Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

# TMA4245 Statistikk
Vår 2015

**Øving nummer 6, blokk I**

## Oppgave 1

La $X$ være fødselsvekt i gram til et tilfeldig valgt barn i Norge. Anta $X$ er normalfordelt, der $\mathrm{E}(X) = 3315$ og $\mathrm{Var}(X) = 575^2$.

**a)** Beregn følgende sannsynligheter,

$$1)\ \mathrm{P}(X > 3000) \qquad 2)\ \mathrm{P}(3000 < X < 3500) \qquad 3)\ \mathrm{P}(X > 3500 \mid X > 3000)$$

Dersom fødselsvekten er mindre enn $c$ gram, der

$$\mathrm{P}(X < c) = 0.01,$$

vil barnet bli klassifisert som undervektig. La $Y$ være antall av $n = 100$ barn som var undervektige ved fødselen.

**b)** Under hvilke antagelser er $Y$ binomisk fordelt?
Anta at $Y$ er binomisk fordelt, hva er da $\mathrm{P}(Y > 0)$, og $\mathrm{P}(Y > 1|Y > 0)$ ?

## Oppgave 2

La $X$ og $Y$ være uavhengige Poisson-fordelte stokastiske variable, med forventningsverdi henholdsvis 5 og 10. Beregn følgende sannsynligheter,

$$\mathrm{P}(X \leq 5), \qquad \mathrm{P}(X \leq 3|X \leq 5) \quad \text{og} \quad \mathrm{P}(X + Y > 10).$$

## Oppgave 3

Antall tankskip $X$ som ankommer til en bestemt havn i løpet av en dag har vist seg å være poissonfordelt med $\mathrm{E}(X) = 2$. Havnen kan maksimalt betjene 3 tankskip pr. dag. De tre første ankomne blir ekspedert, eventuelle øvrige blir omdirigert til annen havn.

**a)** Hvilke(t) antall tankskip har størst sannsynlighet for å ankomme en bestemt dag? Hvor stor er sannsynligheten for at det en bestemt dag må dirigeres tankskip til andre havner?

**b)** Hva er forventet antall skip som blir betjent en bestemt dag?

**c)** Hvor stor kapasitet må havnen bygges ut til for med minst 90% sannsynlighet å kunne betjene samtlige skip som ankommer en gitt dag?

## Oppgave 4

En lottorekke består av 7 tall krysset av blant tallene $1, 2, ..., 34$. Mer presist kan den oppfattes som et ikke-ordnet utvalg på 7 elementer blant tallene 1 til 34, der utvelgelsen skjer uten tilbakelegging. Hver lørdag trekker Norsk tipping ut ukens riktige lottorekke ved tilfeldig trekking slik at alle mulige lottorekker blir like sannsynlige. Ukens toppgevinst utbetales til innehaverne av innleverte rekker som er identiske med den riktige lottorekka (dvs. oppnå 7 riktige tall). Dersom ingen tippet den riktige rekka, blir premiepotten for 7 riktige overført til neste ukes lotto-omgang (som blir en "Gull-Lotto" omgang).

**a**) Hvor mange forskjellige lottorekker finnes det? Hva er sannsynligheten for at tallet 34 er med i den riktige lottorekka? Gjør rede for at enhver lottorekke vil oppnå 7 riktige ved lottotrekningen med sannsynlighet $p = 1.859 \cdot 10^{-7}$

Skriv matlab-kode som genererer $v$ forskjellige vinnerrekker i lotto, og som summerer antall ganger 34 er i vinnerrekka. Du kan benytte funksjonen *draw_lottonumbers* som er definert i fila *draw_lottonumbers.m* som er tilgjengelig fra emnets hjemmeside. Sammenlign sannsynligheten du fant over med hva en simulering med for eksempel $v = 1000$ gir.

Anta at det en bestemt uke leveres inn tilsammen $n = 19\,000\,000$ rekker i lotto. La $X$ være antall av disse rekkene som oppnår 7 riktige i ukens trekning. Det antas at $X$ er binomisk fordelt med parametre $n$ og $p$ (med verdier som gitt ovenfor).

**b**) Hvorfor vil $X$ med god tilnærmelse kunne regnes å være poissonfordelt? Hva blir parameteren i denne poissonfordelingen? Finn sannsynligheten for at ingen av de innleverte rekkene oppnår 7 riktige ved ukens trekning. Anta i det følgende at antall innleverte rekker holder seg konstant på 19 000 000 pr. uke. Hva blir da det forventede antall "Gull-Lotto" omganger pr. år? Hva blir sannsynligheten for at det i løpet av ett år ikke oppnås noen "Gull-Lotto"-omgang?

Vi vil undersøke tilnærmelsen benyttet i **b**) over, altså om $X$ med god tilnærmelse vil kunne regnes å være poissonfordelt.

**c**) La en poisson-sannsynlighetsfordelingsfunksjon i matlab,

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu},$$

som tar inn $x$ og $\mu$ som parametre. Plott verdier av poisson-fordelingsfunksjonen mot heltallsverdier av $x$ fra 0 til 12. Bruk verdien av parameteren $\mu$ som du fant i **b**) over. *Hint: I matlab finnes fakultetsoperatoren* $x!$ *som* factorial($x$).

**d**) Lag en binomisk sannsynlighetsfordelingsfunksjon i matlab,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

som tar inn $n$, $x$ og $p$ som parametre. Plott verdier av fordelingsfunksjonen mot heltallsverdier av $x$ fra 0 til 12. Bruk $n = 19000\,000$ som antall innleverte rekker og $p$ sannsynligheten for 7 rette som du fant i **a**). Ligner den binomiske fordelingsfunksjonen og poisson-fordelingsfunksjonen på hverandre? *Hint: I matlab finnes binomialkoeffisienten*

$$\binom{n}{x}$$

*som* nchoosek($n$,$x$).

Norsk Tipping ønsker å øke hyppigheten av "Gull-Lotto"-omganger og vurderer derfor å øke antall valgbare tall fra 34 til $m$ (>34), mens en rekke fremdeles skal bestå av 7 tall.

**e**) Hvor stor må $m$ velges for at det med sannsynlighet minst 0.10 ikke finnes rekker med 7 riktige i en uke der det innleveres $n = 19\,000\,000$ rekker?

**Oppgave 5**

Antall trykkfeil, $N$, i et manuskript på $s$ sider, antas å være en poissonfordelt stokastisk variabel med parameter $\lambda s$, dvs.

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp(-\lambda s), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

En korrekturleser som leser korrektur på manuskriptet antas å oppdage hver trykkfeil med sannsynlighet $p$ og ikke oppdage trykkfeilen med sannsynlighet $1 - p$. La $X$ være antall feil korrekturleseren finner dersom han leser igjennom manuskriptet en gang. Vi skal anta at $X$ gitt $N{=}n$ er binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

**a**) Hvilken betingelse må vi i tillegg anta dersom vår antagelse om at $X|N{=}n$ er binomisk fordelt, skal være korrekt?

Dersom $\lambda = 2$ og manuskriptet er på $s = 8$ sider, hva er da sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?

Dersom vi vet at manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og at $p = 0.6$, hva er da sannsynligheten for at korrekturleseren vil finne alle trykkfeilene?

La $Y_k$ være antall trykkfeil som gjenstår etter at korrekturleseren har lest igjennom manuskriptet $k$ uavhengige ganger ($k = 1, 2, \ldots$), dvs. $Y_1$ er antall trykkfeil som gjenstår etter en gjennomlesning.

**b**) Finn simultanfordelingen til $Y_1$ og $N$, og bruk den til å finne (marginal)fordelingen til $Y_1$. Hva er fordelingen til $Y_k$?

# Fasit

**1**. **a**) 0.709, 0.335, 0.528 **b**) 0.634, 0.417

**2**. $0.616, 0.430, 0.882$

**3**. **a**) 1 eller 2, 0.143 **b**) 1.782 **c**) 4

**4**. **a**) 5379616, 7/34 **b**) 3.53, 0.029, 1.5, 0.22 **e**) 36

**5**. **a**) P($N > 10$)=0.923, P(finner alle feil) = 0.0022 **b**) $Y_k \sim$ Poisson$(\lambda s(1 - p)^k)$