Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 03

$\boxed{2.7.22}$ Økningen i fluksen, F, kan approksimeres som (se side 131 i boka)

$$\Delta F \approx \mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = 4kr^3\mathrm{d}r.$$

Relativ økning i F kan videre approksimeres med

$$\frac{\Delta F}{F} \approx \frac{4kr^3\mathrm{d}r}{kr^4} = \frac{4}{r}\mathrm{d}r.$$

Vi er ute etter relativ økning i radius, r, det vil si

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{\mathrm{d}r}{r} \approx \frac{1}{4}\frac{\Delta F}{F}.$$

Relativ økning i rate skal være 10%, altså $\frac{\Delta F}{F} = 0{,}10$. Dette gir

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{1}{4} \cdot 0{,}10 = 0{,}025.$$

Altså må radius øke med omlag 2,5% for at raten skal øke med 10%.

La oss avslutte med et talleksempel. La $k = 1$ og $r_1 = 1$. Da er $F_1 = kr_1^4 = 1$. Vi øker r med 2,5% til $r_2 = 1{,}025$. Da er $F_2 = kr_2^4 = 1{,}1038$, altså en økning på 10,38%. Vår approksimasjon er altså ganske god.

$\boxed{2.8.8}$ Fra Teorem 12, side 140 i boka, vet vi at $f(x)$ er stigende i intervaller der $f'(x) > 0$ og synkende i intervaller der $f'(x) < 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12.$$

Ulikheten $f'(x) > 0$ gir

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12 &> 0 \\ 3x^2 &> 12 \\ x^2 &> 4. \end{aligned}$$

Vi har at $x^2 > 4$ når $x < -2$ og $x > 2$. Alternativt kan vi skrive $|x| > 2$.

Videre er $f'(x) < 0$ når $|x| < 2$, det vil si når $-2 < x < 2$.

Konklusjon:

$f(x)$ er stigende på intervallene $(-\infty, -2)$ og $(2, \infty)$.

$f(x)$ er synkende på intervallet $(-2{,}2)$.

$\boxed{2.8.22}$ Funksjonene f og g er i følge antakelsene i den generaliserte middelverdisetningen (*The Generalized Mean-Value Theorem*) både kontinuerlige på $[a,b]$ og deriverbare på (a,b). De oppfyller derfor antakelsene i middelverdisetningen (*Mean-Value theorem*). Derfor er det riktig å si at

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

for en c mellom a og b.

Tilsvarende kan man si at

$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(\tilde{c})$$

for en $\tilde{c}$ mellom a og b. *Men*: Vi må anta forskjellig punkt c i de to tilfellene. Derfor har vi her brukt $\tilde{c}$ når vi anvender middelverdisetningen på g. Det er her beviset i oppgaven feiler, fordi man der antar $c = \tilde{c}$.

Dersom vi skulle følge fremgangsmåten presentert i oppgaven vil vi ende opp med følgende resultat. Det finnes punkter c og $\tilde{c}$, begge mellom a og b, slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(\tilde{c})}.$$

$\boxed{2.9.8}$ Dette uttrykket lar seg ikke skrive på eksplisitt form $y = y(x)$. Derfor deriverer vi implisitt. Vi bruker også produkt- og kjerneregelen for derivasjon. Vi starter med venstre side,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(x\sqrt{x+y}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{dx}(x)\sqrt{x+y} + x\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\sqrt{x+y}\right) \\
&= 1\cdot\sqrt{x+y} + x\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\frac{\mathrm{d}}{dx}(x+y) \\
&= \sqrt{x+y} + \frac{x}{2\sqrt{x+y}}\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).
\end{aligned}$$

Så tar vi høyre side,

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}(8-xy) = \frac{\mathrm{d}}{dx}(8) - \frac{\mathrm{d}}{dx}(xy) = 0 - \left(\frac{\mathrm{d}}{dx}(x)y + x\frac{\mathrm{d}}{dx}(y)\right) = -y - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Deretter setter vi venstresiden lik høyresiden og ganger med $\sqrt{x+y}$ for å forenkle uttrykket,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+y} + \frac{x}{2\sqrt{x+y}}\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= -y - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
(x+y) + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y\sqrt{x+y} - x\sqrt{x+y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Til slutt løser vi for $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{2}+x\sqrt{x+y}\right) &= -y\sqrt{x+y}-\frac{x}{2}-x-y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+y}\right) &= -y\left(\sqrt{x+y}+1\right)-\frac{3}{2}x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x\left(1+2\sqrt{x+y}\right) &= -2y\left(\sqrt{x+y}+1\right)-3x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2y\left(\sqrt{x+y}+1\right)+3x}{x\left(1+2\sqrt{x+y}\right)}.
\end{aligned}$$

$\boxed{2.9.12}$ Ligningen for tangentlinjen til en kurve i et gitt punkt (x_0, y_0), er gitt som

$$y = m(x-x_0)+y_0.$$

Stigningstallet, m, er gitt som den deriverte av y med hensyn på x i punktet (x_0, y_0). Dette kan skrives som

$$m = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}.$$

Den oppgitte kurven lar seg ikke skrive på eksplisitt form. Derfor deriverer vi implisitt.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}(x+2y+1) &= \frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{y^2}{x-1}\right) \\
\frac{\mathrm{d}}{dx}(x)+\frac{\mathrm{d}}{dx}(2y)+\frac{\mathrm{d}}{dx}(1) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{dx}(y^2)(x-1)-y^2\frac{\mathrm{d}}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \\
1+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+0 &= \frac{2y\frac{\mathrm{d}}{dx}(y)(x-1)-y^2(1-0)}{(x-1)^2} \\
1+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x-1)-y^2}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Vær spesielt oppmerksom på derivasjonen av y^2. Her må vi behandle y som en kjerne siden vi deriverer med hensyn på x, slik at vi får $\frac{\mathrm{d}}{dx}(y^2) = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (og ikke bare $2y$).

Dersom vi hadde ønsket å finne $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ uttrykt ved x og y, måtte vi nå ha løst dette uttrykket for $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Deretter kunne vi ha funnet m ved å sette inn for $(x, y) = (2, -1)$. Men siden vi kun er interessert i $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ i dette punktet, kan vi sette inn for x og y før vi løser for $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Dette gir

$$\begin{aligned}
1+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2(-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(2-1)-(-1)^2}{(2-1)^2} \\
1+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1 \\
4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dette er nå den deriverte i punktet $(2,-1)$, så for å være helt nøyaktige bør vi skrive

$$m = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = -\frac{1}{2}.$$

Vi er nå klare til å sette opp ligningen for tangentlinjen til kurven i punktet $(2,-1)$,

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) - 1 = -\frac{1}{2}x.$$

$\boxed{\text{2.9.28}}$ Vi starter med å finne skjæringspunktene mellom ellipsen og hyperbelen. Hvis vi løser ligningen for ellipsen med hensyn på y^2 får vi

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Vi setter dette inn i ligningen for hyperbelen og løser med hensyn på x^2,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) &= 1 \\
x^2\left(\frac{1}{A^2} + \frac{b^2}{a^2B^2}\right) &= 1 + \frac{b^2}{B^2} \\
x^2(a^2B^2 + b^2A^2) &= A^2a^2B^2 + b^2A^2a^2 \\
x^2 &= \frac{A^2a^2B^2 + b^2A^2a^2}{a^2B^2 + b^2A^2} = \frac{A^2a^2(B^2+b^2)}{a^2B^2+b^2A^2}.
\end{aligned}$$

Observer nå at $x^2 \geq 0$ for alle a, b, A og B. Det må vi også kreve for at ligningen skal ha en løsning (vi kan ikke ta kvadratroten av noe negativt).

Vi setter så inn uttrykket for x^2 inn i uttrykket for y^2 og får at

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{A^2(B^2+b^2)}{a^2B^2+b^2A^2}\right) = b^2\left(\frac{a^2B^2 + b^2A^2 - A^2B^2 - A^2b^2}{a^2B^2+b^2A^2}\right) = \frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{a^2B^2+b^2A^2}.$$

Tilsvarende som i sted, må vi kreve at $y^2 \geq 0$ for at vi skal ha en løsning. Vi ser at nevneren er positiv for alle a, b, A og B, mens vi må kreve at $a^2 \geq A^2$ for at telleren skal være positiv. Antakelsen fra oppgaven om at $a^2 \geq A^2$ er altså nødvendig for å sikre oss at vi faktisk har løsninger, det vil si at kurvene skjærer hverandre.

Det neste steget er å finne uttrykk for stigningstallet til tangentlinjene til de to kurvene. Stigningstallet er som vi husker lik $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Ingen av kurvene er gitt på eksplisitt form, så vi deriverer implisitt. Vi starter med ellipsen,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) &= \frac{d}{dx}(1) \\
\frac{2x}{a^2} + \frac{2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{b^2} &= 0 \\
\frac{b^2}{a^2}x + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

For hyperbelen får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{dx}(1) \\
\frac{2x}{A^2}-\frac{2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{B^2} &= 0 \\
\frac{B^2}{A^2}x - y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{B^2}{A^2}\frac{x}{y}.
\end{aligned}
$$

La $m_e = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$ være stigningstallet til tangentlinjen til ellipsen, og $m_h = \frac{B^2}{A^2}\frac{x}{y}$ være stigningstallet til tangentlinjen til hyperbelen. For at de to tangentlinjene skal stå normalt på hverandre må vi ha at (se side 99 i boka)

$$m_e = -\frac{1}{m_h}.$$

Satt inn for m_e og m_h får vi

$$
\begin{aligned}
-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} &= -\frac{A^2}{B^2}\frac{y}{x} \\
\frac{b^2}{a^2}x^2 &= \frac{A^2}{B^2}y^2.
\end{aligned}
$$

Vi setter nå inn uttrykkene for x^2 og y^2 som beskriver skjæringspunktene, for å sjekke om ligningen ovenfor er tilfredstillt i disse punktene.

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{A^2a^2(B^2+b^2)}{a^2B^2+b^2A^2} = \frac{A^2}{B^2}\frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{a^2B^2+b^2A^2}.$$

Vi stryker alle like faktorer og står igjen med

$$B^2+b^2 = a^2-A^2$$

eller

$$a^2-b^2 = A^2+B^2.$$

Dette er lik den andre antakelsen i oppgaven, og vi har vist at tangentlinjene til kurvene i skjæringspunktene står normalt på hverandre.

2.10.8 Vi starter med å dele opp integralet i to ledd,

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Vi vet at (se side 122–125 i boka)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}\sin x &= \cos x, \quad \text{og} \\
\frac{\mathrm{d}}{dx}\tan x &= \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}
$$

Altså er $\sin x$ den antideriverte til $\cos x$, og $\tan x$ den antideriverte til $\frac{1}{\cos^2 x}$. Dermed har vi at

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = \tan x + \sin x + C.$$

Vi må huske å legge til integrasjonskonstanten, C, fordi vi har å gjøre med et ubestemt integral.

$\boxed{2.10.12}$ Vi følger samme fremgangsmåte som i forrige oppgave, og starter med å dele opp integralet i to ledd,

$$\int \frac{6(x-1)}{x^{\frac{4}{3}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6x}{x^{\frac{4}{3}}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{6}{x^{\frac{4}{3}}}\,\mathrm{d}x = 6\int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x - 6\int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x.$$

Vi vet at

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) &= \frac{3}{2}\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}, \quad \text{og} \\
\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(-3x^{-\frac{1}{3}}\right) &= (-3)\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = x^{-\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

Altså er $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ den antideriverte til $x^{-\frac{1}{3}}$, og $-3x^{-\frac{1}{3}}$ den antideriverte til $x^{-\frac{4}{3}}$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned}
\int \frac{6(x-1)}{x^{\frac{4}{3}}}\,\mathrm{d}x &= 6\int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x - 6\int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x \\
&= 6\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 6\left(-3x^{-\frac{1}{3}}\right) + C \\
&= 9x^{\frac{2}{3}} + 18x^{-\frac{1}{3}} + C = \frac{9x+18}{x^{\frac{1}{3}}} + C = \frac{9(x+2)}{x^{\frac{1}{3}}} + C.
\end{aligned}$$