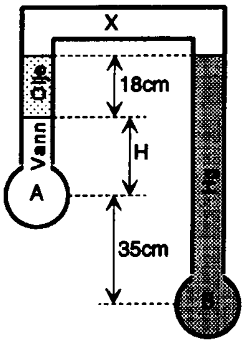
NTNU
TEP4105: Fluidmekanikk

Løsningsforslag til Øving 3
Høst 2014

Oppgave 2.032

Vi skal finne vannhøyden H i røret. Venstre side (A) er fylt med vann og 18cm olje; $SG = 0,827 = \rho_{\text{olje}}/\rho_{\text{vann}}$. Høyre side (B) er fylt med (H + 18cm+35cm) kvikksølv. Trykkforskjellen i bunnen av rør-endene er oppgitt til å være $P_B - P_A = 97$kPa og temperaturen er 20°. Da er

$$\gamma_{\text{vann}} = (\rho g)_{\text{vann}} = 9790\text{N/m}^3, \qquad \gamma_{\text{Hg}} = 133100\text{N/m}^3.$$



Trykket øverst i røret, p_x, er ukjent, og gitt av ligningssettet

$$P_A = H\gamma_{\text{vann}} + 0,18\text{m} \cdot \rho_{\text{olje}} g + p_x$$
$$P_B = (H + 0,53\text{m})\gamma_{\text{Hg}} + p_x.$$

Setter $\rho_{\text{olje}} = SG \cdot \rho_{\text{vann}}$ der ρ_{vann} er 998kg/m^3 ved 20 °. Vi eliminerer p_x:

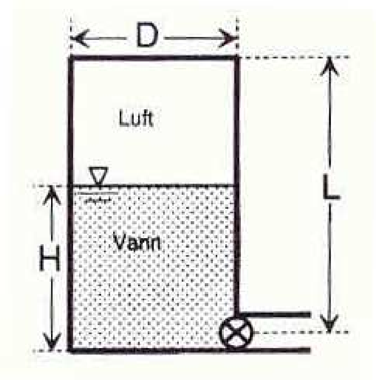
$$P_A - H \cdot \gamma_{\text{vann}} - 0,18\text{m} \cdot SG \cdot \rho_{\text{vann}} g = P_B - (H + 0,53\text{m})\gamma_{\text{Hg}}$$
$$H = \frac{P_B - P_A + 0,18\text{m} \cdot \rho_{\text{vann}} \cdot SG \cdot g - 0,53\text{m} \cdot \gamma_{\text{Hg}}}{\gamma_{\text{Hg}} - \gamma_{\text{vann}}}.$$

Tallverdien blir $H = 22,6$cm.

Oppgave 2.047

En sylindrisk tank har høyde $L = 1,1$m og tverrsnittareal A. Tanken fylles med vann av en pumpe nederst i tanken som yter et trykk $P_p = 175$kPa. Ved et gitt øyeblikk (f.eks. $t = 0$) måles luftrykket øverst i tanken til $P_0 = 110$kPa og vannhøyden til $H_0 = 0.35$m. Vi skal finne H ved trykklikevekt, det vil si når trykket *nederst* i tanken er lik pumpetrykket P_p. Vi har gitt antagelsen om isoterm prosess, og vi antar som vanlig at luft er en ideell gass som sammen gir

$$P \cdot V = \text{konst.} \tag{1}$$



Startvolumet for luften er $V_0 = A \cdot (L - H_0)$. Ved likevekt skal trykket fra pumpen balanseres av trykket i luftlommen (luftens vekt neglisjeres) pluss vekten av vannet i tanken, $\gamma_v \cdot H$. Vannets spesifikke tyngde er $\gamma_v = 9790\mathrm{N/m}^3$. Vi får ligningen

$$P_p = H\gamma_v + P_x, \tag{2}$$

der P_x er lufttrykket i tanken. Ved ideell gasslov får vi at (for en konstant K som i lign 1)

$$\left.\begin{array}{l} P_x = \frac{K}{V} \\ P_0 = \frac{K}{V_0} \end{array}\right\} \Longrightarrow P_x = P_0\frac{V_0}{V} = P_0\frac{A(L-H_0)}{A(L-H)} = P_0\frac{L-H_0}{L-H}. \tag{3}$$

Vi får 2.gradsligningen

$$P_p = H\gamma_v + P_0\frac{L-H_0}{L-H}$$

$$H^2 - H(L + \frac{P_p}{\gamma_v}) + \frac{P_pL}{\gamma_v} - \frac{P_0(L-H_0)}{\gamma_v} = 0.$$

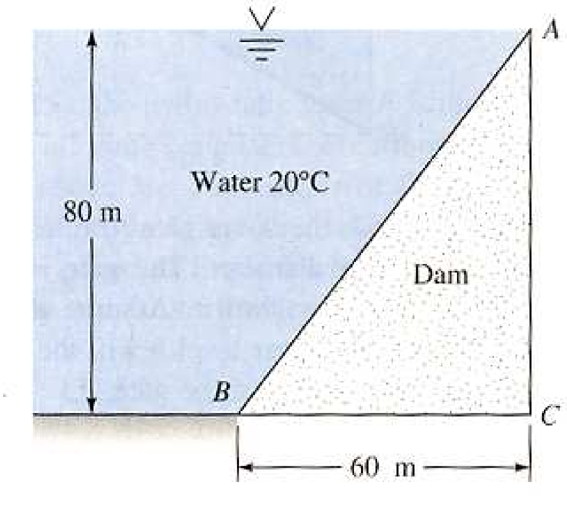
Innsatt fås tallverdien

$$H_{\max} = 0,612\mathrm{m}. \tag{4}$$

Legg merke til at hele utregningen er fullstendig uavhengig av formen til tankens tverrsnitt; det er ikke nødvendig å anta at det er sirkulært.

Oppgave 2.066

Gitt en trekantet betongdemning ABC. Finn den hydrostatiske trykk-kraften på flaten AB og momentet dette gir om punktet C. Vurdèr om demningen vil tippe uten og med vann under demningen.



Atmosfæretrykket virker på begge sider av demningen, og gir ingen netto kraft. Den hydrostatiske kraften F er lik trykket i arealsenteret (sentroiden) P_{CG} ganget med arealet av flaten:

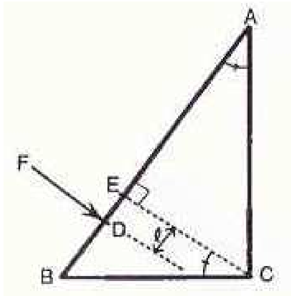
$$F = P_{CG} \cdot \text{Areal} = \gamma \frac{AC}{2} \cdot AB \cdot b, \tag{5}$$

der $b = 30$m er demningens bredde innover i papirplanet. Retningen på kraften F er vinkelrett på planet AB, og avstanden fra arealsenteret og ned til angrepspunktet er gitt ved

$$y_{CP} = -\sin\theta \frac{I_{xx}}{h_{CG} \cdot \text{Areal}} = -\frac{AC}{AB} \cdot \frac{\frac{1}{12}b(AB)^3}{\frac{AC}{2}b \cdot AB} = -\frac{1}{6}AB, \tag{6}$$

der I_{xx} kan hentes fra figur 2.13 i White, eller enkelt beregnes som $\int y^2 dA$. Avstanden fra overflaten langs flaten AB ned til angrepspunktet blir da

$$AD = AB/2 - y_{CP} = AB(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \frac{2}{3}AB. \tag{7}$$



For å finne momentet som kraften F gir om C må vi beregne armen. Linjen fra C normalt på AB treffer i punktet E. Da trekantene ABC og ACE er kongruente:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AB} \Longrightarrow AE = \frac{(AC)^2}{AB}, \tag{8}$$

og armen l blir da

$$l = AD - AE = \frac{2}{3}AB - \frac{(AC)^2}{AB}. \tag{9}$$

Innsatt tallverdier får vi $l = 2,67$m. Angrepslinjen for F ligger dermed *under* punktet C, og demningen vil derfor *ikke* tippe, selv om den var vektløs! Tallverdi for kraftmomentet, med $\gamma = 9790 \text{N/m}^3$, blir, med ligningene 5 og 9:

$$M_p = Fl = \gamma \frac{AC}{2} \cdot AB \cdot b \left(\frac{2}{3}AB - \frac{(AC)^2}{AB} \right) = 3,13 \cdot 10^9 \text{Nm}. \tag{10}$$

Hvis det er vann under demningen må vi ta med trykk-kraften fra undersiden som gir et moment M_v om C *med* klokka. Demningen er av betong (2,4 ganger tyngre enn tilsvarende volum vann) og dens tyngde gir et moment M_g *mot* klokka. Uttrykket for det totale momentet med klokka blir

$$\underline{M = M_v - M_g - M_p} \tag{11}$$

For litt spesielt interesserte: Vi kan godt regne litt mer på situasjonen der vi har lekkasje under demningen. Vi må da beregne massens moment om C. Anta at demningens massetetthet er konstant,

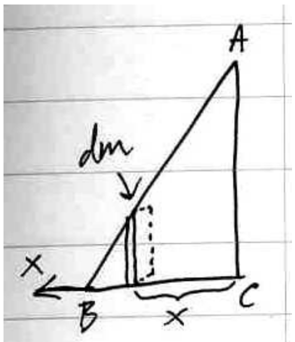
$$\rho_d = M/V = SG \cdot \frac{\gamma_v}{g}, \tag{12}$$

slik at momentet som skyldes massen til en tynn søyle med bredder b og dx i avstand x fra C blir

$$dM = x \cdot dF = xg \cdot dm = xg\rho_d \cdot dV = xg \cdot SG \cdot \frac{\gamma_v}{g} h(x)b \cdot dx, \tag{13}$$

der $h(x)$ er demningens høyde som funksjon av avstanden x:

$$h(x) = AC - \frac{AC}{BC}x. \tag{14}$$



Vi får totalt moment om C på grunn av demningens masse:

$$M_g = \int dM = \int_0^{BC} x \cdot SG \cdot \gamma_v \left[AC - \frac{AC}{BC} x \right] b \cdot dx = \frac{1}{6} SG \cdot \gamma_v b \cdot AC \cdot (BC)^2$$
$$= 3,38 \cdot 10^{10} \mathrm{Nm} \tag{15}$$

mot klokka.

Vi trenger videre å beregne kraftmoment om C som skyldes at det lekker vann under demningen. Vi må da gjøre en antagelse om hvor stort del av arealet under demningen som er i kontakt med vann. La oss for enkelhets skyld anta at det er vann under hele demningen. Trykk-kraften virker midt på undersiden av demningen, i en avstand $x = BC/2$ fra C. Kraftmomentet om C er dermed

$$M_v = Fx = p_v \cdot A \cdot \frac{BC}{2} = \gamma_v \cdot AC \cdot b \cdot BC \cdot \frac{BC}{2} = \frac{1}{2} \gamma_v \cdot b \cdot AC \cdot (BC)^2 = 4,23 \cdot 10^{10} \mathrm{Nm} \tag{16}$$

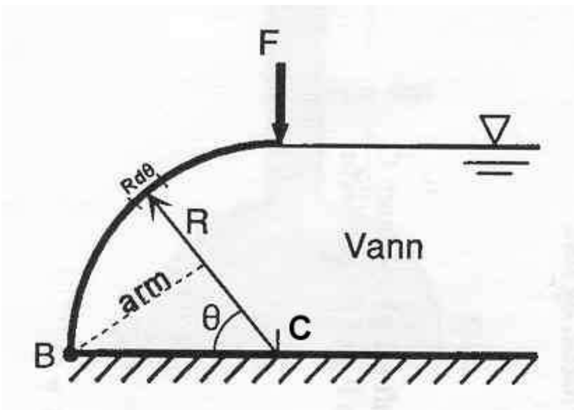
med klokka. Totalt kraftmoment om C med klokka er

$$M = M_v - M_g - M_p = 5,37 \cdot 10^9 \mathrm{Nm} \tag{17}$$

dvs. demningen tipper! Vi har antatt at alt areal under demningen er dekt med vann. Hvordan blir situasjonen om bare en del av arealet er i kontakt med vann?

Oppgave 2.083

Vi skal finne kraften F som må til for å holde luken igjen. Atmosfæretrykket virker på begge sider av luka og kanselleres.



Oppgaven kan løses på flere måter. Ved å beregne momentet om B direkte trenger vi vanntrykket inntil luka som funksjon av vinkelen θ:

$$p(\theta) = \gamma \cdot R(1 - \sin\theta). \tag{18}$$

Anta at luka har bredde b. Da luka er sirkelformet vet vi at væsketrykket virker i radiell retning og armen a til momentet blir avstanden normalt på virkelinja ned til B. Momentet om B som skyldes væsketrykket blir:

$$
\begin{aligned}
M_{\text{vann}} &= \iint p \cdot a \cdot dA = \int_0^{\pi/2} p(\theta) \cdot R\sin\theta \cdot bR \cdot d\theta = \gamma R^3 b \int_0^{\pi/2} (\sin\theta - \sin^2\theta) d\theta \\
&= \gamma R^3 b \left[-\cos\theta - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \gamma R^3 b (1 - \frac{\pi}{4}).
\end{aligned} \tag{19}
$$

For å finne momentet om B fra tyngden W av luka, kan vi fordele W jevnt over kvartsirkelen og integrere opp momentet:

$$
\begin{aligned}
M_W &= \iint \text{arm} \cdot \frac{\text{tyngde}}{\text{areal}} dA = \int_0^{\pi/2} R(1-\cos\theta) \frac{W}{\frac{1}{4} 2\pi R} R \cdot d\theta \\
&= WR\frac{2}{\pi} \left[\theta - \sin\theta\right]_0^{\pi/2} = WR(1 - \frac{2}{\pi}).
\end{aligned} \tag{20}
$$

Momentet om B skal totalt være null når luka ligger på plass:

$$
M_{\text{tot}} = -FR + \gamma R^3 b (1 - \frac{\pi}{4}) - WR(1 - \frac{2}{\pi}) = 0 \tag{21}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
F = \gamma R^2 b (1 - \frac{\pi}{4}) - W(1 - \frac{2}{\pi}). \tag{22}
$$

Tallverdi: $R = 2,438\text{m}$, $b = 3,048\text{m}$, $W = 13344\text{N}$, $\gamma = 9790\text{N/m}^3 \Longrightarrow \underline{F = 33,2\text{kN}}$.

Oppgaven kan også løses på "standard" måte. Beregner horisontal kraft F_H på vertikalprojeksjonen av luken og finner angrepspunktet:

$$
F_H = \gamma \cdot \frac{1}{2} R \cdot bR \tag{23}
$$

med virkelinje $R/3$ over bunnen. Vi beregner så vertikal kraft F_V på vekten av "fortrengt" væskemengde over luken og finner angrepspunktet som arealsenteret i det vertikale arealet over luken når en ser det slik som på figuren. Arealet over luken er $R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2$, og dermed

$$
F_V = \gamma b R^2 (1 - \frac{1}{4}\pi). \tag{24}
$$

Virkelinjen kan enkelt finnes ved å innse at total hydrostatisk trykkraft må gå gjennom C (alle trykkrefter på luken virker i radiell retning). Momentet om C fra F_H og F_V må derfor være null og vi beregner vertikal arm:

$$
M_C = F_H \frac{R}{3} - F_V \cdot a_V = 0 \Longrightarrow a_V = \frac{R}{6(1 - \frac{\pi}{4})}. \tag{25}
$$

Momentet fra W beregnes som over, og totalt moment om B blir

$$
M_{\text{tot}} = -FR + F_H \frac{R}{3} + F_V (R - a_V) - WR(1 - \frac{2}{\pi}), \tag{26}
$$

som vi setter lik null og får samme svar som over.