NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

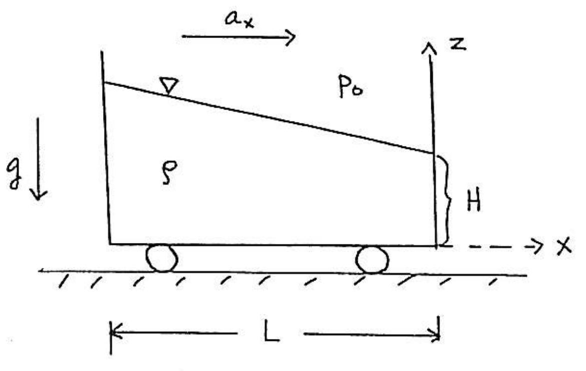


Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: (735) 93555

EKSAMEN I FAG 61124 / 66031 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. VII
Mandag 6.mai 1996
Tid: kl. 0900 - 1300

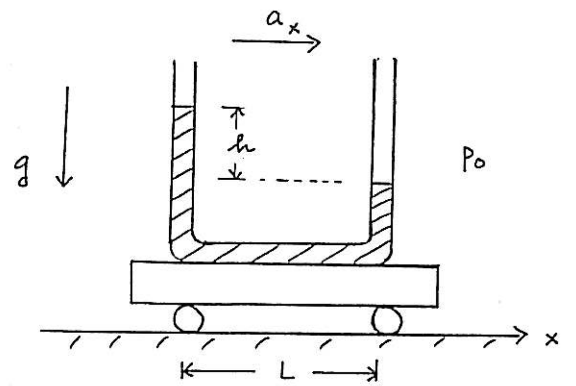
Hjelpemidler: B2- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU tillatt.
Bestemte trykte hjelpemidler tillatt:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet

## Oppgave 1



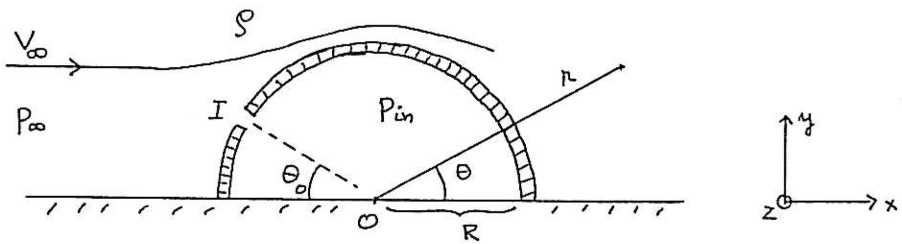

a) En vannvogn av lengde L akselereres langs x-aksen med konstant akselerasjon $a_x$. Vannets tetthet er $\rho$ , atmosfæretrykket er $p_0$ , og tyngdens akselerasjon er g. Finn trykket p(x,z) i vannet, idet du legger koordinatsystemet fast i vognen som vist på figuren. Vanndybden H ved x = 0 antas kjent.

b)




Et U-rør er delvis fylt av en væske. Røret er festet til en vogn som akselererer langs x-aksen med konstant akselerasjon $a_x$, og skal benyttes til å måle størrelsen av $a_x$. En leser av høydeforskjellen h i røret. Finn $a_x$ som funksjon av g, h og L.

## Oppgave 2




En igloo (snøhytte) har form av en halvsylinder med radius R. Se bort fra veggtykkelsen. Lufta antas friksjonsfri, med konstant tetthet ρ. Det blåser en vind på tvers mot iglooen, med opprinnelig hastighet $V_\infty$ som vist på figuren. Legg origo i punktet O.

a) Hastighetspotensialet Φ for potensialstrømningen på utsiden ($r \geq R$) oppgis å ha formen

$$\Phi = V_\infty\left(r + \frac{k}{r}\right)\cos\theta ,$$

hvor k er en konstant. Bestem verdien av k. Finn også strømfunksjonen Ψ på utsiden.

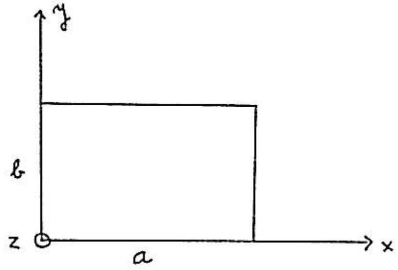


b) Finn trykket p(R, θ) på utsiden av veggen. Inngangen til iglooen er markert med I på figuren. Her i oppgaven skal det antas at bredden av åpningen er meget liten i forhold til R.

Anta først at I ligger nede ved platået (vinkel $\theta_0 = 0$). Hva er da den vertikale nettokraft $F_y$ på iglooen, per lengdeenhet i z-retningen? [Hint: Trykket $p_{in}$ inne i iglooen er alltid lik trykket ved inngangen.]

c) Du finner at $F_y > 0$, slik at iglooen blir utsatt for en løftekraft. Når vinden er sterk, kan denne kraften true med å løfte hele iglooen til værs. En av eskimoene innser imidlertid at man kan unngå problemet ved å flytte inngangen et stykke opp på veggen, tilsvarende en vinkel $\theta_0 > 0$ på figuren. For hvilken verdi av $\theta_0$ vil løftekraften $F_y$ bli lik null?

## Oppgave 3




En rektangulær tank med sidekanter a og b er fylt med vann opp til høyden d. Figuren viser tanken sett ovenfra. Horisontale akser er x og y. La z-aksen peke oppover, og la planet z = 0 falle sammen med vannspeilet når vannet er i ro.

Oppgaven i det følgende går ut på å analysere de mulige stasjonære svingemodene til den frie overflate i tanken.

a) Gi først en kort utledning av den kinematiske betingelse for den frie overflaten. Bruk denne, samt den dynamiske overflatebetingelse (Bernoullis ligning) til å utlede den frie overflatebetingelse for hastighetspotensialet Φ i lineær teori:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 , \qquad z=0.$$

b) Hastighetspotensialet oppgis å ha formen

$$\Phi = f(x,y)\cosh k(z+d)\cos\omega t \ .$$

Forklar hvorfor funksjonen f(x,y) må oppfylle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0 \ .$$

Finn dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$.

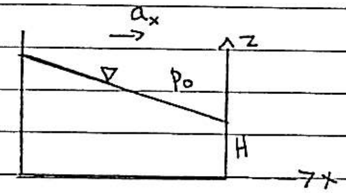
c) Anta at f(x,y) har formen

$$f = \cos px \cos qy \ ,$$

hvor p og q er konstanter. Betrakt de kinematiske grensebetingelsene ved tankens sidevegger, $x = 0,a$ og $y = 0,b$. Hvilke krav setter disse betingelsene på verdiene av p og q ? Finn de mulige verdiene av bølgetallet k samt vinkelfrekvensen $\omega$.

61124 FLUIDMEKANIKK, FYSIKK, 6. mai 1996. (1)

Løsning Oppgave 1




a) Bevegelsesligning i det akselererte koordinatsystem:

$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{a} + \vec{g}$, hvor $-\vec{a}$ er fiktivkraft per masseenhet. $\vec{a} = (a_x, 0, 0)$, $\vec{g} = (0, 0, -g)$.

Skriver ligningen slik:

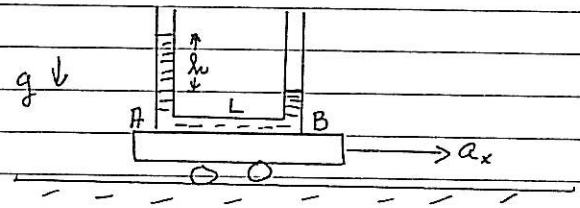
$\nabla\left(\frac{p}{\rho} + a_x x + gz\right) = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho} + a_x x + gz = C$,

hvor C er en konstant, uavhengig av koordinatene x og z.

C bestemmes av at $p = p_0$ for $x = 0$, $z = H$:

$\frac{p_0}{\rho} + gH = C$. Altså $p(x,z) = p_0 - \rho a_x x - \gamma z + \gamma H$ (1)

b)




Av ligning (1) ovenfor er trykkforskjellen mellom punktene A og B

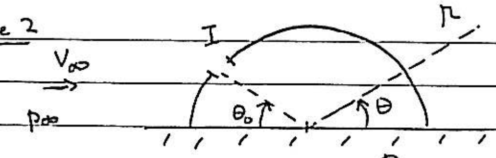
$p_A - p_B = \rho a_x \cdot L$.

Denne må balansere den statiske trykkforskjellen $\gamma h$.

Altså $\rho a_x L = \rho g h$, $a_x = gh/L$

Svaret er uavhengig av væskens tetthet $\rho$.

Oppgave 2




a)

Av $\Phi = V_\infty\left(r + \frac{k}{r}\right)\cos\theta$ finnes

$$V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = V_\infty\left(1-\frac{k}{r^2}\right)\cos\theta, \qquad V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -V_\infty\left(1+\frac{k}{r^2}\right)\sin\theta$$

Da $V_r = 0$ for $r = R$, følger $\underline{k = R^2}$

Strømfunksjonen $\Psi$ finnes av

$$V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = V_\infty\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta,$$

$$\underline{\Psi = V_\infty\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta}$$

b) For potensialstrømning er Bernoullis konstant den samme overalt. Altså

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}V_\infty^2 = \frac{p(R,\theta)}{\rho} + \frac{1}{2}V_\theta^2(R,\theta).$$

Innsetting av $V_\theta(R,\theta) = -2V_\infty\sin\theta$ gir $\underline{p(R,\theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1-4\sin^2\theta)}$

Hvis $\theta_0 = 0$:

$$p_{in} = p(R,\theta=\pi) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2.$$

Vertikalkraft per lengdeenhet $\underline{F_y} = \int_0^\pi [p_{in} - p(R,\theta)]\sin\theta\cdot R\,d\theta$

$$= 2\rho V_\infty^2 R\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta = 2\rho V_\infty^2 R\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = \underline{\frac{8}{3}\rho V_\infty^2 R}$$

c)

Med I i posisjon $\theta_0$ blir $p_{in} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1-4\sin^2\theta_0)$

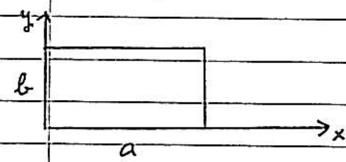
$$\Rightarrow F_y = \int_0^\pi\left\{\left[p_\infty + \tfrac{1}{2}\rho V_\infty^2(1-4\sin^2\theta_0)\right] - \left[p_\infty + \tfrac{1}{2}\rho V_\infty^2(1-4\sin^2\theta)\right]\right\}\sin\theta\cdot R\,d\theta$$

$$= 2\rho V_\infty^2 R\int_0^\pi(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0)\sin\theta\,d\theta = 2\rho V_\infty^2 R\left(\frac{4}{3} - 2\sin^2\theta_0\right)$$

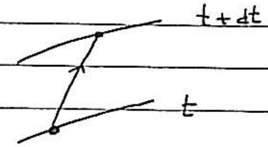
$F_y = 0$ for $\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\underline{\theta_0} = \underline{54{,}7^\circ}$



Oppgave 3




a) Fri overflate ved tiden t og ved tiden $t + dt$:




En fluidpartikkel i overflaten ved t vil være i overflaten ved $t+dt$ også. Deriverer $\eta = \eta(x,y,t)$ langs partikkelens bane:

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ettersom partikkelen følger overflaten er $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$.

Da $D\eta/Dt = w$, følger den kinematiske betingelsen

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + u\left.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{z=\eta} + v\left.\frac{\partial\eta}{\partial y}\right|_{z=\eta} = w(\eta).$$

Gjelder også i ikke-lineær teori

Bernoulli, fri overflate: $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} + \frac{1}{2}V^2(\eta) + \frac{p_0}{\rho} + g\eta = C.$

Velger $C = \frac{p_0}{\rho}$, slik at

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} + \frac{1}{2}V^2(\eta) + g\eta = 0.$$

Lineær approksimasjon:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad z = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad z = 0.$$

Herav følger den frie overflatebetingelse:

$$\underline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0.}$$

Oppgave 3 b

Inkompressibilitet $\nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2 \Phi = 0$ gir, ved innsetting av $\Phi = f(x,y)\cosh k(z+d)\cos\omega t$, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0. \quad (1)$$

Regner ut

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 f \cosh k(z+d)\cos\omega t$$

$$g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = gkf \sinh k(z+d)\cos\omega t.$$

Sett $z=0$. Fri overflatebetingelse gir

$$-\omega^2 f \cosh kd \cos\omega t + gkf \sinh kd \cos\omega t = 0$$

$$\underline{\omega^2 = gk\tanh kd}.$$ Samme som for propagerende bølger.

c)

Innsetting av $f = \cos px \cos qy$ gir

$$\Phi = \cos px \cos qy \cosh k(z+d)\cos\omega t.$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -p\sin px \cos qy \cosh k(z+d)\cos\omega t$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -q\cos px \sin qy \cosh k(z+d)\cos\omega t.$$

Må ha $u=0$ for $x = 0, a$, og $v = 0$ for $y = 0, b$.

$\Rightarrow \sin pa = 0, \quad \sin qb = 0$

Altså $p = m\pi/a, \quad q = n\pi/b$, m og n hele tall.

Av (1) følger $p^2+q^2 = k^2$.

Tillatte verdier av $k$ altså

$$k = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$$, med tilhørende vinkelfrekvens

$$\underline{\omega = \sqrt{gk\tanh kd}}$$