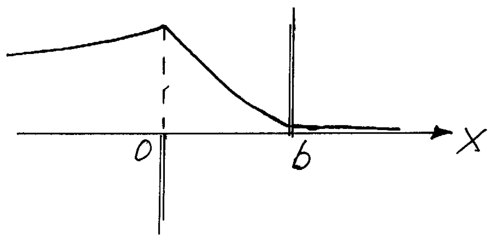
LØYSING ØVING 8

Løysing oppgåve 1 **Elektron i potensial med to δ-funksjonar**

a) Ein deltabrønn er grensa av ein veldig djup og veldig trang brønn. Inne i ein *slik* brønn blir $E - V$ svært stor, slik at den relative krumninga $\psi''/\psi = 2m_e/\hbar^2[V - E]$ blir svært stor og negativ. ψ krummar da svært raskt *mot* aksen. I grensa får den ein knekk, mot aksen. Ved ein delta*barriere* er det motsett. Her knekkjer energieigenfunksjonen ψ *utover* frå aksen.



Ein bunden tilstand i dette potensialet må ha negativ energi E. Den relative krumninga $\psi''/\psi = 2m_e/\hbar^2[V(x) - E] = 2m_e/\hbar^2[V(x) + |E|]$ blir då positiv for alle $x \neq 0, b$. Difor må ψ krumme utover frå aksen unntatt i origo.

b) Med $E = 0$ følgjer det at ψ_0'' må vere lik null og ψ_0 lineær i alle område der $V(x) = 0$, m.a for $x < 0$. Då ein energieigenfunksjon ikkje får lov å divergere, må den da vere konstant i dette området. Denne konstanten kan vi like godt sette lik 1, da denne tilstanden uansett ikkje er normerbar. (Av same grunn må den også vere konstant for $x > b$.) Frå det oppgjevne diskontnuitetskravet følgjer det nå at

$$\psi_0'(0^+) = \psi_0'(0^-) - \frac{2g}{a_0}\psi_0(0) = -\frac{2g}{a_0}.$$

Sidan ψ_0 er lineær i området $0 < x < b$, følgjer det at $\psi_0(x) = 1 - 2gx/a_0$ i dette området.

c) For $0 < b < a_0/2g \equiv b_0$ ser vi at $\psi_0(b)$ er positiv:

$$\psi_0(b) = 1 - \frac{2gb}{a_0} = 1 - \frac{b}{b_0} > 0.$$

Sidan ψ_0 skal vere lineær for $x > b$ og ikkje får lov å divergere, må den vere konstant i dette området:

$$\psi_0(x) = \psi_0(b) = 1 - \frac{2gb}{a_0} \quad \text{for} \quad x > b.$$

Diskontinuiteten i $x = b$ gjev då

$$0 - \left(-\frac{2g}{a_0}\right) = \frac{2f}{a_0}\psi_0(b).$$

f-verdien som gjev $E = 0$ for denne tilstanden er ein funksjon av b:

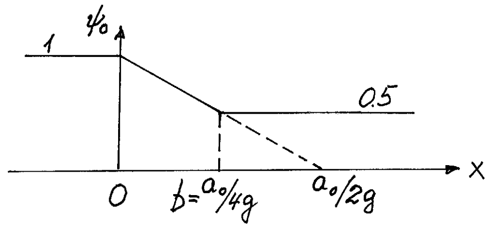
$$f_0(b) = \frac{g}{\psi_0(b)} = \frac{g}{1 - 2gb/a_0}.$$

(i) I grensa $b \to 0$ ser vi at $f_0(0) = g$: Dei to deltafunksjonane opphever då kvarandre, og dette er akkurat det som trengst for å gje oss eigenfunksjonen $\psi_0 = 1$, med energien $E = 0$.

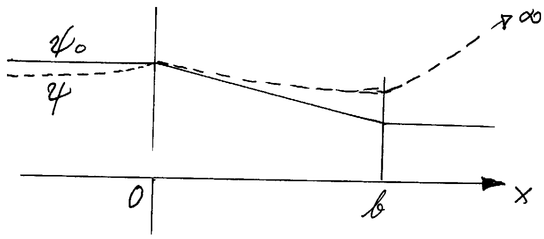
(ii) For $b = a_0/4g$ er $f_0 = 2g$, slik at barrierehøgda må vere dobbelt så stor som brønndjupna for at tilstanden ψ_0 skal få null energi.

(iii) Når b nærmar seg grensa $a_0/2g$ ($\equiv b_0$), ser vi at barrierehøgda f_0 går mot uendeleg for at ψ_0 skal ha energien $E = 0$.

d) For $b = a_0/4g$ får ψ_0 forma



La oss prøve å finne ei løysing på forma $\psi = Ce^{\kappa x}$ for $x < 0$, og nøste vidare derifrå. Ein eventuell bunden tilstand må nemleg vere på denne forma til venstre for origo. Her treng ikkje κ å vere stor, men den må vere positiv. Sidan $\psi'(0^-)$ er positiv, følgjer det frå diskontinuiteten i origo at ψ' blir større enn ψ_0' til høgre for origo. Og fordi ψ i motsetning til ψ_0 må krumme utover frå aksen for $0 < x < b$, blir $\psi'(b^-)$ endå litt større enn $\psi_0'(b^-)$. Frå diskontinuitetskravet i $x = b$ følgjer det at løysinga ψ får ein positiv derivert i $x = b^+$. Til høgre for dette punktet skal ψ igjen krumme utover.



Denne løysinga vil difor gå mot uendeleg, og er såleis ingen energieigenfunksjon. Eigenfunksjonen ψ_0 er difor grunntilstanden, og sidan grunntilstanden er ubunden, har vi ingen bundne tilstandar for dette systemet.

e) Då ψ' må vere endeleg på begge sider av punktet $x = b$, følgjer det fra diskontinuitetskravet

$$\psi'(b^+) - \psi'(b^-) = \frac{2f}{a_0}\,\psi(b)$$

at $\psi(b)$ må gå mot null i grensa $f \to \infty$. I området $0 < x < b$ kan vi skrive den generelle løysinga som ein lineærkombinasjon

$$\psi = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} = A'e^{\kappa(x-b)} + B'e^{-\kappa(x-b)}.$$

Kravet $\psi(b) = 0$ gjev då $B' = -A'$, slik at bølgjefunksjonen i dette området er på forma

$$\psi = A'(e^{\kappa(x-b)} - e^{-\kappa(x-b)}) = C \sinh[\kappa(x-b)], \quad \text{q.e.d.}$$

For $x < 0$ må vi ha $\psi = De^{\kappa x}$, då $e^{-\kappa x}$ divergerer. Diskontinuitetskravet i origo gjev då

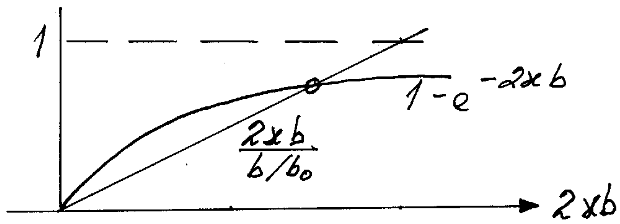
$$-\frac{2g}{a_0} = \frac{\psi'(0^+)}{\psi(0)} - \frac{\psi'(0^-)}{\psi(0)} = \kappa \coth[\kappa(-b)] - \kappa,$$

eller

$$\kappa b(\coth(\kappa b) + 1) = \frac{2gb}{a_0} \quad (\equiv \frac{b}{b_0}).$$

Ein kan omforme venstresida til $2\kappa b/(1 - e^{-2\kappa b})$, slik at diskontinuitetskravet som gjev energien $E = -\hbar^2\kappa^2/(2m_e)$ kan skrivast på forma

$$1 - e^{-2\kappa b} = \frac{2\kappa b}{b/b_0}.$$



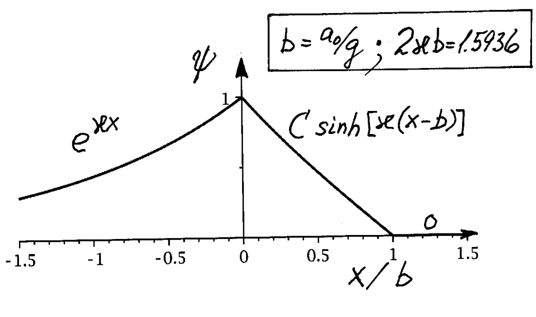
Figuren viser ei prinsippskisse av venstre - og høgresids for $b > b_0$. Vi merkar oss at den deriverte av venstresida i origo (med omsyn på variabelen $2\kappa b$) er lik 1, medan den deriverte av høgresida er $b_0/b < 1$. Difor får vi eit skjæringspunkt for positiv κ, og såleis ein bunden grunntilstand. For $b = 2b_0 = a_0/g$ skal vi løyse likninga

$$2(1 - e^{-x}) = x, \qquad \text{der} \quad x = 2\kappa b.$$

Eit par forsøk med kalkulatoren gjev $x = 2\kappa b \approx 1.5936$. Innsetting gjev då

$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m_e} = ... = -g^2\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \cdot \frac{x^2}{4}.$$

Forholdet mellom denne energien og energien for $f = 0$ er altså $x^2/4 \approx 0.635$. Løysinga ser slik ut:



Merk at vi får same løysing med ein hard vegg i $x = b$.