NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I TEP 4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (Fysikk og matematikk) OG FAK. IME (Teknisk kybernetikk)

Onsdag 15. august 2007
Tid: 0900 – 1300

Studiepoeng: 7,5.

Bokmål/Nynorsk

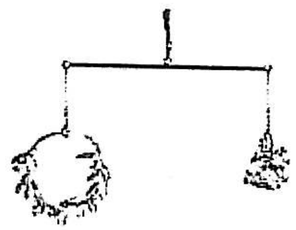
Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemider: Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Sensuren faller 2007

Oppgave 1

Hieron II (ca. år 200 f.Kr.), konge av Syrakus, ga en gullsmed gull for å lage en krone. Kongen som mistenkte gullsmeden for å ha byttet ut noe av gullet med tilsvarende vekt sølv, ba Archimedes om å avgjøre om kronen var rent gull. Og fordi kronen var hellig, dedikert til gudene, kunne ikke Archimedes ødelegge den på noen måte.

Archimedes benyttet en balansevekt for å lage en gullklump med samme vekt som kronen. Gullklumpen puttet han i en bolle og fylte den med vann til randen. Så erstattet han gullklumpen med kronen, og da den fortrengte mer vann ble gullsmeden halshogd.

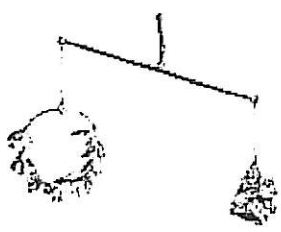


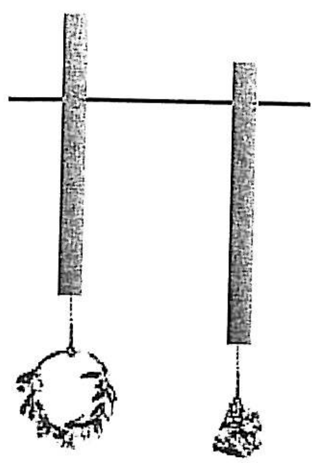
a) Anta at Archimedes brukte et kar med konstant tverrsnitt. Ved å legge gullklumpen i karet stiger vannet en høyde h_G, mens med kronen stiger vannet en høyde h_K. Kronens volum betegnes V_K og volumet av sølv i kronen for V_S. La oss undersøke høydeforskjellen hvis gullsmeden var riktig grisk og har byttet halve kronevolumet med sølv ($V_S/V_K = ½$). Vis at høyden h_K da kan skrives som

$$h_K = \frac{2}{1+r} h_G$$ der r er tetthetsforholdet sølv/gull.

Finn tallverdi for høydeforskjellen $h_K - h_G$. Bruk $h_G = 1.65$ mm og $r = 0.55$.

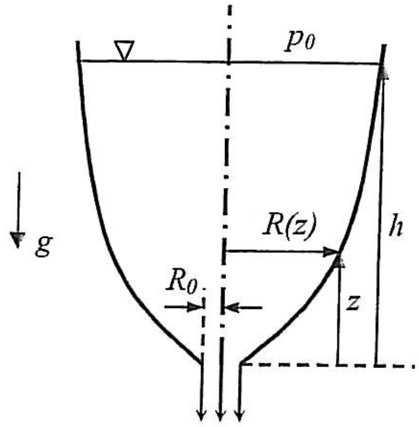
b) Hvis Archimedes hadde tenkt seg om kunne han ha gjort et litt mer rettferdig eksperiment ved å gjenta veiingen under vann som vist i figuren til høyre. Finn forskjellen i kraften som virker i hvert endepunkt av vektarmen uttrykt ved tettheten til vann ρ_V, kronens volum V_K, gullklumpens volum V_G og tyngdens akselerasjon g.





c) Eksperimentet i spørsmål b) markerer kun en eventuell vektforskjell, så for å måle vektforskjellen mer nøyaktig fester vi en sylindrisk trestokk med diameter d til kronen/gullklumpen og markerer vannoverflaten på stokken. Finn denne høydeforskjellen ΔH uttrykt ved V_S, d og r.

Oppgave 2



Vannuret som er vist på figuren ved siden av ble i oldtiden benyttet til måling av tid. Det består av en aksesymmetrisk beholder med sirkulært tverrsnitt som har variende radius $R(z)$. Vannet renner svært langsomt ut gjennom en liten sirkulær åpning med radius R_0 i bunnen av beholderen. Vannets tetthet er ρ, atmosfæretrykket er p_0 og tyngdens akselerasjon er g. Friksjonen neglisjeres.

a) Bestem hvordan vannoverflatens synkehastighet $v(h)$ avhenger av dybden h.

b) Påvis at synkehastigheten blir konstant dersom beholdertverrsnittets radius er gitt som

$$R(z) = R_0\left[1+\frac{2gz}{v_S^2}\right]^{1/4}$$

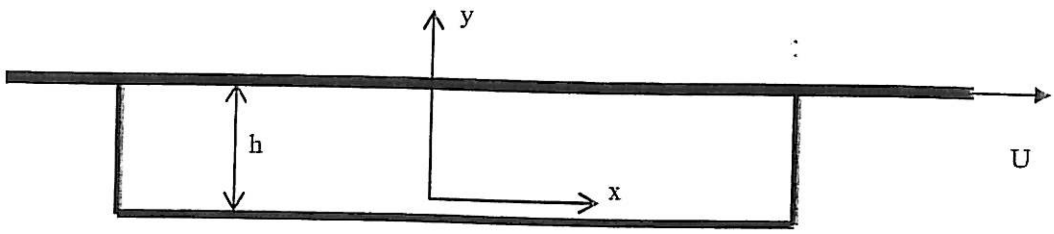
og v_S er den konstante synkehastigheten.

I resten av oppgaven forutsettes det at $R(z)$ varierer med z som ovenfor.

c) Bestem hvordan volumstrømmen Q gjennom bunnåpningen avhenger av vanndybden h.

d) Vannuret er fylt til en høyde $h = H$ ved tiden $t = 0$. Hvor lang tid tar det å tømme karet hvis $H = 1.8$ m og vannoverflaten synker 1 mm i minuttet? I dette vannuret er $R_0 = 1.3$ mm og $g = 9.81$ m/s^2.

Oppgave 3



Et belte beveger seg med konstant hastighet U i x-retningen som vist i figuren. Inntil beltet er det plassert et langstrakt kammer som står i ro. Kammeret er fylt med en væske med konstant tetthet ρ og viskositet μ. På grunn av friksjonen mot beltet får vi satt opp en laminær og stasjonær strømning inne i kammeret. Kammerets høyde h er mye mindre enn lengden i x-retningen. Vi ser bort fra områdene i hver ende av kammeret, og betrakter kun kammerets midtområde der vi antar at væskens bevegelse vil være parallell med den viste x-aksen. Se bort fra tyngdens innvirkning i problemet.

a) Vis at trykkgradienten **dp/dx** i x-retningen må være en konstant.

b) Vis at hastigheten u i x-retningen er gitt ved

$$u = \frac{U}{h} y + \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - hy)$$

c) Finn trykkgradienten **dp/dx** uttrykt ved U, μ og h. (Tips: Netto væsketransport i x-retning må være null.)

d) Sett inn for trykkgradienten i uttrykket for hastigheten u, og lag en skisse av hastighetsprofilet. Finn spesielt den største negative hastigheten i x-retning.

FLUIDMEKANIKK

TEP4105. Kontinuasjonseksamen 15. august 2007

Oppgave 1

a) Massene av gull og krone er like, $\rho_G V_G = \rho_K V_K \equiv M$.

Altså $\rho_K = \rho_G \dfrac{V_G}{V_K}$. Da $\rho_K = \frac{1}{2}(\rho_G + \rho_S)$ fås

$$\frac{1}{2}(\rho_G + \rho_S) = \rho_G \cdot \frac{V_G}{V_K}, \qquad \frac{V_G}{V_K} = \frac{1}{2}(1+r).$$

Hvis karets tverrsnitt er A er stigehøyden med gull i karet

$h_G = \dfrac{V_G}{A}$. Tilsvarende er $h_K = \dfrac{V_K}{A}$ med kronen i karet.

Det gir $$\frac{h_K}{h_G} = \frac{V_K/A}{V_G/A} = \underline{\frac{V_K}{V_G} = \frac{2}{1+r}}$$

$$\underline{h_K - h_G} = h_G \frac{1-r}{1+r} = 1{,}65\,\frac{1-0{,}55}{1+0{,}55}\ \text{mm} = \underline{0{,}48\ \text{mm}}$$

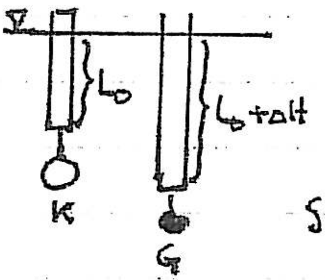
b) Eksperiment i vann.

Oppdriftskraft F_{BK} for kronen: $F_{BK} = \rho_V g V_K$.

— " — F_{BG} " gull: $F_{BG} = \rho_V g V_G$

Forskjell $\underline{\Delta F} = F_{BK} - F_{BG} = \underline{\rho_V g (V_K - V_G)}$

c)



Samme oppdrift:

$$F_{BK} + \rho_V g L_0 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = F_{BG} + \rho_V g (L_0 + \Delta H) \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

Setter inn $F_{BK} - F_{BG} = \rho_V g (V_K - V_G)$:

$$V_K - V_G = \Delta H \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

Da $V_K = 2V_S$, og $V_G = \frac{1}{2}(1+r)V_K = \frac{1+r}{2} \cdot 2V_S = (1+r)V_S$:

$$\Delta H = (V_K - V_G) \cdot \frac{4}{\pi d^2} = [2V_S - (1+r)V_S]\,\frac{4}{\pi d^2}$$

$$\underline{\Delta H = (1-r)\,V_S \cdot \frac{4}{\pi d^2}}$$

TEP4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 15. august 2007

Løsning eksamen

Oppgave 2 a)
Det er gitt at strømningen er friksjonsfri, og fordi utstrømningshastigheten er liten kan vi se på strømningen som tilnærmet stasjonær (tidsuavhengig). Dermed kan vi bruke Bernoulli's likning langs en strømlinje fra væskeoverflaten (der trykket er p_0 og hastigheten er $v(h)$) og til utløpet (der trykket også er p_0 mens hastigheten er v_{ut}):

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2(h)}{2}+gh=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_{ut}^2}{2}+0$$

Her forsvinner p_0, men vi har to ukjente hastigheter. Massebevarelse gir:

$$Q=v_{ut}\pi R_0^2=v(h)\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad v_{ut}=v(h)\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$$

Setter uttrykket for v_{ut} inn i Bernoulli:

$$v^2(h)+2gh=v^2(h)\left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v(h)=\sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{R}{R_0}\right)^4-1}}}}$$

{En god tilnærmelse vil være å neglisjere $v(h)$ i Bernoulli (fordi $v(h)<<v_{ut}$). Da får vi det klassiske resultatet $v_{ut}=\sqrt{2gh}$ og massebevarelsen gir oss dermed svaret

$$v(h)=\sqrt{2gh}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2$$

Dette er det samme som å sløyfe -1 i svaret over med argumentet $R^4>>R_0^4$.}

b)
Når synkehastigheten til overflaten $v(h)$ er konstant får vi fra svaret i a):

$$v(h)=v_S=\sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{R}{R_0}\right)^4-1}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{R}{R_0}\right)^4-1=\frac{2gh}{v_S^2} \quad \Rightarrow \quad R=R_0\left[1+\frac{2gh}{v_S^2}\right]^{1/4}$$

Her har vi brukt h som dybden til væskeoverflaten. Uttrykket over gir oss dermed sammenhengen mellom radius R i karet og dybden:

$$\underline{\underline{R(z)=R_0\left[1+\frac{2gz}{v_S^2}\right]^{1/4}}}$$

{Fra den tilnærmede løsningen i a) får vi et litt annet uttrykk:

$$v(h)=v_S\simeq\sqrt{2gh}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R=R_0\left(\frac{2gh}{v_S^2}\right)^{1/4}$$

som er en god tilnærmelse fordi v_S er liten.}

c)

Volumstrømmen Q ut av karet er gitt ved $Q = v_{ut}\pi R_0^2$. Nå er det gitt at synkehastigheten i karet er konstant lik v_S, så fra Bernoulli's likning får vi nå sammenhengen:

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_S^2}{2}+gh=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_{ut}^2}{2}+0 \quad\Rightarrow\quad v_{ut}=\sqrt{v_S^2+2gh} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{Q=\pi R_0^2\sqrt{v_S^2+2gh}}}$$

d)

Fordi synkehastigheten er konstant er tømmetiden T gitt ved $\underline{H = v_S \cdot T}$. Tallverdier:

$$v_S = 1\frac{mm}{minutt}\cdot\frac{1\,m}{1000\,mm}\cdot\frac{1\,minutt}{60\,s}=\frac{1}{60000}\,m/s$$

$$T=\frac{H}{v_S}=\frac{1.8m}{\frac{1}{60000}m/s}=10800\,s=\underline{\underline{30\,timer}}$$

Oppgave ~~4~~ 3

a)

Oppgitt kun hastighet i x-retningen: $\vec{v}=(u,0)$

Massebevarelse: $\nabla\cdot\vec{v}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad u=u(y)$

Navier-Stokes, x-retning:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+g_x+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Her: stasjonært, $u = u(y)$, $v = 0$, $g = 0$, så den reduseres til:

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{d^2u}{dy^2}$$

Navier-Stokes, y-retning blir med $v = 0$:

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad\Rightarrow\quad p=p(x)$$

x-komponenten kan da skrives:

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dy^2}=\text{konstant}$$

b)

Integrerer opp x-komponenten av Navier-Stokes:

$$u=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{1}{2}y^2+C_1y+C_2$$

Grensebetingelser:

$$u(y=0) = 0 = C_2$$

$$u(y=h) = U = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h^2 + C_1 h \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{U}{h}y + \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - hy)$$

c)
Netto volumstrøm Q i x-retningen må være null:

$$Q = 0 = \int_0^h u dy = \frac{U}{h}\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{1}{3}h^3 - h\frac{1}{2}h^2\right) = \frac{Uh}{2} + \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{6U\mu}{h^2}$$

d)
Innsatt for trykkgradienten:

$$u = \frac{U}{h}y + \frac{1}{2\mu}\frac{6U\mu}{h^2}\left(y^2 - hy\right) = 3U\frac{y^2}{h^2} - 2U\frac{y}{h} \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{u}{U} = 3\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{h}\right)}$$

Funksjonen u/U kan dermed enkelt plottes for verdier av y/h mellom null og en:

$$\frac{u}{U} = 0 \text{ for } \frac{y}{h} = 0 \text{ og } \frac{y}{h} = \frac{2}{3}$$

Funksjonen har maks-verdi for y/h = 1/3:

$$\frac{u}{U}\left(\text{for } \frac{y}{h} = \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$