Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4100
Matematikk 1
Høst 2014

Løsningsforslag — Øving 02

$\boxed{2.1.10}$ Vi bruker definisjonen for ikke-vertikale tangentlinjer (side 97 i boka). Tangentlinjen gjennom et punkt (x_0, y_0) er gitt ved

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

I vårt tilfelle er $x_0 = 1$ og $y_0 = \sqrt{5 - 1^2} = 2$. Stigningstallet m til tangentlinja i et vilkårlig punkt er gitt ved

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-(x+h)^2} - \sqrt{5-x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{5-(x+h)^2} - \sqrt{5-x^2}\right)\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(5-(x+h)^2\right) - \left(5-x^2\right)}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5 - x^2 - 2hx - h^2 - 5 + x^2}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 - 2hx}{h\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h - 2x}{\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)} \\
&= -\frac{\lim_{h\to 0} h + 2x}{\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{5-(x+h)^2} + \sqrt{5-x^2}\right)}.
\end{aligned}$$

I det første steget har vi brukt metoden med å multiplisere teller og nevner med den konjugerte til telleren. I det siste steget har vi brukt Teorem 2, punkt 5, side 69 i boka.

Når $h \to 0$ har vi nå at telleren går mot $2x$ og nevneren går mot $2\sqrt{5 - x^2}$. Dette gir

$$m = \frac{-2x}{\sqrt{5-x^2} + \sqrt{5-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}.$$

Ved å sette $x = 1$, får vi $m = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$.

Tangentkurven blir nå

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) + 2 = \frac{1}{2}(5 - x).$$

Observasjon: Vi kunne ha satt inn for $x = 1$ allerede fra starten av når vi regner ut m. Det ville gitt noe enklere regning, men vi har her valgt å vise hvordan dette kan gjøres mer generelt. Merk også at uttrykket vi får for m er lik den deriverte av kurven vi ser på.

2.2.54 Vi skal vise at $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$, der $r = \frac{1}{n}$ og n er et positivt heltall. Vi bruker definisjonen på den deriverte (side 100 i boka) og det oppgitte hintet. Da har vi at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{\left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n}\end{aligned}$$

Videre bruker vi formelen for faktorisering av differansen mellom uttrykk i n'te potens (side 103 i boka):

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Dersom vi setter $a = (x+h)^{\frac{1}{n}}$ og $b = x^{\frac{1}{n}}$ kan vi skrive om nevneren vår til:

$$\begin{aligned}\left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left[(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}\right]\Bigg[&\left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\\ &+ \left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x^{\frac{1}{n}}\\ &+ \left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-3} x^{\frac{2}{n}}\\ &+ \dots\\ &+ \left((x+h)^{\frac{1}{n}}\right) x^{\frac{n-2}{n}}\\ &+ x^{\frac{n-1}{n}}\Bigg].\end{aligned}$$

Den første faktoren, $\left[(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}\right]$, kanselleres mot telleren i grensen vår. For den andre faktoren kan vi la $h \to 0$, og vi står igjen med

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x^{\frac{1}{n}} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-3} x^{\frac{2}{n}} + \dots + \left(x^{\frac{1}{n}}\right) x^{\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}}\\ &= \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}+\frac{1}{n}} + x^{\frac{n-3}{n}+\frac{2}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}}\\ &= \frac{1}{\underbrace{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}} + \dots + x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}}_{n \text{ ledd}}}\\ &= \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = rx^{r-1}.\end{aligned}$$

2.3.30 Vi starter med å derivere telleren,

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)(x^3+2) = 2x(x^3+2) + (x^2+1)3x^2 = 5x^4 + 3x^2 + 4x.$$

Deretter nevneren,

$$\frac{d}{dx}(x^2+2)(x^3+1) = 2x(x^3+1) + (x^2+2)3x^2 = 5x^4 + 6x^2 + 2x.$$

Ved å bruke kvotientregelen på hele uttrykket får vi nå at

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+1)(x^3+2)}{(x^2+2)(x^3+1)}\right)\\ &\quad= \frac{(x^2+2)(x^3+1)(5x^4+3x^2+4x) - (x^2+1)(x^3+2)(5x^4+6x^2+2x)}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}\end{aligned}$$

Ved å løse ut parentesene og trekke sammen kommer man fram til det endelige svaret,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+1)(x^3+2)}{(x^2+2)(x^3+1)}\right) = \frac{2x^7-3x^6-3x^4-6x^2+4x}{(x^2+2)^2(x^3+1)^2}.$$

$\boxed{2.3.40}$ Vi starter med å derivere uttrykket ved hjelp av produktregelen for n faktorer (side 112 i boka), her med $n = 4$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big((1+t)(1+2t)(1+3t)(1+4t)\Big) =& 1(1+2t)(1+3t)(1+4t)\\ &+ (1+t)2(1+3t)(1+4t)\\ &+ (1+t)(1+2t)3(1+4t)\\ &+ (1+t)(1+2t)(1+3t)4.\end{aligned}$$

Vi setter deretter inn for $t = 0$ og får at

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big((1+t)(1+2t)(1+3t)(1+4t)\Big)\Big|_{t=0}\\ &\quad= 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 4\\ &\quad= 1+2+3+4 = 10.\end{aligned}$$

$\boxed{2.4.10}$ Vi bruker kjerneregelen for derivasjon og at $\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|} = \mathrm{sgn}(x)$ (se side 104 i boka). Det gir

$$f'(t) = \mathrm{sgn}(2+t^3)(3t^2) = \frac{2+t^3}{|2+t^3|}3t^2.$$

Vi vet at $\mathrm{sgn}(2+t^3) = 1$ når $2+t^3 > 0$, det vil si når $t > -\sqrt[3]{2}$. For $t < -\sqrt[3]{2}$ er $\mathrm{sgn}(2+t^3) = -1$, mens den er udefinert for $t = -\sqrt[3]{2}$ (her har $f(t)$ en knekk). Oppsummert kan vi skrive dette slik:

$$f'(t) = \begin{cases} 3t^2, & \text{if } t > -\sqrt[3]{2},\\ -3t^2, & \text{if } t < -\sqrt[3]{2},\\ \text{udefinert} & \text{if } t = -\sqrt[3]{2}.\end{cases}$$

$\boxed{2.5.22}$ Først bruker vi at $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ slik at $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. Ved hjelp av kjerneregelen kan vi nå finne den deriverte,

$$\frac{d}{dx}(1 - 2\sin^2 x) = -2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = -4\sin x \cos x = -2\sin 2x.$$

Den siste overgangen er en kjent trigonometrisk relasjon, se side 52 i boka.

$\boxed{2.5.24}$ Vi bruker derivasjonsregelene og definisjonene på side 124 og 125 i boka, og finner at

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sec x - \csc x) &= \sec x \cdot \tan x - (-\csc x \cdot \cot x) \\
&= \frac{1}{\cos x}\tan x + \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.
\end{aligned}$$

$\boxed{2.6.16}$ Vi starter med å regne ut de første deriverte:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \\
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \\
f''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{(-1)\cdot 1}{2^2}x^{-\frac{3}{2}}, \\
f'''(x) &= \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-1)\cdot 1}{2^2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{(-3)(-1)\cdot 11}{2^3}x^{-\frac{5}{2}}, \\
f^{(4)}(x) &= \left(-\frac{5}{2}\right)\frac{(-3)(-1)\cdot 1}{2^3}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{(-5)(-3)(-1)\cdot 1}{2^4}x^{-\frac{7}{2}}.
\end{aligned}$$

Ved litt prøving og feiling kan man komme fram til at ett uttrykk for den n'te deriverte må være

$$f^{(n)}(x) = \frac{(3-2n)(5-2n)\cdots(-3)(-1)\cdot 1}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Faktoren $(3-2n)(5-2n)\cdots(-3)(-1)\cdot 1$ er produktet av alle negative oddetall fra (-1) til $(3-2n)$ og 1. Merk at det er n slike faktorer. Denne faktoren kan også skrives som

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1-2i).$$

Dette betyr at man skal ta produktet av alle leddene $1-2i$ fra $i=0$ til $i=n-1$.

Vi går nå over til induksjonsbeviset. Først sjekker vi formelen for $n=1$:

$$f'(x) = \frac{1}{2^1}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Formelen stemmer altså for $n = 1$.

Videre antar vi at regelen stemmer for $n = k$. Det vil si vi antar at

$$f^{(k)}(x) = \frac{(3-2k)(5-2k)\cdots(-3)(-1)\cdot 1}{2^k} x^{\frac{1}{2}-k}.$$

Vi vil nå regne ut $f^{(k+1)}(x)$ ved å derivere dette uttrykket en gang til.

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(\frac{1}{2} - k\right) \frac{(3-2k)(5-2k)\cdots(-3)(-1)\cdot 1}{2^k} x^{\frac{1}{2}-k-1} \\
&= \frac{(1-2k)}{2} \frac{(3-2k)(5-2k)\cdots(-3)(-1)\cdot 1}{2^k} x^{\frac{1}{2}-(k+1)} \\
&= \frac{(1-2k)(3-2k)(5-2k)\cdots(-3)(-1)\cdot 1}{2^{k+1}} x^{\frac{1}{2}-(k+1)} \\
&= \frac{\big(3-2(k+1)\big)\big(5-2(k+1)\big)\big(7-2(k+1)\big)\cdots(-3)(-1)\cdot 1}{2^k} x^{\frac{1}{2}-(k+1)}.
\end{aligned}$$

Vi ser at dette er eksakt samme uttrykk som man får ved å sette $n = k + 1$ inn i uttrykket for $f^{(n)}(x)$ over. Dette fullfører induksjonsbeviset, og vi har vist at uttrykket for den $n$te dervierte av $f(x)$ stemmer.