FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.

Løsningsforslag til øving 5

Oppgave 1

a) Dette er en enkel anvendelse av TDI $TdS = dU + pdV$. Vi ser bort fra volumendringer av metallet under små temperatur-endringer, og finner $dS = C/TdT = (a + bT^2)dT$. Integrasjon gir $S = aT + (b/3)T^3 + S_0$, der S_0 er en temperatur-avhengig konstant.

b) I denne oppgaven er det snakk om tre like materialblokker med samme totale varmekapasitet C, som i netto ikke skal ha noen varmestrøm inn eller ut av totalsystemet, og systemet skal heller ikke utføre noe arbeid på omgivelsene. To av blokkene er varme med temperatur T_1, en blokk er kald med temperatur T_2. For total-systemt gjelder da, fra 1. lov

$$\Delta Q = \Delta U + W = \Delta U = 0.$$

Hvis vi ganske enkelt setter alle blokkene i kontakt med hverandre, får vi en irreversibel varmestrøm internt blant blokkene, helt til temperaturen har jevnet seg ut, til $T_{slutt} = (2T_1 + T_2)/3$. Vi har opplagt at $T_{slutt} < T_1$, siden $T_2 < T_1$.
Vi kan alternativt la systemene være i kontakt med hverandre på en slik måte at vi får reversible varmestrømmer internt i systemet, hvor disse varmestrømmene brukes til å drive fullstendig reversible maskiner. Vi lar det ene reservoaret ved temperatur T_1 være i kontakt med reservoaret med temperatur $T_2 < T_1$ via en Carnot varmemaskin. Arbeidet som kommer ut av denne maskinen, bruker vi til å drive en annen Carnotmaskin i revers, som trekker varme ut av reservoaret med start-temperatur T_2 og inn i den andre blokken som hadde start-temperatur T_1. På denne måten får vi overført varme fra det ene varme reservoaret til det andre varme reservoaret. Prosessen stopper når temperaturene i det varme systemet som avgir varme og driver Carnot varmemaskinen, og temperaturen til det kalde systemet, har utjevnet seg, til T_c.
Vi nummererer systemene som følger:

System nr 1 er det systemet som starter med temperatur T_1 og får varme tilført, slik at det ender opp med temperatur T_m.

System nr 2 er det systemet som starter med temperatur T_1 og ender opp med temperatur T_c.

System nr 3 er det systemet som starter med temperatur T_2 og ender opp med temperatur T_c.

Prosessene er reversible, slik at for total-systemet har vi $Q = T\Delta S = 0$, dvs $\Delta S = 0$. Fra første lov har vi også for totalsystemet $\Delta U = 0$. Vi skriver nå dette opp ved hjelp av entropi- og indre energi endringene i hvert delsystem, nummerert som over:

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 = 0 \\
\Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 0.
\end{aligned}$$

Fra TDI har vi, når vi ser bort fra volumendringer i blokkene under den interne varmeoverføringen

$$dS = \frac{C}{T} dT.$$

For de ulike systemene har vi dermed

$$\Delta S_1 = C \int_{T_1}^{T_m} \frac{dT}{T} = C \ln \left(\frac{T_m}{T_1} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Delta S_2 &= C\int_{T_1}^{T_c}\frac{dT}{T} = C\ln\left(\frac{T_c}{T_1}\right)\\
\Delta S_3 &= C\int_{T_2}^{T_c}\frac{dT}{T} = C\ln\left(\frac{T_c}{T_2}\right).
\end{aligned}$$

Videre har vi

$$\begin{aligned}
\Delta U_1 &= C(T_m - T_1)\\
\Delta U_2 &= C(T_c - T_1)\\
\Delta U_3 &= C(T_c - T_2).
\end{aligned}$$

Da har vi

$$\begin{aligned}
\Delta U &= C(T_m - T_1 + T_c - T_1 + T_c - T_2) = 0\\
\Delta S &= C\ln\left(\frac{T_c^2 T_m}{T_1^2 T_2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Da får vi to ligninger for de to ukjente temperaturene T_c og T_m, uttrykt ved de oppgitte temperaturene T_1 og $T_2 < T_1$.

$$\begin{aligned}
T_m &= 2T_1 + T_2 - 2T_c\\
T_c^2 T_m &= T_1^2 T_2.
\end{aligned}$$

Dette systemet av ligninger har flere løsninger (tre), der vi må eliminere noen (to) løsninger for å finne den største mulige verdien av T_m. Legg merke til at den ønskede T_m svarer til den minst mulige verdien av T_c. Legg også merke til at en mulig algebraisk løsning av dette systemet er at $T_c = T_1$ og $T_m = T_2$. Dette ser vi feks rett fra den andre ligningen. Dette kan ikke være ønsket løsning, siden den T_m vi leter etter, må være større enn T_1 (system 1 starter med temperatur T_1 og tilføres varme). Vi setter ligningen for T_m inn i den andre ligningen, og får en tredjegradsligning for T_c:

$$T_c^3 - \frac{1}{2}(2T_1 + T_2)T_c^2 + \frac{T_1^2 T_2}{2} = 0.$$

Nå bruker vi at $T_c = T_1$ er en mulig rot i ligningen, da kan vi splitte av en faktor $(T_c - T_1)$ i tredjegradsligningen, slik at vi finner:

$$T_c^3 - \frac{1}{2}(2T_1 + T_2)T_c^2 + \frac{T_1^2 T_2}{2} = (T_c^2 - \frac{T_2}{2}T_c - \frac{T_1 T_2}{2})(T_c - T_1) = 0.$$

Andregradsligningen løses greit for T_c, og vi finner to mulige løsninger

$$T_c = \frac{T_2}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{T_2}{4}\right)^2 + \frac{T_1 T_2}{2}}.$$

$-$ tegnet må forkastes, da det gir $T_c < 0$. Den andre løsningen er akseptabel. Videre har vi at, siden $T_2 < T_1$, finner vi i dette tilfellet at $T_c < T_1$, som altså er en bedre løsning enn $T_c = T_1$ som vi fant ved inspeksjon (siden det gjelder å finne så lav T_c som mulig). Ved å sette dette uttrykket for T_c inn i ligningen for T_m, finner vi

$$T_m = 2T_1 + \frac{T_2}{2} - 2\sqrt{\left(\frac{T_2}{4}\right)^2 + \frac{T_1 T_2}{2}}.$$

Numerikk: Sett for eksempel $T_1 = 350K$, $T_2 = 300K$. Da finner vi $T_c = 316K$ og $T_m = 368K$.

Oppgave 2 Maxwellfordelingen

Selv om det ikke var en del av oppgavene, la oss innledningsvis se på sammenhengene mellom de ulike fordelingsfunksjonene.

Med uavhengige hastighetskomponenter blir hastighetsfordelingen $F(v)$ (antatt isotrop) lik produktet av de ulike komponentfordelingene:

$$F(v) = g(v_x) \cdot g(v_y) = \frac{B}{\pi} e^{-Bv^2},$$

der $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Analogt det vi gjorde i forelesningene (for tredimensjonal hastighetsfordeling) har vi nå, i to dimensjoner:

$$f(v)dv = \int_{\phi=0}^{2\pi} F(v)dv\, v\, d\phi = 2\pi v F(v)dv,$$

dvs fartsfordelingen er

$$f(v) = 2\pi v F(v) = 2Bve^{-Bv^2}.$$

a) Se MATLAB-programmet `losning5.m`. Konstanten B er fastlagt med utgangspunkt i de eksperimentelle data,

$$B = B_{\text{exp}} = \frac{1}{\langle v^2 \rangle_{\text{exp}}} = 5.9394 \cdot 10^{-4}\,(\text{s/cm})^2,$$

siden

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{B}.$$

b) Skivene har rms-fart 0.41 m/s, og massen er 0.032 kg. Dette tilsvarer en kinetisk energi 2.7 mJ pr "partikkel". Setter vi dette lik termisk energi k_pT med $T = 300$ K, får "Boltzmanns plastskivekonstant" verdien $k_p \simeq 9 \cdot 10^{-6}$ J/K. Eventuelt: Setter vi skivenes kinetiske energi lik termisk energi kT til en omgivende gass (med k = Boltzmanns konstant), finner vi en temperatur $T \sim 2 \cdot 10^{20}$ K.

c) Plastskivenes midlere fart er 36 cm/s, mens rms-hastigheten er 41 cm/s. Forholdet mellom disse to er ca 0.88, ikke langt unna den teoretisk forventede verdien $\sqrt{\pi}/2 \simeq 0.89$.

d) Det umiddelbare inntrykket av posisjonsfordelingen er vel at skivene er noenlunde jevnt fordelt over hele bildet, mens hastighetsfordelingen i større grad avtar "radielt" utover fra sentrum ($v = 0$). Posisjonsfordelingen viser at skivebanene har en tendens til å krumme oppover, noe som tyder på en viss drift i positiv y-retning. Eksperimentelt er da også $\langle v_y \rangle$ noe større enn null (ca 1.8 cm/s). På den annen side, $\langle v_x \rangle$ er også positiv (ca 2.1 cm/s), uten at dette gjenspeiler seg i skivebaner som krummer mot høyre i figuren. En alternativ forklaring på at $\langle v_x \rangle > 0$ kan være at plastskivene får en noe kraftigere dytt av den vibrerende veggen til venstre enn av den til høyre.

Figurer produsert i Matlab ved å kjøre programmet `losning5.m`: