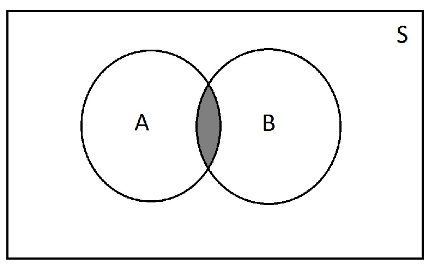
TMA4245 Statistikk
Vår 2015

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

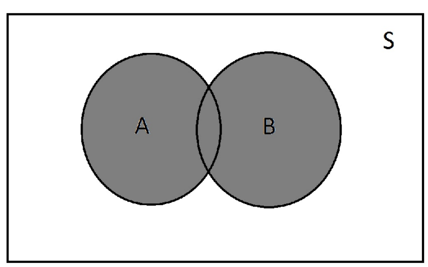
Øving nummer 2, blokk I
Løsningsskisse

Oppgave 1

Hendelsene A og B er ikke disjunkte, det vil si at de kan ha noen felles elementer. De fire hendelsene $A \cap B, A \cup B, A' \cap B$ og $A' \cap B'$ er representert med skravert område i venn-diagrammene i figur 1 til 4.



Figur 1: Venn-diagram for hendelsen $A \cap B$

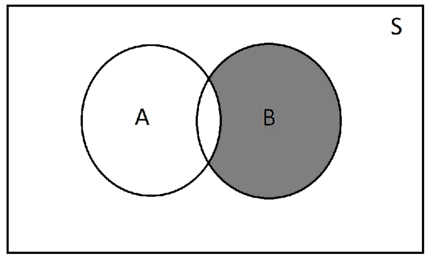


Figur 2: Venn-diagram for hendelsen $A \cup B$

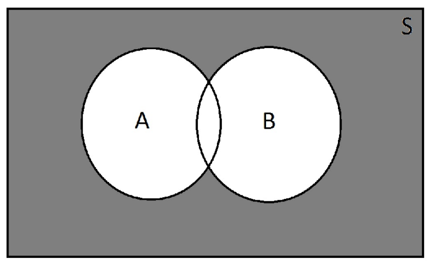
Fra venn-diagrammene i figur 2 og 4 ser vi at

$$(A' \cap B') \cup (A \cup B) = S,$$

der S er utfallsrommet.
Det vil si at $A' \cap B' = S \setminus (A \cup B)$.



Figur 3: Venn-diagram for hendelsen $A' \cap B$



Figur 4: Venn-diagram for hendelsen $A' \cap B'$

Oppgave 2

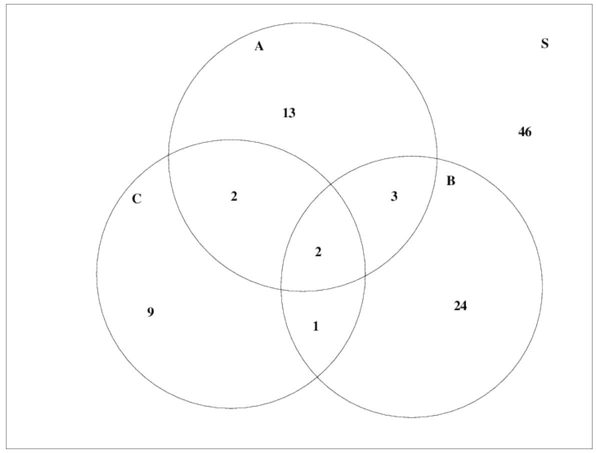
En eske inneholder 100 gjenstander som kan ha defekter av type A, type B og type C. Følgende defekter er oppgitt i oppgaven:

Beskrivelse	Symbol	Antall
Ingen defekt	$A' \cap B' \cap C'$	46
Har kun defekt av type A	$A \cap B' \cap C'$	13
Har kun defekt av type B	$A' \cap B \cap C'$	24
Har kun defekt av type C	$A' \cap B' \cap C$	9
Har defekt av type A og B, ikke C	$A \cap B \cap C'$	3
Har defekt av type A og C, ikke B	$A \cap B' \cap C$	2
Har defekt av type B og C, ikke A	$A' \cap B \cap C$	1
Har defekt av alle typer	$A \cap B \cap C$	2

La gjenstandene være nummerert 1, ..., 100. Et naturlig utfallsrom er da

$$S = \{1, 2, 3, ..., 99, 100\}.$$

Venn-diagrammet for defekter av type A, type B og type C er vist i figur 5. Vi har videre



Figur 5: Venn-diagram for defekter av type A, type B og type C.

Beskrivelse	Symbol	Antall
Minst en type defekt	$A \cup B \cup C$	54
Bare en type defekt	$(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$	46
Minst to typer defekt	$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$	8

Oppgave 3

I en knivskuff ligger det 20 kniver. 10 har hvitt skaft og 8 har rustfritt blad, mens 6 ikke har noen av disse egenskapene. Definer

H : hvitt skaft
R : rustfritt blad.

Fra antallene oppgitt i oppgaven kan vi beregne

$$P(H) = \frac{10}{20}$$
$$P(R) = \frac{8}{20}$$
$$P(H^* \cap R^*) = \frac{6}{20}$$
$$P(H \cup R) = \frac{14}{20}$$

og ved hjelp av addisjonssetiningen kan vi beregne

$$P(H \cap R) = P(H) + P(R) - P(H \cup R) = \frac{4}{20}.$$

Vi kan dermed sette opp venn-diagrammet i figur 6.

a) Av venn-diagrammet ser vi en at det kun er en mulighet for å trekke fire hvite kniver med rustfritt blad, da det kun finnes fire kniver med denne kombinasjonen. Tilsammen har vi $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$ ulike måter å trekke ut fire kniver av de 20. Vi får dermed

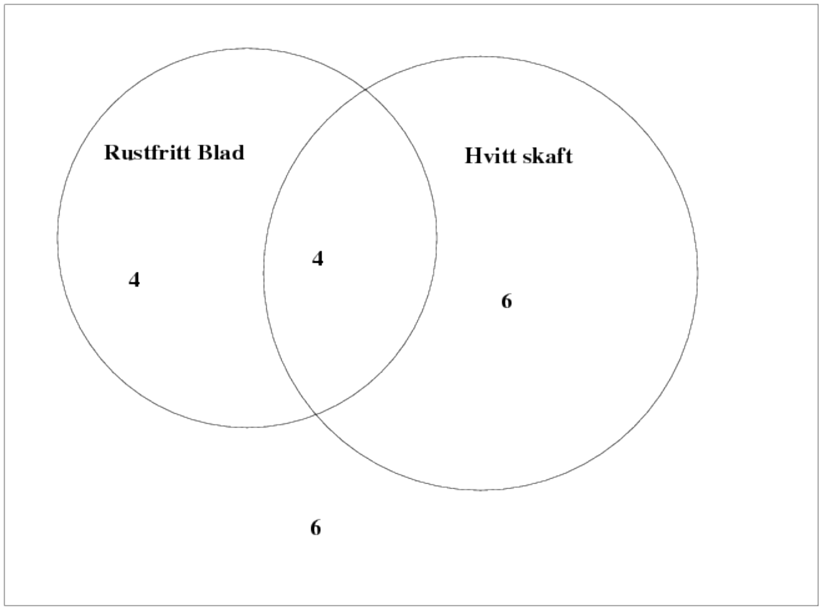
$$P(\text{Alle fire har hvitt skaft og rustfritt blad}) = \frac{1}{\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}} = 0.0002.$$

b) Vi må nå trekke en av de fire knivene som har både hvitt skaft og rustfritt blad. Vi må videre trekke to av de seks knivene som hverken er hvite eller har rustfritt blad. Den siste kniven må trekkes blandt de resterende 10. Dette gir

$$p = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}} = 0.124.$$

Oppgave 4

Det er enklest å se på de komplementære hendelsene A' og B':



Figur 6: Venn-diagram

$$\begin{aligned} P(A') &= P(\text{mynt}|\text{falsk}) \cdot P(\text{falsk}) + P(\text{mynt}|\text{ekte}) \cdot (\text{ekte}) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Samme verdi gjelder også for $P(B')$, dvs. $P(B') = \frac{1}{4}$.

Videre har vi

$$P(A' \cap B') = P(B'|A')P(A') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

(Hvis 1. kast er mynt, er den ekte mynten trukket først. Dermed er første tallet her $\frac{1}{2}$).

Dermed er $P(A' \cap B')$ ikke lik $P(A') \cdot P(B')$, slik at A' og B' er avhengige. Da er også A og B avhengige.

Hvis ikke en ser på komplementære hendelser, blir regningen som følger.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{kron} \cap \text{falsk}) + P(\text{kron} \cap \text{ekte}) \\ &= P(\text{kron}|\text{falsk})P(\text{falsk}) + P(\text{kron}|\text{ekte})P(\text{ekte}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

De to kastene er like, så $P(B) = P(A)$.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \cap B \cap \text{ekte}) + P(A \cap B \cap \text{falsk}) \\ &= P((A \cap B)|\text{ekte})P(\text{ekte}) + P((A \cap B)|\text{falsk})P(\text{falsk}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Konklusjonen er den samme, $P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$, dermed er hendelsene avhengige.

Oppgave 5

Definer

M : Mann
K : Kvinne
F : Fargeblind

med oppgitte sannsynligheter

$P(M) = 0.5$
$P(K) = 0.5$
$P(F|M) = 0.05$
$P(F|K) = 0.0025.$

Vi skal beregne $P(M|F)$, og bruker Bayes regel:

$$\begin{aligned} P(M|F) &= \frac{P(M \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(M)\,P(F|M)}{P(M)\,P(F|M) + P(K)\,P(F|K)} \\ &= \frac{0.5 \times 0.05}{0.5 \times 0.05 + 0.5 \times 0.0025} \\ &= 0.952. \end{aligned}$$

Oppgave 6

a) Ett par, dvs 2 kort med samme verdi og 3 kort med ulike andre verdier. Det finnes $\binom{13}{1}$ verdier paret kan ta, og de to kortene i paret kan velges på $\binom{4}{2}$ måter. Verdiene til de tre siste kortene kan velges på $\binom{12}{3}$ ulike måter (etter at verdien på paret er valgt ut, har en tolv ulike verdier igjen). Hvert av disse tre kortene har $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mulige fargekombinasjoner. Tilsammen har en $\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}$ ulike måter å trekke ut 5 kort fra 52. Dette gir

$$P(\text{Ett par}) = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = 0.4226.$$

b) To par, dvs to kort med en verdi, to kort med en annen verdi og ett kort med en tredje verdi. Vi har nå $\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}$ kombinasjoner av verdiene på parene, og de to kortene i hvert par kan kombineres på $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ måter. Det siste kortet kan velges på $\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ ulike måter (etter at verdiene på parene er valgt ut, har en 11 ulike verdier igjen), og kortet har $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ulike fargekombinasjoner. Vi får dermed

$$P(\text{To par}) = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = 0.0475.$$

c) Tress, dvs tre kort med samme verdi samt to kort med to forskjellige verdier. De tre like kan ta $\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ verdier, og de kan kombineres på $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ulike måter. De resterende to kortene kan velges på $\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}$ ulike måter, der hvert kort har $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ fargekombinasjoner. Dette gir

$$P(\text{Tress}) = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = 0.0211.$$

d) Straight, dvs fem kort med verdier i rekkefølge uansett kortfarge. Vi har tilsammen 10 måter å lage en straight (A 2 3 4 5, 2 3 4 5 6, ..., 10 11 12 13 A). Hvert av de fem kortene kan velges blandt fire farger.

$$P(\text{Straight}) = \frac{10 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}^5}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = 0.0039.$$

e) Flush, dvs fem kort i samme farge. Det er fire farger i en kortstokk. Når en farge er valgt, må de fem kortene trekkes fra de 13 verdiene.

$$P(\text{Flush}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = 0.0020.$$

f) Fullt hus, dvs ett par og tress. Ett par kan velges av tretten verdier, og tressen kan velges av de resterende 12.

$$P(\text{Fullt hus}) \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} = 0.0014.$$

g) Fire lange, dvs fire kort med samme verdi. De fire kortene tar en av 13 verdier, og de kan kombineres på $\binom{4}{4}$ måter. Det resterende kortet velges fra 12 mulige verdier med fire mulige fargekombinasjoner.

$$P(\text{Fire lange}) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = 0.00024.$$

h) Straight flush, dvs fem kort i rekkefølge i samme farge. I hver farge har vi ti straighter, og det finnes fire farger. Dette gir

$$P(\text{Straight flush}) = \frac{10 \cdot 4}{\binom{52}{5}} = 0.0000154.$$

i) Royal straight flush, dvs straight flush med ess som høyeste kort. Av hver av straightene er det bare en i hver farge som har ess på toppen.

$$P(\text{Royal straight flush}) = \frac{4}{\binom{52}{5}} = 0.00000015.$$