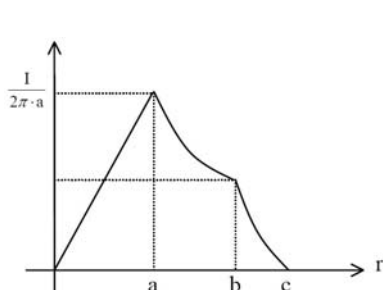


Øving 13, løsningsskisse.

Induksjon. Forskyvningsstrøm. Vekselstrømskretser.

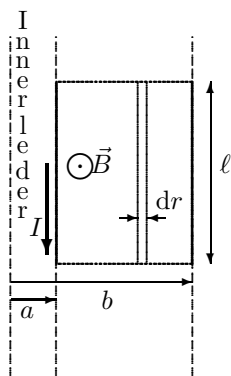
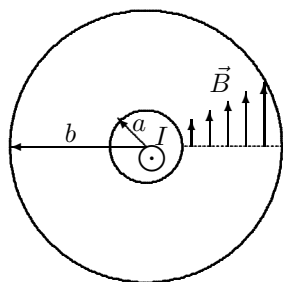
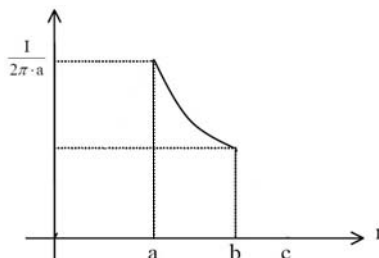
Oppgave 1. Induktans for koaksialkabel.



a) Med strømmen jamt fordelt over tverrsnittet på lederne blir $B(r)$ kvalitativt som $H(r)$ i tidligere øving ($B = \mu_0 H$). Vist i figuren til venstre.

Med bare overflatestrømmer blir skissa forenklet ved at $B \neq 0$ bare mellom lederne ($r \in [a, b]$), vist i figuren til høyre.

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \quad \text{for } r \in [a, b], \quad B = 0 \quad \text{ellers.}$$



b) Ønsker å finne asimotal fluks i området mellom lederne. Ser på et kabelstykke av (valgt) lengde ℓ .

Figuren helt til venstre viser et tverrsnitt normalt på strømretningen. Arealet som er aktuelt for å beregne asimotal fluks blir et rektangel med sidekanter langs henholdsvis radius (kortstiplet linje) og i kabelretningen (langstiplet linje). Dette rektangelet med bredde $b - a$ og høyde ℓ er vist i høyre figur.

Rektangelet deles i tynne skiver med bredde dr og areal $dA = \ell dr$. Flatenormalen $d\vec{A}$ vil være parallell med \vec{B} , da kan den asimotale B -fluks mellom gjennom det gitte rektangelet uttrykkes

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b B(r) \cdot \ell dr = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

Selvinduktansen L er definert ved likningen $\dot{\Phi}_B = L \cdot \dot{I}$ (bruker prikk for tidsderivert). I uttrykket for Φ_B er kun strømmen I avhengig av tida slik at vi får

$$L = \frac{\dot{\Phi}_B}{\dot{I}} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Selvinduktansen per lengdeenhet er mer interessant for en kabel:

$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

som skulle vises.

c) Numerisk for den gitte kabelen:

$$L' = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}}{2\pi} \ln \frac{3}{0,5} = 0,36 \mu\text{H/m} \quad \underline{L = L' \cdot 10 \text{ m} = 3,6 \mu\text{H}}.$$

d) Energittettheten (per volumenhet) er gitt ved

$$u = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2.$$

Energiinnhold på en lengde ℓ av kabelen blir da

$$U = \int u \cdot dV = \int_a^b u \cdot \ell 2\pi r dr = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2\pi} \right)^2 2\pi \ell \int_a^b \frac{1}{r^2} r dr = \frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \ell \ln \frac{b}{a}.$$

Energi per lengdeenhet blir $U' = U/\ell$, og fra oppgitt formel $U' = \frac{1}{2} L' I^2$ ser vi da at

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ell \ln \frac{b}{a},$$

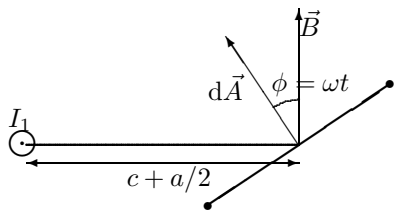
som altså er det samme som over.

e) Numerisk verdi for oppgitte data:

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot \left(\frac{2,0 \text{ A}}{2\pi \cdot 3,0 \text{ mm}} \right)^2 = 7,1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{HA}^2}{\text{m}^3} = \underline{7,1 \text{ mJ/m}^3 = 7,1 \text{ mPa}}.$$

Enhetsregning: $\frac{\text{HA}^2}{\text{m}^3} = \frac{(\text{Vs/A}) \cdot \text{A}^2}{\text{m}^3} = \frac{\text{VC}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{pascal}$. Energitettheten i ethvert punkt er altså et (magnetisk) trykk på det punktet. (Til sammenlikning: 1 atm = 101 kPa). Trykket skyldes den magnetiske krafta per flateenhet.

Oppgave 2. Induksjon ved rotasjon.



Figuren viser ledersløyfa sett ovenfra. Magnetfeltet er $\vec{B} = B_\phi \hat{\phi}$ og danner vinkel $\phi = \omega t$ med normalen til ledersløyfa under rotasjonen.

Beste estimat for magnetfelt i sløyfa er

$$B_\phi(c + \frac{a}{2}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{c + \frac{a}{2}} = 9,52 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

Indusert ems er gitt ved Faradays lov: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$,

der magnetisk fluks er gitt ved $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\phi(c + \frac{a}{2}) \cdot a^2 \cdot \cos \phi$.

Dette gir oss

$$\mathcal{E} = -B_\phi(c + \frac{a}{2}) \cdot a^2 \cdot \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 \frac{a^2}{c + \frac{a}{2}} \cdot \omega \cdot \sin \omega t = \underline{\mathcal{E}_0 \sin \omega t},$$

der frekvensen er

$$\underline{\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1000 \text{ s}^{-1} = 6,28 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}},$$

og amplituden

$$\underline{\mathcal{E}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 \frac{a^2}{c + \frac{a}{2}} \cdot \omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 50 \text{ A} \cdot \frac{(0,100 \text{ m})^2}{1,05 \text{ m}} \cdot 6,28 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} = \underline{0,60 \text{ mV}}}.$$

Oppgave 3. Forskyvningsstrøm.

a)

(i) Kondensatorens kapasitans og ladning ved 120 V er

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = 4,70 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot \frac{3,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2,50 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 4,99 \text{ pF}, \quad Q = CV = 4,99 \text{ pF} \cdot 120 \text{ V} = \underline{599 \text{ pC}}.$$

(ii) $\underline{dQ/dt = I_c = 6,00 \text{ mA}}$.

(iii) Forskyvningsstrømmen er $I_d = \frac{d\Phi}{dt}$ der Φ er elektrisk fluks mellom kondensatorplatene. Fra Gauss lov (eller velkjent fra før) får vi $\Phi = DA = Q$ = ladning på kondensatoren og dermed

$$I_d = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I_c = \underline{6,00 \text{ mA}}.$$

b) Vi bruker i det følgende $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Ohms lov på punktform gir

$$J_c(t) = \sigma E(t) = \frac{1}{\rho} E(t) = \frac{1}{\rho} \frac{D(t)}{\epsilon} = \frac{Q(t)}{\rho \epsilon A}$$

der σ er konduktivitet (ikke arealladningstetthet!) og vi har brukt $D = \epsilon E$ og $D = Q/A$. Positiv J_c altså samme retning som E , dvs. fra positiv til negativ plate.

Men strømtettheten er også lik

$$J_c(t) = -\frac{dQ}{dt} \frac{1}{A}$$

der vi må ha minustegn for å få rett fortegn, idet $\frac{dQ}{dt} < 0$. Dette gir diff.likningen

$$-\frac{dQ}{dt} \frac{1}{A} = \frac{Q(t)}{\rho \epsilon A} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{\rho \epsilon} dt \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0 \exp \left\{ -\frac{t}{\rho \epsilon} \right\}$$

og endelig

$$\underline{J_c(t) = -\frac{dQ}{dt} \frac{1}{A} = \frac{Q_0}{A \rho \epsilon} \exp \left\{ -\frac{t}{\rho \epsilon} \right\} .}$$

(ii) Bruker definisjon av forskyvningsstrøm samt enda en gang $D = \epsilon E$ og $E(t) = \rho J_c$ og får

$$J_d(t) = \frac{dD}{dt} = \epsilon \frac{dE}{dt} = \rho \epsilon \frac{dJ_c(t)}{dt} = \rho \epsilon \frac{Q_0}{A \rho \epsilon} \cdot \frac{1}{-\rho \epsilon} \exp \left\{ -\frac{t}{\rho \epsilon} \right\} = \underline{-\frac{Q_0}{A \rho \epsilon} \exp \left\{ -\frac{t}{\rho \epsilon} \right\} .}$$

(iii) Vi ser direkte fra uttrykkene at $J_d(t) = -J_c(t)$.

Hvis vi sender en (friladnings)strøm inn på en kondensatoren fortsetter den mellom platene som en forskyvningsstrøm, dvs. strømmen er kontinuerlig. I dette tilfellet – vi antar kondensatoren ikke er under opp- eller utladning – er det ingen strøm i tilførselsledning. For å bevare kontinuitet skal det da heller ikke være strøm mellom platene, og slik blir det fordi forskyvningsstrøm og friladningsstrøm er motsatt like store: $J_d(t) = -J_c(t)$ og $I_d(t) = -I_c(t)$.

Oppgave 4. Kompleks impedans.

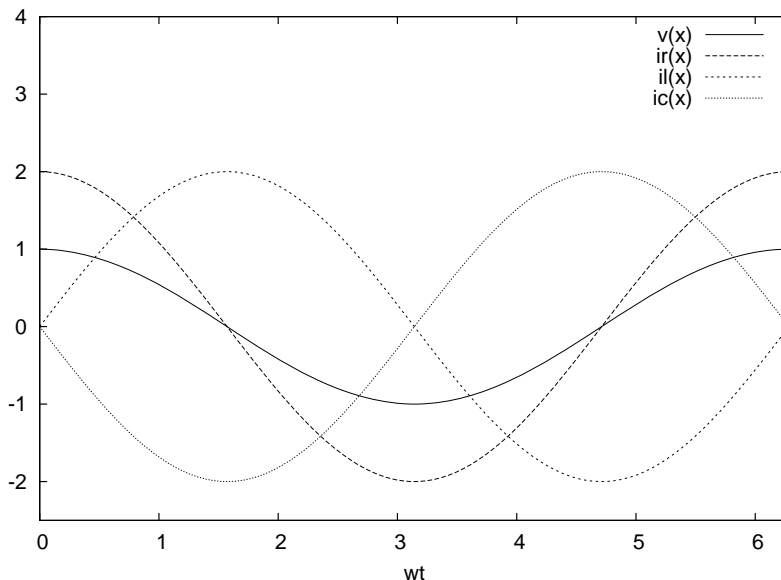
a) Spenningen over en motstand er $I(t)R$, over en induktans $L \frac{dI(t)}{dt}$ og over en kapasitans $\frac{Q}{C}$. Dette brukt i Kirchhoffs spenningsregel gir for hver av de tre kretsene:

$$V(t) = RI(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{Z_R = V/I = R,}$$

$$V_0 e^{i\omega t} = L \frac{dI}{dt} = i\omega L I_0 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z_L = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i\omega t}} = i\omega L,}$$

$$V_0 e^{i\omega t} = \frac{Q}{C} \quad \Rightarrow \quad I_0 e^{i\omega t} = \frac{dQ}{dt} = i\omega C V_0 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z_C = \frac{1}{i\omega C} = 1/i\omega C} \quad (\text{siste vanlig skrivemåte}).$$

b) Fra $I(t) = V(t)/Z(i\omega)$, kan vi finne følgende skisser av $V(t)$ og de tre ulike strømmer I_R , I_L og I_C . Vi antar $|Z| = 1/2$ under plotting og ser at fasevinkelen for de tre strømmer blir henholdsvis $\alpha = 0, -\pi/2$ og $+\pi/2$:



c) I det følgende leses “+” serie og “//” , parallell, og vi bruker følgende regler:

Seriekopling av impedanser: $Z_{\text{tot}} = Z_1 + Z_2$.

Parallellkopling av impedanser: $Z_{\text{tot}} = Z_1 // Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

Impedanser for de ulike kretselementer fra oppgaven over.

Første krets: $R + L // C + R$, som gir

$$Z = 2R + \frac{i\omega L / (i\omega C)}{i\omega L + 1 / (i\omega C)} = 2R + i \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

Andre krets: $L // (L + R + C)$:

$$Z = \frac{i\omega L(R + i\omega L + 1/i\omega C)}{i\omega L + i\omega L + R + 1/i\omega C} = \frac{i\omega RL - \omega^2 L^2 + L/C}{R + i(2\omega L - 1/\omega C)}.$$

(Kan nok skrives om, men ikke lett å få skrevet enklere.)

Tredje krets består av $R + (R+L) // C + L$. Dette gir

$$Z = R + \frac{(R + i\omega L)/i\omega C}{R + i\omega L + 1/i\omega C} + i\omega L = R + i\omega L + \frac{R + i\omega L}{i\omega RC - \omega^2 LC + 1}.$$

Fjerde krets er en parallellkobling av tre stk C . Kapasitansen blir $3C$ og induktansen blir

$$Z = \frac{1}{i\omega 3C}.$$

Oppgave 5. Resonanskrets.

a) Seriekoplingens impedans:

$$Z = R + i\omega L + 1/i\omega C = R + i(\omega L - 1/\omega C)$$

med absoluttverdi og fasevinkel:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad \alpha = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

b) Strømamplituden:

$$|I_0(\omega)| = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

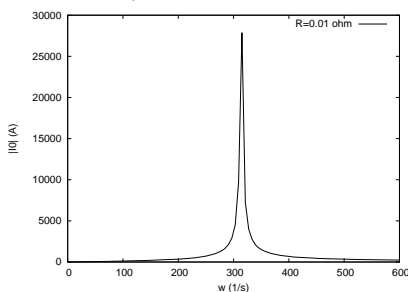
er maksimal når $\omega L - 1/\omega C = 0$, altså er resonansfrekvensen

$$\omega = \sqrt{1/LC} = \sqrt{100\pi \text{ F}^{-1} \cdot 100\pi \text{ H}^{-1}} = 100\pi \text{ s}^{-1}, \quad \text{altså} \quad \underline{f = 50 \text{ Hz.}}$$

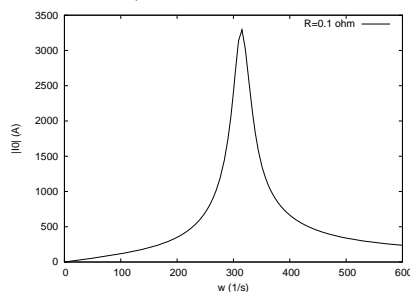
c) Med oppgitte tallverdier, og med R i enheten Ω , har vi, i enheten A:

$$|I_0(\omega)| = \frac{330}{\sqrt{R^2 + (\omega/100\pi - 100\pi/\omega)^2}}$$

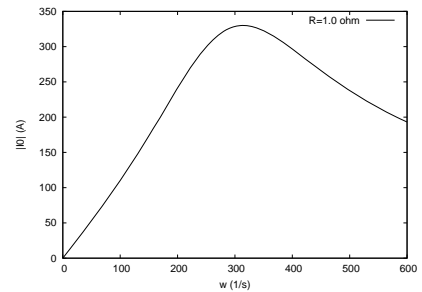
Med $R = 1/100 \Omega$:



Med $R = 1/10 \Omega$:



Med $R = 1 \Omega$:



d) Nettfrekvensen 50 Hz er nettopp lik kretsens resonansfrekvens. Vi ser at for alle valgte motstandsverdier blir strømamplituden for stor for en normal sikring i et hus. Med 10-ampères sikring kan vi tillate $|I_0| \simeq 10 \text{ A} \cdot \sqrt{2} = 14 \text{ A}$, som betyr at vi må bruke en motstand som er minst $330 \text{ V} / 14 \text{ A} = 23,57 \Omega = 24 \Omega$.

Oppgave 6. Frivillige flervalgsoppgaver.

- a) E. B -feltet fra venstre spole har retning x , mens feltet fra høyre spole er like sterkt (symmetri) men har retning $-x$, feltene nulles ut.
- b) A. Når magneten nærmer seg strømsløyfa øker magnetfluksen nedover inni sløyfa. Ifølge Lenz' lov settes opp en strøm som motvirker økningen, og ifølge høyrehåndsregelen må strømmen gå i positiv retning gitt i figuren. Når magneten er midt i øker ikke fluksen lenger, for deretter å avta. Da blir strømretningen motsatt. Altså figur 1 rett.
- c) D. Magnetfeltet B har inni strømsløyfa retning ned i papirplanet (høyrehåndsregel). Under bevegelsen reduseres sløyfas magnetiske fluks Φ_B nedover, og ifølge Lenz' lov induseres en sløyfestrøm som opprettholder fluks nedover, ergo må strømretningen være med klokka. I avstand r fra rett leder er $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ og Faradays lov gir (integral over sløyfa) $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int B \, dA = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{b \, dr}{r}$, altså prop. med I .
- d) C. Med startstrøm i_0 vil strømmen i kretsen avta med tidskonstant $\tau = L/R$ slik: $i(t) = i_0 \exp\{-t/\tau\}$. Tidsraten $di(t)/dt = (-1/\tau) \cdot i_0 \exp\{-t/\tau\}$ avtar med tida.
- e) B. Strømampl. $|I| = |V|/|Z|$ der impedansen $Z = R + i\omega L + 1/(i\omega C)$. Pga. leddet $i\omega L$ (og altså induktansen) får Z svært stor verdi og strømamplituden veldig liten verdi når $\omega \rightarrow \infty$.
- f) C. $f = c/\lambda = 300 \cdot 10^6 \text{ m/s} / (300 \text{ m}) = 1,0 \cdot 10^6 \text{ Hz}$.
- g) B. Bølgeretningen er i retning $\vec{v} \propto \vec{E} \times \vec{B}$. Siden $\vec{v} \propto \hat{\mathbf{k}}$ og $\vec{E} \propto -\hat{\mathbf{i}}$, må $\vec{B} \propto -\hat{\mathbf{j}}$, da $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$.
- h) C. Pga. leddet $\cos(ky + \omega t)$ propagerer bølgen i negativ y -retning. Da skal $\vec{E} \times \vec{B} \propto \hat{\mathbf{j}}$, som med E i x -retning må gi B i $-z$ -retning.