TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

Øving 6, løsningsskisse.
Dipol. Platekondensatorer.

Oppgave 1 Potensial rundt dipol.

Vi skriver først V_a om til en funksjon av x og z ved å bruke relasjonene

$$\sin\theta = x/r, \quad \cos\theta = z/r, \quad r = (x^2+z^2)^{1/2}, \quad \text{som gir}$$

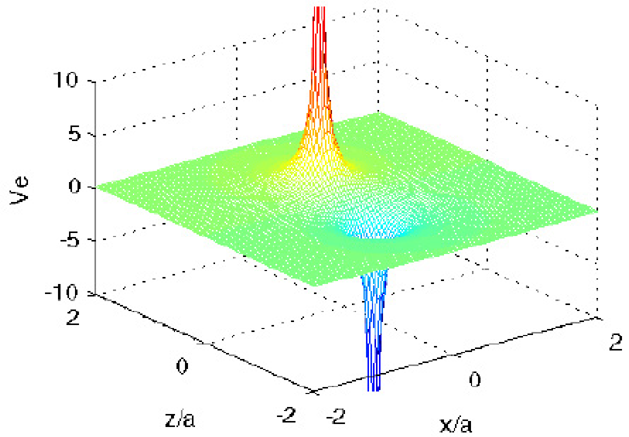
$$V_\mathrm{a} = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qa\,z/r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qaz}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+z^2)^{3/2}}.$$

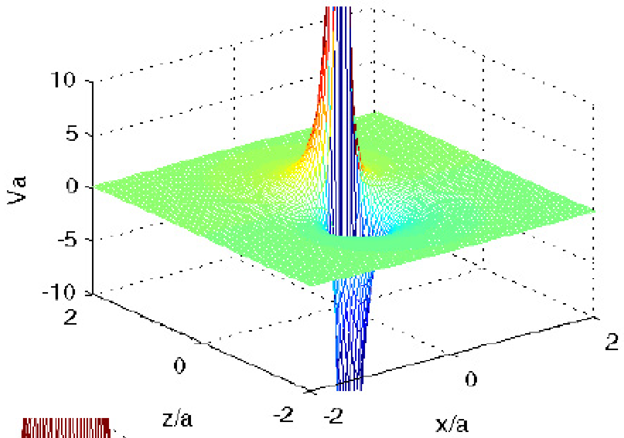
I plotteprogram bør vi bruke dimensjonsløse størrelser, og i oppgaveteksten er gitt konkrete tips:

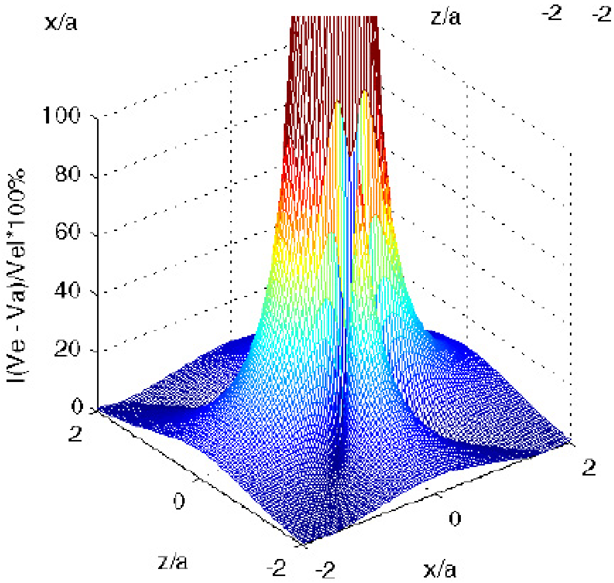
$$\begin{aligned}
\xi &= x/a, \\
\eta &= z/a, \\
v_\mathrm{e}(\xi,\eta) &= \frac{V_\mathrm{e}}{V_0} = V_\mathrm{e}\cdot\frac{4\pi\epsilon_0 a}{q} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+(\eta-1/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2+(\eta+1/2)^2}} \\
v_\mathrm{a}(\xi,\eta) &= \frac{V_\mathrm{a}}{V_0} = V_\mathrm{a}\cdot\frac{4\pi\epsilon_0 a}{q} = \frac{\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

I det nye dimensjonsløse (ξ,η)-planet ligger altså dipolen på η-aksen, i $(0,\ \pm 1/2)$. Et fornuftig område for plotting av funksjonene v_e og v_a kan dermed være for eksempel $-2<\xi<2$ og $-2<\eta<2$.

Den påfølgende Matlab-kode som plotter v_e, v_a og det prosentvise avviket $\Delta = \left|\dfrac{v_\mathrm{e}-v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{e}}\right|\cdot 100$ resulterer i de følgende tre figurer. Allerede utenfor det rektangulære området $[-1,-1;\ \ 1,1]$ er feilen mindre enn 10 %, men selvsagt er feilen svært stor nærme og spesiell stor mellom ladingene.







```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                 Losningsforslag til Potensial rundt dipol (øv 6)           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear; % Nullstille alle variabler og deres dimensjoner
% Velg omraadet -2 < x < 2 og -2 < z < 2 for plotting, med skrittlengde
% 2/50 langs baade x og z, dvs ca 100 x 100 punkter i alt
% z forskjøvet 0.01 for å unngå Ve(0,1/2)=0 og division by zero for Relavvik
[x,z] = meshgrid(-2:2/50:2,-2.01:2/50:2);
% Ve er det eksakte potensialet fra dipolen
Ve = (1./(sqrt(x.^2+(z-1/2).^2))-1./(sqrt(x.^2+(z+1/2).^2)));
% Va er dipolpotensialet til ledende orden i a/r naar r >> a
Va = z.*(x.^2.+z.^2).^(-3/2);
% Relavvik er relativ differanse mellom Ve og Va i prosent
Relavvik = 100*abs((Ve-Va)./(Ve));
figure(1); % Ber om figur
subplot(2,2,1); % Viser opptil fire figurer i 2x2-mønster
% mesh(x,y,z) tegner opp et 3D-plott av z som funksjon av x og y
% obs i vår notasjon: y -> z og z -> Ve:
mesh(x,z,Ve);
% Kommandoen axis([a b c d e f]) setter aksene for 3D-plot slik:
% a < x < b, c < y < d, e < z < f
axis([-2 2 -2 2 -10 10]);
% Kommandoen caxis([zmin zmax]) setter fargeskalaen slik at blaatt
% tilsvarer zmin og rodt tilsvarer zmax
caxis([-10 10]);
xlabel('x/a'); % Tekst paa aksene
ylabel('z/a');
zlabel('Ve');
subplot(2,2,2); % Plotter Va ved siden av Ve
mesh(x,z,Va);
axis([-2 2 -2 2 -10 10]);
caxis([-10 10]);
xlabel('x/a');
ylabel('z/a');
zlabel('Va');
subplot(2,2,3); % Plotter Relavvik under Ve og Va
mesh(x,z,Relavvik);
axis([-2 2 -2 2 0 100]); % Plotter Relavvik fra 0% til 100%:
% Fargeskala settes for Relavvik mellom 0 og 100
caxis([0 100]);
xlabel('x/a');
ylabel('z/a');
zlabel('|(Ve - Va)/Ve|*100%');
```

Oppgave 2 Sjekk av $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

a) $V(x) = kQ\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}$, slik at det er kun x-avhengighet og dermed $\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial}{\partial x}$ og $\vec{E} = E_x\,\hat{\mathbf{i}}$ med

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = -kQ\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+a^2\right)^{-3/2}\cdot 2x = kQ\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \underline{kQ\frac{x}{r^3}},$$

med $r = \sqrt{x^2+a^2}$, som funnet i Kap. 21 - Eks. 4.

b) Med $V(r) = \frac{k}{2}\frac{Q}{R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)$ er det kun r-avhengighet og dermed $\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial}{\partial r}$ og $\vec{E} = E_r\,\hat{\mathbf{r}}$ med

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{k}{2}\frac{Q}{R}\left(-2\frac{r}{R^2}\right) = \underline{kQ\frac{r}{R^3}},$$

som funnet i Kap. 22 - Eks. 1.

c) Med $V(r) - V(r_{\rm b}) = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \dfrac{r_{\rm b}}{r}$ er det kun r-avhengighet og dermed $\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r}$ (sylindersymmetri eller kulesymmetri gjør ingen forskjell) og $\vec{E} = E_r \, \hat{\mathbf{r}}$ med

$$E_r = -\frac{{\rm d}\,(V(r) - V(r_{\rm b}))}{{\rm d}r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{{\rm d}\,(\ln r_{\rm b} - \ln r)}{{\rm d}r} = \underline{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}},$$

som funnet i Kap. 22 - Eks. 5.

d) Med $V_{\rm a}(r,\theta) = k \dfrac{p\cos\theta}{r^2}$ må vi bruke

$$\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(r,\theta) &= -\vec{\nabla} V_{\rm a}(r,\theta) \\
&= -\left(\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) k \frac{p\cos\theta}{r^2} \\
&= \underline{2k \frac{p\cos\theta}{r^3} \, \hat{\mathbf{r}} \; + \; k \frac{p\sin\theta}{r^3} \, \hat{\theta}}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Vi merker oss at feltet fra en elektrisk dipol i stor avstand r fra dipolen faller av som $1/r^3$, altså raskere enn feltet fra en elektrisk "monopol", dvs en punktladning, som faller av som $1/r^2$. Feltbidragene fra de to ladningene med motsatt fortegn kansellerer hverandre delvis, men ikke fullstendig, ettersom retningen på de to bidragene til $\vec{E}$ alltid vil være litt forskjellig.

e) Hvis $\theta = 0$, får vi

$$\underline{E_r = 2k \frac{p}{r^3} \quad , \qquad E_\theta = 0} \,.$$

Dette virker rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på z-aksen, dvs. på forbindelseslinja mellom ladningene. Da må det elektriske feltet ha retning langs z-aksen og peke i z-retning (samme retning som $\vec{p}$). Radiell retning blir nettopp langs z-aksen, mens θ-retningen blir langs x-aksen.

Hvis $\theta = \pi/2$, får vi

$$\underline{E_r = 0 \quad , \qquad E_\theta = k \frac{p}{r^3}} \,.$$

Dette virker også rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på x-aksen (midtnormalen) og det elektriske feltet må åpenbart ha retning langs negativ z-akse. Radiell retning blir nettopp langs x-aksen, mens θ-retningen blir langs negativ z-akse. Dette resultatet fant vi også i Øving 2, opg. 1, men da med andre koordinatretninger.

Setter vi inn $r = 0$ i uttrykkene for E_r og E_θ, ser vi at begge to går mot uendelig. Det er imidlertid ikke et reelt problem fordi vi nå forsøker å bruke uttrykket for E utenfor gyldighetsområdet $r \gg a$. Feltet i origo er langt fra uendelig, og heller ikke vanskelig å regne ut. Det klarer du helt sikkert selv!

Oppgave 3. Platekondensator.

a) Når ladningen er uniformt fordelt på innsiden er det elektriske feltet mellom platene homogent og bestemt av potensialforskjellen V_1 mellom platene som altså har avstand $\ell_1 = 3,0$ mm:

$$E = \frac{V_1}{\ell_1} = \frac{300\,\mathrm{V}}{3,0\,\mathrm{mm}} = 100\,\mathrm{V/mm} = \underline{0,10\,\mathrm{MV/m}}. \qquad (2)$$

Retningen er normalt på platene i retning fra positiv til negativ plate.

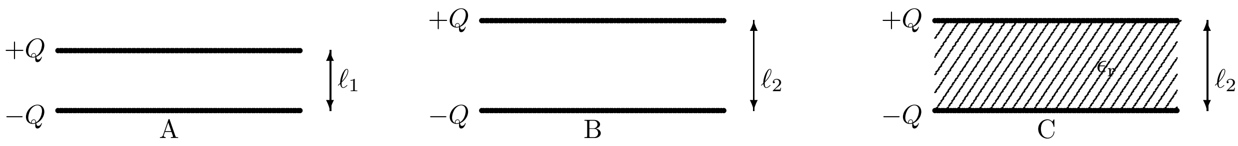
b) Utenfor platene er det elektriske feltet lik null. Dette gjelder når vi altså ser bort fra endeeffekter, som oppgitt. En begrunnelse med beregning i neste punkt.

c) Raskeste måte å finne kapasitansen er å bruke formel for parallellplatekondensator:

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{\ell_1} = \frac{8,85\,\mathrm{pF/m} \cdot 0,10 \cdot 0,50\,\mathrm{m}^2}{3,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 148\,\mathrm{pF} = \underline{0,15\,\mathrm{nF}}\,.$$

En beregning helt fra bunnen (bruke Gauss' lov til å finne E mellom parallellplater) er vist på siste side i dette l.f.

d) Endringen i kondensatoren kan illustreres ved følgende figur:



I (A) blir kondensatoren ladet opp, og får ladningen Q på hver av platene. Spenningskilden som er brukt for å lade opp kondensatoren blir så koplet i fra, og avstanden mellom platene endres fra l_1 til l_2 (A $\rightarrow$ B). Siden speningskilden er frakoplet, *må ladningen Q på kondensatorplatene bli uendra*, mens spenningen V kan endres. (Dersom spenningskilden var beholdt tilkoplet ville spenningen V bli uendra og ladningen ville økt). Etter at det dielektriske materialet er satt inn, er situasjonen som vist i (C), og det elektriske potensialet over platene i denne situasjonen, $V_2 = 0,10 \cdot V_1$, der V_1 er det elektriske potensialet i situasjonen vist i (A). Skal finne uttrykk for ϵ_r.

Når kapasitansene i situasjonen (A) og (C) er gitt ved henholdsvis C_1 og C_2 får vi:

$$C_1 = \frac{Q}{V_1} \quad \text{og} \quad C_2 = \frac{Q}{V_2} \qquad \Rightarrow \quad C_2 = C_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = C_1 \cdot 10\,.$$

Kapasitansen for parallellplatekondensatoren kan, som vi har sett, uttrykkes:

$$C_2 = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot \frac{A}{\ell_2} \qquad C_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{\ell_1}\,,$$

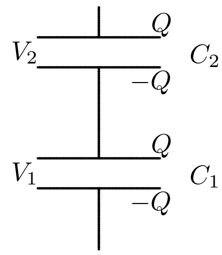
og dividert med hverandre får vi:

$$\epsilon_r = \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{\ell_2}{\ell_1} = \underline{20}\,.$$

Kapasitansen øker altså 20 ganger pga. materialet (ved ϵ_r), men reduseres faktor $\frac{1}{2}$ pga. dobling av plateavstand ℓ.

Oppgave 4. Seriekopling av kondensatorer.

a) Når kondensatorer lades opp får hver plate motsatt like stor ladning (se figur). Øvre plate på den nedre kondensatoren må videre ha motsatt ladning som nedre plate på den øvre, da dette er eneste måten ladning kan utveksles på (de må totalt være nøytrale). Derfor: Kondensatorer koplet i serie har alle samme ladning Q. Potensialet er derimot ulikt hvis kapasitansene C_1 og C_2 ikke er like:

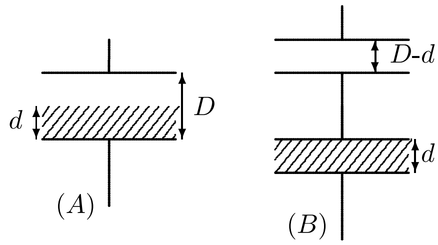


$$C_1 = \frac{Q}{V_1} \qquad C_2 = \frac{Q}{V_2} \qquad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{\frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Alternative måter å skrive dette på:

$$\underline{C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}\,, \qquad \underline{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}\,.$$

b) Situasjonen blir som seriekopling av to kondensatorer, som vist i figuren, der (A) er ekvivalent med (B)



$$C \quad = \quad \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \frac{A}{D-d} \cdot \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}}{\epsilon_0 \frac{A}{D-d} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}} = \underline{\frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d + \epsilon_r (D-d)}}\,.$$

c) Fra uttrykket for C løser vi mhp. ϵ_r og får

$$\epsilon_r = \frac{C \cdot d}{\epsilon_0 A - C \cdot (D-d)} = \frac{125\,\mathrm{pF} \cdot 1,25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{8,85\,\mathrm{pF/m} \cdot 300 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 - 125\,\mathrm{pF} \cdot 1,75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \underline{3,34}\,.$$

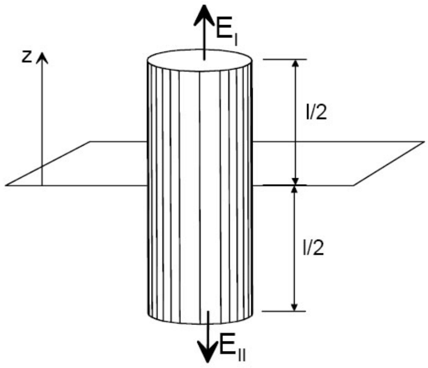
(Opg. 3c) fyldig form på neste side)

Oppgave 3. (fyldig form)

c) Det korte svaret ovenfor er fullgodt svar i øving og eksamen dersom ikke utledning kreves. Skal likevel her sette av plass til utledning av C for en parallellplatekondensator ved å utlede formelen for $\vec{E}$ mellom to parallellplater. Kapasitansen er definert ved $C = Q/V_1$, og vi må altså finne ladningen på platene. Følgende formel for parallellplatekondensator brukes ofte, og bør gjerne memoreres:

$$Q = \sigma \cdot A = \epsilon |\vec{E}| \cdot A \,, \tag{3}$$

der σ er overflateladningstettheten, $A = ab$ er arealet av platene og $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ ($\epsilon_r = 1$ hvis det er luft) er permittiviteten til materialet mellom platene. La oss bevise formel (3):



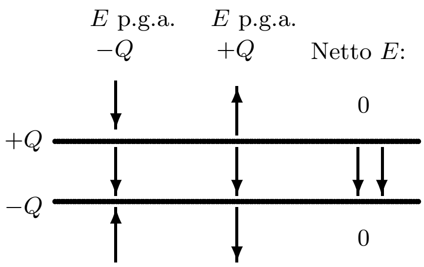
Sammenhengen mellom ladning på og det elektriske feltet rundt en uendelig stor plate finnes ved å bruke Gauss' lov. Retningen på det elektriske feltet er $\vec{E} = E\,\hat{\mathbf{k}}$ på grunn av symmetrien i problemet, og $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = E$ når vi er i samme avstand $|z| = \ell/2$ fra $z = 0$. Med en sylindrisk Gaussflate med lengde ℓ plassert symmetrisk om $z = 0$, som vist på figuren, gir Gauss' lov:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\mathrm{encl}}}{\epsilon}$$

For sideflatene er $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{A}$ og dermed $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ for denne delen av Gaussflata. Bidrag til fluksintegralet for de to endeflatene med areal A blir $2EA$. Når ladningen innesluttet av den valgte Gaussflata er $Q_{\mathrm{encl}} = \sigma A$, der σ er flateladningstettheten, blir det elektriske feltet for én plate:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon}\,\hat{\mathbf{k}} \,.$$

Man kan tolke dette slik at fluksen til det elektriske feltet strømmer halvparten til hver side.



Det elektriske feltet mellom de to platene i kondensatoren finnes ved å betrakte feltene fra de to platene, og se på resultanten. Figuren til venstre viser situasjonen, med like lang lengde på vektorene som representerer E. Vi har antatt at den positivt ladde plata ligger over den negativt ladde, og at positiv z-akse er oppover. Utenfor kondensatorplatene er bidragene fra de positivt og negativt ladde platene motsatt retta:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon}\,\hat{\mathbf{k}} + \frac{\sigma}{2\epsilon}\,\hat{\mathbf{k}} = 0 \,,$$

og feltet er altså null, som påstått i pkt. b). Mellom platene er det elektriske feltet:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon}\,\hat{\mathbf{k}} - \frac{\sigma}{2\epsilon}\,\hat{\mathbf{k}} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\,\hat{\mathbf{k}} \,.$$

Dermed er uttrykket (3) vist. Kapasitansen til platekondensatoren er da, ved bruk av likningene (2) og (3):

$$C = \frac{Q}{V_1} = \frac{\epsilon|\vec{E}| \cdot A}{V_1} = \frac{\epsilon V_1/\ell_1 \cdot A}{V_1} = \frac{\epsilon \cdot A}{\ell_1} = \frac{8,85\,\mathrm{pF/m} \cdot 0,10 \cdot 0,50\,\mathrm{m}^2}{3,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 148\,\mathrm{pF} = \underline{0,15\,\mathrm{nF}} \,.$$

A.Mi. 22. jan. 15.