Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 01

$\boxed{1.2.28}$ Vi finner grenseverdien ved først å løse opp parantesene i telleren og deretter forenkle uttrykket.

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\frac{(s+1)^2-(s-1)^2}{s} &= \lim_{s\to 0}\frac{s^2+2\,s+1-s^2+2\,s-1}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{4\,s}{s} = \lim_{s\to 0} 4\\ &= 4.\end{aligned}$$

$\boxed{1.2.78}$ **a)** Domenet er $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Verdien $x=0$ er ikke med i domenet pga argumentet $\frac{1}{x}$, som ikke er definert for $x=0$.

b) Vi ser at $f(x)$ er en funksjon som alternerer mellom positive og negative verdier fordi $\sin\frac{1}{x}$ oscillerer.
Vi starter med å se på tilfellet $x\geq 0$, og studerer grensen $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
Siden sinusfunksjonen alltid er mellom -1 og 1, vet vi at

$$-x \leq x\,\sin\frac{1}{x} \leq x.$$

Videre er

$$\lim_{x\to 0^+} -x = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Det følger nå av skviseregelen (se *Squeeze Theorem* side 71 i 'Adams & Essex, Calculus, 8th edition') at

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\sin\frac{1}{x} = 0.$$

På tilsvarende måte (bare bruk motsatte ulikheter) kan vi oppnå det samme resultatet for tilfellet $x\leq 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} x\,\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Av Teorem 1 side 68 i 'Adams & Essex, Calculus, 8th edition', følger det nå at grensen eksisterer og går mot null,

$$\lim_{x\to 0} x\,\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Observasjon: Vi kunne ha brukt absoluttverdien til x (se side 8 i 'Adams & Essex, Calculus, 8th edition') for å gjøre alt i ett steg:

$$-|x| \leq x\,\sin\frac{1}{x} \leq |x|.$$

Kun én anvendelse av skviseregelen ville nå gitt det samme resultatet som over.

$\boxed{1.3.8}$ I denne oppgaven trekker vi først ut en faktor x både i teller og nevner. Uttrykket vi står igjen med kan da enklere evalueres i grensen $x \to \infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2\,x-1}{\sqrt{3\,x^2+x+1}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\,(2-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

$\boxed{1.3.20}$ På tilsvarende måte som i forrige oppgave, starter vi med å trekke ut en faktor x fra rotutrykket. Da blir kun nevneren avhengig av x, og vi kan enklere evaluere grensen.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x\to 1-} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}} \\ &= \lim_{x\to 1-} \frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \\ &= \lim_{x\to 1-} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = \infty.\end{aligned}$$

Vi har her brukt at $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = 1$ for $x > 0$, og at $\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} > 0$ for $x < 1$ slik at grensen går mot $+\infty$ (og ikke $-\infty$).

Dersom vi skulle evaluert grensen når $x \to 1+$, ville vi fått $-\infty$.

$\boxed{1.4.20}$ Utsagnet i oppgaveteksten er ikke i strid med ekstremalverdisetningen (*Max-Min Theorem*).

Som vi ser, er kontinuitet en av antakelsene i teoremet. Dette betyr at *hvis* en funksjon er kontinuerlig på et endelig, lukket intervall, *så* har den absolutte maksimum- og minimumsverdier på det intervallet. Det at en funksjon er kontinuerlig på et endelig, lukket intervall er en *tilstrekkelig* betingelse for å ha absolutte maksimum- og minimumsverdier, men dette eksempelet viser at at dette ikke er en *nødvendig* betingelse. Teoremet sier ingenting om den motsatte implikasjonen, nemlig, *hvis en funksjon har absolutte maksimum- og minimumsverdier på et endelig lukket intervall, så er den kontinuerlig?*.

Du kan se på dette ved å tenke på den (noe generaliserende) setningen *alle planter er grønne*. Dette betyr at *hvis* du ser på en plante, *så* er den grønn. Dette betyr selvfølgelig ikke at alt som er grønt er en plante. En krokodille er ikke en plante.

$\boxed{1.5.8}$ Vi ønsker å finne et tall $\delta > 0$ slik at

$$|\sqrt{2\,x+3}-3| < 0{,}01\,.$$

Ved å fjerne absoluttverdien får vi

$$\begin{array}{rcccl} -0{,}01 & < & \sqrt{2\,x+3}-3 & < & 0{,}01 \\ 3-0{,}01 & < & \sqrt{2\,x+3} & < & 3+0{,}01 \\ 2{,}99^2 & < & 2\,x+3 & < & 3{,}01^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} 5{,}9401 & < & 2\,x & < & 6{,}0601 \\ 2{,}97005 & < & x & < & 3{,}03005\,. \end{array}$$

Ulikheten til venstre, $2{,}97005 < x$, gir oss $\delta_1 = 0{,}02995$, mens den til høyre, $x < 3{,}03005$, gir $\delta_2 = 0{,}03005$. Vi kan nå velge

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta_1 = 0{,}02995\,.$$

$\boxed{1.5.12}$ La $\epsilon > 0$ være gitt. Vi ønsker å finne en $\delta > 0$ slik at hvis $|x-2| < \delta$ så er $|5-2\,x-1| < \epsilon$. Det følger at

$$\begin{array}{rcccl} -\epsilon & < & 4-2\,x & < & \epsilon \\ -4-\epsilon & < & -2\,x & < & -4+\epsilon\,. \end{array}$$

Vi multipliserer nå begge sider med -1. Husk at dette endrer retningen på ulikhetene, så vi må ta hensyn til det også. Vi får derfor at

$$\begin{array}{rcccl} 4-\epsilon & < & 2\,x & < & 4+\epsilon \\ 2-\frac{\epsilon}{2} & < & x & < & 2+\frac{\epsilon}{2}\,. \end{array}$$

Vi ser at vi kan velge $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Med dette valget følger det at hvis $|x-2| < \frac{\epsilon}{2}$ så er $|5-2\,x-1| < \epsilon$. Av definisjonen av grenseverdi (side 89 i boka), ser vi at $L = 1$ er grensen til $f(x) = 5-2\,x$ når x går mot $a = 1$.

$\boxed{1.5.18}$ Tilsvarende som forrige oppgave, gitt en $\epsilon > 0$, så ønsker vi å sjekke om det finnes en $\delta > 0$ slik at hvis $|x-a| < \delta$ så er $|f(x)-L| < \epsilon$. I denne oppgaven har vi at

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}, \quad a = -1, \quad L = -\frac{1}{2}\,.$$

Vi starter med ulikheten for $f(x)$, og prøver å finne δ:

$$\left|\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{1}{2}\right| < \epsilon\,.$$

Vi fjerner absoluttverdien og får at

$$\begin{array}{rcccl} -\epsilon & < & \dfrac{x+1}{x^2-1} + \dfrac{1}{2} & < & \epsilon \\ -\dfrac{1}{2}-\epsilon & < & \dfrac{x+1}{x^2-1} & < & -\dfrac{1}{2}+\epsilon \\ \dfrac{-2\,\epsilon-1}{2} & < & \dfrac{x+1}{(x+1)\,(x-1)} & < & \dfrac{2\,\epsilon-1}{2} \\ \dfrac{-2\,\epsilon-1}{2} & < & \dfrac{1}{x-1} & < & \dfrac{2\,\epsilon-1}{2}\,. \end{array}$$

Vi gjør oss så et par viktige bemerkninger:

- Vi ser at etter forenklingene kunne vi bare ha satt inn for x verdien den går mot for å bestemme grenseverdien. Dette er fordi forenklingene vi har gjort ikke endrer på grenseverdien. Dette betyr at

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\,.$$

  Observer at funksjonen vi startet med ikke er definert for $x = -1$, mens $\frac{1}{x-1}$ er.
- Vi må nå snu brøken for å løse ulikhetene med hensyn på x og må da passe på fortegnene. Spesielt kan vi observere at uttrykket til venstre, $\frac{-2\,\epsilon-1}{2}$, er negativt for alle $\epsilon > 0$, mens utrykket til høyre, $\frac{2\,\epsilon-1}{2}$, endrer fortegn for $\epsilon = \frac{1}{2}$. For $\epsilon = \frac{1}{2}$ er nevneren null. Dette må vi huske å ta hensyn til hvis vi snur brøken, slik at vi ikke ender opp med å dele på null. Ideelt sett skulle vi behandlet alle tre tilfellene hver for seg: $\epsilon < \frac{1}{2}$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ og $\epsilon > \frac{1}{2}$. Dette fordi den formelle definisjonen av grenseverdi må være tilfredstilt *for alle* $\epsilon > 0$. Heldigvis er det mulig å omgå dette. Nøkkelen ligger i å se at gitt en ϵ så trenger vi bare å finne én δ slik at ulikhetene over er tilfredsstilt. Vi trenger ikke finne den best mulige δ, bare være sikre på at for alle mulige ϵ så finnes det en δ som fungerer. Derfor trenger vi bare undersøke tilfellet $\epsilon < \frac{1}{2}$, fordi enhver δ vi finner her vil fungere enda bedre også for større ϵ.

Ved å følge bemerkningene over, kan vi snu brøkene og oppnå

$$\begin{aligned} \frac{2}{2\,\epsilon-1} \quad &< \quad x-1 \quad < \quad \frac{2}{-2\,\epsilon-1} \\ \frac{2}{2\,\epsilon-1}+1 \quad &< \quad x \quad < \quad \frac{2}{-2\,\epsilon-1}+1\,. \end{aligned}$$

Siden vi ser på grensen når $x \to -1$, er det lurt for beviset å sette inn -1 i ulikhetene for x. Dette gjør vi ved å legge til $0 = 1 - 1$ på begge sider, slik at vi får

$$\begin{aligned} \frac{2}{2\,\epsilon-1}+1+1-1 \quad &< \quad x \quad < \quad \frac{2}{-2\,\epsilon-1}+1+1-1 \\ \frac{4\,\epsilon}{2\,\epsilon-1}-1 \quad &< \quad x \quad < \quad \frac{4\,\epsilon}{2\,\epsilon+1}-1\,. \end{aligned}$$

Vi har nå to mulige verdier:

$$\delta_1 = -\frac{4\,\epsilon}{2\,\epsilon-1}, \quad \delta_2 = \frac{4\,\epsilon}{2\,\epsilon+1}\,.$$

Observer at $\frac{4\,\epsilon}{2\,\epsilon-1} < 0$, vi har derfor minus foran, siden vi ønsker en positiv δ. Til slutt velger vi

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}\,.$$

Denne verdien vil fungere for alle $\epsilon > 0$, og vi er i mål.