TMA4100
Matematikk 1
Høst 2014

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 09

4.3.14 Vi bruker Taylor-polynom til å løse denne oppgaven. Taylor-polynomet (Maclaurin-polynomet) til $\sin x$ om $x = 0$ er gitt som (side 278 i boka)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7).$$

Vi setter dette inn i grenseuttrykket og får

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)\right)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \mathcal{O}(x^4)\right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Denne oppgaven kan også løses ved hjelp av l'Hôpitals regel, men denne må da anvendes tre ganger.

4.5.36 Vi er gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

Punktet $x = 0$ er et kritisk punkt hvis $f'(0) = 0$. Vi finner derfor den deriverte til f,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } x > 0, \\ -2x & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

For å finne den deriverte i $x = 0$, må vi bruke definisjonen på den deriverte (se side 100 i boka),

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Vi ser at denne grensen er avhengig av om h er større eller mindre enn null. Vi ser derfor på høyre og venstre grenseverdi,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0+} h = 0, \\
\lim_{h\to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0-} \frac{-h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0-} (-h) = 0.
\end{aligned}$$

Siden høyre og venstre grenseverdi er like, konkluderer vi med at $f'(0) = 0$, slik at $x = 0$ er et kritisk punkt.

Vi bruker deretter definisjonen på vendepunkt (side 241 i boka) for å undersøke om $x = 0$ er et slikt. Vi må sjekke to betingelser:

(a) *Har kurven $y = f(x)$ en tangentlinje i $x = 0$?* Vi vet at den deriverte i punktet $x = 0$ eksisterer og at $f'(0) = 0$ og $f(0) = 0$. Derfor er $y = 0$ en tangentlinje til $y = f(x)$ i $x = 0$.

(b) *Har f motsatt konkavitet på motsatte sider av $x = 0$?* Vi følger definisjonen på konkavitet, side 240 i boka. For $x > 0$ er $f'(x) = 2x$, altså stigene. Det vil si at f er konveks (*concave up*) for $x > 0$. For $x < 0$ er $f'(x) = -2x$, altså synkende. Det vil si at f er konkav (*concave down*) for $x < 0$.

Vi ser at begge betingelsene er oppfylt. Altså er $x = 0$ et vendepunkt.

Vi observerer så at $f'(x)$ har en knekk i $x = 0$. Det vil si at $f''(x)$ ikke eksisterer her. Vi kan derfor konkludere med at selv om en funksjon har en ikke-vertikal tangentlinje i et vendepunkt, så trenger ikke den dobbeltderiverte gå mot null her.

$\boxed{\text{4.8.32}}$ Gitt kurven $y = 1 + x^{\frac{3}{2}}$. Vi vet at avstanden, l, mellom et vilkårlig punkt på kurven, (x, y), og (8,1) er gitt som

$$l^2 = (x-8)^2 + (y-1)^2 = (x-8)^2 + x^3.$$

Vi ønsker å finne den x-verdien som minimerer l. Siden f er kontinuerlig og begrenset nedenfra, vil kandidater til minimum være kritiske punkter, altså der $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = 0$. Vi argumenterer først for at l og l^2 har de samme kritiske punktene. Vi vet at kritiske punkter til l^2 oppfyller

$$\frac{\mathrm{d}(l^2)}{\mathrm{d}x} = 2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Så lenge $l \neq 0$ er dette det samme som å kreve at $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = 0$. Altså har vi vist at l og l^2 har de samme kritiske punktene. Grunnen til at vi gjør dette, er at det er enklere å derivere l^2. Dette er derfor en mye brukt teknikk.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(l^2)}{\mathrm{d}x} &= 2(x-8) + 3x^2 = 0 \\ 3x^2 &+ 2x - 16 = 0 \\ & x = 2 \quad \text{eller} \quad x = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Vi vet at

$$\frac{\mathrm{d}^2(l^2)}{\mathrm{d}x^2} = 6x + 2,$$

slik at $x = 2$ er et lokalt minimum, mens $x = -\frac{8}{3}$ er et lokalt maksimum.

Den eneste kandidaten til minimum er derfor $x = 2$, og vi konkluderer med at dette er et globalt minimum. I $x = 2$ har vi at

$$l = \sqrt{(2-8)^2 + 2^3} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

Den minste avstanden fra kurven $y = 1 + x^{\frac{3}{2}}$ er altså $2\sqrt{11}$.

6.2.10 Vi ser at integranden er en rasjonal funksjon der nevneren er av høyere orden enn telleren. Vi bruker derfor delbrøkoppspalting. Telleren, $3x^2+8x-3$, har røttene $x=\frac{1}{3}$ og $x=-3$, slik at vi kan skrive integranden som

$$\frac{x}{3x^2+8x-3}=\frac{x}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3)}=\frac{x}{(3x-1)(x+3)}.$$

Vi søker nå å skrive dette på formen

$$\frac{x}{(3x-1)(x+3)}=\frac{A}{3x-1}+\frac{B}{x+3},$$

der A og B er konstanter. Vi multipliserer begge sider med felles faktor, og får at

$$x=A(x+3)+B(3x-1)=(A+3B)x+(3A-B).$$

Vi må altså kreve at

$$\begin{aligned} A+3B&=1, \quad \text{og} \\ 3A-B&=0. \end{aligned}$$

Den andre ligningen gir $B=3A$, som innsatt i den første ligningen gir at

$$A+3\cdot 3A=1 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{10}.$$

Dette gir igjen

$$B=3A=\frac{3}{10}.$$

Vi er nå klare til å evaluere integralet,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(3x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{10(3x-1)}+\frac{3}{10(x+3)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1}+\frac{3}{10}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+3} \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\ln(3x-1)+\frac{3}{10}\ln(x+3)+C \\ &= \frac{1}{30}\left(\ln(3x-1)+9\ln(x+3)\right)+C \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(ax+b)=\frac{1}{ax+b}\cdot a$ slik at $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln(ax+b)+C$.

6.5.16 Vi gjenkjenner integralet som et uegentlig integral av type 1 (Definisjon 1, side 362 i boka). Vi bestemmer først det ubestemte integralet $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$. Ved å gjøre substitusjonen $u=\ln x$, har vi at $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, slik at

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln u+C=\ln(\ln x)+C.$$

Vi har nå at

$$\begin{aligned}\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} &= \lim_{R\to\infty}\int_e^R \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\\ &= \lim_{R\to\infty}[\ln(\ln R) - \ln(\ln e)]\\ &= \lim_{R\to\infty}\ln(\ln R).\end{aligned}$$

Siden $\lim\limits_{R\to\infty}\ln R = \infty$ må også $\lim\limits_{R\to\infty}\ln(\ln R) = \infty$, slik at integralet divergerer.

$\boxed{6.6.2}$ Vi bruker midtpunktsmetoden (*The Midpoint Rule*, side 372 i boka), og deler integrasjonsintervallet, $[1,9]$, opp i $n = 8$ intervaller med størrelse $h = 1$. Midtpunktene i hvert intervall er da gitt som $m_j = \frac{1}{2} + j$, for $j = 1, 2, \ldots, 8$. Vi leser av funksjonsverdien i midtpunktene fra figuren så nøyaktig som mulig. Da har vi at

$$\begin{aligned}\int_1^9 f(x) \approx M_8 &= h\sum_{j=1}^{8} f(m_j)\\ &\approx 1\cdot(3{,}4 + 4{,}3 + 5{,}8 + 7{,}5 + 8{,}2 + 7{,}6 + 6{,}2 + 4{,}1) = 47{,}1.\end{aligned}$$

$\boxed{6.7.12}$ Vi evaluerer først integralet eksakt,

$$\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Vi anvender så Simpsons metode (*Simpson's Rule*, side 377 i boka) med $n = 2$ på intervallet $[0{,}1]$. Det vil si at $h = \frac{1}{2}$ og $y_i = x_i^3$, for $i = 0{,}1{,}2$, der $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ og $x_2 = 1$. Vi har da at

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\\ &= \frac{h}{3}(x_0^3 + 4x_1^3 + x_2^3)\\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Vi har altså vist at $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = S_2$.

$\boxed{6.8.11}$ Vi ønsker å finne konstanter A og $u \in (0,1)$ slik at

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = Af(-u) + Af(u),$$

for alle kubiske polynomer $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, det vil si for alle a, b, c, d.

Vi starter med å evaluere integralet på venstre side av ligningen over. Siden integrasjonsintervallet er symmetrisk om $x = 0$, og siden ax^3 og cx er odde funksjoner, mens bx^2 og d er like funksjoner, kan vi forenkle intergralet,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{1} (bx^2 + d)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\frac{b}{3}x^3 + dx\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}b + 2d.\end{aligned}$$

Vi ser så på høyresiden,

$$\begin{aligned}Af(-u) + Af(u) &= A\big(a(-u)^3 + b(-u)^2 + c(-u) + d\big) + A\big(au^3 + bu^2 + cu + d\big) \\ &= A\big(-au^3 + bu^2 - cu + d + au^3 + bu^2 + cu + d\big) \\ &= A\big(2bu^2 + 2d\big) \\ &= 2Au^2b + 2Ad.\end{aligned}$$

Vi setter så uttrykkene lik hverandre og får at

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}b + 2d &= 2Au^2b + 2Ad \\ \left(\frac{1}{3} - Au^2\right)b + (1-A)d &= 0.\end{aligned}$$

Husk at dette skal gjelde for alle a, b, c, d. Uttrykket over er bare avhengig av b og d, slik at vi må kreve at

$$\begin{aligned}1 - A &= 0, \quad \text{og} \\ \frac{1}{3} - Au^2 &= 0.\end{aligned}$$

Den første ligningen gir $A = 1$, mens den andre gir

$$\frac{1}{3} - u^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$