FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.
Løsningsforslag til øving 11

Oppgave 1 Vi løser oppgaven etter samme metodikk som er brukt i PCH Kap. 10.4 og i forelesninger. Varmestrømmen er rettet radielt utover, vi legger en kuleflate med radius $r_1 < r < r_2$ rundt senter i kulen, og antar stasjonære forhold slik at total varmestrøm

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \oint\!\!\!\oint_{S(V)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{dS},$$

er konstant i alle kuleskall med radius r. Her er $S(V)$ den lukkede flaten som omslutter volumet V, i dette tilfellet kuleflaten til en tenkt kule med radius r. $\mathbf{dS}$ er et lite flate-element på kula, orientert utover sett fra kulas sentrum. Siden $\mathbf{j}$ og $\mathbf{dS}$ begge er radielt rettet utover, og det er kulesymmetri i problemet slik at $\mathbf{j} = j(r)\hat{r}$, er flateintegralet veldig enkelt å utføre, da $j(r)$ er konstant på kuleflate med radius r. Vi finner

$$\oint\!\!\!\oint_{S(V)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi r^2 j(r).$$

Fra dette finner vi dermed

$$j(r) = \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2} = -\kappa \frac{dT}{dr}.$$

Dette skriver vi på formen, etter å ha innført $\kappa = aT^\nu$

$$T^\nu dT = -\frac{\dot{Q}}{4\pi a} \frac{dr}{r^2}.$$

Denne ligningen integrerer vi nå fra den indre overflaten på kuleskallet til en tenkt overflate med radius r

$$\begin{aligned}
\int_{T_1}^{T(r)} T^\nu dT &= -\frac{\dot{Q}}{4\pi a} \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2}, \\
\frac{1}{1+\nu}\left(T^{1+\nu}(r) - T_1^{1+\nu}\right) &= \frac{\dot{Q}}{4\pi a}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).
\end{aligned}$$

Vi bruker nå grensebetingelsen på det ytre kuleskallet til å bestemme $\dot{Q}$, $T(r = r_2) = T_2$, og finner

$$\frac{\dot{Q}}{4\pi a} = \frac{1}{1+\nu}\left(T_2^{1+\nu} - T_1^{1+\nu}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)^{-1}.$$

Dermed finner vi

$$T^{1+\nu}(r) = T_1^{1+\nu} + \left(T_2^{1+\nu} - T_1^{1+\nu}\right)\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}.$$

Vi ser at $T(r = r_1) = T_1$, og $T(r = r_2) = T_2$.

Oppgave 2

a) Vi har

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{dQ_1}{dt}\Delta t_1 = \Delta t_1 \tilde{K}_1 (T_1 - T_{1w}), \\
Q_2 &= \frac{dQ_2}{dt}\Delta t_2 = \Delta t_2 \tilde{K}_2 (T_{2w} - T_2).
\end{aligned}$$

Vi har også

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_{1w}}{T_{2w}}.$$

Fra de to uttrykkene for Q_1 og Q_2 over får vi dermed

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_{1w}}{T_{2w}} = \frac{\Delta t_1 \ \tilde{K}_1 \ (T_1 - T_{1w})}{\Delta t_2 \ \tilde{K}_2 \ (T_{2w} - T_2)}.$$

Dermed har vi

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{T_{1w} \ \tilde{K}_2 \ (T_{2w} - T_2)}{T_{2w} \ \tilde{K}_1 \ (T_1 - T_{1w})}.$$

b)

Effekten er gitt ved

$$\begin{aligned}
P &= \frac{W}{\Delta t} = \frac{Q_1 - Q_2}{(1+\alpha)(\Delta t_1 + \Delta t_2)} \\
&= \frac{\Delta t_1 \tilde{K}_1 (T_1 - T_{1w}) - \Delta t_2 \tilde{K}_2 (T_{2w} - T_2)}{(1+\alpha) \ (\Delta t_1 + \Delta t_2)} \\
&= \frac{\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \ \tilde{K}_1 (T_1 - T_{1w}) - \tilde{K}_2 (T_{2w} - T_2)}{(1+\alpha) \ (1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2})} \\
&= \frac{\frac{T_{1w} \ \tilde{K}_2 \ (T_{2w} - T_2)}{T_{2w} \ \tilde{K}_1 \ (T_1 - T_{1w})} \ \tilde{K}_1 (T_1 - T_{1w}) - \tilde{K}_2 (T_{2w} - T_2)}{(1+\alpha) \ (1 + \frac{T_{1w} \ \tilde{K}_2 \ (T_{2w} - T_2)}{T_{2w} \ \tilde{K}_1 \ (T_1 - T_{1w})})} \\
&= \frac{T_{1w} \ \tilde{K}_2 \ (T_{2w} - T_2) \ \tilde{K}_1 (T_1 - T_{1w}) - \tilde{K}_2 (T_{2w} - T_2) T_{2w} \ \tilde{K}_1 \ (T_1 - T_{1w})}{(1+\alpha) \ (T_{2w} \ \tilde{K}_1 \ (T_1 - T_{1w}) + T_{1w} \ \tilde{K}_2 \ (T_{2w} - T_2))} \\
&= \frac{1}{1+\alpha} \ \frac{\tilde{K}_2 \ \tilde{K}_1 \ (T_{1w} - T_{2w}) \ (T_{2w} - T_2) \ (T_1 - T_{1w})}{(T_{2w} \ \tilde{K}_1 \ (T_1 - T_{1w}) + T_{1w} \ \tilde{K}_2 \ (T_{2w} - T_2))}.
\end{aligned}$$

Vi noterer oss flere sider ved dette svaret: For det første forvinner effekten P i de tre tilfellene $T_1 = T_{1w}, T_2 = T_{2w}, T_{1w} = T_{2w}$. Dersom de to første likhetene holder, er det et uttrykk for at de isoterme prosessene går uendelig langsomt, siden arbeidssubstansens temperaturer rekker å henge med reservoarenes temperaturer. Den siste likheten innebærer at effekten forsvinner fordi varme inn i systemet i det tilfellet blir akkurat lik varme ut av systemet, slik at intet nyttig arbeid utføres. Dernest ser vi også at effekten forsvinner dersom tiden for å gjennomløpe de adiabatiske komponentene i syklusen blir uendelig lang ($\alpha \to \infty$).

c)

Vi trenger å regne ut

$$\eta = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}.$$

Vi innfører størrelsene

$$
\begin{aligned}
x &\equiv \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \\
y &\equiv \sqrt{\frac{\tilde{K}_1}{\tilde{K}_2}}.
\end{aligned}
$$

Da har vi

$$
\begin{aligned}
T_{1w} &= T_1 \left(1 - \frac{1-x}{1+y}\right) = T_1 \left(\frac{x+y}{1+y}\right). \\
T_{2w} &= T_2 \left(1 - \frac{1/x-1}{1/y+1}\right) = T_2 \; \frac{1}{x} \; \left(\frac{x+y}{1+y}\right).
\end{aligned}
$$

Dermed finner vi

$$
\eta = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \; \frac{1}{x} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.
$$

Kommentarer:

i) Vi har $T_2 < T_1$, slik at $T_2/T_1 < \sqrt{T_2/T_1}$. Dermed gir formelen for η over en lavere virkningsgrad enn formelen for η vi finner når vi ser bort fra varmestrømmer inn og ut av arbeidssubstansen, $\eta_C = 1 - T_2/T_1$. Formelen for η over ligger ganske nær de observerte virkningsgradene i en rekke større varmekraftverk. Kullkraftverket West Thurrock (UK) opererer mellom to reservoarer på $T_1 = 565^o C$ og $T_2 = 25^o C$. Dette gir $\eta_C = 0.641$, mens vi får $\eta = 0.4$. Observert virkningsgrad er 0.36. Kjernekraftverket CANDU (Canada) har $T_2 = 25^o C$ og $T_1 = 300^o C$. Dette gir $\eta_C = 0.480$ og $\eta = 0.28$. Den observerte virkningsgraden er 0.30. Det geotermiske turbindrevne kraftverket Larderello (Italia), har $T_2 = 80^o C$ og $T_1 = 250^o C$. Dette gir $\eta_C = 0.323$ og $\eta = 0.175$. Den observerte virkningsgraden er 0.16.

ii) Den maksimale effekten er gitt ved (Dette vises greiest ved å plugge formlene for T_{1w} og T_{2w} inn i uttrykket for P over, og så la Maple rydde opp i algebraen.)

$$
P = \frac{\tilde{K}_1 \tilde{K}_2}{1+\alpha} \left(\frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{\tilde{K}_1} + \sqrt{\tilde{K}_1}}\right)^2.
$$

Oppgave 3 Vi bruker den oppgitte funksjonen for $n(r,t)$, sammen med Laplace-operatoren i to-dimensjonale polar-koordinater

$$
\nabla^2 n = \frac{d^2 n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dn}{dr}.
$$

Vi har

$$
\frac{dn}{dr} = -\frac{r}{2Dt} \; n.
$$

Videre har vi

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 n}{dr^2} &= -\frac{1}{2Dt} \; n - \frac{r}{2Dt}\frac{dn}{dr} \\
&= -\frac{1}{2Dt} \; n + \frac{r^2}{4D^2 t^2} n.
\end{aligned}
$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} D\nabla^2 n &= D\left(-\frac{1}{2Dt}\, n + \frac{r^2}{4D^2t^2}n - \frac{1}{2Dt}\, n\right) \\ &= -\frac{1}{t}\, n + \frac{r^2}{4Dt^2}n. \end{aligned}$$

På den annen side har vi

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n}{t} + \frac{r^2}{4Dt^2}n.$$

Ved å sammenligne ser vi at diffusjonsligningen er tilfredsstilt.