NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

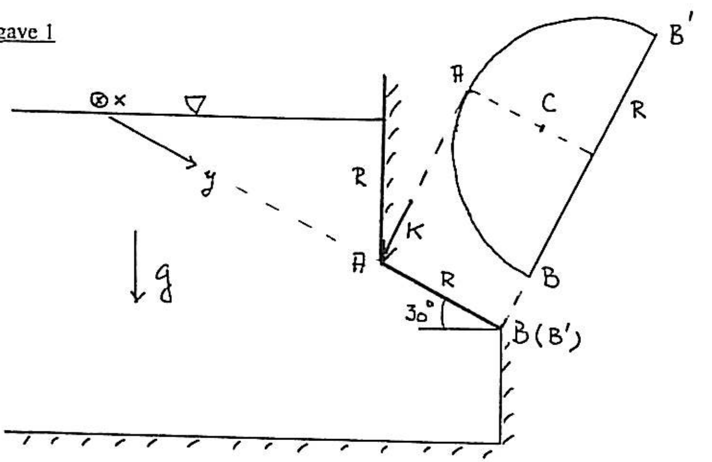
Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Iver Brevik
Tlf.: (735) 93555

EKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. VII
Mandag 5. mai 1997
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



En luke i en dam har form av en halvsirkel ABB′ med radius R. Luka er hengslet i sidekanten BB′, og er påvirket av en kraft K, rettet vinkelrett på luka, i toppunktet A. Lukas helningsvinkel er 30°. Vanndybden ved punkt A er lik R. Vannets tetthet er ρ.

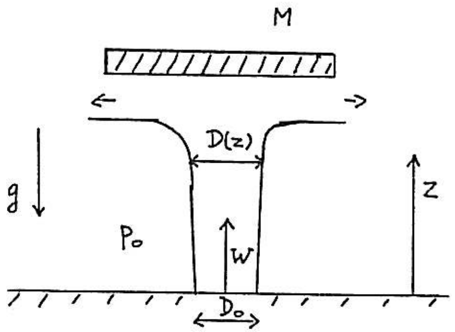
a) Finn den totale kraft F som vannet utøver mot luka.

b) Finn hvor stor K må minst være for at luka ikke skal åpne seg.

Oppgitt: For en halvsirkel ligger centroiden (punkt C på figuren) i avstanden $4R/(3\pi)$ fra grunnlinjen BB'. Arealets treghetsmoment om en akse parallell med x-aksen gjennom centroiden er

$$I_{xc} = \frac{1}{8}\pi R^4\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right).$$

Oppgave 2



a) En vertikal sirkulær vannstråle har diameter D_0 og utgangshastighet W i posisjon $z = 0$. D_0 og W er kjente størrelser. En sirkulær skive med masse M og diameter større enn vannstrålens diameter D(z) holdes oppe av strålen. Vis at likevektshøyden z_0 er

$$z_0 = \frac{1}{2g}\left[W^2 - \left(\frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\right)^2\right],$$

hvor g er tyngdens akselerasjon og ρ vannets tetthet.

b) Skiva gis en liten vertikal forskyvning ξ ut fra likevektsstillingen, dvs. $z \rightarrow z_0 + \xi$, og slippes så, slik at den utfører harmoniske vertikale svingninger med vinkelfrekvens ω omkring likevektsstillingen. Bestem ω.

Oppgave 3

En tornado modelleres ved at et sluk, av styrke $\lambda = -2800$ m²/s, superponeres med en linjevirvel, av styrke (sirkulasjon) $\Gamma = 5600$ m²/s. Både sluket og linjevirvelen er sentrert i origo.

a) Skriv ned uttrykket for tornadoens strømfunksjon ψ, og finn ligningen $r = r(\theta)$ for strømlinjene. Lag en approksimativ kvantitativ skisse av den strømlinje som tilsvarer $\psi = 0$.

b) Når r blir mindre enn en viss grenseverdi r_g kan vi ikke lenger bruke inkompressibel teori. Angi verdien av r_g. Hvor stort er gage-trykket i denne posisjonen?

Oppgitt: Lydhastighet $c = 340$ m/s, luftas tetthet $\rho = 1{,}20\ \mathrm{kg/m^3}$.

c) For $r < r_g$ er strømningen kompressibel. Bruk Eulerligningen til å vise generelt, for enhver stasjonær kompressibel strømning, at vi kan skrive en Bernoullis ligning på formen

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \text{konstant}$$

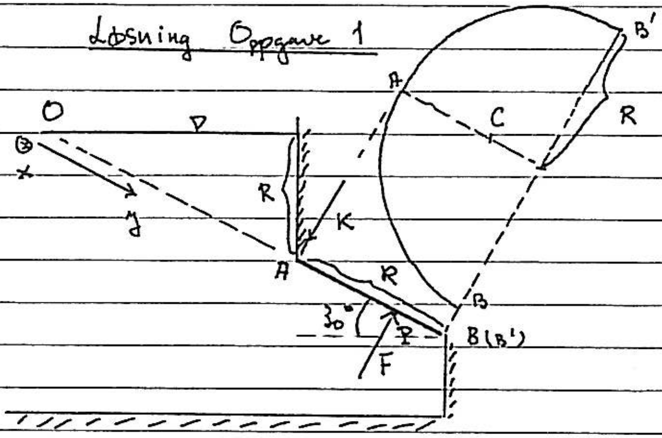
langs en strømlinje (tyngdekraften er utelatt). Anta så at strømningen er adiabatisk, slik at den oppfyller betingelsen $p/\rho^\gamma =$ konstant hvor γ er adiabatkonstanten, og vis at Bernoullis ligning kan da skrives slik:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \text{konstant}$$

langs strømlinjen.

6124 FLUIDMEKANIKK, 5. mai 1997

Løsning Oppgave 1



a) Velger origo i punktet O, og legger koordinataksene som vist på figuren.

$F = \gamma h_c A$, hvor centroidens dybde er

$$h_c = R + \left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)\sin 30^\circ = \frac{R}{2}\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right).$$

Arealet er $A = \frac{1}{2}\pi R^2 \Rightarrow \underline{F = \frac{1}{4}\pi\gamma R^3\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right)}$

b) Minsteverdien av K finnes av momentbalansen:

$K \cdot R = F \cdot BP$, hvor BP er avstanden fra grunnlinjen BB' til trykksenteret P. Av fig.: $y_P = OB - BP$, hvor $OB = 2R + R = 3R$. Altså $BP = 3R - y_P$.

Her finnes y_P av formel:

$$y_P = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A}. \text{ Da } y_c = 2R + \left(R - \frac{4R}{3\pi}\right) = R\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right) \text{ fås}$$

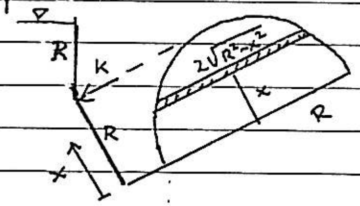
$$y_P = R\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right) + \frac{\frac{1}{8}\pi R^4\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right)}{R\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right)\cdot\frac{1}{2}\pi R^2} = R\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right) + \frac{R\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right)}{4\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right)} \text{ og}$$

$$BP = 3R - y_P = \frac{4R}{3\pi} - \frac{R}{4}\,\frac{1 - \frac{64}{9\pi^2}}{3 - \frac{4}{3\pi}} = \frac{4R}{\pi}\,\frac{1 - \frac{\pi}{16}}{3 - \frac{4}{3\pi}}$$

Ligningen $K \cdot R = F \cdot BP$ gir nå

$$K \cdot R = \frac{1}{4}\pi\gamma R^3\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right)\cdot\frac{4R}{\pi}\,\frac{1 - \frac{\pi}{16}}{3 - \frac{4}{3\pi}}, \quad \underline{K = \gamma R^3\left(1 - \frac{\pi}{16}\right)}$$

Alternativt kan oppgaven løses ved direkte integrasjon: legger nå koordinatsystemet slik at x peker oppover langs luken:



Momentbalanse

$$K \cdot R = \int_{\text{luke}} p\,dA \cdot x$$

Her er trykket $p = \gamma\left[R + (R - x)\sin 30^\circ\right] = \frac{1}{2}\gamma(3R - x)$, og arealelementet er $dA = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$. Altså

$$K \cdot R = \frac{1}{2}\gamma\int_0^R (3R - x)\cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\cdot x\,dx =$$

$$= 3\gamma R\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx - \gamma\int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

1. integral: $t^2 = R^2 - x^2$, dvs. $t\,dt = -x\,dx$, gir

$$\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^R t^2\,dt = \frac{1}{3}R^3$$

2. integral: $x = R\sin\theta$, $dx = R\cos\theta\,d\theta$, gir

$$\int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = R^4\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}R^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}R^4\int_0^{\pi/2}\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{8}R^4\Big|_0^{\pi/2}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right) = \frac{\pi}{16}R^4.$$

Altså $K \cdot R = \gamma R^4 - \frac{\gamma\pi}{16}R^4$, $\underline{K = \gamma R^3\left(1 - \frac{\pi}{16}\right)}$, som før.

Løsning Oppgave 2

a) I strålen er vertikalhastigheten $w = w(z)$. Antas uniform over tverrsnittet. Da $p = p_0$ inne i strålen (fordi strålen er en fri stråle), gir Bernoulli at

$\frac{1}{2} w^2(z) + gz = \frac{1}{2} W^2$ ∴ $w^2(z) = W^2 - 2gz$.

Kontinuitetsligningen gir

$\frac{1}{4}\pi D^2(z)\cdot w(z) = \frac{1}{4}\pi D_0^2 W$, $D(z) = D_0\sqrt{W/w(z)}$, som med innsetting for $w(z)$ gir

$$D(z) = D_0(1-2gz/W^2)^{-1/4}.$$

Beregning av z_0: Impulsfluksen $\rho w^2(z_0)\cdot\frac{1}{4}\pi D^2(z_0)$ må balansere tyngden Mg av skiva:

$$\rho w^2(z_0)\cdot \frac{1}{4}\pi D^2(z_0) = Mg .$$

Setter inn $w^2(z_0) = W^2 - 2gz_0$ og $D^2(z_0) = D_0^2(1-2gz_0/W^2)^{-1/2}$ og får

$$\frac{1}{4}\rho\pi D_0^2 \frac{W^2-2gz_0}{\sqrt{1-2gz_0/W^2}} = Mg$$

$$z_0 = \frac{1}{2g}\left[W^2 - \left(\frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\right)^2\right] \quad (1)$$

b) Forskyvning $z = z_0 + \xi$: Kraft fra vannet $\rho w^2(z)\cdot\frac{1}{4}\pi D^2(z)$ minus skivas tyngde Mg må være lik $M\cdot\ddot{\xi}$:

$\rho w^2(z)\cdot\frac{1}{4}\pi D^2(z) - Mg = M\cdot\ddot{\xi}$. Da $w(z)\cdot D^2(z) = W\cdot D_0^2$ iflg. kontinuitetsligningen, fås $\frac{1}{4}\rho\pi D_0^2 W\cdot w(z) - Mg = M\ddot{\xi}$. (2)

Her er

$w(z) = \sqrt{W^2-2gz} = \sqrt{(W^2-2gz_0) - 2g\xi}$, hvor iflg. (1)

$W^2 - 2gz_0 = \left(\frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\right)^2$. Altså $w(z) = \frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\sqrt{1-2g\xi\cdot\left(\frac{\rho\pi D_0^2 W}{4Mg}\right)^2}$

$\simeq \frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\left[1 - g\xi\left(\frac{\rho\pi D_0^2 W}{4Mg}\right)^2\right]$. Innsetting i (2) gir

$\ddot{\xi} + \left(\frac{\rho\pi D_0^2 W}{4M}\right)^2 \xi = 0$, ⇒ $\omega = \frac{\rho\pi D_0^2 W}{4M}$

Løsning Oppgave 3

a) Iflg. formelark er tornadoens strømfunksjon

$\Psi = \frac{\lambda}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$, hvor $\lambda < 0$ for sluk.

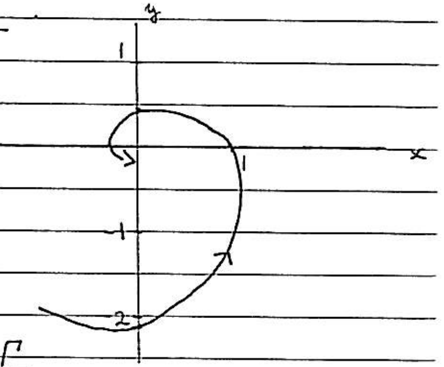
Strømlinjer tilsvarer Ψ = konstant. Da $\ln r = -\frac{2\pi\Psi}{\Gamma} + \frac{\lambda\theta}{\Gamma}$

fås $r = r(\theta) = e^{-2\pi\Psi/\Gamma}\cdot e^{\lambda\theta/\Gamma}$

$$r = e^{-2\pi\Psi/5600}\cdot e^{-\theta/2}.$$

$\Psi = 0$ gir $r = e^{-\theta/2}$.

θ	$-\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π
r	4,81	2,19	1	0,46	0,21



Hastighetskomponenter:

$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \frac{\lambda}{2\pi r}$, $V_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, ⇒

$V^2(r) = V_r^2+V_\theta^2 = \frac{\lambda^2+\Gamma^2}{(2\pi r)^2} = \frac{2800^2+5600^2}{(2\pi r)^2}$

$$V(r) = \frac{996}{r}$$

b) Inkompressibel strømning kan antas inn til $V/c = 0,3$, dvs.

$\frac{996}{r_g\cdot 340} = 0,3$ ⇒ $r_g = 9,76$ m

For potensialstrømning er Bernoullis konstant den samme overalt, dvs. $p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho \underbrace{V_\infty^2}_{0} = p_\infty$.

Gage-trykk $p - p_\infty = -\frac{1}{2}\rho V^2$. Med $r_g = 9,76$ m fås

$p_g - p_\infty = -\frac{1}{2}\cdot 1,20\cdot\left(\frac{996}{9,76}\right)^2 \simeq -6250$ Pa $= -6,25$ kPa

Løsning Oppgave 3, forts.

c) Eulerligningen for stasjonær strømning, når gravitasjonsfeltet utelates:

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

Langs strømlinje s:

$$V\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$$

Integrerer langs strømlinjen:

$$\int V dV + \int \frac{dp}{\rho} = 0$$

Da $\int V dV = \frac{1}{2}V^2 + \text{konstant}$, kan dette skrives

$$① \quad \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = C = \text{konstant langs strømlinje}$$

Adiabatisk strømning: $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{konstant} \equiv K$ gir

$\frac{dp}{d\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1}$, slik at

$$\int\frac{dp}{\rho} = K\gamma\int\rho^{\gamma-2}d\rho = \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} =$$

$= \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$. Her kan det opptre en integrasjonskonstant, som vi trekker inn i "sekkekonstanten" C i ①.

Altså $\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = C$. Bernoullis ligning for adiabatisk strømning.