

Institutt for energi- og prosesssteknikk

## **Eksamensoppgave i TEP4105 FLUIDMEKANIKK**

**Faglig kontakt under eksamen: Iver Brevik**

**Tlf.: 7359 3555**

**Eksamensdato: 7. august 2013**

**Eksamenstid : 09.00 – 13.00**

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:**

**C: Typegodkjent kalkulator**

**Matematisk formelsamling**

**Annen informasjon:**

**Sensuren faller i uke 35**

**Målform/språk: Bokmål**

**Sidetall: 6**

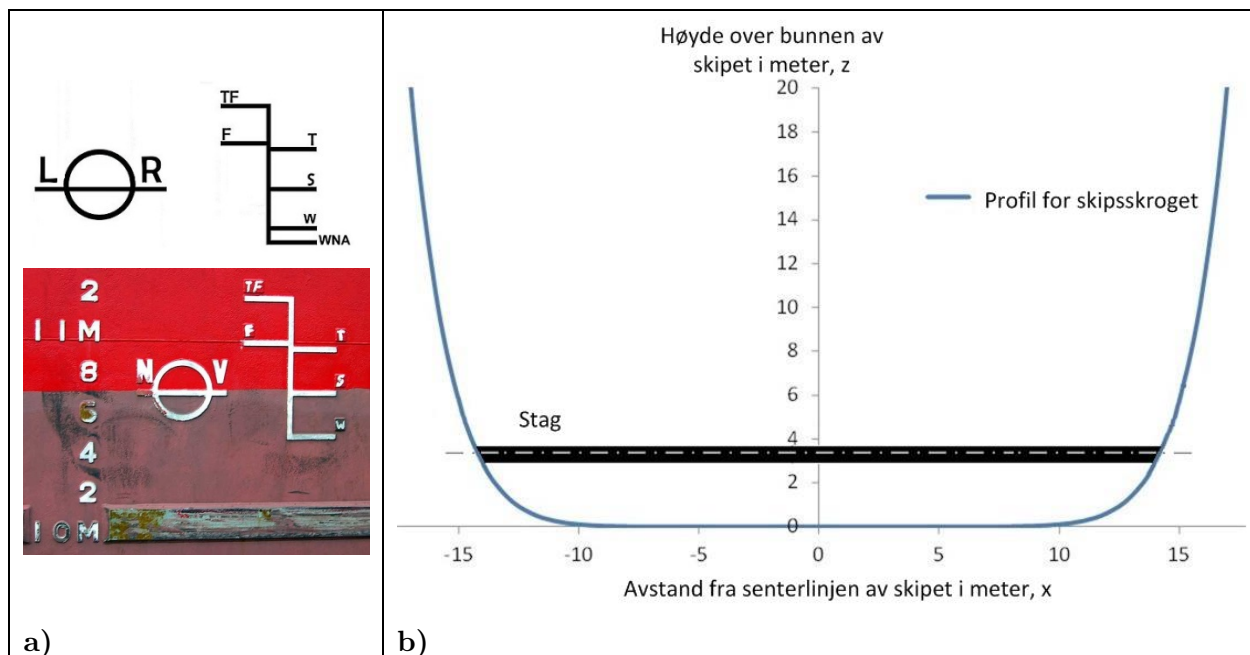
**Sidetall vedlegg: 4**

**Kontrollert av:**

---

Dato

Sign



Figur 1: a) Lastelinjemerke, prinsippsskisse og bilde fra et skip, b) profil for midtseksjonen av skipsskroget i oppgave 1

I Figur 1 a) er det vist et såkalt lastelinjemerke. Formålet med lastelinjemerket er å sette en grense for hvor mye man kan laste på et skip ved å sammenligne vannivået på skroget med linjene i lastelinjemerket. Ligger skipet lavere i vannet enn lastelinjen, har man ikke stor nok sikkerhetsmargin til å tåle høye bølger, og man må laste av skipet for at det skal ligge høyere i vannet. Siden tettheten til vann, og dermed oppdriftskraften på et skip, varierer med temperatur og saltholdighet, er flere slike linjer tegnet inn ettersom hvilke forhold skipet skal seile i. Forholdene er beskrevet av forkortelser på hver linje: TF står for Tropical Freshwater, F står for Freshwater, T står for Tropical saltwater, S står for Summer saltwater, W står for Winter saltwater og WNA står for Winter North Atlantic. (Symbolene LR og NV i Figur 1a) viser til hvem som har gått god for at lastelinjemerket er riktig; NV er en forkortelse for Norske Veritas)

Et lasteskip som ligger til havn ved utløpet av en elv (anta ferskvann med tetthet  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ ) skal frakte containere og lastes opp slik at vannivået når opp til lastelinjen for ferskvann. Når dette er gjort, er skipets totale vekt (skip pluss alt om bord)  $1\,137\,960 \text{ kN}$  ( $m_{\text{skip}} \cdot g = 116\,000\,000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2$ )

- a) Finn ut hvor stort vannvolum,  $V$ , skipet fortrenger når det er fullastet opp til lastelinjemerket for ferskvann.

Volumet av vann som skipet fortrenger som funksjon av høyden som vannet har over skipets bunn,  $z$ , kan tilnærmes ved funksjonen

$$V = K_1 z^{11/10} .$$

$K_1$  er en positiv konstant. Når skipet ligger til kai, er vannivået over bunnen av skipet,  $z$ , 11 meter. Så legger skipet ut fra kai og ut i saltvann. Når skipet ligger i ro i saltvannet, er vannnivået over skipets bunn sunket til 10,75 m (det vil si at båten ligger 25 cm høyere i forhold til vannet).

b) Finn tettheten til saltvannet som skipet ligger i.

Det er store krefter som virker på sidene på skipet fra vannet, og disse prøver å få skipssidene til å kollapse innover. Derfor er det for hver tiende meter av skipets lengde bygd inn solide stag (tverrgående bjelker) som går fra den ene skipssiden over til den andre, og som skal klare å motstå disse kreftene; se Figur 1 b). Anta at stagenes senterlinje til trykkraften går gjennom, og er parallell med, stagenes senterlinje. I tillegg kan man anta at all kraft må tas opp av staget, dvs. at skrogveggen ikke tar opp horisontale krefter. Luften på innsiden av skipsskroget har atmosfæretrykk. Har du ikke funnet et svar i oppgave b), kan du anta tettheten til saltvann lik  $\rho_{\text{saltvann}} = 1025 \text{ kg/m}^3$ .

c) Bestem hvor stor horisontal kraft fra høyre et slikt stag i den ti meter lange midtseksjonen må klare å holde mot (tåle før det blir bøyd og knekker) for å unngå at skipssidene kolliderer av vanntrykket når det ligger i saltvannet. Siden man ser på midtseksjonen av skipet kan man anta profilet som skissert i Figur 1b) konstant i lengderetningen for denne seksjonen.

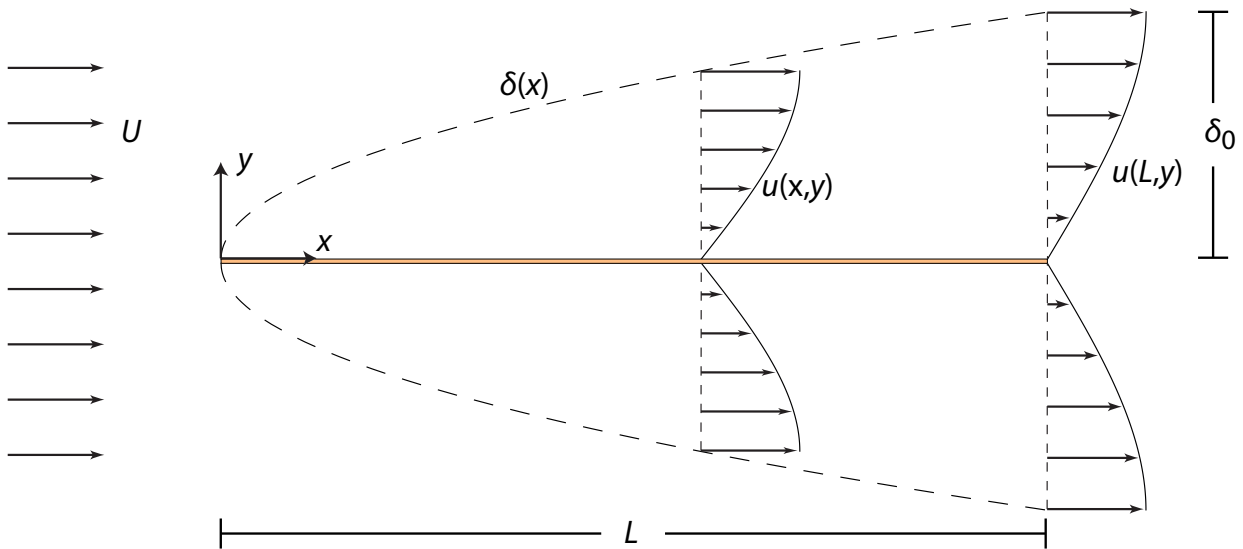
d) Bestem hvor høyt over bunnen av skipet staget for midtseksjonen må være plassert for at antagelsen om at virkelinjen til den vertikale kraften går gjennom og er parallell med senterlinjen til staget skal stemme.

Oppgitt:

For et rektangel med bredde  $b$  og høyde  $h$  er arealets treghetsmoment omkring horisontal  $y$ -akse (inn i planet) gjennom centroiden lik

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12}.$$

## Oppgave 2 Kontrollvolumsoppgave



En uniform strømning faller inn mot ei tynn, flat plate som holdes i ro, og det dannes et laminært grensesjikt symmetrisk over og under plata (se figur). I området over plata er hastighetskomponenten i  $x$ -retning gitt som

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}U\eta(3 - \eta^2) & y < \delta(x) \\ U & y \geq \delta(x) \end{cases}$$

der  $U$  er den konstante innfallende hastigheten,  $\eta = y/\delta(x)$ , og  $\delta(x)$  er grensesjikttykkelsen. Grensesjiktet øker med avstanden  $x$  fra kanten av plata som

$$\delta(x) = \delta_0 \sqrt{x/L}$$

der  $L$  er lengden til plata. Plata har stor bredde  $b$  inn i planet slik at strømningen er tilnærmet todimensjonal, og vi ser bort fra tyngdekrefter.

- a) Hastighetskomponenten normalt på plata kan skrives

$$v = \frac{U\delta(x)}{x} (A\eta^2 + B\eta^4)$$

for  $y < \delta(x)$  ( $v$  utenfor grensesjiktet betraktes ikke). Bestem konstantene  $A$  og  $B$  når strømningen er inkompressibel.

- b) Det opplyses at den strømlinje som for  $x = L$  ligger i høyde  $\delta_0$  over plata, vil i posisjonen  $x = 0$  (hvor strømningen er uniform) ligge i høyden

$$w = \frac{5}{8}\delta_0$$

over plata. Betrakt et kontrollvolum som er begrenset av den nevnte strømlinje, av de vertikale linjene ved  $x = 0$  og  $x = L$ , samt platen selv. Finn krafta fra strømningen på plata (begge sider) når fluidets tetthet er  $\rho$ . Du kan anta at trykket er uniformt i hele strømningen.

## Oppgave 3

I et vertikalt rør med radius  $b$  beveges en fast sylinder med radius  $a$  nedover med konstant hastighet  $W$ . Røret og sylindren har samme  $z$ -akse som har samme retning som tyngdens akselerasjon  $\vec{g}$ . Mellom sylindren og rørveggen befinner det seg et Newtonsk fluid med konstant tetthet  $\rho$  og konstant dynamisk viskositet  $\mu$ . Røret og sylindren er så lange at endeeffekter kan neglisjeres, og strømmingen av fluidet kan anses som aksesymmetrisk. Strømmingen er stasjonær, og dens aksielle hastighetskomponent  $v_z$  endrer seg ikke i  $z$ -retning.

Følgende opplysninger gis i sylinderkoordinater:

Kontinuitetsligningen er

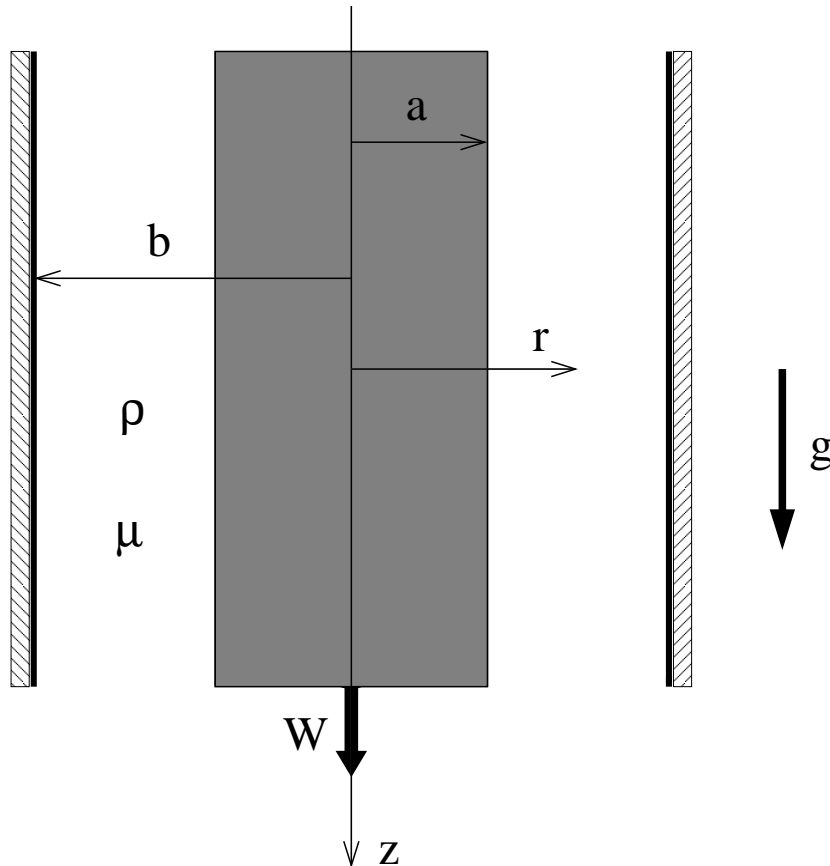
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

og komponentene av Navier-Stokes ligningen er

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$



Figur 3

- Bruk kontinuitetsligningen til å vise at den radielle hastighetskomponenten  $v_r$  for strømmingen mellom cylinderen og rørveggen er null.
- Vis at trykket for strømmingen mellom cylinderen og rørveggen er konstant i hvert tverrsnitt, dvs.  $p = p(z)$ .
- Anta at trykket for strømmingen mellom cylinderen og rørveggen er hydrostatisk, dvs.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = \rho g.$$

Bestem den aksielle hastighetskomponenten  $v_z$ .

- Bestem volumstrømmen  $Q$  for strømmingen mellom cylinderen og rørveggen.

Oppgitt:

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right).$$

## Oppgave 4, halv vekt

Et satellittbilde viste at monokromatiske bølger med bølgelengde  $L_0 = 170$  m på dypt vann ble redusert til bølgelengde  $L = 85$  m etter at bølgene hadde forplantet seg inn på et grunnere område. Kall vanndybden av sistnevnte område  $d$ . Anta stasjonære forhold.

a) Hvor stor er bølgenes periode  $T$ ? Hvorfor er  $T$  den samme etter at bølgene er kommet inn på grunnere vann?

b) Finn verdien av  $d$  (benytt eventuelt grafisk metode for å bestemme  $d$  tilnærmet).

Oppgitt:

$$\omega^2 = gk \tanh kd.$$