



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for matematiske fag

TMA4245 Statistikk  
Vår 2015

Øving nummer 3, blokk I  
Løsningsskisse

### Oppgave 1

Hvis hendelsene  $A$  og  $B$  er uavhengige, vil enhver kunnskap om hvorvidt  $A$  har inntruffet *ikke* gi noen informasjon om hvorvidt  $B$  har inntruffet, og vice versa. Vi har da

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Dersom  $A$  og  $B$  er disjunkte, vil snittet mellom dem være tomt,

$$A \cap B = \emptyset.$$

Følgelig vil sannsynligheten for at begge hendelsene inntreffer være null,

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0.$$

*Eksempel på uavhengige hendelser:* Anta at du utfører et terningkast og et myntkast hver for seg. La  $A$  være hendelsen at terningen viser et odde antall øyne, og la  $B$  være hendelsen at myntkastet resulterer i *kron*. Da er  $A$  og  $B$  uavhengige.

*Eksempel på disjunkte hendelser:* Betrakt det samme terningkastet som over, og la  $A$  være hendelsen at terningen viser et odde antall øyne, som før. La nå  $B$  være hendelsen at terningen viser et like antall øyne. Da er  $A$  og  $B$  disjunkte.

Når hendelsene  $A$  og  $B$  er disjunkte, har vi

$$P(A \cap B) = 0.$$

Det vil si, det er umulig at begge hendelsene inntreffer. Hvis vi får opplyst at  $A$  har inntruffet, vil vi vite med sikkerhet at  $B$  ikke har inntruffet. Med andre ord kan kunnskap om  $A$  gi informasjon om  $B$ . Altså kan ikke  $A$  og  $B$  være uavhengige.

### Oppgave 2

Definer:

$I$  : Person er innfødt

$T$  : Person er turist

$E$  : Person snakker engelsk

Det er oppgitt at :

$$\begin{aligned} P(T) &= 0.2 \Rightarrow P(I) = 1 - P(T) = 0.8 \\ P(E|I) &= 0.1 \\ P(E|T) &= 0.5 \end{aligned}$$

Vi bruker følgende formler:

Betinget sannsynlighet :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Total sannsynlighet :

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) P(A|B_i).$$

Bayes' regel:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r) P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) P(A|B_i)}.$$

a) Beregner:

$$\begin{aligned} P(I \cap E) &= P(E|I) \cdot P(I) = 0.1 \cdot 0.8 = 0.08 \\ P(T \cap E) &= P(E|T) \cdot P(T) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.10 \\ P(I \cap E^*) &= P(E^*|I) \cdot P(I) = [1 - P(E|I)]P(I) = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72 \\ P(T \cap E^*) &= P(E^*|T) \cdot P(T) = [1 - P(E|T)]P(T) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.10 \end{aligned}$$

Venn-diagrammet over situasjonen er vist i figur 1.

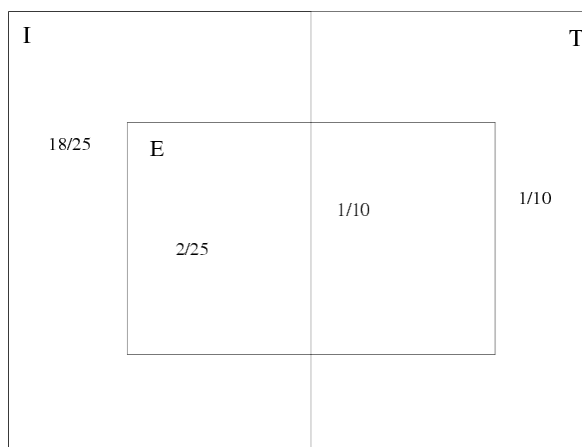
b)

$$P(E) = P(E|I) P(I) + P(E|T) P(T) = 0.1 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.18$$

c)

$$P(I|E) = \frac{P(E|I) P(I)}{P(E|I) P(I) + P(E|T) P(T)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.1 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2} = \frac{4}{9} = 0.44$$

**Oppgave 3** En kartong inneholder 10 pakker hvorav 2 er undervektige. Vi skal trekke pakker tilfeldig inntil de to med feil vekt er funnet. Definer:



Figur 1: Venn-diagram

$I_i$ : pakke trukket som nr  $i$  har riktig vekt

$I'_i$ : pakke trukket som nr  $i$  er undervektig.

- a) Det er to hendelser som kan resultere i at den første pakken er undervektig, der antallet like sannsynlige utfall er 10. Dette gir

$$P(I'_1) = \frac{\#gunstige}{\#mulige} = \frac{2}{10} = 0.20.$$

- b) Dersom den første pakken som trekkes har riktig vekt, gjenstår det to undervektige pakker som kan trekkes. Antallet like sannsynlige utfall er nå 9, da en pakke er trukket.

$$P(I'_2|I_1) = \frac{\#gunstige}{\#mulige} = \frac{2}{9} = 0.22.$$

- c) Da de to utfallene  $I_1$  og  $I'_1$  utgjør en oppdeling av utfallsrommet, kan vi benytte setningen om total sannsynlighet, slik at

$$\begin{aligned} P(I'_2) &= P(I'_2|I_1) P(I_1) + P(I'_2|I'_1) P(I'_1) \\ &= \frac{2}{9} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} \\ &= 0.2. \end{aligned}$$

Alternativt:

Fordi en ikke vet noe mer om den første pakken, vet en like mye om den andre som den første.

$$P(I'_2) = P(I'_1) = \frac{\#gunstige}{\#mulige} = \frac{2}{10} = 0.20.$$

- d) Det er finnes to hendelser som gjør at de to undervektige pakkene ikke er funnet når en har trukket fire pakker. En har da enten trukket en undervektig og tre pakker med riktig vekt, eller ingen undervektige og fire pakker med riktig vekt.

$$p = \frac{\# \text{gunstige}}{\# \text{mulige}} = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{8}{3} + \binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{91}{105} = 0.9$$

e) La

$X$  : antall pakker en må kontrollveie for å finne de to med feil.

Antall mulige plasseringer av de undervektige pakkene er  $\binom{10}{2}$ . Vi skal plassere to pakker på 10 mulige posisjoner. Anta nå at vi finner den siste undervektige pakken i posisjon  $x$ . Det er da  $(x-1)$  mulige posisjoner for plassering av den første undervektige pakken, siden denne må komme før posisjon  $x$ . Vi har dermed

$$P(X = x) = \frac{(x-1)}{\binom{10}{2}} = \frac{(x-1)}{45}, \quad x = 1, \dots, 7.$$

Dersom ingen undervektig pakke er funnet etter 8 veiinger vet vi at de to siste pakkene er undervektige. Disse trenger dermed ikke veies, og veiningen som gir 8 pakker med riktig vekt resulterer dermed i kun 8 veiinger. I tilfellet der en undervektig pakke er funnet i løpet av de 9 første veiingene vet vi at den siste pakken er undervektig, og vi trenger dermed kun å veie 9 pakker. Dette gir

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{x-1}{45} & x = 1, \dots, 7 \\ \frac{8}{45} & x = 8 \\ \frac{16}{45} & x = 9 \end{cases}.$$

Sannsynlighetsfordelingen til antallet pakker som må kontrollveies kan eventuelt beregnes vha multiplikasjonsmetoden:

$$P(X = 1) = 0$$

$$P(X = 2) = P(I'_1, I'_2) = P(I'_1) P(I'_2|I'_1) = \frac{2}{10} \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(I'_1, I_2, I'_3) + P(I_1, I'_2, I'_3) \\ &= P(P(I'_1) P(I_2|I'_1) P(I'_3|I'_1, I_2) + P(P(I_1) P(I'_2|I_1) P(I'_3|I_1, I'_2)) \\ &= \frac{2}{10} \frac{8}{9} \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \frac{2}{9} \frac{1}{8} = \frac{2}{45} \end{aligned}$$

$\vdots$

#### Oppgave 4

a)  $f(x) = F'(x) = \frac{x}{\alpha} \exp(-\frac{x^2}{2\alpha})$

$$f'(x) = \frac{1}{\alpha} \exp(-\frac{x^2}{2\alpha}) + \frac{x}{\alpha} (-\frac{x}{\alpha}) \exp(-\frac{x^2}{2\alpha}) = (\frac{1}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha^2}) \exp(-\frac{x^2}{2\alpha})$$

Setter deriverte lik null, og løser ut mhp  $\alpha$ .

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 0 \quad x = \sqrt{\alpha}$$

- b) Hendelsen  $D$  er gitt ved at  $A$  og minst en av  $B$  eller  $C$  fungerer. Dette betyr  $D = A \cap (B \cup C)$ . Denne delmengden kan deles i tre biter som vi kan finne sannsynligheten for.

$$p(D) = p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B) + p(A)p(C) - p(A)p(B)p(C)$$

$$\text{Vi har: } p(A) = p(B) = p(C) = 1 - F(2) = \exp(-\frac{2^2}{2 \cdot 1}) = 0.135.$$

$$p(D) = 0.135^2 + 0.135^2 - 0.135^3 = 0.034$$