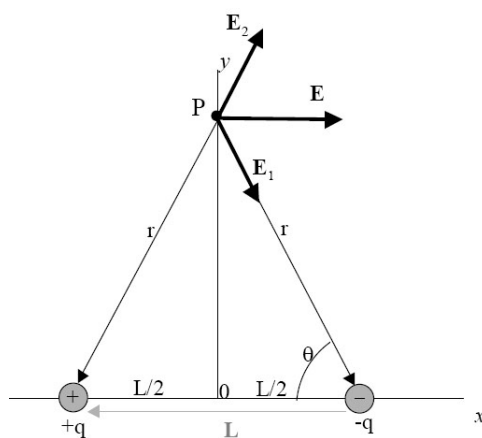


## Øving 2, løsningskisse. Elektrisk felt, fluks, Gauss' lov.

### Oppgave 1. Elektrisk dipol.



Totalt  $E$ -felt i punktet P er gitt ved  $E_1$  fra  $+q$  og  $E_2$  fra  $-q$ . Størrelsen på  $E_1$  og  $E_2$  er den samme, men  $E_1$  er i retning fra  $+q$  og  $E_2$  i retning mot  $-q$ .  $y$ -komponentene vil kansellere hverandre, og for  $x$ -komponenten får vi:

$$\vec{E} = (E_{1x} + E_{2x}) \hat{i} = 2E_{1x} \hat{i}, \quad \text{hvor}$$

$$E_{1x} = E_1 \cos \theta = k \cdot \frac{q}{r^2} \cos \theta.$$

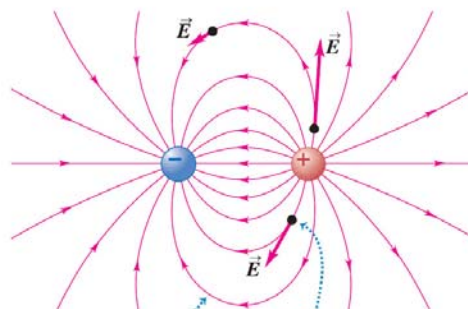
Fra figuren har vi at  $\cos \theta = \frac{L/2}{r}$ , som gir

$$\vec{E} = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{r^2} \frac{L}{2r} \hat{i} = k \cdot \frac{qL}{r^3} \hat{i} = -k \cdot \frac{\vec{p}}{r^3},$$

der vi har brukt at den elektriske dipol (som peker fra negativ til positiv ladning) er gitt ved  $\vec{p} = qL = qL(-\hat{i})$ .

Merk at det elektriske feltet synker med  $r$  som  $1/r^3$ . Dette er rett for alle punkter (i alle retninger) langt unna en dipol, der det altså er  $1/r^2$  for en punktladning. Se eksempler 21.8 og 21.14 i Young & Freedman 13th Ed.

Retningen på feltet er i motsatt retning av dipolmomentet. Dette gjelder kun i denne midtlinja. Husk at feltlinjene fra en dipol ser ut som vist til høyre. Vi har studert kun  $\vec{E}$  på midtlinja.



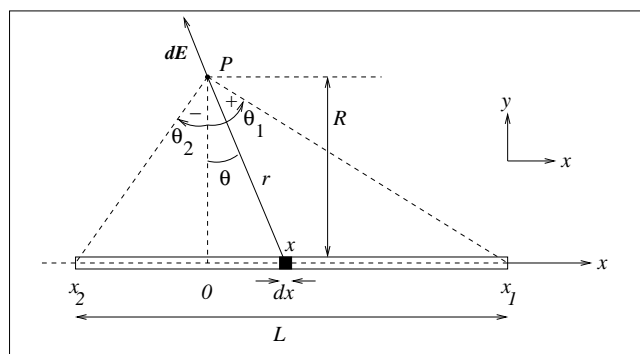
### Oppgave 2. Ladet stav.

a) Med "linjeladning" (dvs. ladning per lengdeenhet)  $\lambda$  må ladningene  $dq$  og  $Q$  på henholdsvis en liten lengde  $dx$  og på hele staven bli

$$dq = \lambda dx \quad Q = \lambda L$$

b) Elektrisk felt i pkt. P i avstand  $r$  fra lengdeelement  $dx$  i posisjon  $x$  (som vist i figuren):

$$d\vec{E} = k \lambda \frac{dx}{r^2} \hat{r}$$



der som vanlig  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ . Fra figuren ser vi at denne vektoren har komponentene

$$dE_x = -dE \sin \theta = -\frac{k \lambda dx}{r^2} \sin \theta \quad dE_y = dE \cos \theta = \frac{k \lambda dx}{r^2} \cos \theta$$

Her har vi valgt  $x = 0$  når  $\theta = 0$ , og fortegnet stemmer med oppgaveteksten, dvs  $\theta > 0$  når  $x > 0$ . Vi bruker tipset i oppgaven og uttrykker  $dx$  og  $1/r^2$  ved vinkelen  $\theta$ :

$$\left. \begin{aligned} x = R \tan \theta &\Rightarrow dx = \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} \\ r = \frac{R}{\cos \theta} &\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{R^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dx}{r^2} = \frac{d\theta}{R}$$

De søkte komponentene  $E_x$  og  $E_y$  av feltet  $\vec{E}$  i punktet  $P$  fra hele staven får vi ved å integrere  $dE_x$  og  $dE_y$ :

$$E_x = \int_{\text{staven}} dE_x = -\frac{k\lambda}{R} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta d\theta = \frac{k\lambda}{R} \left[ \cos\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_y = \int_{\text{staven}} dE_y = \frac{k\lambda}{R} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \cos\theta d\theta = \frac{k\lambda}{R} \left[ \sin\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin\theta_1 - \sin\theta_2).$$

KOMMENTAR: Her kunne en ha vært "uheldige" og startet med sammenhengen  $x = r \sin\theta$ , som gir  $dx = r \cos\theta d\theta + \sin\theta dr$ , ettersom både  $\theta$  og  $r$  varierer med  $x$ . Men det går bra likevel: Vi har  $\cos\theta = R/r$ , dvs  $r = R/\cos\theta$ , og dermed

$$dr = -R \frac{1}{\cos^2\theta} (-\sin\theta) d\theta$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{dx}{r^2} &= \frac{r \cos\theta d\theta + \sin\theta dr}{r^2} \\ &= \frac{\cos\theta d\theta \cdot \cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta \cdot R \sin\theta d\theta}{R^2} \\ &= \frac{d\theta}{R} (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

c) Med  $P$  like langt fra stavens to ender er  $\theta_1 = -\theta_2$  og følgelig  $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0$  og  $\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\sin\theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2/4}$ . Dermed:

$$E_x = 0$$

og

$$E = E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{R^2 + L^2/4}}.$$

Langt unna staven, dvs  $R \gg L$ : Vi kan nå erstatte kvadratroten med  $R$ , idet vi kan neglisjere  $L^2/4$  i forhold til  $R^2$ . Vi får da:

$$E \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Dette er det samme som feltet fra en punktladning  $Q$  i avstand  $R$ . Ikke uventet: Langt unna ser staven essensielt ut som en punktladning med total ladning  $Q = \lambda L$ .

d) En uendelig lang stav oppnår vi ved å la  $\theta_2 \rightarrow -\pi/2$  og  $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ . Da blir igjen  $E_x = 0$  og følgelig

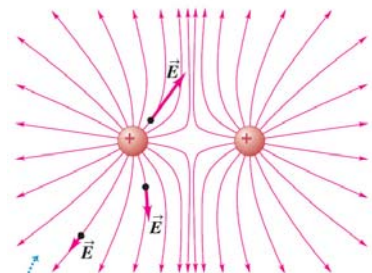
$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Med andre ord: Feltet fra en uendelig lang linjeladning faller av omvendt proporsjonal med  $R$ .

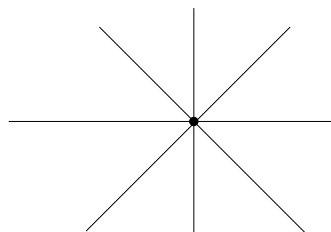
### Oppgave 3. Feltlinjer.

a) i) Feltlinjer rundt to like store positive punktladninger:

"Nærbilde". Like mange feltlinjer ut fra hver ladning  $+q$  siden de er like. Her valgt 18 feltlinjer fra hver, og feltlinjene går ut til uendelig.

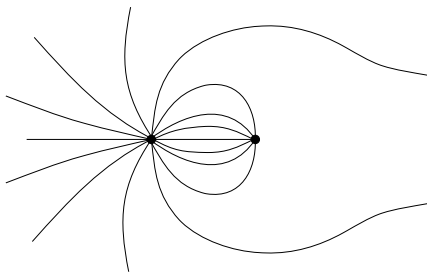


Riktig langt unna ser vi de to ladningene som én punktladning  $+2q$ . Her valgt kun 8 feltlinjer totalt, og de går til uendelig.

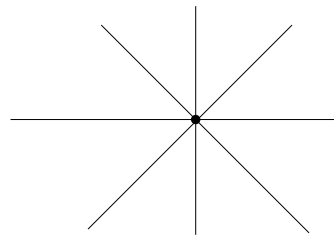


a) ii) Feltlinjer rundt punktladninger  $-2q$  og  $q$ :

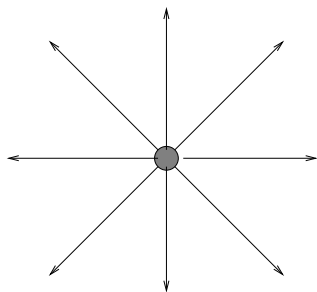
"Nærbilde". Like mange feltlinjer ut per positiv ladning  $q$  som inn per negativ ladning  $-q$ , derfor dobbelt så mange inn mot  $-2q$  som ut fra  $q$ . De "resterende" må komme fra uendelig. Det er en feil i figuren: det mangler en horisontal feltlinje ut fra  $+q$  mot høyre og til uendelig! Det skal da bli 8 linjer ut fra  $q$  og 16 linjer inn til  $-2q$ .



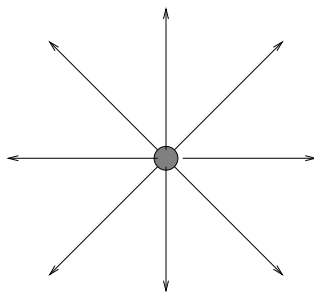
Riktig langt unna ser vi essensielt en punktladning  $-2q + q = -q$ , dvs. feltlinjene går radielt *inn* mot ladningen:



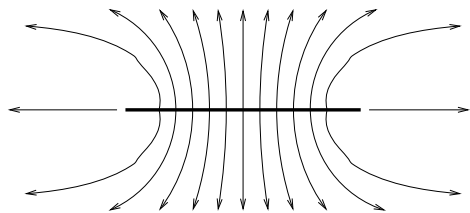
b) i) stav, plan normalt på, nært



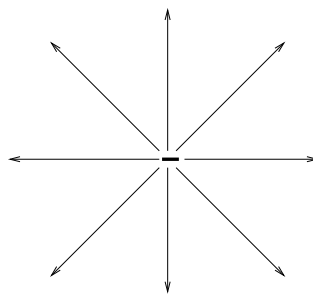
stav, plan normalt på, langt unna



b) ii) stav, plan inneholder staven, nært



stav, plan inneholder staven, langt unna



Kommentar til oppgave 3: Skissene vist er bare *kvalitative*, ikke *kvantitative*. Legg spesielt merke til at langt unna ser alt ut som en punktladning. På nært hold kan en som regel benytte symmetribetraktninger kombinert med det en vet om feltet i umiddelbar nærhet av eventuelle punktladninger til å tegne opp et temmelig korrekt bilde av feltlinjene.

#### Oppgave 4. Fluks. Gauss' lov

Den lukkede flate  $S$  har sideflater med areal  $A_i = a^2$ , der  $i = x, y, z$ . Retningen på  $d\vec{A}$  er normalt på sideflata som figuren viser. Når vi beregner fluksen vil sideflater hvor  $\vec{E} \perp d\vec{A}$  ikke gi noe bidrag (prikkproduktet er null).

i)  $\vec{E} = E_x \hat{i} = C \hat{i}$  = konstant medfører at

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{C \cdot a^2}_{\text{flate } x=a} + \underbrace{(-C \cdot a^2)}_{\text{flate } x=0} + \underbrace{0+0+0+0}_{\text{andre flater: } \vec{E} \perp d\vec{A}} = 0.$$

Altså bidrar bare 2 av de 6 flatene, og siden  $E$ -feltet er uavhengig av  $x$ , blir fluks inn lik fluks ut og total fluks blir lik null. Ladning innefor  $S$  blir da ifølge Gauss' lov:

$$Q = \epsilon_0 \Phi_E = 0.$$

ii)  $\vec{E} = E_x \hat{i} = C \cdot x \hat{i}$  gir tilsvarende

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{Ca \cdot a^2}_{\text{flate } x=a} + \underbrace{C \cdot 0 \cdot a^2}_{\text{flate } x=0} + \underbrace{0+0+0+0}_{\text{andre flater: } \vec{E} \perp d\vec{A}} = Ca^3$$

og

$$Q = \epsilon_0 \Phi_E = \epsilon_0 Ca^3.$$

iii)  $\vec{E} = E_x \hat{i} = C \cdot x^2 \hat{i}$  gir videre

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{Ca^2 \cdot a^2}_{\text{flate } x=a} + \underbrace{C \cdot 0 \cdot a^2}_{\text{flate } x=0} + \underbrace{0+0+0+0}_{\text{andre flater: } \vec{E} \perp d\vec{A}} = Ca^4 \quad \text{og} \quad Q = \epsilon_0 Ca^4.$$

iv)  $\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = C \cdot y \hat{i} + C \cdot x \hat{j}$ .

Når  $E_x$  ikke er avhengig av  $x$  vil fluks ut ved flata  $x = a$  være lik fluks inn ved flata  $x = 0$ , slik at netto fluks blir 0. Tilsvarende argument gjelder for fluks i  $y$ -retning og i  $z$ -retning er det ingen felt slik at fluks i denne retning er null. Totalt:  $\Phi_E = 0$ . Om man vil, uttrykt matematisk oppdelt på hver koordinatretning:

$$\Phi_{E,x} = \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a Cy \, dy \, dz - \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a Cy \, dy \, dz = C \frac{a}{2} a^2 - C \frac{a}{2} a^2 = 0, \quad \text{likedan} \quad \Phi_{E,y} = 0 \Rightarrow Q = 0.$$

Alternativ måte å finne  $Q$  på er å bruke Gauss' lov på differensialform:  $\rho(x, y, z) = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(x, y, z)$ . Altså beregne divergensen til  $\vec{E}$  og så integrere  $\rho$  over kubene. Dette gir mindre arbeid:

$$\text{i) } \rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow Q = \rho a^3 = 0 \cdot a^3 = 0.$$

$$\text{ii) } \rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = \epsilon_0 C \Rightarrow Q = \rho a^3 = \epsilon_0 Ca^3.$$

$$\text{iii) } \rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = \epsilon_0 2Cx \Rightarrow Q = \int_{\text{kube}} \rho \, dx \, dy \, dz = \epsilon_0 2C \int_0^a x \, dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \epsilon_0 C(a^2 - 0^2) a a = \epsilon_0 Ca^4.$$

$$\text{iv) } \rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow Q = 0 \cdot a^3 = 0.$$

Merk at når rommet er divergensfritt i  $\vec{E}$  er det også ladningsfritt.

