

## Løsningsforslag til øving 2

## Oppgave 1

a) Vi bruker ganske enkelt definisjonene av  $\alpha_V$  og  $\kappa_T$  og deriverer som angitt i oppgaven:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \alpha_V}{\partial p}\right)_T &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T}\right) = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial T} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial T} \\ -\left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_p &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}\right) = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial T \partial p} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial p}\end{aligned}$$

Følgelig er

$$\left(\frac{\partial \alpha_V}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_p.$$

b) Analogt volumutvidelseskoeffisienten, er den lineære utvidelseskoeffisienten gitt ved

$$\alpha_L = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right).$$

Diameteren øker ved oppvarming fra minus ti til ca pluss tjue grader, og den lineære utvidelseskoeffisienten avgjør med hvor mye:

$$d(20) = d(-10) \cdot (1 + 0.000013 \cdot 30) = 10.004 \text{ cm}.$$

Ikke all verden ..

## Oppgave 2

a) For ideell gass er  $p(T, V) = nRT/V$  og  $T(p, V) = pV/nR$ , slik at  $\partial p/\partial T = nR/V$  og  $(\partial T/\partial p)^{-1} = (V/nR)^{-1} = nR/V$ .

b) Hvis  $p = p(T, V)$ , er differensialet  $dp$  gitt som

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV.$$

Hvis nå  $p$  holdes konstant, er  $dp = 0$ , og divisjon av ligningen med  $dT$  gir

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{dV}{dT}\right)_p.$$

Hvis  $V = V(T, p)$ , er det ingen forskjell på  $(dV/dT)_p$  og  $(\partial V/\partial T)_p$ , og hvis vi i tillegg benytter sammenhengen fra a) og ordner litt, har vi det ønskede resultatet

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1.$$

c) Endring av trykket,  $\Delta p$ , ved en liten endring i temperaturen,  $\Delta T$ , er ved konstant volum gitt ved

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T.$$

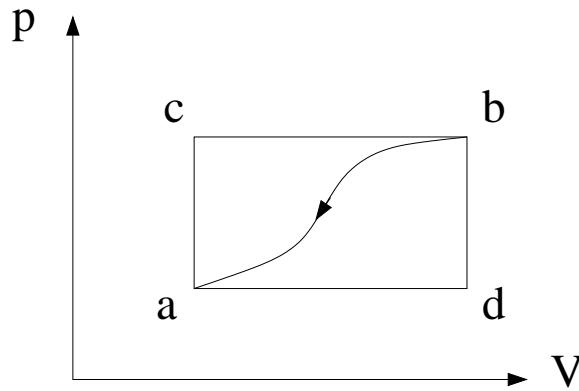
For å bestemme den deriverte benyttes relasjonen fra b),

$$-1 = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V (-V\kappa_T) \left(\frac{1}{V\alpha_V}\right),$$

der  $\kappa_T = -(\partial V/\partial p)_T/V$  og  $\alpha_V = (\partial V/\partial T)_p/V = (\partial T/\partial V)_p^{-1}/V$ . For hver grad temperaturstigning blir dermed

$$\Delta p = \frac{\alpha_V}{\kappa_T} \Delta T = \frac{48.5 \cdot 10^{-6}}{7.7 \cdot 10^{-12}} \cdot 1 \text{ Pa} = 6.3 \text{ MPa} \simeq 62 \text{ atm}.$$

### Oppgave 3



Den indre energien  $U$  til et system er bestemt av tilstanden. Dette er ikke tilfelle med tilført varme  $Q$  og utført arbeid  $W$ , men energibevarelse (1. hovedsetning) er oppfylt. Mottatt varme langs veien acb er

$$Q_{acb} = U_b - U_a + W_{acb},$$

slik at endringen i indre energi blir

$$\Delta U_{ab} = U_b - U_a = Q_{acb} - W_{acb} = (80 - 30) \text{ J} = 50 \text{ J}.$$

a) Varmemengden som systemet opptar langs veien adb blir derfor

$$Q_{adb} = \Delta U_{ab} + W_{adb} = 50 + 10 = 60 \text{ J}.$$

b) Mottatt arbeid 20 J betyr utført arbeid  $W_{ba} = -20 \text{ J}$ . Mottatt varme under prosessen  $b \rightarrow a$  er følgelig

$$Q_{ba} = \Delta U_{ba} + W_{ba} = -\Delta U_{ab} + W_{ba} = -50 - 20 = -70 \text{ J}.$$

Dette betyr at systemet avgir varmemengden 70 J under prosessen fra b til a.

c) Ved prosessen db utføres det ikke noe arbeid da volumet er konstant, dvs  $W_{db} = 0$ , og  $W_{ad} = W_{adb} = 10 \text{ J}$ . Mottatt varmemengde under prosessen ad blir følgelig

$$Q_{ad} = U_d - U_a + W_{ad} = 40 - 0 + 10 = 50 \text{ J}.$$

Ved prosessen db blir så den mottatte varmemengden

$$Q_{db} = Q_{adb} - Q_{ad} = 60 - 50 = 10 \text{ J}.$$

### Oppgave 4

Tilstandsligning for  $n$  mol ideell gass:

$$pV = nRT.$$

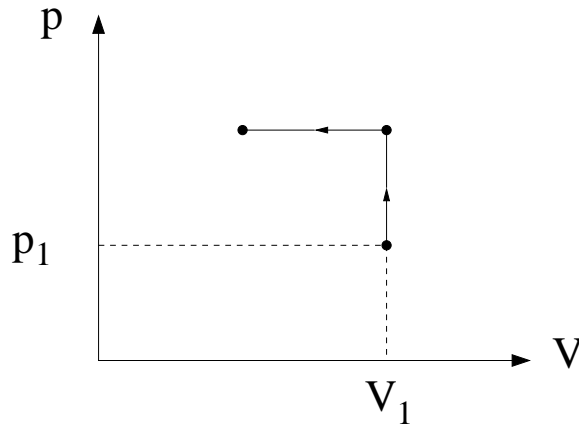
Utført arbeid:

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = 2 \cdot 8.314 \cdot 300 \cdot \ln 2 = 3458 \text{ J} \simeq 3.46 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

For ideell gass er indre energi  $U$  en funksjon av temperaturen alene. Siden  $T$  er uendret langs en isoterm, vil  $U$  være uendret, dvs  $\Delta U = 0$ . Tilført varme er følgelig

$$Q = \Delta U + W = W = 3.46 \text{ kJ}.$$

### Oppgave 5



Tilstandsligning:  $pV = nRT$ . En dobling av temperaturen,  $T_1 \rightarrow T_2 = 2T_1$ , ved konstant volum,  $V_2 = V_1$ , gir trykket

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{2nRT_1}{V_1} = 2p_1.$$

Avkjøling tilbake til  $T_1$ , uten å endre trykket, gir volumet

$$V_2 = \frac{nRT_1}{p_2} = \frac{nRT_1}{2p_1} = \frac{1}{2}V_1.$$

Utført arbeid (dvs på omgivelsene):

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} p_2 \, dV = (V_2 - V_1)p_2 = -p_1 V_1.$$

Arbeid gjort på gassen:

$$-W = p_1 V_1.$$