TMA4120 Matematikk 4K
Høst 2015

Løsningsforslag — Øving 12

Chapter 15.4

Geometrisk rekke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1.$$

$\boxed{\text{15.4:23}}$ Finn Taylor-rekken og konvergensradiusen til funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$$

med sentrum i $z_0 = -i$.

Løsning:
La $g(z) = -\frac{1}{z-i}$. Da er $g' = f$. Videre er

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{i-z} \\
&= \frac{1}{i+i-(z+i)} \\
&= \frac{1}{2i\left(1-\frac{z+i}{2i}\right)} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^n}(z+i)^n
\end{aligned}$$

for $\left|\frac{z+i}{2i}\right| < 1$. Dvs. for $|z+i| < 2$ og dermed er $R = 2$.

Vi får nå at

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-i)^2} &= g'(z)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^n}(z+i)^n\right)\\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n}(z+i)^{n-1}\\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^n\\ &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2i)^n}(z+i)^n\end{aligned}$$

med konvergensradius $R = 2$.

$\boxed{\text{15.4:24}}$ Finn Taylor-rekken og konvergensradiusen til funksjonen

$$f(z) = e^{z(z-2)}$$

med sentrum i $z_0 = 1$.

Løsning:
Ettersom $z(z-2) = (z-1)^2 - 1$ og $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ som konvergerer i hele $\mathbb{C}$, er

$$\begin{aligned}e^{z(z-2)} &= \frac{1}{e}e^{(z-1)^2}\\ &= \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{n!}\end{aligned}$$

med konvergensradius $R = \infty$.

Chapter 16.1

$\boxed{\text{16.1:2}}$ Skriv funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z^2}e^{-1/z^2}$$

som en Laurent-rekke som konvergerer for $0 < |z| < R$. Finn R.

Løsning:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2}e^{-1/z^2} &= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1/z^2)^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z^{2n+2}}\end{aligned}$$

som konvergerer for alle $|z| > 0$. Dvs. $R = \infty$.

$\boxed{16.1{:}5}$ Skriv funksjonen

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$

som en Laurent-rekke som konvergerer for $0 < |z - z_0| < R$ der $z_0 = 1$. Finn R.

Løsning:

$$\begin{aligned}
\frac{e^z}{(z-1)^2} &= \frac{e^{(z-1)+1}}{(z-1)^2} \\
&= e\frac{e^{z-1}}{(z-1)^2} \\
&= \frac{e}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} \\
&= e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-2}}{n!} \\
&= e\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

som konvergerer for alle $|z-1| > 0$. Dvs. $R = \infty$.

$\boxed{16.1{:}6}$ Skriv funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$$

som en Laurent-rekke som konvergerer for $0 < |z - z_0| < R$ der $z_0 = i$. Finn R.

Løsning:
Ved delbrøkoppspaltning finner vi at

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} - \frac{1}{z-i}.$$

La $g(z) := \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2}$. Da er

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2}, & g(i) &= \frac{1}{i} + \frac{i}{i^2} = -2i, \\
g'(z) &= -\frac{1}{z^2} - i\frac{2}{z^3}, & g'(i) &= -\frac{1}{i^2} - i\frac{2}{i^3} = 3, \\
&\vdots & &\vdots \\
g^{(n)}(z) &= (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}} + (-1)^n i \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}, & g^{(n)}(i) &= (-1)^n \frac{n!}{i^{n+1}} + (-1)^n i \frac{(n+1)!}{i^{n+2}} \\
& & &= (-1)^n \frac{n! + (n+1)!}{i^{n+1}} \\
& & &= -i^{n+1} n!(n+2).
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(n+2)(z-i)^n
\end{aligned}
$$

med konvergensradius $R = 1$ (forholdstesten). Vi får nå at

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^2(z-i)} &= -\frac{1}{z-i} + g(z) \\
&= -\frac{1}{z-i} - \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(n+2)(z-i)^n
\end{aligned}
$$

for $0 < |z - i| < 1$.

$\boxed{\text{16.1:13}}$ Finn alle Taylor- og Laurent-rekker til

$$
f(z) = \frac{z^8}{1 - z^4}
$$

med sentrum i $z_0 = 0$. Finn konvergensområdet.

Løsning:
Geometrisk rekke:

$$
\begin{aligned}
\frac{z^8}{1 - z^4} &= z^8 \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+8}
\end{aligned}
$$

for alle $|z^4| < 1$. Dvs. for alle $|z| < 1$.

Vi har også at

$$\begin{aligned}\frac{z^8}{1-z^4} &= \frac{z^8}{z^4(z^{-4}-1)} \\ &= -\frac{z^4}{1-z^{-4}} \\ &= -z^4\sum_{n=0}^{\infty} z^{-4n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n-4}} \\ &= -z^4 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{4n}}\end{aligned}$$

for alle $|z^{-4}| < 1$. Dvs. for alle $|z| > 1$.

Chapter 16.2

$\boxed{16.2{:}1}$ Finn nullpunktene til

$$f(z) = \sin^4 \frac{z}{2}$$

og deres orden.

Løsning:
Vi vet at $\sin w = 0$ hvis og bare hvis $w = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dermed er $\sin^4 \frac{z}{2} = 0$ hvis og bare hvis $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vi har at

$$\begin{aligned}\sin\frac{z}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{z}{2} - \frac{z^3}{48} + \cdots,\end{aligned}$$

så $\sin^4 \frac{z}{2} = \frac{z^4}{16} + \cdots$ og nullpunktet $z_0 = 0$ har dermed orden 4. Ved Taylorutvikling av funksjonene $f(z - 2k\pi) = \pm f(z)$ vil man se at også de andre nullpunktene har orden 4.

$\boxed{16.2{:}7}$ Finn singularitetene til

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2} - \frac{z}{z-i} + \frac{z+1}{(z-i)^2}.$$

Finn polenes orden.

Løsning:
Vi ser at f har poler av orden to i $z = -2i$ og i $z = i$.

16.2:9 Finn singularitetene til

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - \pi}.$$

Finn polenes orden.

Løsning:
Ettersom $\sin z = -\sin(z - \pi)$, er

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - \pi} = -\frac{\sin(z - \pi)}{z - \pi}.$$

Polen $z = \pi$ er fjernbar ved å definere $f(\pi) = 1$.

Chapter 16.3

16.3:4 Finn singularitetene til

$$f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$$

og de tillhørende residyene.

Løsning:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1-z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(1-z)^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \cdots \end{aligned}$$

Funksjonen har en essensiell pol i $z = 1$. Residyen til f i $z = 1$ er koeffisienten til leddet $\frac{1}{z-1}$. Dvs.

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -1.$$

16.3:9 Evaluér integralet

$$\oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin 4z} \, \mathrm{d}z$$

der $C = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 3/2\}$ med orientering mot klokken.

Løsning:
Vi har at $\sin 4z$ har nullpunkt av orden én i $z_j := \frac{j\pi}{4}$, $j \in \mathbb{Z}$. (ettersom $\sin 4z_j = 0$ mens $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin 4z_j \neq 0$). Tre av disse nullpunktene ligger innenfor C: $-\pi/4, 0$ og $\pi/4$.

Telleren e^{-z^2} har ikke singulariteter eller nullpunkter, så integranden har *enkle* poler i z_j. Ved Teorem 1 s. 723 og (4) s. 721 er da

$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin 4z}\,\mathrm{d}z &= 2\pi i \sum_{j=-1}^{1} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{e^{-z^2}}{\sin 4z} \\
&= 2\pi i \sum_{j=-1}^{1} \frac{e^{-z_j^2}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin 4z_j} \\
&= 2\pi i \sum_{j=-1}^{1} \frac{e^{-(j\pi/4)^2}}{4\cos j\pi} \\
&= 2\pi i \left(\frac{e^{-\pi^2/16}}{-4} + \frac{1}{4} + \frac{e^{-\pi^2/16}}{-4} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2}\left(1 - 2e^{-\pi^2/16}\right).
\end{aligned}
$$