NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- og PROSESSTEKNIKK

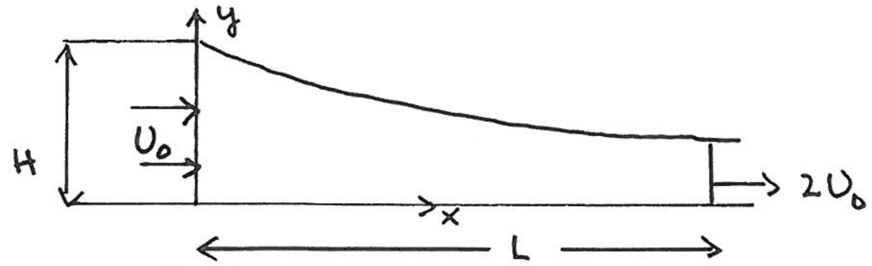
Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555/9950 1795
Antall sider: 4, pluss 4 sider formelliste

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

16. august 2010
Tid: 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller innen 6. sept.

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

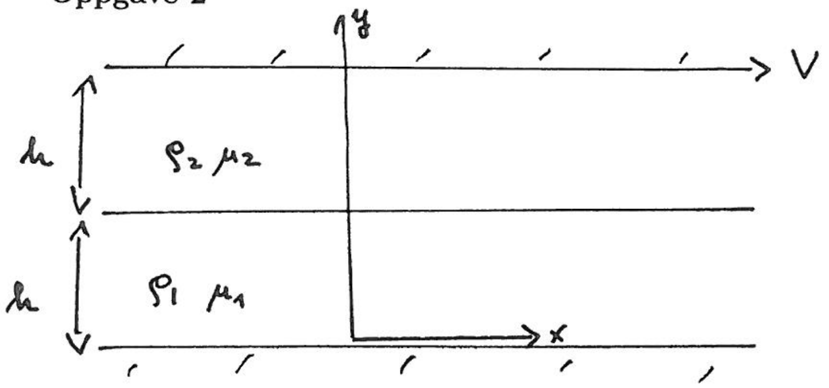
Oppgave 1



En væske med tetthet ρ strømmer stasjonært i en todimensjonal kanal som har en innsnevring over en lengde L i x-retning. For $x < 0$ har kanalen en høyde H i y-retning. Strømningen regnes friksjonsfri. Se bort fra tyngdens innvirkning på problemet. Hastigheten u øker lineært i x-retningen som $u = U_0(1 + x/L)$.

a) Finn hastighetskomponenten i y-retningen, v, i innsnevringen.
b) Finn ligningen $y(x)$ for den øvre veggen.
c) Hva er akselerasjonen i x-retning til en fluidpartikkel idet den passerer linjen $x = L/2$?
d) Finn trykket $p(x, y)$ i innsnevringen, når trykket ved inngangspartiet $x = 0$, $y = 0$ er p_0.

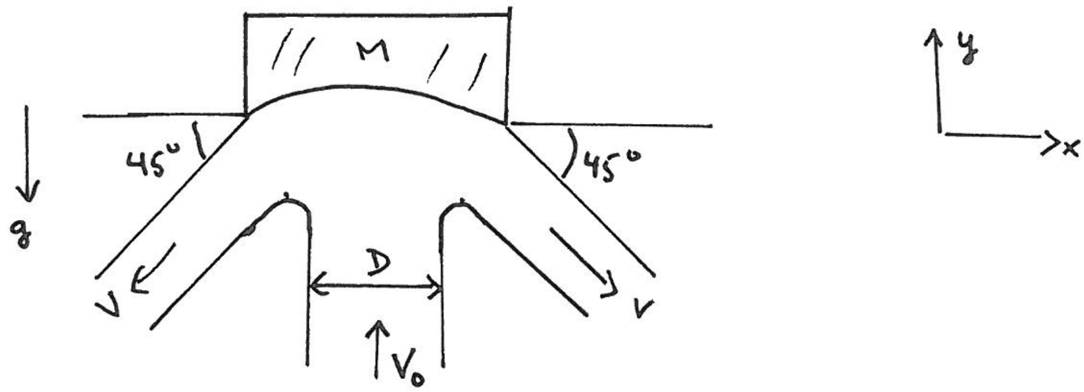
Oppgave 2



To ikke-blandbare væsker med tettheter ρ_1 og ρ_2 og dynamiske viskositeter μ_1 og μ_2 strømmer laminært og stasjonært mellom to parallelle plater som vist på figuren over. Den nedre platen står stille mens den øvre platen beveger seg med konstant hastighet V i x-retningen. Hvert væskesjikt har konstant tykkelse h. Platene har en utstrekning B i z-retningen (loddrett papirplanet). Vi ser bort fra randeffekter slik at hastigheten til væskene vil være parallell med den viste x-aksen i figuren. Se bort fra tyngdens innvirkning på problemet. Trykket $p = p(y)$ i strømningen er konstant, uavhengig av x.

a) Hvorfor er hastighetene u_1 og u_2 i væskesjiktene lineært avhengige av y?
b) Bestem hastighetsprofilene $u_1(y)$ og $u_2(y)$.
c) Hvordan må viskositetene μ_1 og μ_2 velges for at volumstrømmen mot høyre skal bli størst mulig? Lag en skisse av hastighetsprofilene for dette tilfellet.

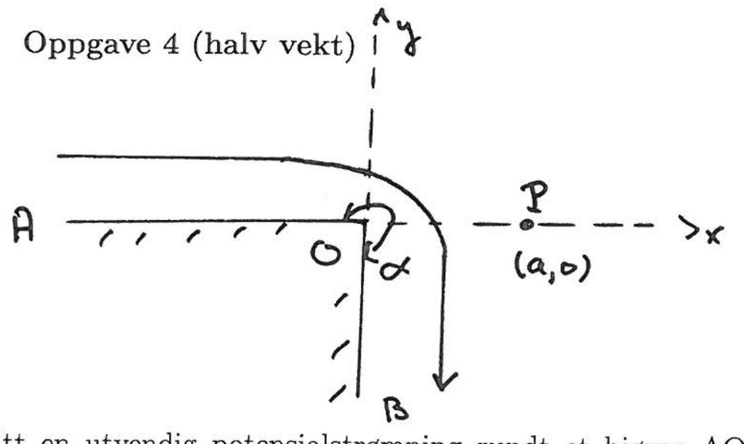
Oppgave 3 (halv vekt)



En masse M holdes oppe med en vannstråle. Strålen treffer massen vertikalt nedenfra, med hastighet V_0. Bredden av strålen er D, mens dens utstrekning inn i papirplanet er B. Bredden av de to like utgående vannstrålene (helningsvinkel 45^0) er $D/2$. Vannets tetthet er ρ, tyngdens akselerasjon er g.

Hva er hastigheten i de utgående vannstrålene? Hvor stor må V_0 være for å holde M oppe?

Oppgave 4 (halv vekt)



Gitt en utvendig potensialstrømning rundt et hjørne AOB med utvendig vinkel $\alpha = 3\pi/2$. Benytt polarkoordinater r og θ med origo i O, hvor $\theta = -\pi/2$ langs OB, $\theta = \pi$ langs AO. Regn per lengdeenhet loddrett på papirplanet.

a) Vis at strømfunksjonen

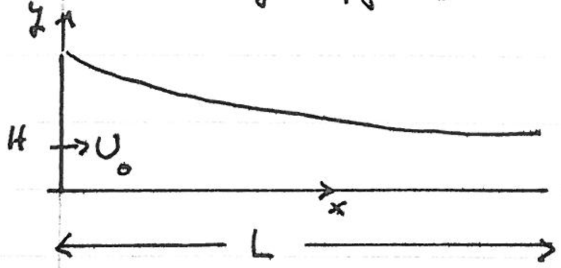
$$\psi = Ar^{2/3} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

hvor A er en positiv konstant, tilfredsstiller feltligningen for ψ samt grensebetingelsene på flatene AO og OB.

b) Punktet P ligger på x-aksen, i avstand $r = a$ fra O. Hvor stor er volumstrømmen Q mellom punktene O og P?

KONT-EKSAMEN I TEP4105 FLUIDMEKANIKK, 16. AUGUST 2010.

Løsning Oppgave 1



$$u = U_0\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

a) Kontinuitetsligning $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ gir

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U_0}{L} \quad \therefore$$

$$v = -\frac{U_0 y}{L} + F(x).$$ Men ettersom $v = 0$ ved $y = 0$ er $F(x) = 0$

$$\underline{v = -\frac{U_0 y}{L}}$$

b) Ligning for strømlinjer (fra formelark): $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+L}, \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x+L}$$

$$\ln y = -\ln(x+L) + \underset{\text{KONSTANT}}{\ln C}$$

$\therefore \; y = \frac{C}{x+L}$. Veggen starter i punktet $x = 0$, $y = H$, dvs.

$H = C/L$. Altså $\underline{y} = \frac{HL}{x+L} = \underline{\frac{H}{1+x/L}}$

c)

$$a_x = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{0} = U_0\left(1+\frac{x}{L}\right)\frac{U_0}{L}$$

$$\underline{a_x\left(x = \tfrac{L}{2}\right)} = U_0\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)\cdot\frac{U_0}{L} = \underline{\frac{3}{2}\frac{U_0^2}{L}}$$

d) Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2$; indeks 0 betyr origo.

$$\underline{p = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho V_0^2 - \tfrac{1}{2}\rho V^2}$$

$$V^2 = u^2 + v^2 = U_0^2\left(1+\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{U_0^2 y^2}{L^2}, \quad V_0^2 = u_0^2 + \overset{0}{v_0^2} = U_0^2$$

$$\therefore \; V_0^2 - V^2 = U_0^2 - U_0^2\left(1 + \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) - U_0^2\frac{y^2}{L^2} = -U_0^2\left(\frac{2x}{L} + \frac{x^2+y^2}{L^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho U_0^2\left(\frac{2x}{L} + \frac{x^2+y^2}{L^2}\right)}$$

TEP4105 KONT-EKSAMEN 16. AUGUST 2010

Løsning Oppgave 2

a) Navier-Stokes i x-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{0} + \nu\nabla^2 u$

Altså $\nabla^2 u = 0$. Da $\nabla^2 u = \frac{d^2u}{dy^2}$ vil $\frac{d^2u}{dy^2} = 0$, $\frac{du}{dy} = $ konstant.

$\Rightarrow$ Lineært hastighetsprofil i hvert sjikt.

b) $u_1(y) = A_1 y + C_1$, $u_2(y) = A_2 y + C_2$, hvor $\{A_1, A_2, C_1, C_2\}$ er konstanter. Grensebetingelser:

$u_1(y=0) = 0$, $u_1(y=h) = u_2(y=h)$, $u_2(y=2h) = V$.

4. grensebetingelse: $\tau_1 = \tau_2$ i grenseflaten $y=h$.

Da $\tau = \mu\frac{du}{dy}$ altså $\mu_1 A_1 = \mu_2 A_2$.

Av de 4 grensebetingelsene

$C_1 = 0$

$A_1 h + C_1 = A_2 h + C_2$

$2A_2 h + C_2 = V$ får

$\mu_1 A_1 = \mu_2 A_2$

$$A_1 = \frac{V}{h}\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$$

$$A_2 = \frac{V}{h}\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

$$C_2 = V\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

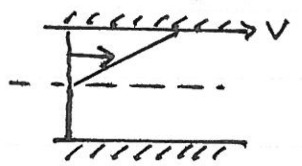
$\Rightarrow$

$$u_1(y) = V\frac{y}{h}\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}, \quad u_2(y) = V\frac{y}{h}\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + V\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

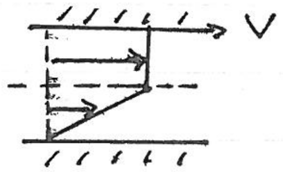
c) $$\frac{Q}{B} = \int_0^h u_1\,dy + \int_h^{2h} u_2\,dy = u_1\left(\frac{h}{2}\right)\cdot h + u_2\left(\frac{3h}{2}\right)\cdot h$$

$$= \frac{Vh}{2}\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{3Vh}{2}\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + Vh\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2} = \frac{Vh}{2}\frac{\mu_1+3\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$$

$\mu_1 \gg \mu_2$: $\frac{Q}{B} = \frac{Vh}{2}$

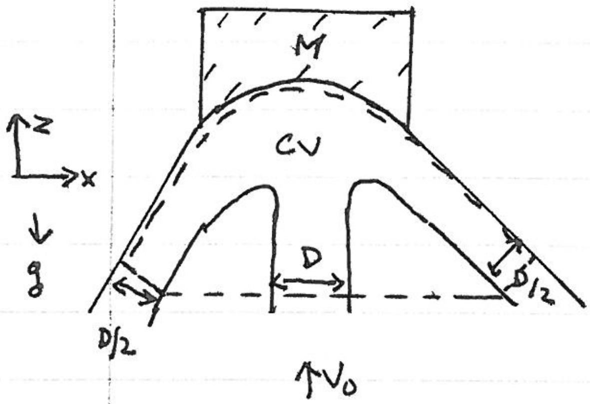


$\mu_2 \gg \mu_1$: $\frac{Q}{B} = \frac{3}{2}Vh$.



Gir størst volumstrøm.

Løsning Oppgave 3



Legger kontrollflaten CV slik at den skjærer inn- og utgående stråle.

Kontinuitet av volumfluks:

$$\underbrace{V_0 \cdot D \cdot B}_{inn} = \underbrace{2 \cdot V_{ut} \cdot \frac{D}{2} \cdot B}_{ut}$$

ɔ: $\underline{V_{ut} = V_0}$

Kraft $\vec{F}$ på vannet i CV gitt ved $\vec{F} = \dot{\vec{M}}_{UT} - \dot{\vec{M}}_{INN}$, hvor

$$\dot{\vec{M}}_{UT} = \int_{UT} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})\,dA$$ er impulsfluks ut,

$$\dot{\vec{M}}_{INN} = -\int_{INN} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})\,dA$$ er impulsfluks inn.

I vertikalretningen : $\dot{M}_{INN,z} = \rho V_0^2 \cdot DB$

$$\dot{M}_{UT,z} = -\underset{\text{2 grener}}{2} \cdot \rho V_0^2 \cdot \underset{\text{bredde}}{\frac{D}{2}} \cdot B \cdot \cos 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \rho V_0^2 \cdot DB$$

$$\Rightarrow \quad F_z = \dot{M}_{UT,z} - \dot{M}_{INN,z} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\rho V_0^2 DB - \rho V_0^2 DB$$
$$= -\rho V_0^2 DB\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

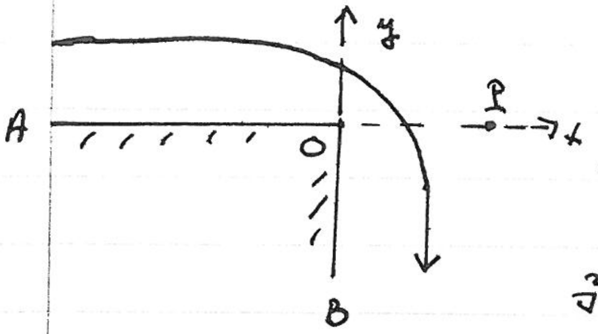
Kraften på M er $\div F_z$.

Kraftbalanse altså $\rho V_0^2 DB\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = M \cdot g$,

ɔ:

$$\underline{V_0 = \left[\frac{Mg}{\rho DB\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}\right]^{1/2} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{Mg}{\rho DB}\right]^{1/2}}$$

Løsning Oppgave 4



$$\psi = A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

a) Feltligning $\nabla^2 \psi = 0$.

Fra formelark:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{2}{3} A r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{4}{9} A r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\frac{4}{9} A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\nabla^2 \psi} = \frac{4}{9} A r^{-\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{4}{9} A r^{-\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{0}$$ Stemmer.

Grensebetingelser: ψ = konstant på faste flater.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Flaten AO } (\theta = \pi): & \underline{\psi} = A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{0} \\ \text{Flaten OB } (\theta = -\frac{\pi}{2}): & \psi = A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{0} \end{array}\right\} \text{ Grensebetingelsene oppfylt.}$$

b) Q er lik differansen mellom strømfunksjonene.

$$Q = \psi(P) - \psi(0) = \psi(P).$$

Setter inn $r = a$, $\theta = 0$ i ψ:

$$\underline{Q} = A a^{\frac{2}{3}} \sin\frac{\pi}{3} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{3}\, A \cdot a^{\frac{2}{3}}}$$