NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

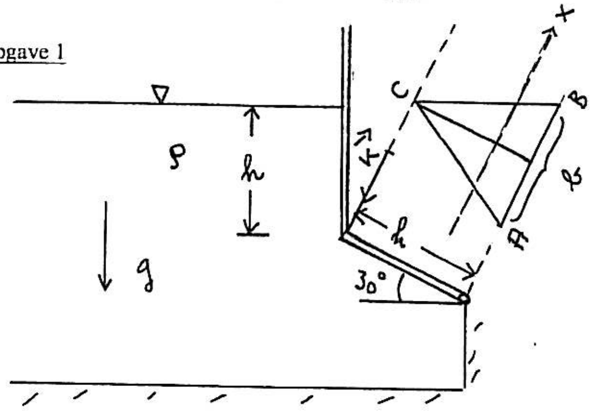
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F1 (Bokmål)
(Linje Fysikk og matematikk)
Lørdag 11. mai 2002
Tid: 0900 – 1400
Vekttall: 2,5

Sensuren faller i uke 22.

Hjelpemidler: C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



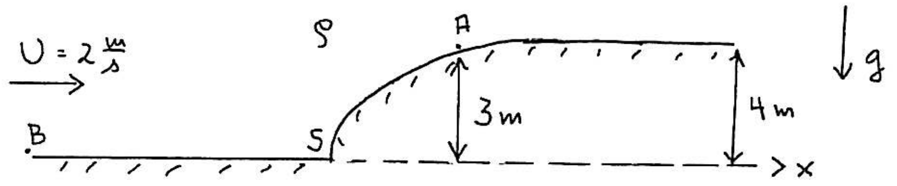
En trekantet luke ABC i en dam er hengslet gjennom grunnlinjen AB. Sidekantene AC og BC i luka er like. Det oppgis at AB = b, og at avstanden mellom toppunktet og grunnlinjen er h. Luka holdes på plass av en kraft K som står vinkelrett på luka, og som angriper i toppunktet C.

a) Hvor stor er kraften F fra vannet på luka?

b) Hvor stor må kraften K minst være for å holde luka på plass?

[Hint: Innfør ξ -aksen parallelt med lukas plan.]
Oppgitt: For en likebent trekant med grunnlinje b og høyde h ligger centroiden h/3 over grunnlinjen. Flatens treghetsmoment omkring x-aksen gjennom centroiden er $I_{xx} = bh^3/36$.

Oppgave 2



Som kjent formes Rankines halv-legeme av en uniform strømning U pluss en kilde av styrke m plassert i origo. Overflatens ligning er

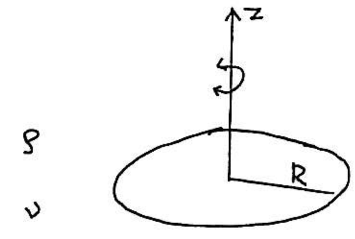
$$r = \frac{m}{U}\frac{\pi - \theta}{\sin\theta} \quad .$$

Bunnen av en elv har en forhøyning 4m når $x \to \infty$. Anta at bunnen kan approksimeres med et Rankine halv-legeme. Gitt $p_B = 120\text{kPa}$, U = 2m/s (i stor avstand). Se bort fra vannets viskositet, sett $\rho = 10^3 \text{kg}/\text{m}^3$ og $g = 10\text{m}/\text{s}^2$.

a) Finn avstanden a fra stagnasjonspunktet (S på figuren) til kilden. Punktet A ligger 3m høyere enn punkt B. Hvilken polarvinkel θ svarer punktet A til?

b) Finn trykket p_A i punkt A.

Oppgave 3



En plan skive med stor radius R, helt neddykket i en inkompressibel væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν, oscillerer omkring z-aksen med konstant vinkelhastighet ω. Vinkelutslaget er

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t \, ,$$

hvor θ_0 er en gitt størrelse. Se bort fra tyngdekraften.

a) Anta at væskens hastighet er $\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, V_\theta, 0)$, hvor den asimutale komponent V_θ kan skrives på formen $V_\theta(r,z,t) = r\Omega(z,t)$. Her er $\Omega(z,t)$ væskens vinkelhastighet som funksjon av z og t. Det oppgis at Navier-Stokes' ligning gjør at Ω tilfredsstiller

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} \quad .$$

Løsningen av denne ligningen kan skrives på formen

$$\Omega = \Omega_0 e^{-\beta z}\sin(\omega t - \beta z),$$

hvor $z = 0$ er skivas plan (anta $z \geq 0$). Bestem konstantene Ω_0 og β uttrykt ved θ_0, ω og ν.

b) Finn hvordan skjærspenningen $\tau(0,t)$ ved skivas overflate varierer med t. Lag en skisse av $\tau(0,t)$, og angi faseforskyvningen mellom skjærspenningen og skivas hastighet.

c) Det oppgis at den instantane effekt som må tilføres skiva per overflateenhet, for å opprettholde den stasjonære oscillasjonen, er lik $-\tau(0,t)V_\theta(r,0,t)$. Finn hvilken instantan effekt P(t) dette tilsvarer for hele skiva (ta her hensyn til skivas to sider). Finn den midlere effekt $\overline{P(t)}$.

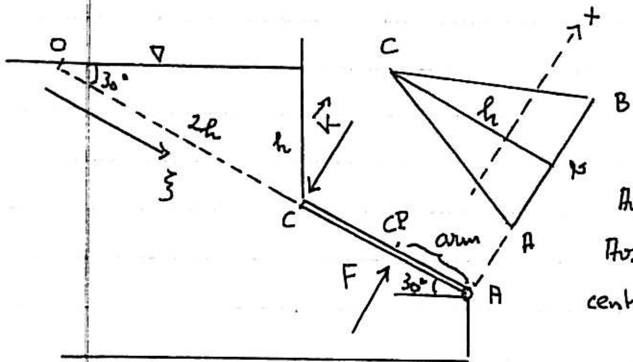
Oppgave 4 (halv vekt)

En flytevest med massetetthet 0,2 relativt til vann skal kunne holde en person av masse m = 72 kg og relativ massetetthet 0,95 flytende i vann.

Anta at 75% av personens volum befinner seg under vannet. Hvor stort må volumet V_L av flytevesten minst være? Sett $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, og $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ for vann.

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. Eksamen 11. mai 2002

Løsning Oppgave 1



Legger ξ-aksen med origo i vannspeilet.
Avstand til centroiden: ξ_{CG}.
Avstand til trykksenteret: ξ_{CP}.
Avstand fra grunnlinjen AB til centroiden er $h/3$ (oppgitt).

a) $\xi_{CG} = (2h + h) - h/3 = 8h/3.$

Dybde av centroiden: $h_{CG} = \xi_{CG} \cdot \sin 30^\circ = 4h/3.$

Arealet av luka: $A = bh/2.$

Kraft på luka fra vannet: $\underline{F} = \gamma h_{CG} \cdot A = \gamma \cdot \frac{4h}{3} \cdot \frac{1}{2} bh = \underline{\frac{2}{3}\gamma b h^2}$

b) Momentbalanse omkring grunnlinjen AB: $K \cdot h = F \cdot \text{arm}$,
hvor armen fra grunnlinjen til trykksentret CP må finnes.

Av $$\xi_{CP} - \xi_{CG} = \frac{I_{xx}}{\xi_{CG} \cdot A}$$ finnes

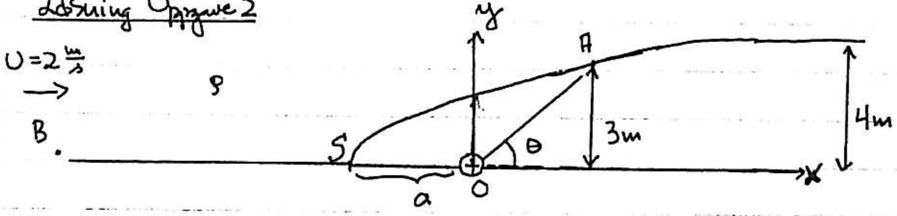
$$\xi_{CP} - \xi_{CG} = \frac{\frac{1}{36} b h^3}{\frac{8h}{3} \cdot \frac{1}{2} bh} = \frac{h}{48}, \quad \xi_{CP} = \frac{8h}{3} + \frac{h}{48} = \frac{43}{16} h.$$

Det gir $$\text{arm} = 3h - \xi_{CP} = 3h - \frac{43}{16} h = \frac{5}{16} h.$$

Momentbalansen dermed $K \cdot h = \left(\frac{2}{3}\gamma b h^2\right) \cdot \frac{5}{16} h$

$$\underline{K = \frac{5}{24}\gamma b h^2}$$

Løsning Oppgave 2



a) Origo O legges i kilden. Av $r = \frac{m}{U}\,\frac{\pi-\theta}{\sin\theta}$ finnes avstanden a mellom origo og stagnasjonspunktet S:

$$\underline{a} = \frac{m}{U}\lim_{\theta\to\pi}\frac{\pi-\theta}{\sin\theta} = \underline{\frac{m}{U}}$$

Altså er høyden $y = r\sin\theta = \frac{m}{U}(\pi-\theta) = \underline{a(\pi-\theta)}$.

Oppgitt: I stor avstand, $\theta \to 0$, er $y = 4$ meter. Det gir

$4 = a\cdot\pi$, $\underline{a} = 4/\pi = \underline{1{,}27\ m}$

Punkt A: $3 = 1{,}27(\pi-\theta) = 4 - 4\theta/\pi$, $\underline{\theta = \pi/4}$

b.) Strømfunksjonen $\psi = Ur\sin\theta + m\theta$ gir

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\cos\theta + \frac{m}{r} = U\left(\cos\theta + \frac{a}{r}\right)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\sin\theta, \Rightarrow V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 =$$

$$= U^2\left[\left(\cos\theta + \frac{a}{r}\right)^2 + \sin^2\theta\right] = U^2\left(1 + \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

I punkt A er $\theta = \pi/4$, $\Rightarrow r = a\,\frac{\pi-\theta}{\sin\theta} = \frac{4}{\pi}\,\frac{3\pi/4}{1/\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

(som kan ses direkte av figuren). I punkt A altså

$$V_A^2 = 4\left(1 + \frac{4}{3\pi} + \frac{8}{9\pi^2}\right) = 6{,}06\ m^2/s^2.$$

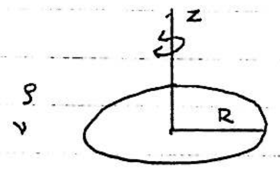
Bernoulli: $p_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \gamma z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \gamma \overset{=0}{z_B}$, gir

$$p_A = p_B + \tfrac{1}{2}\rho(V_B^2 - V_A^2) - \gamma z_A = 120\cdot 10^3 + \tfrac{1}{2}\cdot 10^3(4 - 6{,}06) - 10^4\cdot 3$$

$$= 10^3(120 - 1{,}03 - 30)\ \text{Pa} = 89\cdot 10^3\ \text{Pa}$$

$$\underline{p_A = 89\ \text{kPa}}$$

Løsning Oppgave 3



$\theta(t) = \theta_0\cos\omega t$

a) Platens hastighet $r\dot{\theta} = -r\theta_0\omega\sin\omega t$ er lik væskens hastighet $r\Omega(0,t) = r\Omega_0\sin\omega t$ når $z = 0$, dvs.

$$\underline{\Omega_0 = -\omega\theta_0}$$

Vilkårlig $z \geq 0$:

$\Omega = -\omega\theta_0 e^{-\beta z}\sin(\omega t - \beta z)$, $\partial\Omega/\partial t = -\omega^2\theta_0 e^{-\beta z}\cos(\omega t - \beta z)$

$\partial\Omega/\partial z = \omega\theta_0\beta e^{-\beta z}[\sin(\omega t - \beta z) + \cos(\omega t - \beta z)]$

$\partial^2\Omega/\partial z^2 = -2\omega\theta_0\beta^2 e^{-\beta z}\cos(\omega t - \beta z)$.

Innsetting gir $-\omega^2\theta_0 e^{-\beta z}\cos(\omega t - kz) = -2\nu\omega\theta_0\beta^2 e^{-\beta z}\cos(\omega t - kz)$

$$\underline{\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}$$

b) Skjærspenning ved skivas overflate: $\tau(0,t) = \mu\left.\frac{dV_\theta}{dz}\right|_{z=0}$

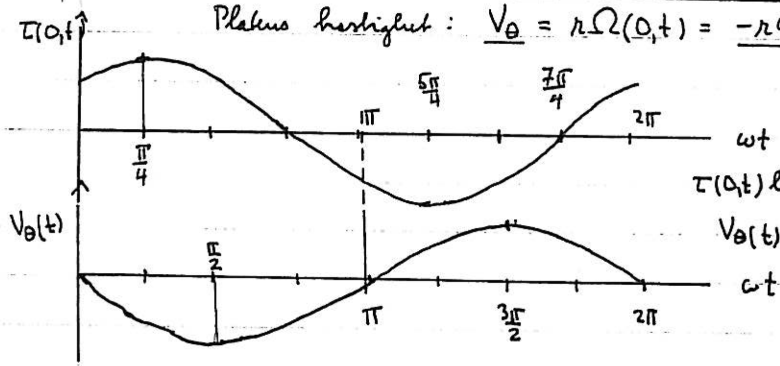
Det gir

$$\tau(0,t) = \mu\omega\theta_0\beta r\,(\underbrace{\sin\omega t + \cos\omega t}_{\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})}) = \sqrt{2}\mu\omega\theta_0\beta r\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Setter inn for β:

$$\underline{\tau(0,t) = \rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega\,\theta_0 r\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Platens hastighet: $\underline{V_\theta} = r\Omega(0,t) = \underline{-r\omega\theta_0\sin\omega t}$



$\tau(0,t)$ ligger $\frac{3\pi}{4}$ foran $V_\theta(t)$ i fase.

Løsning Oppgave 3 c)

Instantan effekt per overflateenhet er

$$-\tau(0,t)\cdot V_\theta(r,0,t) = \rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega\Theta_0 r\sin(\omega t+\tfrac{\pi}{4})\cdot r\omega\Theta_0\sin\omega t$$

$$= \rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega^2\Theta_0^2 r^2\sin(\omega t+\tfrac{\pi}{4})\sin\omega t.$$

Instantan effekt $P(t)$ for hele skiva finnes ved å integrere over arealet (overside/underside):

$$P(t) = \rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega^2\Theta_0^2\sin(\omega t+\tfrac{\pi}{4})\sin\omega t\cdot\int_0^R r^2\cdot 2\pi r\,dr\cdot \underbrace{2}_{\text{2 sider}}$$

Da $\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4}R^4$ får

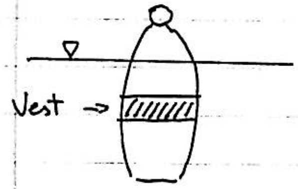
$$\underline{P(t) = \pi\rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega^2\Theta_0^2 R^4\cdot\sin(\omega t+\tfrac{\pi}{4})\sin\omega t}$$

Tidsmiddel: Da $\overline{\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})\sin\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(\sin\omega t+\cos\omega t)\sin\omega t}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\sin^2\omega t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ får

$$\underline{\overline{P(t)} = \tfrac{1}{2}\pi\rho\sqrt{\tfrac{\nu\omega}{2}}\,\omega^2\Theta_0^2 R^4}$$

Løsning Oppgave 4



V_P : personens volum

V_L : flytevestens volum.

Flytevesten mest effektiv når den er helt neddykket.

Personens tyngde: $mg = 72\cdot 10 = 720$ N

Personens volum: $V_P = \dfrac{m}{\rho_P} = \dfrac{72}{0{,}95\cdot 10^3} = 0{,}0758\ m^3$

Flytevestens tyngde: $\gamma_L\cdot V_L = 0{,}2\cdot 10^4\cdot V_L = 2000\,V_L$

Oppdriftskraft: $\gamma_{H_2O}\cdot(\underbrace{0{,}75\,V_p + V_L}_{\text{neddykket volum}}) = 10^4(0{,}75V_p + V_L)$

Kraftbalanse: $10^4(0{,}75\,V_p + V_L) = 720 + 2000\,V_L$

$0{,}0569 + V_L = 0{,}072 + 0{,}2\,V_L$

$0{,}8V_L = 0{,}0151$

$\underline{V_L} = 0{,}019\ m^3 = \underline{19\ dm^3}$