Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4120 Matematikk 4K
Høst 2015

Løsningsforslag — Øving 5

Chapter 11.9

Under passende betingelser er

$$\mathcal{F}\{f'\} = iw\mathcal{F}\{f\}. \tag{0.1}$$

Punkt 5) tabell III:

$$\mathcal{F}\{e^{-ax}u(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+iw)}. \tag{0.2}$$

(u Heavyside, $a > 0$).

$\boxed{\text{11.9:12}}$ Finn $\mathcal{F}\{f\}(w)$ når

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Løsning:
Vi ser at f tilfredsstiller betingelsene til (0.1) (se thm 3 i boken), og at, for $x > 0$,

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - f(x).$$

Dermed er $f(x) = e^{-x}u(x) - f'(x)$ på $\mathbb{R}$, og ved linearitet, (0.1) og (0.2) får vi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\} &= \mathcal{F}\{e^{-x}u(x) - f'\} \\
&= \mathcal{F}\{e^{-x}u(x)\} - \mathcal{F}\{f'\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)} - iw\mathcal{F}\{f\} \\
&\Rightarrow \\
(1+iw)\mathcal{F}\{f\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)} \\
\mathcal{F}\{f\}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)^2}.
\end{aligned}$$

Chapter 12.1

12.1:14 d) **a)** Vis at

$$u(x,y) := v(x) + w(y)$$

er en løsning av PDE'en

$$u_{xy} = 0.$$

b) Vis at

$$u(x,y) := v(x)w(y)$$

er en løsning av PDE'en

$$uu_{xy} = u_x u_y.$$

c) Vis at

$$u(x,t) := v(x+2t) + w(x-2t)$$

er en løsning av PDE'en

$$u_{tt} = 4u_{xx}.$$

Løsning: a)

$$\begin{aligned} u_x &= v'(x) + 0 \\ u_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} u_x = 0. \end{aligned}$$

Løsning: b)

$$\begin{aligned} u_x &= v'(x)w(y) \\ u_y &= v(x)w'(y) \\ u_{xy} &= v'(x)w'(y) \\ &\Rightarrow \\ uu_{xy} &= vwv'w' \\ &= v'wvw' \\ &= u_x u_y. \end{aligned}$$

Løsning: c)

$$\begin{aligned} u_t &= 2v'(x+2t) - 2w'(x-2t) \\ u_{tt} &= 4v''(x+2t) + 4w''(x-2t) \\ u_x &= v'(x+2t) + w'(x-2t) \\ u_{xx} &= v''(x+2t) + w''(x-2t) \\ &\Rightarrow \\ u_{tt} &= 4u_{xx}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.1:15}}$ Vis at funksjonen

$$u(x,y) = a\ln(x^2+y^2) + b$$

er en løsning av Laplaces ligning $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$. Bestem konstantene a og b slik at u tilfredsstiller grensebetingelsene $u = 110$ på sirkelen $x^2+y^2 = 1$ og $u = 0$ på sirkelen $x^2+y^2 = 100$.

Løsning:

$$\begin{aligned} u_x &= a\frac{2x}{x^2+y^2} \\ u_{xx} &= 2a\frac{x^2+y^2-x2x}{x^2+y^2} = 2a\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

På samme måte er

$$u_{yy} = 2a\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

og vi ser at $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (for $x^2+y^2 \neq 0$).

Vi må løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 110 &= a\ln(1) + b = b \\ 0 &= a\ln(100) + b. \end{aligned}$$

Dvs. $b = 110$ og

$$a = -\frac{110}{\ln 100} = -\frac{55}{\ln 10}.$$

Dette gir løsningen

$$u(x,y) = -55\frac{\ln(x^2+y^2)}{\ln 10} + 110.$$

$\boxed{\text{12.1:19}}$ Løs PDE'en

$$u_y + y^2 u = 0.$$

Løsning:
Ved å betrakte x som en parameter, får vi en separabel ODE:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -y^2\,\mathrm{d}y, \\ \ln|u| &= -\frac{1}{3}y^3 + \tilde{C}(x), \\ u(x,y) &= C(x)e^{-y^3/3}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.Rev:18}}$ Løs grenseverdiproblemet

$$u_{xx} + u_x = 0, \qquad u(0,y) = f(y),\ u_x(0,y) = g(y)$$

der f og g er gitte funksjoner.

Løsning:
Betrakt y som en parameter og skriv $v(x) := u_x$. Da er $v' = -v$ som gir $v(x) = C(y)e^{-x}$. Dvs.

$$u_x(x, y) = v(x) = C(y)e^{-x}.$$

Den siste grensebetingelsen gir

$$g(y) = u_x(0, y) = C(y).$$

Videre er

$$u(x, y) = \int v(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = g(y)(-e^{-x} + C(y))$$

og den første grensebetingelsen gir

$$f(y) = u(0, y) = g(y)(-1 + C(y)).$$

Dvs. $C = f/g + 1$ og løsningen er

$$\begin{aligned} u(x, y) &= g(y)(-e^{-x} + f(y)/g(y) + 1) \\ &= g(y)(1 - e^{-x}) + f(y). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.3:5}}$ Finn beskrivelsen $u = u(x, t)$ av en streng med lengde $L = 1$, $c^2 = 1$ når initsialhastigheten er null og når den initsielle posisjonen er

$$u(x, 0) = k \sin 3\pi x =: f(x), \qquad k > 0 \text{ liten.}$$

Tegn grafen av u som på side 551 i boken.

Løsning:
Vi må PDE'en

$$u_{tt} = u_{xx}$$

for $t \geq 0$ og $x \in [0, 1]$. Grense- og initsialbetingelsene er henholdsvis

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \qquad u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = 0.$$

Separasjon av variabler: Anta at vi kan skrive $u(x, t) = F(x)G(t)$. Da er

$$F''(x)G(t) = u_{xx} = u_{tt} = F(x)G''(t).$$

Dvs $F''/F = G''/G =: -\mu^2 < 0$ konstant. (Man kan vise at positiv konstant bare vil gi trivielle løsninger). Dette gir ODE'ene

$$F''(x) = -\mu^2 F(x), \qquad G''(t) = -\mu^2 G(t)$$

Med generell løsning for F

$$F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$$

Nå er

$$0 = u(0, t) = F(0)G(t), \qquad 0 = u(1, t) = F(1)G(t)$$

som medfører at $F(0) = F(1) = 0$ dersom løsningen er ikke-triviell. Altså er $0 = F(0) = A$ og

$$0 = F(1) = B \sin \mu,$$

så $\mu = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ og alle multipler av funksjonene

$$F_n(x) := \sin n\pi x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

er løsninger av ODE'en for F med de gitte grensebetingelsene.

Generelle løsninger for G er nå

$$G_n(t) := B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t$$

og løsningene som tilfredsstiller PDE'en og grensebetingelsene er på formen

$$u_n(x,t) := G_n(t)F_n(x) = (B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t) \sin n\pi x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Vi forsøker nå å finne løsningen som tilfredsstiller initsialbetingelsene. I dette tilfellet er dette enkelt pga. formen på den gitte funksjonen f:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,0) \\ k \sin 3\pi x &= u_n(x,0) \\ &= B_n \sin n\pi x. \end{aligned}$$

Vi kan altså velge løsningen når $n = 3$ og $B_3 = k$. Videre er

$$\frac{\partial}{\partial t} u_3(x,t) = (-3\pi B_3 \sin 3\pi t + 3\pi B_3^* \cos 3\pi t) \sin 3\pi x$$

så $B_3^* = 0$ ettersom vi trenger at $\frac{\partial}{\partial t} u_3(x,0) = 0$. Løsningen på oppgaven er nå gitt ved

$$u(x,t) = k \cos 3\pi t \sin 3\pi x.$$

$\boxed{\text{12.3:7}}$ Finn beskrivelsen $u = u(x,t)$ av en streng med lengde $L = 1$, $c^2 = 1$ når initsialhastigheten er null og når den initsielle posisjonen er

$$u(x,0) = kx(1-x) =: f(x), \qquad k > 0 \text{ liten.}$$

Tegn grafen av u som på side 551 i boken.

Løsning:
Funksjonene som tilfredsstiller PDE'en og grensebetingelsene er, på samme måte som i forrige oppgave,

$$u_n(x,t) := G_n(t)F_n(x) = (B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t) \sin n\pi x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ettersom ligningen er lineær, er summer av disse løsningene også en løsning. Vi setter

$$\begin{aligned} u(x,t) &:= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t) \sin n\pi x. \end{aligned}$$

Vi har

$$f(x) = kx(1-x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x.$$

Dvs. at B_n er sinus-Fourier-koeffisientene til f:

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\
&= 2k\int_0^1 (x-x^2)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x \\
&\vdots \\
&= \begin{cases} \frac{8k}{\pi^3 n^3}, & n \text{ odde} \\ 0, & n \text{ jevn.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Utregningene er gjort ved standard delvis integrering.

Vi finner at $B_n^* = 0$ for alle n fordi

$$0 = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n^* \sin n\pi x.$$

Løsningen er nå gitt ved

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\pi t \sin n\pi x \\
&= \frac{8k}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}\cos((2n-1)\pi t)\sin((2n-1)\pi x).
\end{aligned}$$

~~12.3:14~~

12.3:15

$$u_{tt} = -c^2 u_{xxxx}. \tag{0.3}$$

Vis ved separasjon av variabler at

$$\begin{aligned}
&\frac{F^{(4)}}{F} = -\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \beta^4 = \text{const.} \\
&F(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x, \\
&G(t) = a\cos c\beta^2 t + b\sin c\beta^2 t.
\end{aligned}$$

Løsning:
(Oppgaven kan oppfattes som litt uklar. Skal man bevise at F og G er *de generelle løsningene* eller skal man bare vise at de *er* løsninger? Jeg tror det holder å bare gjøre det siste. Likevel, F er den generelle løsningen fordi ODE'en er fjerdeordens lineær og løsningen er en sum av fire *uavhengige* funksjoner.)

Skriv $u(x,t) = F(x)G(t)$. Da er

$$\begin{aligned}
F\ddot{G} &= u_{tt} \\
&= -c^2 u_{xxxx} \\
&= -c^2 F^{(4)} G \\
&\Rightarrow \\
\frac{F^{(4)}}{F} &= -\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \beta^4 = \text{const.}
\end{aligned}$$

ODE'en for G er

$$\ddot{G} + (c\beta^2)^2 G = 0$$

med velkjent generell løsning

$$G(t) = a\cos c\beta^2 t + b\sin c\beta^2 t.$$

ODE'en for F er

$$F^{(4)} - \beta^4 F = 0. \tag{0.4}$$

Vi vet at den generelle løsningen til ligningen

$$H'' + \beta^2 H = 0$$

er

$$H(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

og den generelle løsningen til ligningen

$$I'' - \beta^2 I = 0$$

er

$$I(x) = C\cosh\beta x + D\sinh\beta x.$$

Nå er $F := H + I$ en løsning av (0.4) fordi

$$\begin{aligned}
F^{(4)} - \beta^4 F &= H^{(4)} + I^{(4)} - \beta^4(H+I) \\
&= -\beta^2 H'' + \beta^2 I'' - \beta^4(H+I) \\
&= \beta^2 \left(I'' - \beta^2 I - (H'' + \beta^2 H)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

og (0.4) har da generell løsning

$$F = H + I = A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x.$$