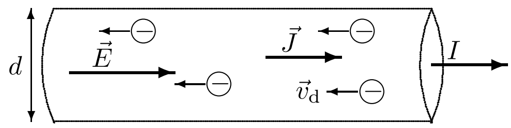
Institutt for fysikk 2011 **TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme**

Øving 8, løsningsskisse.
Likestrømskretser. Lorentzkrafta.

Oppgave 1. Strøm i en leder.



a) Når vi antar at strømmen og driftshastigheten er konstant over tverrsnittet av wiren får vi at driftshastigheten v_d er gitt ved likningen

$$\frac{I}{A} = J = n|q|v_d, \qquad \left(\text{enheter: } \frac{\text{C/s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{atom}}{\text{m}^3}\cdot\frac{\text{C}}{\text{atom}}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}}\right),$$

der $I = 100\,\text{mA}$ og arealet $A = \pi r^2 = \pi(d/2)^2 = 7,85\cdot 10^{-3}\,\text{cm}^2$.

Med ett fritt atom per kopperatom vil n være lik tettheten av kopperatomer. Denne finnes fra massetettheten $\rho_{\rm Cu}$, antall atomer per mol, $N_{\rm A}$ og molvekt for kopper, M (enhetsregning viser at brøken er satt rett opp!):

$$n = \frac{\rho_{\rm Cu}\cdot N_{\rm A}}{M} = \frac{8,92\,\text{g/cm}^3\cdot 6,02\cdot 10^{23}\,(\text{mol})^{-1}}{63,5\,\text{g/mol}} = 8,45\cdot 10^{22}\,\text{cm}^{-3}\,.$$

Dermed fra første likning

$$v_d = \frac{I}{n|q|A} = \frac{0,100\,\text{A}}{8,45\cdot 10^{22}\,\text{cm}^{-3}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\,\text{C}\cdot 7,85\cdot 10^{-3}\,\text{cm}^2} = \underline{9,42\cdot 10^{-4}\,\text{cm/s} = 34\,\text{mm/time}}(!)$$

(Til sammenlikning er midlere termiske hastighet bestemt av $E_{\rm kin} = \frac{1}{2}mv^2 = 3\frac{1}{2}k_BT \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3k_{\rm B}T}{m}} \approx 10^5$ m/s.)

b) Strømtettheten blir

$$J = \frac{I}{A} = \frac{0,100\,\text{A}}{7,85\cdot 10^{-7}\,\text{m}^2} = \underline{1,27\cdot 10^5\,\text{A/m}^2}\ \ (= 0,127\,\text{A/mm}^2)\,.$$

Fordi ladningene er negative (=elektroner), vil retningen på J være motsatt av v_d, dvs. mot høyre i figuren. Med oppgitt resistivitet og lengde blir resistansen

$$R = \rho\cdot\frac{L}{A} = 1,72\cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}\cdot\frac{10,0\,\text{m}}{7,85\cdot 10^{-7}\,\text{m}^2} = \underline{0,219\,\Omega}\,.$$

Det elektriske feltet er gitt ved Ohms lov:

$$E = \rho J = 1,72\cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}\cdot 1,27\cdot 10^5\,\text{A/m}^2 = \underline{2,18\cdot 10^{-3}\ \text{V/m}}\ \ (= 2,18\,\text{V/km})\,.$$

Lite, men ikke ubetydelig for lange overføringer. Retningen til $\vec{E}$ samme som for $\vec{J}$, mot høyre i figuren.

Oppgave 2. Resistans i aluminiumsledning.

Motstand i de hver av de to Al-trådene:

$$R_{\rm Al} = \frac{L}{\sigma A} = \frac{0,300\text{ m}}{3,546\cdot 10^7\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}\cdot 0,700\cdot 10^{-6}\text{ m}^2} = \underline{12,09\text{ m}\Omega}.$$

Total motstand i Al-tråder og resistor blir da : $R_{\rm tot} = R_{\rm Al} + 2R = 10,024\,\Omega$.

Spenningsfallet 1,500 V fordeler seg da over Al-trådene (tilsammen) $V_{\rm Al} = 1,500\,\text{V}\cdot\frac{0,0242}{10,024} = \underline{3,62\,\text{mV}}$, og over resistoren: $V_R = 1,50\,\text{V}\cdot\frac{10,0}{10,024} = 1,496\,\text{V} = \underline{1,50\,\text{V}}$.

b) Strømstyrke: $I = \dfrac{V}{R_{\rm tot}} = \dfrac{1,500\,\text{V}}{10,024\,\Omega} = 0,1496\,\text{A} = \underline{0,150\,\text{A}}$. Effekt: $P = VI = 1,50\,\text{V}\cdot 0,150\,\text{A} = \underline{0,225\,\text{W}}$.

Oppgave 3. Motstandsnettverk.

a) Først er det en fordel å innse at vi her har:

{parallellkobling av R_1, R_2 og R_3} i serie med {parallellkobling av R_4 og $R_0 = 0$} i serie med {R_5}.

Motstanden R_4 er med andre ord "kortsluttet", slik at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4. (Sagt på en annen måte: Vi har samme potensial på hver side av R_4, men da kan det heller ikke gå noen strøm gjennom denne motstanden.) Total motstand blir dermed

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} + R_5 \;=\; \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} + R_5\,.$$

b) Det er vel klart at den totale strømmen I må bli den samme som strømmen I_5 gjennom R_5. Dessuten er det klart at I må fordele seg på de 3 strømmene gjennom R_1, R_2 og R_3: $I = I_1 + I_2 + I_3$. Vi har i punkt a) allerede konkludert med at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4: $I_4 = 0$.

Spenningsfallet over de tre øverste motstandene er det samme:

$$V' = R_1I_1 = R_2I_2 = R_3I_3$$

Spenningsfallet over R_5 blir

$$V'' = R_5I_5 = R_5I = R_5\frac{\mathcal{E}}{R}$$

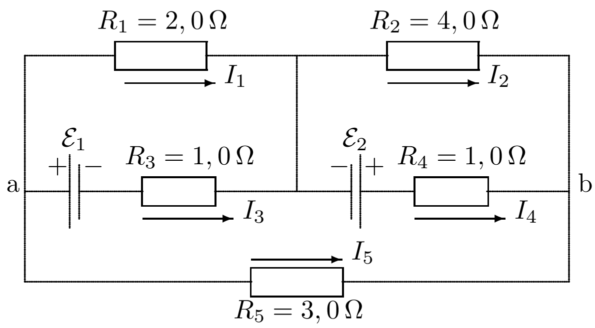
Disse to må tilsammen utgjøre den påtrykte spenningen: $\mathcal{E} = V' + V''$.
Dermed er

$$V' = \mathcal{E} - V'' = \mathcal{E} - R_5\frac{\mathcal{E}}{R} = \underline{\mathcal{E}\left(1 - \frac{R_5}{R}\right)}$$

og

$$\underline{I_1 = \frac{V'}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V'}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V'}{R_3}}, \qquad \text{med} \quad \underline{V' = \mathcal{E}\left(1 - \frac{R_5}{R}\right)}.$$

Oppgave 4. Kirchhoffs regler.



Vi har tre masker og tre maskelikninger. Vi kan i disse ha tre ukjente strømmer hvorav I_5 må være en av disse. Ved knutepunktregler for knutepunktene a og b eliminerer vi to strømmer:

$$I_3 = -I_1 - I_5 \qquad\qquad I_4 = -I_2 - I_5. \tag{1}$$

De tre maskene (øvre venstre, øvre høyre og nederste) med omløpsretning med klokka gir:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 - R_1I_1 + R_3I_3 &= 0 \\ -\mathcal{E}_2 - R_2I_2 + R_4I_4 &= 0 \\ -\mathcal{E}_1 - R_3I_3 + \mathcal{E}_2 - R_4I_4 + R_5I_5 &= 0 \end{aligned}$$

Ved bruk av knutepunktlikningene (1) og innsetting av tallverdier som oppgitt, får vi:

$$\begin{aligned} 12 - 2I_1 - 1\cdot(I_1 + I_5) &= 0 \\ -9 - 4I_2 - 1\cdot(I_2 + I_5) &= 0 \\ -12 + 1\cdot(I_1 + I_5) + 9 + 1(I_2 + I_5) + 3I_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3I_1 + I_5 &= 12 \\ 5I_2 + I_5 &= -9 \\ I_1 + I_2 + 5I_5 &= 3 \end{aligned}$$

Her kan vi f.eks. i tredje likning sette inn $I_1 = 4 - \frac{1}{3}I_5$ fra første likning og $I_2 = -\frac{9}{5} - \frac{1}{5}I_5$ fra andre likning, og får

$$\begin{aligned} 4 - \frac{1}{3}I_5 - \frac{9}{5} - \frac{1}{5}I_5 + 5I_5 &= 3 \\ I_5 &= \underline{\frac{12}{67} = 0,18 \quad \text{(ampere).}} \end{aligned}$$

Oppgave 5. RC**-krets I (oppvarming til neste).**

a) Ved $t = 0^+$ er ladning og spenning på kondensatoren null slik at hele spenningsfallet er over motstanden og dermed $I_0 = \mathcal{E}/R = \underline{0{,}12\ \mathrm{A}}$.
Når kondensatoren er ladd helt opp er spenningen lik ems'en $\mathcal{E}$, slik at $Q_\mathrm{f} = C\mathcal{E} = 10,0\ \mu\mathrm{F} \cdot 12\ \mathrm{V} = \underline{0,12\ \mathrm{mC}}$.
Tidskonstanten er kretsen er (fra utregning, gjenkjenning eller ved å se på eksempel i forelesning):
$\tau = RC = 100\ \Omega \cdot 10,0\ \mu\mathrm{F} = 1000\ \mu\mathrm{s} = \underline{1,00\ \mathrm{ms}}$.

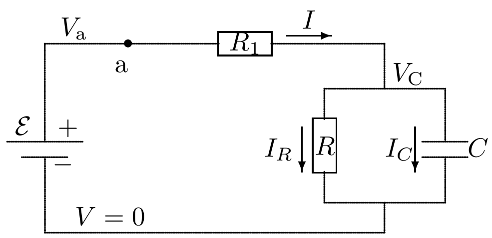
b) Arbeidet gjort av batteriet er spenningen $\mathcal{E}$ multiplisert med den totale ladningen (Y&F 12th Ed., Kap.23; f.eks. likning 23-12). Dette under den rimelige forutsetningen at batterispenningen holdes konstant. Den totale ladningen er sluttladningen $Q_\mathrm{f} = C\mathcal{E}$, slik at

$$W_\mathrm{bat} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}C = 12\ \mathrm{V} \cdot 0,12\ \mathrm{mC} = \underline{1,4\ \mathrm{mJ}}.$$

Halvparten av dette går til potensiell energi i kondensatoren: $W_C = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = 0,72\ \mathrm{mJ}$, mens den andre halvparten tapes dissipativt i motstanden: $W_R = \int_0^\infty R I^2 \mathrm{d}t = 0,72\ \mathrm{mJ}$.

c) Eksponentialuttrykket $1 - e^{-t/\tau} = 0,999$ når $e^{-t/\tau} = 0,001 \quad \Rightarrow \quad t = -\ln(0,001) \cdot \tau = 6,91 \cdot \tau = \underline{6,9\ \mathrm{ms}}$.

Oppgave 6. RC**-krets II.**



Til alle punktene trenger vi Kirchhoffs strømlov som gir $I = I_R + I_C$, dermed har vi bare to ukjente strømmer. Videre Kirchoffs spenningslov, som f.eks. kan skrives $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$.

a) Umiddelbart etter bryteren er slått på har ikke kondensatoren rukket å få noen ladning: $Q_\mathrm{C} = 0$ og $V_\mathrm{C} = Q_\mathrm{C}/C = 0$. Hele spenningsfallet fra $\mathcal{E}$ er altså over motstanden R_1 med strøm $I = \mathcal{E}/R_1$. Hele denne strømmen går til kondensatoren fordi $I_\mathrm{R} = V_\mathrm{C}/R = 0$, altså $I_\mathrm{C} = I = \mathcal{E}/R_1$. Svarene er altså:

$$\underline{Q_\mathrm{C} = 0, \quad V_\mathrm{C} = 0, \quad I_\mathrm{R} = 0, \quad I = I_\mathrm{C} = \mathcal{E}/R_1.}$$

b) Etter svært lang tid er kondensatoren fullt oppladd, og ingen strøm går til den, $\underline{I_C = 0}$. Da er $I = I_R$ og $V_C = I_R R = IR$. Da må fra Kirchhoff $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$:

$$\underline{I = I_\mathrm{R} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R}},$$
$$\underline{V_\mathrm{C} = RI_\mathrm{R} = \mathcal{E}\frac{R}{R_1 + R}},$$
$$\underline{Q_\mathrm{C} = V_\mathrm{C}C = \mathcal{E}\frac{RC}{R_1 + R}}.$$

c) Vi har to ukjente strømmer, og trenger to likninger. Den ene er Kirchhoffs spenningslov $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$, den andre er at $V_C = V_R$ (eller egentlig Kirchhoffs spenningslov på masken med R og C). Denne siste gir

$$\frac{Q_C}{C} = I_R R \quad \Rightarrow \quad I_R = \frac{Q_C}{RC}$$

Vi velger da I_C og Q_C som de to ukjente, men siden disse er knyttet sammen med $I_C = \mathrm{d}Q_C/\mathrm{d}t$ har vi bare én ukjent, I_C. Vi søker derfor etter en likning for I_C, som vi får fra spenningsloven $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$:

$$\mathcal{E} \quad = \quad R_1(I_R + I_C) + \frac{Q_C}{C} = R_1\frac{Q_C}{RC} + R_1 I_C + \frac{Q_C}{C} = \frac{Q_C}{C}\left(\frac{R_1}{R} + 1\right) + R_1 I_C$$

Derivasjon av denne likningen gir en differensiallikning for I_C:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}Q_C}{\mathrm{d}t}\frac{1}{C}\left(\frac{R_1}{R} + 1\right) + R_1\frac{\mathrm{d}I_C}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}I_C}{\mathrm{d}t} &= -I_C\frac{1}{R_1 C}\left(\frac{R_1}{R} + 1\right) \\ \frac{\mathrm{d}I_C}{\mathrm{d}t} &= -I_C\frac{1}{\tau}, \quad \text{der} \quad \tau = \frac{R_1 RC}{R_1 + R}. \end{aligned}$$

Dette er en førsteordens diff.likning med løsning

$$I_C(t) = Ae^{-t/\tau} + B$$

der vi fra start- og sluttbetingelser i a) og b) har at $A = \mathcal{E}/R_1$ og $B = 0$.

Resten av størrelsene blir:

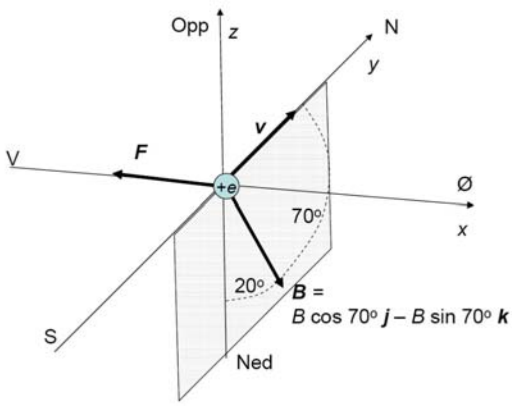
$$\begin{aligned}
Q_C(t) &= \int_0^t I_C(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}}{R_1}\int_0^t e^{-t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}}{R_1}(-\tau)\left(e^{-t/\tau}-1\right) = \underline{\mathcal{E}\frac{RC}{R_1+R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}, \\
V_C(t) &= \frac{Q_C}{C} = \underline{\mathcal{E}\frac{R}{R_1+R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}, \\
I_R(t) &= \frac{Q_C}{RC} = \underline{\mathcal{E}\frac{1}{R_1+R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}, \\
I(t) &= I_C(t) + I_R(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}e^{-t/\tau} + \mathcal{E}\frac{1}{R_1+R}\left(1-e^{-t/\tau}\right) = \underline{\frac{\mathcal{E}}{R_1}\frac{1}{R_1+R}\left(Re^{-t/\tau}+R_1\right)}.
\end{aligned}$$

Vi kan konstantere at grenseverdiene for $t = 0^+$ og $t \to \infty$ i a) og b) stemmer ved innsetting i disse svarene.

Oppgave 7. Lorentzkrafta: Vektorregning.

Velger x-retning øst og y-retning nord og dermed z-retning oppover.
Da er $\vec{B} = [0, B\cos 70°, -B\sin 70°]$ og $\vec{v} = [0, v, 0]$
og krafta vil falle i $-x$-retning (høyrehåndsregelen):

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q\vec{v}\times\vec{B} = q\begin{bmatrix} 0 & v & 0 \\ 0 & B\cos 70° & -B\sin 70° \\ \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \\
&= qvB\sin 70°(-\hat{\mathbf{i}}) \\
&= 1,60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\cdot 10,0\cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s}\cdot 0,60\cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}\cdot 0,940(-\hat{\mathbf{i}}) \\
&= \underline{9,02\cdot 10^{-17}\ \mathrm{N}\,(-\hat{\mathbf{i}})}.
\end{aligned}$$



Alternativt kan vi sette direkte $|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin\theta$, med $\theta =$ vinkel mellom $\vec{v}$ og $\vec{B}$, altså $\theta = 70°$. Høyrehåndsregelen viser at $\vec{F}$ må falle langs negativ x-retning, dvs. vestover, og altså med tallverdi:

$$F = qvB\sin 70° = \underline{9,02\cdot 10^{-17}\ \mathrm{N}}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 17. feb. 11.