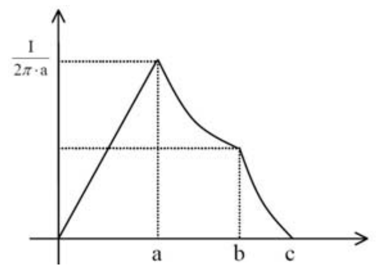
Øving 13, løsningsskisse.
Induksjon. Forskyvningsstrøm. Vekselstrømskretser.

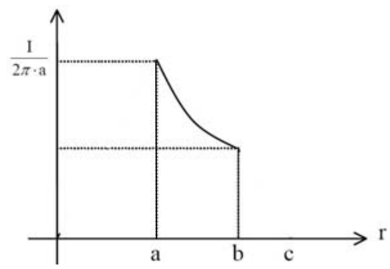
Oppgave 1. Induktans for koaksialkabel.

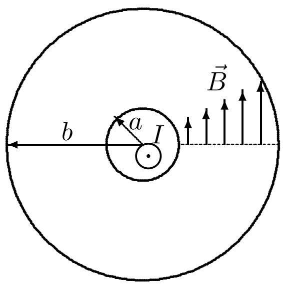


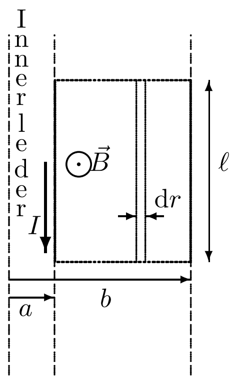
a) Med strømmen jamt fordelt over tverrsnittet på lederne blir $B(r)$ kvalitativt som $H(r)$ i tidligere øving ($B = \mu_0 H$). Vist i figuren til venstre.

Med bare overflatestrømmer blir skissa forenklet ved at $B \neq 0$ bare mellom lederne ($r \in [a, b]$), vist i figuren til høyre.

$B = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r}$ for $r \in [a, b]$, $\quad B = 0$ ellers.







b) Ønsker å finne asimutal fluks i området mellom lederne. Ser på et kabelstykke av (valgt) lengde ℓ.

Figuren helt til venstre viser et tverrsnitt normalt på strømretningen. Arealet som er aktuelt for å beregne asimutal fluks blir et rektangel med sidekanter langs henholdsvis radius (kortstiplet linje) og i kabelretningen (langstiplet linje). Dette rektangelet med bredde $b - a$ og høyde ℓ er vist i høyre figur.

Rektangelet deles i tynne skiver med bredde $\mathrm{d}r$ og areal $\mathrm{d}A = \ell \mathrm{d}r$. Flatenormalen $\mathrm{d}\vec{A}$ vil være parallell med $\vec{B}$, da kan den asimutale B-fluks mellom gjennom det gitte rektangelet uttrykkes

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_a^b B(r) \cdot \ell \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a} .$$

Selvinduktansen L er definert ved likningen $\dot{\Phi}_B = L \cdot \dot{I}$ (bruker prikk for tidsderivert). I uttrykket for Φ_B er kun strømmen I avhengig av tida slik at vi får

$$L = \frac{\dot{\Phi}_B}{\dot{I}} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} .$$

Selvinduktansen per lengdeenhet er mer interessant for en kabel:

$$\underline{L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}} ,$$

som skulle vises.

c) Numerisk for den gitte kabelen:

$$L' = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}}{2\pi} \ln \frac{3}{0,5} = 0,36\,\mu\mathrm{H/m} \qquad \underline{L = L' \cdot 10\,\mathrm{m} = 3,6\,\mu\mathrm{H}.}$$

d) Energittettheten (per volumenhet) er gitt ved

$$u = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot H^2 = \underline{\frac{1}{2} \mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2} .$$

Energiinnhold på en lengde ℓ av kabelen blir da

$$U = \int u \cdot \mathrm{d}V = \int_a^b u \cdot \ell\, 2\pi\, r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 2\pi\ell \int_a^b \frac{1}{r^2} r\mathrm{d}r = \frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\ell \ln\frac{b}{a}\,.$$

Energi per lengdeenhet blir $U' = U/\ell$, og fra oppgitt formel $U' = \frac{1}{2}L'I^2$ ser vi da at

$$\underline{L' = \frac{\mu_0}{2\pi}\ell \ln\frac{b}{a}}\,,$$

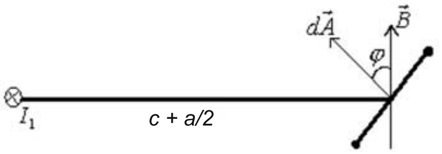
som altså er det samme som over.

e) Numerisk verdi for oppgitte data:

$$u = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot \left(\frac{2,0\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 3,0\,\mathrm{mm}}\right)^2 = 7,1 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{HA}^2}{\mathrm{m}^3} = \underline{7,1\,\mathrm{mJ/m}^3 = 7,1\,\mathrm{mPa}}.$$

Enhetsregning: $\frac{\mathrm{HA}^2}{\mathrm{m}^3} = \frac{(\mathrm{Vs/A})\cdot\mathrm{A}^2}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{VC}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ = pascal. Energitettheten i ethvert punkt er altså et (magnetisk) trykk på det punktet. (Til sammenlikning: 1 atm = 101 kPa). Trykket skyldes den magnetiske krafta per flateenhet.

Oppgave 2. Induksjon ved rotasjon.



Figuren viser ledersløyfa fra sida. Rotasjonen gir $\varphi = \omega\, t$.

Beste estimat for magnetfelt i sløyfa er

$$B_\phi(c+\tfrac{a}{2}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{c+\frac{a}{2}} = 9,52 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}.$$

Indusert ems er gitt ved Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$,

der magnetisk fluks er gitt ved $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = B_\phi\big(c+\tfrac{a}{2}\big) \cdot a^2 \cdot \cos\varphi\,.$

Dette gir oss

$$\mathcal{E} = -B_\phi\big(c+\tfrac{a}{2}\big) \cdot a^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\omega t) = \underline{\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 \frac{a^2}{c+\frac{a}{2}} \cdot \omega \cdot \sin\omega t = \mathcal{E}_0 \sin\omega t}\,,$$

der frekvensen er

$$\underline{\omega = 2\pi f} = 2\pi \cdot 1000\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{6,28 \cdot 10^3 \mathrm{s}^{-1}}\,,$$

og amplituden

$$\underline{\mathcal{E}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 \frac{a^2}{c+\frac{a}{2}} \cdot \omega} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 50\,\mathrm{A} \cdot \frac{(0,100\,\mathrm{m})^2}{1,05\,\mathrm{m}} \cdot 6,28 \cdot 10^3 \mathrm{s}^{-1} = \underline{0,60\,\mathrm{mV}}.$$

Oppgave 3. Forskyvningsstrøm.

a)

(i) Kondensatorens kapasitans og ladning ved 120 V er

$$C = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 \frac{A}{d} = 4,70 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot \frac{3,00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{2,50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 4,99\,\mathrm{pF}, \qquad Q = CV = 4,99\,\mathrm{pF} \cdot 120\,\mathrm{V} = \underline{599\,\mathrm{pC}}.$$

(ii) $\underline{\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I_\mathrm{c} = 6,00\ \mathrm{mA}.}$

(iii) Forskyvningsstrømmen er $I_\mathrm{d} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ der Φ er elektrisk fluks mellom kondensatorplatene. Fra Gauss lov (eller velkjent fra før) får vi $\Phi = DA = Q$ = ladning på kondensatoren og dermed

$$I_\mathrm{d} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I_\mathrm{c} = \underline{6,00\,\mathrm{mA}}.$$

b) Vi bruker i det følgende $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Ohms lov på punktform gir

$$J_c(t) = \sigma E(t) = \frac{1}{\rho} E(t) = \frac{1}{\rho}\frac{D(t)}{\epsilon} = \frac{Q(t)}{\rho\,\epsilon A}$$

der σ er konduktivitet (ikke arealladningstetthet!) og vi har brukt $D = \epsilon E$ og $D = Q/A$. Positiv J_c altså samme retning som E, dvs. fra positiv til negativ plate.

Men strømtettheten er også lik

$$J_c(t) = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{1}{A}$$

der vi må ha minustegn for å få rett fortegn, idet $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} < 0$. Dette gir diff.likningen

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{1}{A} = \frac{Q(t)}{\rho\epsilon A} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{1}{\rho\epsilon}\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad Q(t) = Q_0 \exp\left\{-\frac{t}{\rho\,\epsilon}\right\}$$

og endelig

$$\underline{J_c(t) = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{1}{A} = \frac{Q_0}{A\rho\,\epsilon}\exp\left\{-\frac{t}{\rho\,\epsilon}\right\}}.$$

(ii) Bruker definisjon av forskyvningsstrøm samt enda en gang $D = \epsilon E$ og $E(t) = \rho J_c$ og får

$$J_d(t) = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \epsilon\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \rho\,\epsilon\frac{\mathrm{d}J_c(t)}{\mathrm{d}t} = \rho\,\epsilon\frac{Q_0}{A\rho\,\epsilon}\cdot\frac{1}{-\rho\,\epsilon}\exp\left\{-\frac{t}{\rho\,\epsilon}\right\} = \underline{-\frac{Q_0}{A\rho\,\epsilon}\exp\left\{-\frac{t}{\rho\,\epsilon}\right\}}.$$

(iii) Vi ser direkte fra uttrykkene at $J_d(t) = -J_c(t)$.
Hvis vi sender en (friladnings)strøm inn på en kondensatoren fortsetter den mellom platene som en forskyvningsstrøm, dvs. strømmen er kontinuerlig. I dette tilfellet – vi antar kondensatoren ikke er under opp- eller utladning – er det ingen strøm i tilførselsledning. For å bevare kontinuitet skal det da heller ikke være strøm mellom platene, og slik blir det fordi forskyvningsstrøm og friladningsstrøm er motsatt like store: $J_d(t) = -J_c(t)$ og $I_d(t) = -I_c(t)$.

Oppgave 4. Kompleks impedans.

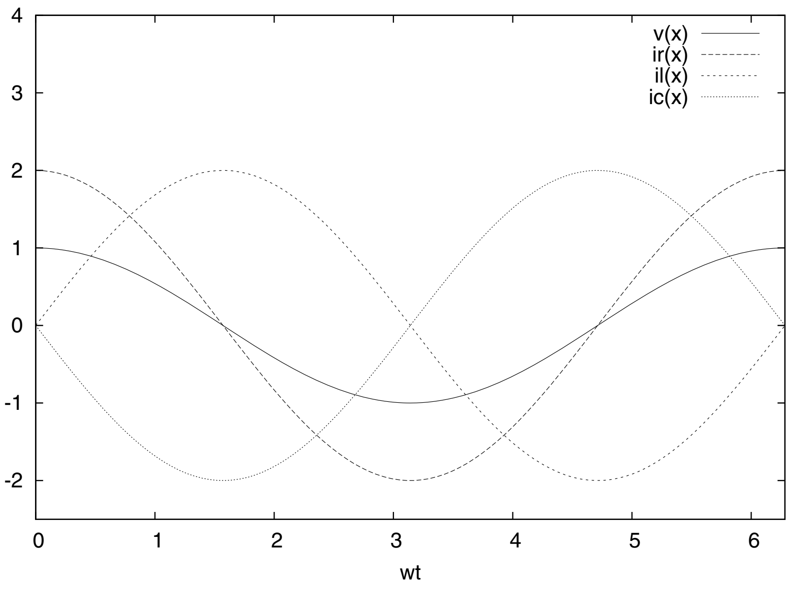
a) Spenningen over en motstand er $I(t)\,R$, over en induktans $L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$ og over en kapasitans $\frac{Q}{C}$. Dette brukt i Kirchhoffs spenningsregel gir for hver av de tre kretsene:

$$V(t) = RI(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{Z_R = V/I = R},$$

$$V_0 e^{i\omega t} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = i\omega L I_0 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z_L = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i\omega t}} = i\omega L},$$

$$V_0 e^{i\omega t} = \frac{Q}{C} \quad \Rightarrow \quad I_0 e^{i\omega t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = i\omega C V_0 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z_C = \frac{1}{i\omega C} = 1/i\omega C} \quad \text{(siste vanlig skrivemåte)}\,.$$

b) Fra $I(t) = V(t)/Z(i\omega)$, kan vi finne følgende skisser av $V(t)$ og de tre ulike strømmer I_R, I_L og I_C. Vi antar $|Z| = 1/2$ under plotting og ser at fasevinkelen for de tre strømmer blir henholdsvis $\alpha = 0, -\pi/2$ og $+\pi/2$:



c) I det følgende leses "+" serie og "//' ' parallell, og vi bruker følgende regler:
Seriekopling av impedanser: $Z_{\text{tot}} = Z_1 + Z_2$.
Parallelkopling av impedanser: $Z_{\text{tot}} = Z_1 // Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.
Impedanser for de ulike kretselementer fra oppgaven over.

Første krets: $R + L//C + R$, som gir

$$Z = 2R + \frac{i\omega L/(i\omega C)}{i\omega L + 1/(i\omega C)} = \underline{2R + i\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}}\,.$$

Andre krets: $L//(L + R + C)$:

$$Z = \frac{i\omega L(R + i\omega L + 1/i\omega C)}{i\omega L + i\omega L + R + 1/i\omega C} = \underline{\frac{i\omega RL - \omega^2 L^2 + L/C}{R + i(2\omega L - 1/\omega C)}}.$$

(Kan nok skrives om, men ikke lett å få skrevet enklere.)

Tredje krets består av R + $(R{+}L)//C$ + L. Dette gir

$$Z = R + \frac{(R + i\omega L)/i\omega C}{R + i\omega L + 1/i\omega C} + i\omega L = \underline{R + i\omega L + \frac{R + i\omega L}{i\omega RC - \omega^2 LC + 1}}.$$

Fjerde krets er en parallellkobling av tre stk C. Kapasitansen blir $3C$ og induktansen blir

$$\underline{Z = \frac{1}{i\omega 3C}}\,.$$

Oppgave 5. Resonanskrets.

a) Seriekoblingens impedans:
$$Z = R + i\omega L + 1/i\omega C = R + i\ (\omega L - 1/\omega C)$$

med absoluttverdi og fasevinkel:

$$\underline{|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \qquad \underline{\alpha = \arctan\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}}.$$

b) Strømamplituden:
$$|I_0(\omega)| = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

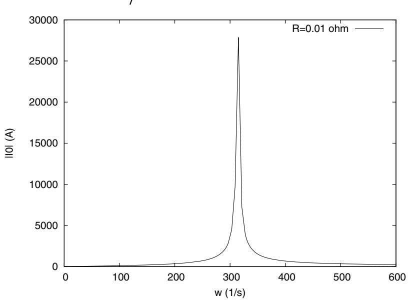
er maksimal når $\omega L - 1/\omega C = 0$, altså er resonansfrekvensen

$$\omega = \sqrt{1/LC} = \sqrt{100\pi\ \text{F}^{-1} \cdot 100\pi\ \text{H}^{-1}} = 100\pi\, s^{-1}, \qquad \text{altså} \quad \underline{f = 50\,\text{Hz}}.$$

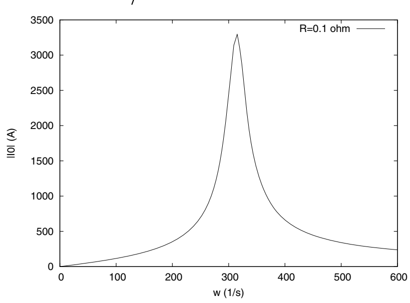
c) Med oppgitte tallverdier, og med R i enheten Ω, har vi, i enheten A:

$$|I_0(\omega)| = \frac{330}{\sqrt{R^2 + (\omega/100\pi - 100\pi/\omega)^2}}$$

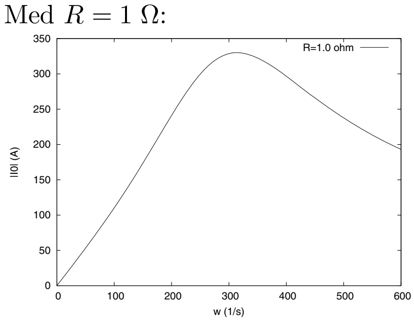
Med $R = 1/100\ \Omega$:



Med $R = 1/10\ \Omega$:



Med $R = 1\ \Omega$:



d) Nettfrekvensen 50 Hz er nettopp lik kretsens resonansfrekvens. Vi ser at for alle valgte motstandsverdier blir strømamplituden for stor for en normal sikring i et hus. Med 10-amperes sikring kan vi tillate $|I_0| \simeq 10\,\text{A}\cdot\sqrt{2} = 14\,\text{A}$, som betyr at vi må bruke en motstand som er minst $330\,\text{V}/14\,\text{A} = 23,57\,\Omega = 24\,\Omega$.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 25. mars 11.