NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

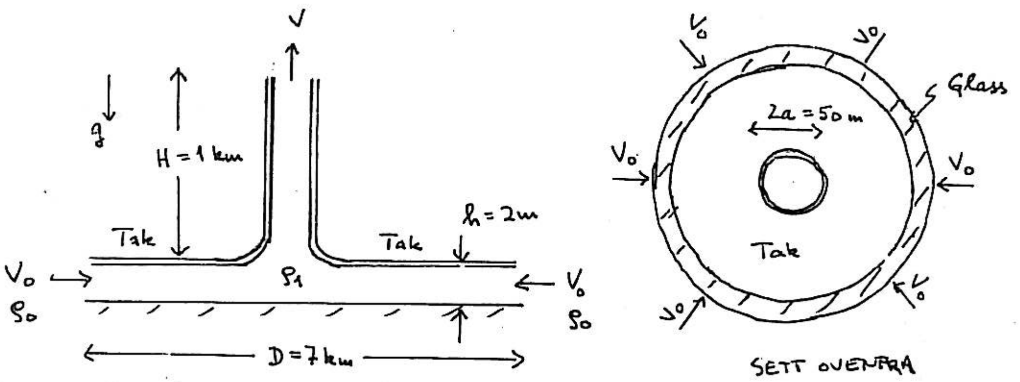
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F1(Bokmål)
(Linje Fysikk og matematikk)
Lørdag 10. mai 2003
Tid: 0900 – 1400
Vekttall: 2,5

Sensuren faller innen 31. mai.

Hjelpemidler: C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Verdens høyeste byggverk – et solkrafttårn – vil snart bli satt under konstruksjon i ørkenen i New South Wales i Australia. Solkrafttårnet er en pipe med høyde H = 1 km. Hensikten med tårnet er å utnytte gjennomstrømmende luft med hastighet V til å drive turbiner. Pipa er forbundet nedentil med et stort horisontalt tak, som har diameter D = 7 km. Anta at takets ytre rand (det skraverte området på høyre figur) er av glass, slik at den lufta som blir radielt trukket inn under taket utenfra med lav hastighet V_0, er oppvarmet fra omgivelsenes temperatur $T_0 = 305$ K til temperaturen $T_1 = 330$ K når den er kommet inn igjennom randområdet. Den tilsvarende tetthet av lufta er ρ_1. Anta at lufta er en ideell gass, og har konstant tetthet $\rho = \rho_1$ helt til den går ut igjen til atmosfæren med hastighet V i høyden z = H. (Anlegget virker altså som en peis.) Anta stasjonære forhold, og neglisjer luftas kinetiske energi ved inntaksåpningen.

a) Finn tettheten ρ_1.

b) Finn utløpshastigheten V, idet du gjør bruk av formlene for troposfæren:

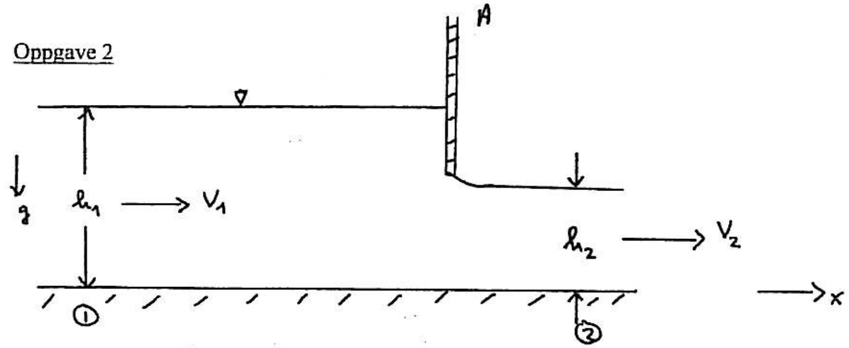
$$T = T_0 - 0{,}0065z \ , \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5,26}$$

$$p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5 \,\mathrm{Pa} \ , \qquad \rho_0 = 1{,}16 \,\mathrm{kg/m^3} \ , \quad g = 9.81 \,\mathrm{m/s^2}.$$

(Indeks 0 refererer til z = 0.)

c) Anta at høyden av glasstaket er h = 2m ved inntaksåpningen (se figuren), og at pipas diameter er 2a = 50m. Gi et overslag over verdien av V_0, idet du neglisjerer forskjellen mellom ρ_0 og ρ_1.

Oppgave 2

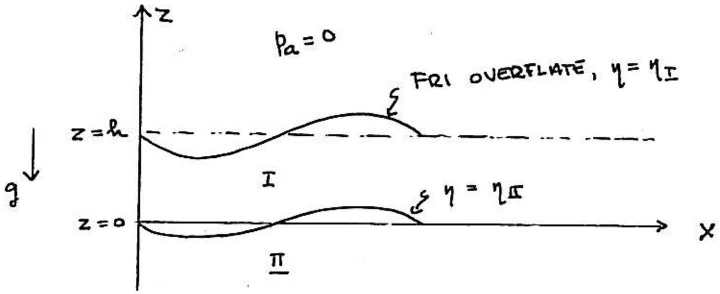


En sluseport A kontrollerer mengden av vann som strømmer ut fra et basseng. Ved seksjonene 1 og 2 er strømningen uniform og trykket er hydrostatisk. Kanalbredden er b, inn i planet. Strømningen er stasjonær. Se bort fra friksjon ved bunnen.

a) Anta at størrelsene h_1, V_1, h_2, V_2 på figuren er gitt. Finn størrelse F_{port} og retning av den ytre kraft $\vec{F}_{port}$ som trengs for å holde porten på plass. Har det noe å si om en tar hensyn til atmosfæretrykket? Begrunn svaret.

b) Anta så at h_1 og V_1 ved inn-seksjonen holdes fast, mens høyden av porten reguleres. For hvilken h_2 vil F_{port} blir størst?

Oppgave 3



To ideelle væsker I og II er overlagret hverandre: Øvre væske med konstant tetthet ρ_I danner et sjikt av tykkelse h (ved stillevann er sjiktets to overflater beliggende ved z = 0 og z = h). Sjiktets nedre overflate danner grensen mot nedre væske II som er av uendelig dybde $(z \to -\infty)$, og som har konstant tetthet ρ_{II}. Det oppgis at hastighetspotensialene i de to områdene kan skrives på formen

$$\phi_I = \left(Ae^{-kz} + Be^{kz}\right)\cos(\omega t - kx) \tag{1}$$

$$\phi_{II} = Ce^{kz}\cos(\omega t - kx), \tag{2}$$

der A, B og C er konstanter.

a) Skriv ned den kinematiske og den dynamiske betingelse ved den frie overflate, $\eta = \eta_I$. Linearisér ligningene, og finn herav den frie overflatebetingelse

$$\frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi_I}{\partial z} = 0 \ , \qquad z = h \ . \tag{3}$$

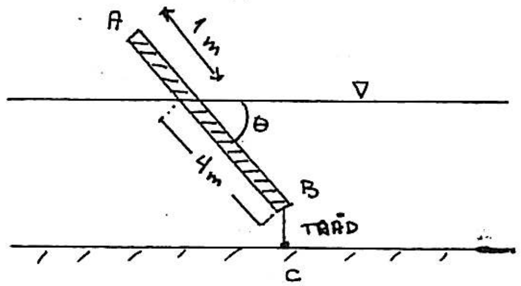
b) Skriv ned de tilsvarende lineariserte kinematiske og dynamiske betingelser ved nedre grenseflate $\eta = \eta_{II}$ (sett Bernoulli-konstantene lik null). Vis herav at potensialene må tilfredsstille følgende differensialligning:

$$\rho_I \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} - \rho_{II}\frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial t^2} + g(\rho_I - \rho_{II})\frac{\partial \phi_{II}}{\partial z} = 0 \ , \qquad z = 0 \ . \tag{4}$$

c) Sett uttrykkene (1) og (2) inn i den lineariserte kinematiske betingelse ved z =0, samt inn i ligningene (3) og (4). Anta deretter at øvre sjikt har uendelig bredde, $h \to \infty$, og vis at én mulig frekvens er gitt ved $\omega^2 = gk$. Hva betyr denne løsningen fysisk?

Finn også den andre løsningen for ω, idet du setter B = 0 i (1).

Oppgave 4 (halv vekt)



En rund trestav AB av lengde L = 5m og diameter D = 10 cm er festet til bunnen med en vertikal tråd BC. Staven blir stående i delvis neddykket tilstand, som vist på figuren.

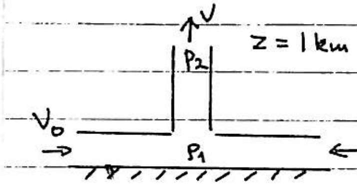
a) Finn spenningen S i tråden.

b) Finn treets tetthet ρ_{tre}.

Spesifikk tyngde for vann er $\gamma_{vann} = 9790 \ \text{Pa/m}$.

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. Eksamen 10. mai 2003

Løsning Oppgave 1



Hastighet V inne i tårnet.

Hastighet V_0 ved inntaket

a) Trykkforskjellen Δp ved innløp og utløp er tilnærmet lik null. Ellers ville en ha akselerasjon.

Betingelse $p =$ konst gir ved inntaket $\rho_0 T_0 = \rho_1 T_1$, hvor ρ_1 og T_1 refererer til den oppvarmede luft etter inntaksregionen.

Altså $\underline{\rho_1} = \rho_0 \dfrac{T_0}{T_1} = 1{,}16 \dfrac{305}{330} = \underline{1{,}072 \text{ kg/m}^3}$

b) Ideell gass, $\rho = \rho_1 =$ konstant gjennom hele anlegget.

Bernoulli:

$$\underbrace{p_1}_{=p_0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho_1 V_0^2}_{\text{negl.}} = \underbrace{p_2}_{\text{øverst i pipa}} + \tfrac{1}{2}\rho_1 V^2 + \rho_1 g H \qquad ①$$

[Når avviket mellom ρ_0 og ρ_1 er lite, $\dfrac{\rho_1}{\rho_0} = 0{,}92$, kan en tilnærmet sette at luftas hastighet etter oppvarmingen er V_0.]

Av ①: $\tfrac{1}{2}\rho_1 V^2 = p_0\left(1 - \dfrac{p_2}{p_0}\right) - \rho_1 g H.$ ②

Her må p_2, trykket øverst i pipa, finnes. p_2 er lik atmosfæretrykket i høyden $z = H$.

Da $T_{atm}(H) = T_0 - 0{,}0065 z = 305 - 0{,}0065 \cdot 1000 = 298{,}5\,K$

finnes

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_{atm}(H)}{p_0} = \left(\frac{T_{atm}(H)}{T_0}\right)^{5{,}26} = \left(\frac{298{,}5}{305}\right)^{5{,}26} = 0{,}893,$$

$$p_2 = 0{,}902 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

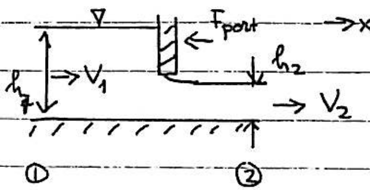
Av ②: $V^2 = \dfrac{2p_0}{\rho_1}\left(1 - \dfrac{p_2}{p_0}\right) - 2gH = \dfrac{2 \cdot 1{,}01 \cdot 10^5}{1{,}072}(1 - 0{,}893) -$

$- 2 \cdot 9{,}81 \cdot 1000 = 20162 - 19620 = 542$, $\underline{V = 23{,}3 \text{ m/s}}$

c) Inntaksåpningens areal er $\pi D \cdot h$, hvor h er høyden av glasstaket. Utløpsåpningens areal er πa^2. Når $\rho_1 \simeq \rho_0$, og tilsvarende antagelse gjøres ved utløpet, må volumgjennomstrømningen Q være den samme:

$$\pi D h \cdot V_0 = \pi a^2 \cdot V$$

$$\underline{V_0} = \frac{a^2 V}{D h} = \frac{25^2 \cdot 23{,}3}{7000 \cdot 2} \simeq \underline{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$



Løsning Oppgave 2

a) Hydrostatisk trykkfordeling gir horisontalkraft $\gamma h_{cg} A$, hvor h_{cg} er dybden av centroiden.

Horisontalkraft på vertikal flate ved ① altså $\gamma \cdot \frac{1}{2} h_1 \cdot h_1 b = \frac{1}{2}\gamma h_1^2 b$. Tilsv. kraft ved ② er $\frac{1}{2}\gamma h_2^2 b$.

Impulssatsen $\sum F = \dot{M}_{ut} - \dot{M}_{inn}$ i x-retning gir

$$F_x + \frac{1}{2}\gamma h_1^2 b - \frac{1}{2}\gamma h_2^2 b = \rho V_2^2 h_2 b - \rho V_1^2 h_1 b.$$

Her er F_x lik x-komponenten av kraften på vannet i kontrollvolumet mellom ① og ②. En har $F_x < 0$, fordi kraften på vannet er mot venstre. $\vec{F}$ er lik den ytre kraft $\vec{F}_{port}$ som virker på porten.

$$F_x = \frac{1}{2}\gamma b (h_2^2 - h_1^2) + \rho b (V_2^2 h_2 - V_1^2 h_1)$$

Størrelse $F_{port} = |\vec{F}_{port}| = -F_x = \frac{1}{2}\gamma b (h_1^2 - h_2^2) - \rho b (V_2^2 h_2 - V_1^2 h_1)$ ①

Ved å innføre massefluks $\dot{m} = \rho V_1 h_1 b = \rho V_2 h_2 b$ kan dette alternativt skrives som $F_{port} = \frac{1}{2}\gamma b (h_1^2 - h_2^2) - \dot{m}(V_2 - V_1)$.

Atmosfæretrykket vil si at et uniformt trykk pa virker overalt, og har ingen innflytelse på F_{port}.

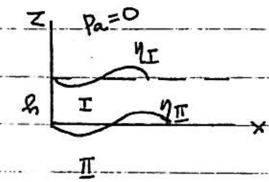
b) Omskriver ① med bruk av kontinuitetsligningen $V_1 h_1 = V_2 h_2$, som gir $V_2 = V_1 h_1 / h_2$. Det gir

$$F_{port} = \frac{1}{2}\gamma b h_1^2 - \frac{1}{2}\gamma b h_2^2 - \rho b \frac{V_1^2 h_1^2}{h_2} + \rho b V_1^2 h_1.$$

Her er det bare h_2 som varierer. F_{port} blir størst når $\frac{dF_{port}}{dh_2} = 0$, dvs. $-\gamma b h_2 + \rho b \frac{V_1^2 h_1^2}{h_2^2} = 0$

$$h_2 = (V_1^2 h_1^2 / g)^{1/3}$$

Løsning Oppgave 3



a) Kinematisk betingelse fri overflate:

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} + u \frac{\partial \eta_I}{\partial x} = w, \quad z = h + \eta_I$$

Dynamisk betingelse (Bernoulli):

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 + g\eta_I = C, \quad z = h + \eta_I,$$ C er vilkårlig.

Har benyttet at $p_a = 0$.

Lineariserer:

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} = \frac{\partial \phi_I}{\partial z}, \quad z = h$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + g\eta_I = C, \quad z = h$$

Deriverer siste ligning: $\frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta_I}{\partial t} = 0$, som innsatt i foregående ligning gir

$$\frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_I}{\partial z} = 0, \quad z = h.$$ Fri overflatebetingelse.

b) Ved nedre grenseflate er linearisert kinematisk betingelse

$$\frac{\partial \eta_{II}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_I}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta_{II}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial z}, \quad z = 0.$$

Altså

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial z} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial z}, \quad z = 0$$

Linearisert dynamisk betingelse:

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \frac{p_I}{\rho_I} + g\eta_{II} = C_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} + \frac{p_{II}}{\rho_{II}} + g\eta_{II} = C_1 = 0$$

Ganger med tetthetene:

$$\rho_I \frac{\partial \phi_I}{\partial t} + p_I + \rho_I g \eta_{II} = 0$$

$$\rho_{II} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} + p_{II} + \rho_{II} g \eta_{II} = 0$$

$p_I = p_{II}$ ved grenseflaten

Subtraherer:

$$\rho_I \frac{\partial \phi_I}{\partial t} - \rho_{II} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} + g(\rho_I - \rho_{II})\eta_{II} = 0$$

Deriverer mhp. t, og benytter $\frac{\partial \eta_{II}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial z}$:

$$\rho_I \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} - \rho_{II} \frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial t^2} + g(\rho_I - \rho_{II})\frac{\partial \phi_{II}}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

c) Innsetting av uttrykkene (1) og (2) i den kinematiske betingelsen $\partial\phi_I/\partial z = \partial\phi_{II}/\partial z$ ved $z = 0$, gir

$$(-kA + kB)\cos\theta = kC\cos\theta, \quad \theta = \omega t - kx.$$

Altså $C = B - A$ (i)

Innsetting i den frie overflatebetingelse (3) gir

$$-\omega^2(Ae^{-kh} + Be^{kh})\cos\theta + gk(-Ae^{-kh} + Be^{kh})\cos\theta = 0$$

⇒: $\omega^2(Ae^{-kh} + Be^{kh}) = gk(-Ae^{-kh} + Be^{kh})$ (ii)

Innsetting i (4) gir

$$-\rho_I\omega^2(A+B)\cos\theta + \rho_{II}\omega^2 C\cos\theta + g(\rho_I - \rho_{II})kC\cos\theta = 0$$

⇒: $\rho_I\omega^2(A+B) = [\rho_{II}\omega^2 + g(\rho_I - \rho_{II})k]C$ (iii)

$kh \to \infty$: Av (ii) følger $\omega^2 B = gkBe^{kh}$, $\omega^2 = gk$.

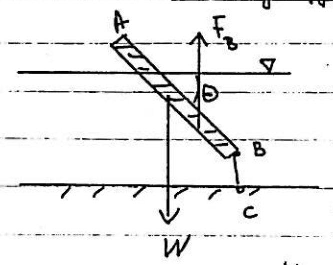
Dette er en fri overflatebølge på dypt vann.

$B = 0$: $C = B - A \to -A$, og ligning (iii) gir

$$-\rho_I\omega^2 C = [\rho_{II}\omega^2 + g(\rho_I - \rho_{II})k]C$$

$$\omega^2 = \frac{\rho_{II} - \rho_I}{\rho_{II} + \rho_I}\cdot gk$$

Løsning Oppgave 4



Stavens tyngde W

Oppdriftskraft F_B

Tverrsnittsareal $A = \pi D^2/4$.

Momentbalanse om B:

a) $W \cdot 2{,}5\cos\theta = F_B \cdot 2\cos\theta$, $\quad W = 0{,}8 F_B$.

Da $W = \gamma_{tre}\cdot 5A$, $F_B = \gamma_{vann}\cdot 4A$, får

$\gamma_{tre}\cdot 5A = 0{,}8\cdot\gamma_{vann}\cdot 4A$, $\quad \gamma_{tre} = 0{,}64\,\gamma_{vann}$.

$\gamma_{tre} = 0{,}64\cdot 9790 = 6266 \frac{Pa}{m}$, $\quad \rho_{tre} = \frac{6266}{9{,}81} = 639 \frac{kg}{m^3}$

b) Spenning i tråden $S = F_B - W$.

Da $F_B = \gamma_{vann}\cdot 4A = 9790\cdot 4\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}10^2 = 307{,}6$ N

og $W = 0{,}8 F_B = 246{,}0$ N, får

$S = 307{,}6 - 246{,}0 = 61{,}6$ N