NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen: Iver Brevik,
Tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I EMNE TEP 4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

(Bokmål)

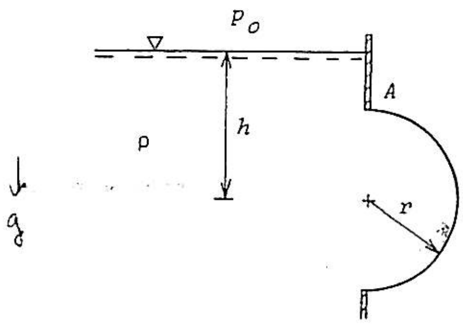
Torsdag 29. november 2007
Tid: 0900 – 1300

Studiepoeng: 7,5

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Sensuren faller innen 21.12.07

Oppgave 1.



Et vindu i en akvarievegg er formet som en halvsylinder med radius r og bredde b (inn i figurplanet). Vinduet er plassert som figuren viser, slik at sylinderens akse er horisontal og beliggende i avstand h under vannoverflaten. Vannets tetthet er ρ, tyngdens akselerasjon er g. Atmosfæretrykket er p_o.

a) Se først bort fra p_o, og finn størrelsen F_H av den totale horisontale kraft $\vec{F}_H$ på vindusflaten.

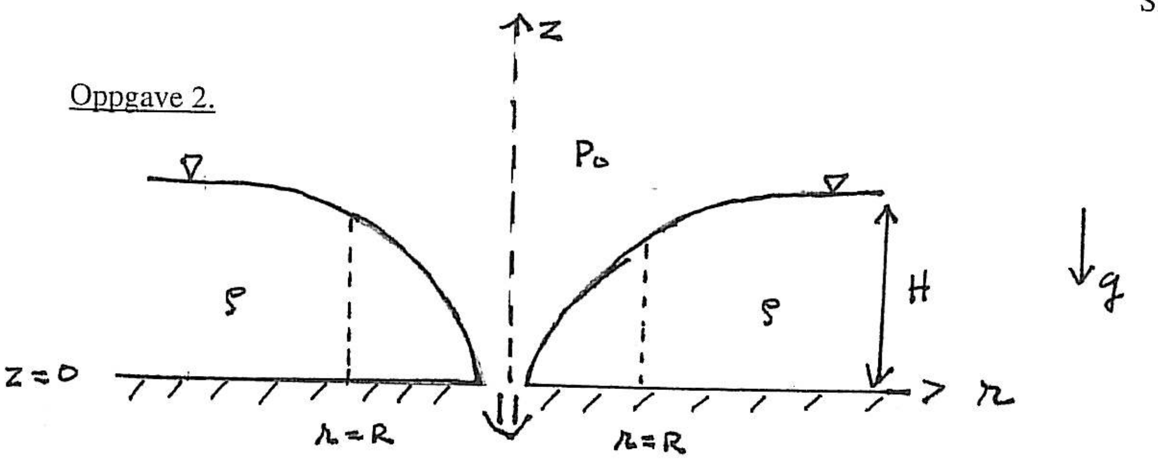
b) Finn tilsvarende størrelsen F_V av den vertikale kraft $\vec{F}_V$ på vindusflaten, og finn hvilken vinkel α resultantkraften $\vec{R} = \vec{F}_H + \vec{F}_V$ danner med horisontalaksen.

c) Finn dybden h_{CP} av trykksenteret for $\vec{F}_H$. Vil det ha noe å si for kreftene om vinduet vender innover istedenfor utover? Begrunn svaret.

Oppgitt:
For et rektangel med bredde b og høyde L er arealets treghetsmoment omkring en horisontal akse x (her inn i planet) gjennom centroiden lik

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}.$$

Oppgave 2.



Vann strømmer ut fra et lite hull i bunnen av en tank, som vist på figuren. Betrakt strømningsfeltet bare i området $r \geq R$, hvor R er en gitt avstand fra origo (hullet). I dette området er hastigheten til vannet tilnærmet gitt som

$$\bar{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = \left(0, \frac{\omega R^2}{r}, 0\right).$$

Atmosfæretrykket er p_0. I stor avstand, $r \to \infty$, er vanndybden gitt lik H. Tyngdens akselerasjon er g, vannets tetthet er ρ. Se bort fra vannets viskositet, og legg koordinatsystemet som på figuren slik at $z = 0$ er bunnplaten.

a) Regn ut alle komponentene av virvlingen $\bar{\varsigma} = \bar{\nabla} \times \bar{V}$, og finn høyden $z = h(r)$ av den frie overflate uttrykt ved r og de gitte konstanter.

b) Finn trykket $p = p(r,z)$ i et vilkårlig punkt i vannet.

c) Finn den totale kraft F_z på bunnplaten $z = 0$, i området mellom $r = R$ og en ytre radius $r = R_1$, $R_1 > R$.

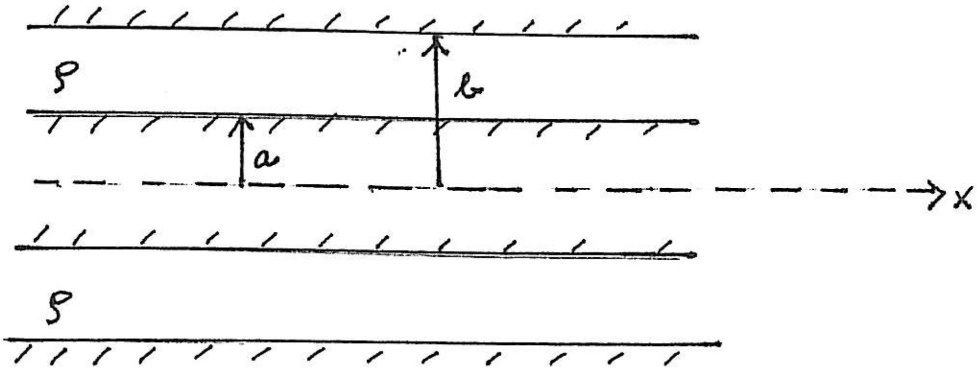
d) Finn strømfunksjonen ψ samt sirkulasjonen Γ. Du finner at $\Gamma \neq 0$ selv om $\varsigma_z = 0$. Kan du kommentere det?

Oppgitt
I sylinderkoordinater er generelt

$$\bar{\nabla} \times \bar{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z},\ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

Oppgave 3.

a)



I et uendelig langt horisontalt rør med sirkulært tverrsnitt er det sentrisk i røret plassert en massiv sylinder. Rørets radius er b mens sylinderens radius er a. Rommet mellom rør og sylinder er fylt med et fluid med dynamisk viskositet μ. Fluidet er utsatt for en konstant trykkgradient $\partial p/\partial x$ i røraksens retning (x-retningen), og dette gjør at bare den horisontale hastighetskomponenten $u = u(r)$ er forskjellig fra null. Strømningen er stasjonær. Se bort fra tyngden.

Det opplyses at Navier-Stokes' ligning i horisontalretningen reduserer seg til

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Finn herav $u = u(r)$ i mellomrommet, når konstanten $\partial p/\partial x$ er en kjent størrelse.

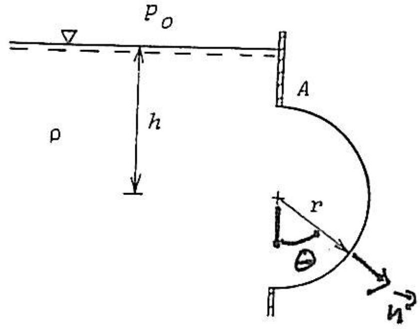
b) Dersom indre sylinder ikke holdes på plass, vil den akselerere horisontalt på grunn av skjærspenningene τ som virker på flaten $r = a$. Anta at indre sylinder "slippes" ved tiden $t = 0$. Beregn horisontalakselerasjonen a_x i dette øyeblikket. Sett massen av indre sylinder lik M, per lengdeenhet i x-retning.

Oppgitt:

$$\tau=\mu\frac{du}{dr}$$

c) Gitt et todimensjonalt stasjonært strømningsfelt, hvor strømfunksjonen i kartesiske koordinater er $\psi = \psi(x, y)$. Vis hvordan differansen $\psi_2 - \psi_1$ mellom to strømlinjer er relatert til volumgjennomstrømningen Q mellom strømlinjene.

Løsning Oppgave 1



a) $F_H = \gamma h_{CG} A_x$, hvor $A_x = 2rb$ er det horisontalt projiserte areal.

Da $h_{CG} = h$, er

$$\underline{F_H = 2\gamma h r b}$$

b) $F_V = \gamma \mathcal{V}$ er tyngden av vannet over vindusflaten. Da volumet er $\mathcal{V} = \frac{1}{2}\pi r^2 b$, blir

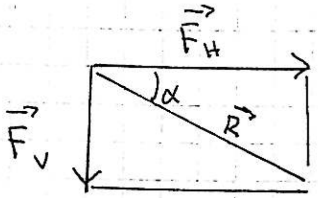
$$\underline{F_V = \frac{1}{2}\gamma \pi r^2 b}$$

Alternativt kan F_V finnes ved integrasjon:

Da $p = \gamma(h + r\cos\theta)$ er trykket på vinduet, er kraften på et element dA lik $d\vec{F} = p\vec{n}\,dA = \gamma(h + r\cos\theta)\vec{n}\, rb\, d\theta$, hvor $\vec{n}$ er normalvektor utover. Integrerer over vinduet,

$$\underline{F_Z} = \int dF_Z = \gamma r b \int_0^{\pi} (h + r\cos\theta)\cos\theta\, d\theta =$$

$$= \gamma r b \Big\{ h \underbrace{\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta}_{0} + r \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta}_{\frac{1}{2}\cdot\pi} \Big\} = \underline{\frac{1}{2}\gamma\pi r^2 b} \quad (\equiv F_V), \text{ som ovenfor}$$

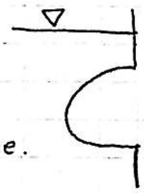


$$\underline{\tan\alpha} = F_V/F_H = \underline{\pi r/(4h)}.$$

c) $$h_{CP} = h_{CG} + \frac{I_{xx}}{h_{CG}\cdot A_x} = h + \frac{\frac{1}{12}b\cdot(2r)^3}{h\cdot 2rb}$$

$$\underline{h_{CP} = h + \frac{1}{3}\frac{r^2}{h}}$$

Hvis vinduet vender innover:



$\vec{F_H}$ er den samme fordi A_x er den samme.

Størrelsen F_V av $\vec{F_V}$ er også den samme, fordi volumet $\mathcal{V}$ er det samme. Men $\vec{F_V}$ er nå rettet oppover. Trykket er størst på undersiden.

TEP 4105 FLUIDMEKANIKK 29. november 2007

Oppgave 2

$$\vec{V} = \left(0, \frac{\omega R^2}{r}, 0\right) \text{ gir}$$

a) $$\nabla \times \vec{V} = \left(-\frac{\partial V_\theta}{\partial z}, 0, \frac{1}{r}\frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r}\right) = (0,0,0).$$

Dermed er Bernoullikonstanten den samme overalt.

Bernoulli mellom et vilkårlig punkt ($r > R$) på overflaten og overflaten ved $r = \infty$,

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega R^2}{r}\right)^2 + g h(r) = \frac{p_0}{\rho} + g H$$

$$\underline{h(r) = H - \frac{1}{2g}\frac{\omega^2 R^4}{r^2}}$$

b) Bernoulli mellom et vilkårlig punkt (r, z) og fri overflate ved $r = \infty$,

$$\frac{p(r,z)}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega R^2}{r}\right)^2 + g z = \frac{p_0}{\rho} + g H$$

$$\underline{p(r,z) = p_0 + \rho g (H - z) - \frac{1}{2}\rho \frac{\omega^2 R^4}{r^2}}$$

c) På bunnen er $p(r,0) = p_0 + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \frac{\omega^2 R^4}{r^2}$

Vertikalkraft på bunnen:

$$F_z = \int_R^{R_1} p(r,0) \cdot 2\pi r \, dr = 2\pi \left\{ (p_0 + \rho g H)\int_R^{R_1} r \, dr - \frac{1}{2}\rho \omega^2 R^4 \int_R^{R_1} \frac{dr}{r} \right\}$$

$$\underline{F_z = \pi \left\{ (p_0 + \rho g H)(R_1^2 - R^2) - \rho \omega^2 R^4 \ln \frac{R_1}{R} \right\}}$$

TEP4105 FLUIDMEKANIKK, 29. november 2007

Oppgave 2 d

Av $V_\theta = \frac{\omega R^2}{r}$, og $V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$ i planpolare koordinater,

får
$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\omega R^2}{r}$$

Enkleste løsning $\underline{\psi = -\omega R^2 \ln r}$, som for virvel med styrke $K = \omega R^2$.

Sirkulasjon
$$\underline{\Gamma} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = 2\pi r \cdot V_\theta = 2\pi r \cdot \frac{\omega R^2}{r} = \underline{2\pi \omega R^2}$$

At $\zeta_z = 0$ betyr at lokal vinkelhastighet $\omega_z = \frac{1}{2}\zeta_z$ er null. Likevel er $\Gamma \neq 0$. Henger sammen med at det er en singularitet i origo, som for en virvel.

Oppgave 3

a) Integrerer $\frac{d}{dr}\left(r \frac{du}{dr}\right) = \frac{r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1, \quad \frac{du}{dr} = \frac{r}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_1}{r}$$

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1 \ln r + C_2.$$

Grensebetingelser : $u(a) = 0$ gir $0 = \frac{a^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1 \ln a + C_2$

$u(b) = 0$ gir $0 = \frac{b^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1 \ln b + C_2$.

Herav $C_1 = -\frac{b^2 - a^2}{4\mu}\frac{\partial p/\partial x}{\ln b/a}$, $C_2 = -\frac{b^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{b^2 - a^2}{4\mu}\frac{\partial p/\partial x}{\ln b/a}$

$$\underline{u(r) = -\frac{\partial p/\partial x}{4\mu}\left[b^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln b/a}\ln\frac{r}{b}\right]}$$

TEP4105 FLUIDMEKANIKK, 29. november 2007

Oppgave 3 b)

Regner ut $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{\partial p/\partial x}{4\mu}\left[2r - \dfrac{b^2-a^2}{\ln b/a}\cdot\dfrac{1}{r}\right]$

På overflaten $r = a$ er skjærspenningen

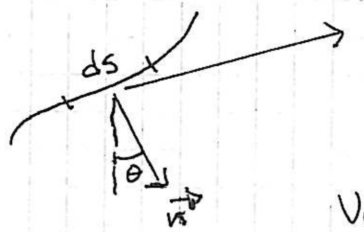
$$\tau = \mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=a} = \frac{1}{4}\frac{\partial p}{\partial x}\left[2a - \frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\cdot\frac{1}{a}\right]$$

Longitudinal kraft per lengdeenhet av indre sylinder:

$$F_x = \tau\cdot 2\pi a = \frac{1}{2}\pi a\frac{\partial p}{\partial x}\left[2a - \frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\cdot\frac{1}{a}\right] = M\cdot a_x$$

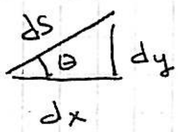
$$\underline{a_x = \frac{\pi a}{2M}\frac{\partial p}{\partial x}\left[2a - \frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\cdot\frac{1}{a}\right]}$$

c)



$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$

$\vec{n} = \vec{i}\sin\theta - \vec{j}\cos\theta$



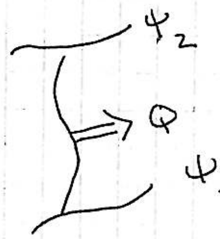
Volumgjennomstrømningen dQ gjennom et linje-element ds av en vilkårlig kurve i planet er $dQ = (\vec{V}\cdot\vec{n})ds$, hvor $\vec{n}$ er enhetsnormalen.

Av figuren er $\vec{n} = (\sin\theta, -\cos\theta)$, $dx = ds\cdot\cos\theta$, $dy = ds\cdot\sin\theta$. Ettersom $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, blir

$$dQ = (un_x + vn_y)ds = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\sin\theta + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\theta\right)\cdot ds$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot dx = d\psi.$$

Den totale Q finnes ved å integrere dQ langs en vilkårlig kurve mellom ψ_1 og ψ_2:



$$\underline{Q} = \int_1^2 dQ = \int_1^2 d\psi = \underline{\psi_2 - \psi_1}$$