NTNU

TEP4105: Fluidmekanikk

Løsningsforslag til Øving 7
Høst 2014

Oppgave 4.40 i 7. utgave (4.36 i 6. utgave)

Vi skal finne $C = C(\rho, g, \mu, \theta)$ og volumstrømmen Q pr. lengdeenhet.

Gitt $u(y) = Cy(2h - y), v = w = 0$. Vi beregner de hastighetsderiverte:

$$\frac{du}{dy} = 2Ch - 2Cy \tag{1}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -2C. \tag{2}$$

Setter inn i x-komponenten av Navier-Stokes ligning (vi ser av figuren at x-komponenten av $\vec{g}$ er $g \sin\theta$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

$$\Longrightarrow 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \frac{\mu}{\rho}\frac{d^2u}{dy^2} = g\sin\theta - 2\frac{\mu}{\rho}C. \tag{4}$$

Vi har brukt at trykket ikke varierer i x-retning. Dette er på grunn av at trykket nødvendigvis er konstant lik atmosfæretrykket på den fri væskeoverflaten (også fordi vi får tilbake nøyaktig samme system om vi flytter oss et stykke langs x-retning. Vi sier at systemet er symmetrisk under translasjon i x-retning). Vi får dermed

$$C = \frac{\rho g \sin\theta}{2\mu}. \tag{5}$$

Volumstrømmen pr. lengdeenhet, q, finner vi ved å integrere hastigheten over et tverrsnitt $\mathcal{A}$ gjennom strømningen. La bredden til systemet innover i papirplanet hete b.

$$\text{Volumstrøm} = qb = \int_{\mathcal{A}} u \cdot dA = b\int_0^h u \cdot dy = b\int_0^h Cy(2h - y)dy = bC\left[hy^2 - y^3/3\right]_0^h = \frac{2}{3}bCh^3$$

$$q = \frac{2}{3}Ch^3. \tag{6}$$

Innsatt for C:

$$q = \frac{\rho g h^3 \sin\theta}{3\mu}. \tag{7}$$

Oppgave 4.60 i 7. utgave (4.52 i 6. utgave)

Vi skal finne strømfunksjonen ψ i polarkoordinater.

Gitt volumstrømmen Q inn mot origo. Strømningen er inkompressibel, todimensjonal og friksjonsfri. Bredden inn i papirplanet kaller vi b. Hastighetskomponentene er

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{8}$$

Her er $v_\theta = 0$ og $v_r =$konst.< 0. Massebevarelse gir oss at

$$Q = -v_r \cdot \text{Areal} = -v_r \cdot \frac{\pi}{4}r \cdot b \qquad \Longrightarrow \qquad v_r = -\frac{4Q}{\pi r b}. \tag{9}$$

Strømfunksjonen ψ eksisterer kun hvis kontinuitetsligningen $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ bare har *to* ledd, her:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r \cdot v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0. \tag{10}$$

Kontinuitetsligningen er oppfylt (både $r \cdot v_r$ og v_θ er konstanter, og deres deriverte er null), og har bare to ledd (v_r og v_θ). Vi integrerer opp r-komponenten:

$$\psi = \int r v_r d\theta = -\frac{4Q}{\pi b}\theta + f(r). \tag{11}$$

Vi setter så dette inn i uttrykket for v_θ (som vi vet er null):

$$0 = v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{df}{dr} \qquad \Longrightarrow \qquad f(r) = \text{konst.} = C. \tag{12}$$

Dermed

$$\psi = -\frac{4Q}{\pi b}\theta + C. \tag{13}$$

Dette er et linjesluk.

Pumpe med tap

a

Setter $\rho = 10^3 \text{kg/m}^3$ og $g = 10$ m/s^2 i denne oppgaven. Benytter Bernoulli for en strømlinje mellom et vilkårlig punkt 0 på overflaten og punkt 1;

$$\frac{p_0}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V_0^2}_{=0} + g\underbrace{z_0}_{=0} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 \tag{14}$$

Løser med hensyn på V_1

$$V_1 = \sqrt{2\left(\frac{p_0 - p_1}{\rho} + g\left(z_0 - z_1\right)\right)} = 2.45 \text{m/s}. \tag{15}$$

Volumstrømmen bestemmes ved

$$Q = A_1 V_1 = \frac{1}{4}\pi d_1^2 V_1 = \underline{0.043 \text{m}^3/\text{s}}. \tag{16}$$

b

Mekanisk energiligning langs strømline, fra 0 til 2;

$$\frac{p_0}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V_0^2}_{=0} + g\underbrace{z_0}_{=0} + w_p = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 + gh_f, \tag{17}$$

hvor w_p er energien tilført fra pumpen. Løser med hensyn på denne og finner

$$w_p = \frac{p_2 - p_0}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 + gh_f. \tag{18}$$

Den ukjente hastigheten V_2 finnes fra massebalanse, altså

$$V_2 = V_1\frac{A_1}{A_2} = V_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 5.51 \text{m/s}. \tag{19}$$

Energien tilført (per masseenhet) er da w_p =142.2 m^2/s^2. Effekten som pumpen da må yte (energi per tidsenhet) er

$$P = w_p \rho Q = 6115 \text{W} \approx 6.12 \text{kW}. \tag{20}$$

Navier-Stokes

a

Væskens hastighet er gitt som $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j}$. Kontinuitetsligningen gir oss

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{21}$$

Da filmens tykkelse er *konstant* må $u = 0$. Altså har vi

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = v(x). \tag{22}$$

Navier-Stokes i x-retning er

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u. \tag{23}$$

Ved innsetting av det vi vet ($u = 0$,$v = v(x)$), faller nesten alle leddene bort og vi sitter igjen med

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{24}$$

hvilket tilsier at p er uavhengig av x og at trykket er konstant på tvers av filmen. Langs den frie overflaten ($x = h, y$) har vi dessuten $p = p_0$. Da p ikke endres med x må $p = p_0$ overalt i filmen.

Navier-Stokes i y-retning er

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v - \rho g. \tag{25}$$

Igjen, ved substitusjon av det vi kjenner, så reduserer ligningen i y-retning seg til

$$0 = -\rho g + \mu \nabla^2 v. \tag{26}$$

Da $v = v(x)$ kan vi erstatte de partiellderiverte i ∇^2 med ordinære deriverte, hvilket gir

$$0 = -\rho g + \mu \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{27}$$

b

Grensebetingelser: Ved $x = 0$ er $v = V$ (fra heftbetingelsen). Ved $x = h$ er $\tau = \mu dv/dx = 0$ (ingen friksjonskrefter).

Ved å integrere ligningen

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\rho}{\mu} g = \frac{g}{\nu} \tag{28}$$

to ganger så får vi

$$v = \frac{g}{2\nu} x^2 + C_1 x + C_2. \tag{29}$$

Konstantene bestemmes fra grensebetingelsene, slik at den fullstendige beskrivelsen av hastighetsfeltet er

$$v = \frac{gx}{\nu} \left(\frac{1}{2} x - h \right) + V. \tag{30}$$