x = g(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad y = x^{\frac{1}{3}}.$$
Vi vet at verdimengden til denne delen av g er $[0, \infty)$, slik at domenet til denne delen av g^{-1} også er $[0, \infty)$.

Videre ser vi på tilfellet $x < 0$. Vi lar $y = g^{-1}(x)$ og finner at
$$x = g(y) = y^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad y = x^3.$$
Vi vet at verdimengden til denne delen av g er $(-\infty, 0)$, slik at domenet til denne delen av g^{-1} også er $(-\infty, 0)$.

Oppsummert har vi at
$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{hvis } x \geq 0, \\ x^3 & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{3.1.28}}$ Vi starter med å finne den deriverte til f,
$$f'(x) = 6x^2.$$
Vi ser at $f'(x) \geq 0$ for alle x med $f'(x) = 0$ bare når $x = 0$. Dette viser at f er injektiv og at den har en invers.

Vi finner så f^{-1} ved å la $y = f^{-1}(x)$ og løse for y,
$$x = f(y) = 1 + 2y^3 \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Det finnes nå to måter å regne ut $\left(f^{-1}\right)'(x)$ på, enten direkte eller via formelen side 169 i boka. Hvis vi bruker formelen får vi at
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{6\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{6\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Alternativt, hvis vi deriverer f^{-1} direkte ved hjelp av kjerneregelen for derivasjon, får vi
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

$\boxed{3.2.18}$ Vi forenkler uttrykket ved å bruke reglene for logaritmer, side 172 i boka.

$$\begin{aligned}
\log_\pi(1-\cos x) + \log_\pi(1+\cos x) - 2\log_\pi \sin x \\
&= \log_\pi\left((1-\cos x)(1+\cos x)\right) - 2\log_\pi \sin x \\
&= \log_\pi(1-\cos^2 x) - 2\log_\pi \sin x \\
&= \log_\pi \sin^2 x - 2\log_\pi \sin x \\
&= \log_\pi \sin^2 x - \log_\pi \sin^2 x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

I den første overgangen har vi brukt punkt (ii) av reglene, mens vi i den nest siste overgangen har brukt punkt (v).

$\boxed{3.2.28}$ Vi lar $u = \log_b x$ og $v = \log_b a$. Via den inverse (Definisjon 5 side 172 i boka) vet vi at $x = b^u$ og $a = b^v$. Ved hjelp av den trivielle identiteten $b = (b^v)^{\frac{1}{v}}$ (husk at vi antar $b > 0$) har vi at

$$x = b^u = \left((b^v)^{\frac{1}{v}}\right)^u = \left(a^{\frac{1}{v}}\right)^u = a^{\frac{u}{v}}.$$

Ved å bruke definisjonen av den inverse til logaritmen igjen får vi at

$$\log_a x = \frac{u}{v} = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

$\boxed{3.3.6}$ Vi ser først på det første leddet. Ved å bruke Teorem 3, punkt (i), side 178 i boka og deretter at e og ln er inverse av hverandre slik at $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ (se nederst side 177 i boka), får vi at

$$\mathrm{e}^{2\ln\cos x} = \left(\mathrm{e}^{\ln\cos x}\right)^2 = (\cos x)^2.$$

På det andre leddet bruker vi også at e og ln er inverse av hverandre, men nå slik at $\ln \mathrm{e}^x = x$. Da får vi at

$$\left(\ln \mathrm{e}^{\sin x}\right)^2 = (\sin x)^2.$$

Hvis vi summerer de to leddene står igjen med

$$\mathrm{e}^{2\ln\cos x} + \left(\ln \mathrm{e}^{\sin x}\right)^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

$\boxed{3.3.46}$ Vi deriverer uttrykket ved gjentatt bruk av kjerneregelen for derivasjon. Husk at

$\frac{\mathrm{d}}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, $\frac{\mathrm{d}}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $\frac{\mathrm{d}}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{dx}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| \\
&= \frac{1}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{\mathrm{d}}{dx}|x+\sqrt{x^2-a^2}| \\
&= \frac{1}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) \\
&= \frac{1}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\frac{\mathrm{d}}{dx}(x^2-a^2)\right) \\
&= \frac{1}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}2x\right).
\end{aligned}$$

Vi bruker så at $|b||b| = b^2$ for et vilkårlig tall b. I vårt tilfelle kan vi sette $b = x+\sqrt{x^2-a^2}$, slik at vi får

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) \\
&= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{x\sqrt{x^2-a^2}+x^2-a^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.
\end{aligned}$$

3.4.24

a) Når tiden går antar vi at vi etterhvert går mot en stasjonær løsning, det vil si en løsning som ikke lenger avhenger av tiden. Da er $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$. Setter vi dette inn i differensialligningen og løser for x får vi:

$$0 = a - bx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{b}.$$

Altså er

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b}.$$

b) Vi skriver først om differensialligningen på standard form (se side 185 i boka),

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = b\left(\frac{a}{b} - x\right).$$

Vi lar $u(t) = \frac{a}{b} - x$. Da er $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ slik at

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -bu.$$

Denne differensialligningen har løsningen (se side 185 i boka),

$$u(t) = u_0\mathrm{e}^{-bt}.$$

Her er u_0 en konstant, som vi kan bestemme senere med initialbetingelsen. Vi setter inn for $u(t)$ og løser med hensyn på $x(t)$,

$$\frac{a}{b} - x(t) = u_0\mathrm{e}^{-bt} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{a}{b} - u_0\mathrm{e}^{-bt}.$$

Initialbetingelsen sier at konsentrasjonen skal være null når $t = 0$. Det vil si at vi må kreve at $x(0) = 0$. Vi setter inn for $t = 0$ i uttrykket for $x(t)$ og løser med hensyn på u_0,

$$0 = \frac{a}{b} - u_0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = \frac{a}{b}.$$

Vi står nå igjen med følgende uttrykk for $x(t)$,

$$x(t) = \frac{a}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right).$$

c) Oppgaven spør for hvilken t er $x(t) = \frac{a}{2b}$. Vi setter inn og løser for t,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2b} &= \frac{a}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right) \\
\mathrm{e}^{-bt} &= \frac{1}{2} \\
\ln \mathrm{e}^{-bt} &= \ln \frac{1}{2} \\
-bt &= -\ln 2 \\
t &= \frac{\ln 2}{b}.
\end{aligned}$$