NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

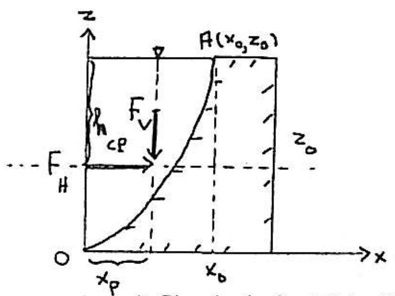
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. F1
(Linje for Fysikk og matematikk)
2. august 2004
Tid: 0900 – 1400
Studiepoeng: 7,5

Sensuren faller i uke 36.

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Figuren viser et utsnitt av en betong-dam som skal innelukke vann i et basseng. Vanndybden er z_0= 8,5 m. Flaten OA av dammen er parabolsk, og er gitt ved formen

$$z = z_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^2,$$

hvor x_0 = 3,0 m. Dammens bredde inn i planet er b = 12,0 m. Se bort fra atmosfæretrykket, og sett g = 10 m/s^2.

a) Finn den horisontale kraft F_H og den vertikale kraft F_V som virker fra vannet på dammen.

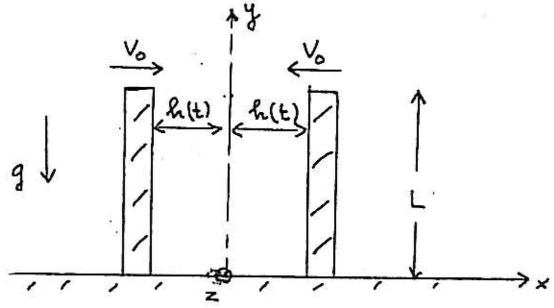
b) Finn trykksenterets dybde h_{CP}.

c) Finn horisontalavstanden x_p til angrepslinjen for F_V.

Oppgitt: Treghetsmomentet for flatens horisontale projeksjon omkring y-aksen gjennom centroiden er

$$I_{yy} = b\,z_0^3/12$$

Oppgave 2



To vertikale plater med høyde L har ved et vilkårlig tidspunkt en innbyrdes avstand 2h(t). Platene beveger seg mot hverandre med konstant hastighet V_o på et glatt horisontalt bord. Rommet mellom platene er fylt av en inkompressibel væske. På grunn av platenes bevegelse blir væske presset ut fra mellomrommet, og det oppstår i mellomrommet en ikke-stasjonær strømning som skal antas todimensjonal (altså ingen bevegelse i z-retning).

a) Vis at horisontale og vertikale hastighetskomponenter

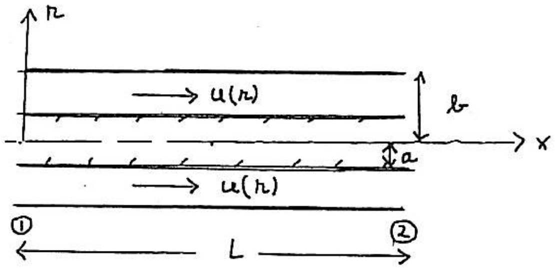
$$u(x,t) = -\frac{V_o}{h(t)}x \quad , \quad v(y,t) = \frac{V_o}{h(t)}y$$

representerer et mulig hastighetsfelt.

b) Finn akselerasjonskomponentene a_x og a_y.

c) Benytt Eulerligningen til å finne trykket i mellomrommet når trykket ved utløpet y = L settes lik p_0.

Oppgave 3



Det annulære området $a \le r \le b$ mellom en kompakt indre sylinder $r = a$ og en ytre sylinderflate $r = b$ er fylt med en inkompressibel væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν. Strømningen er horisontal og stasjonær. Trykkforskjellen over lengden L av røret er gitt, lik $\Delta p = p_1 - p_2$. Se bort fra tyngden. På grunn av symmetrien vil bare den horisontale hastighetskomponenten $u = u(r)$ være forskjellig fra null. Kontinuitetsligningen er automatisk oppfylt.

Symmetrien gjør at Navier-Stokes' ligninger blir forenklet. De lyder i x- og r-retning

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right), \qquad (1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (2)$$

a) Vis herav at $\partial p / \partial x$ = konstant, lik $-\Delta p / L$.

b) Vis ved integrasjon av (1) at hastighetsprofilet i det annulære område blir

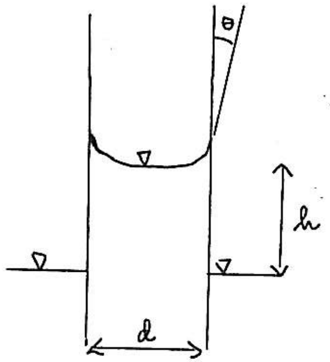
$$u = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left[b^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln(b/a)}\ln\frac{r}{b}\right], \qquad (3)$$

hvor $\mu = \rho\nu$.

c) Sett a = 1 m, b = 2 m, og finn volumgjennomstrømningen Q uttrykt ved $\Delta p, \mu$ og L.

Oppgitt: $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$.

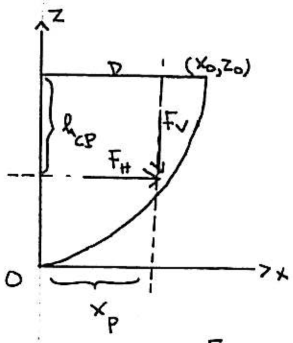
Oppgave 4 (halv vekt)



To parallelle plane plater settes vertikalt ned i et kar med vann. Avstanden mellom platene er d = 2mm. På grunn av overflatespenningen blir vannet trukket opp mellom platene, til en høyde h. Kontaktvinkelen mellom væskeflatens tangent og platen er $\theta = 10°$ (se fig.) Vannets tetthet er $\rho = 1000\ kg/m^3$, overflatespenningen er $\Upsilon = 0{,}073\ N/m$, og g = 10 m/s². Finn h.

TEP 4105 FLUIDMEKANIKK. KONTINUASJONSEKS. AUGUST 2004

Løsning Oppgave 1



a) Horisontal kraft $F_H = \gamma h_{cg} A_x$, hvor centroidens dybde er $h_{cg} = \frac{1}{2} z_0$ og $A_x = z_0 b$.

Altså $\underline{F_H} = \gamma \cdot \frac{1}{2} z_0^2 b = 10^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8{,}5^2 \cdot 12\,N = \underline{4{,}34\ MN}$

F_V er tyngden av vannet:

$F_V = \gamma \mathcal{V}$, hvor $\mathcal{V} = b \int_0^{z_0} x\,dz$ er volumet.

Da $z = \frac{z_0}{x_0^2} \cdot x^2$ blir $dz = \frac{2z_0}{x_0^2} x\,dx$, slik at

$\mathcal{V} = b \cdot \frac{2z_0}{x_0^2} \int_0^{x_0} x^2 dx = b \cdot (\frac{2}{3} x_0 z_0)$, hvor $\frac{2}{3} x_0 z_0$ er arealet av vannet over parabelen. Altså $\underline{F_V = \gamma b \cdot (\frac{2}{3} x_0 z_0)}$.

Innsatt: $\underline{F_V} = 10^4 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 8{,}5\ N = \underline{2{,}04\ MN}$

b) Dybden ned til angrepslinjen for F_H er $h_{cp} = h_{cg} + l$, hvor l er differansen mellom posisjonene til trykksenter og centroide. Med akser som på figuren (y-aksen inn i planet) blir

$$l = \frac{I_{yy}}{h_{cg} \cdot A_x} = \frac{\frac{1}{12} b z_0^3}{\frac{1}{2} z_0 \cdot b z_0} = \frac{1}{6} z_0 .$$

Altså $\underline{h_{cp}} = h_{cg} + l = \frac{1}{2} z_0 + \frac{1}{6} z_0 = \underline{\frac{2}{3} z_0} = \underline{5{,}67\,m}$

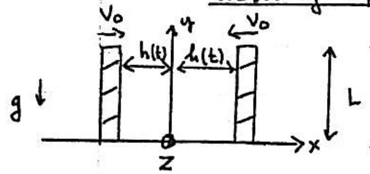
c) Avstanden x_p til angrepslinjen for F_V finnes ved å ta momentet av arealet omkring O (del arealet opp i vertikale striper):

$$(\tfrac{2}{3} x_0 z_0) \cdot x_p = \int_0^{x_0} x (z_0 - z)\,dx = \int_0^{x_0} x (z_0 - \frac{z_0}{x_0^2} x^2)\,dx = \frac{1}{4} z_0 x_0^2 .$$

Det gir $\underline{x_p = \frac{3}{8} x_0} = \underline{1{,}12\,m}$

TEP 4105. Kontinuasjonseksamen august 2004

Løsning Oppgave 2



a) $u(x,t) = -\frac{V_0}{h(t)} x$, $v(y,t) = \frac{V_0}{h(t)} y$

oppfyller grensebetingelsene $u(\pm h, t) = \mp V_0$, $v(0,t) = 0$,

og også betingelsen for inkompressibilitet:

$\underline{\nabla \cdot \vec{V}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{V_0}{h} + \frac{V_0}{h} = \underline{0}$. Derfor mulig hastighetsfelt.

b) $\underline{a_x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V_0 x}{h^2} \frac{dh}{dt} + \frac{V_0 x}{h} \cdot \frac{V_0}{h} = \underline{0}$

$\underline{a_y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{V_0 y}{h^2} \frac{dh}{dt} + \frac{V_0 y}{h} \frac{V_0}{h} = \underline{\frac{2V_0^2}{h^2} \cdot y}$

c) Euler: $\underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}}_{= \vec{a}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$

x-komponent : $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, dvs. $p = p(y,t)$.

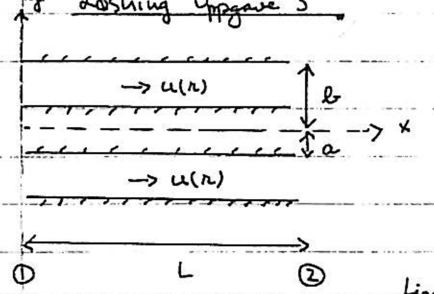
y-komponent: $\frac{2V_0^2}{h^2} \cdot y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g$.

Integrerer: $p = -\rho g y - \frac{\rho V_0^2}{h^2} \cdot y^2 + f(t)$, $f(t)$ vilkårlig.

Da $p(y = L) = p_0$ fås $f(t) = p_0 + \rho g L + \frac{\rho V_0^2}{h^2} L^2$.

Altså $\underline{p(y,t) = p_0 + \rho g (L - y) + \frac{\rho V_0^2}{h^2} (L^2 - y^2)}$

Løsning Oppgave 3



a) $$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \qquad (2)$$

Ligning (2) viser at trykket er konstant over tverrsnittet.

Deriverer (1) mhp. x : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0$

Deriverer (2) mhp. x : $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0$.

Altså er $\partial p/\partial x$ uavhengig av x og r, derfor en konstant.

Da blir $\partial p/\partial x = dp/dx = -\Delta p/L$ $(\Delta p = p_1 - p_2 > 0)$.

b) Av (1): $\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{r}{\mu}\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{\mu L}\cdot r$, $\Rightarrow$

$$r\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu L}r^2 + C_1, \quad \frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu L}r + \frac{C_1}{r}.$$

Ny integrasjon: $u = -\frac{\Delta p}{4\mu L}r^2 + C_1 \ln r + C_2$.

To grensebetingelser:

$$u(a) = 0 = -\frac{\Delta p}{4\mu L}a^2 + C_1 \ln a + C_2$$

$$u(b) = 0 = -\frac{\Delta p}{4\mu L}b^2 + C_1 \ln b + C_2.$$

Herav $$C_1 = \frac{\Delta p}{4\mu L}\frac{b^2 - a^2}{\ln b/a},$$

$$C_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L}b^2 - \frac{\Delta p}{4\mu L}\frac{b^2 - a^2}{\ln b/a}\ln b.$$

Oppgave 3, forts.

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left[b^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln b/a}\ln\frac{r}{b}\right]$$

c) Volumgjennomstrømning $Q = 2\pi\int_a^b u\cdot r\,dr$.

Med $a = 1\,m$, $b = 2\,m$ blir

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left(4 - r^2 + \frac{3}{\ln 2}\cdot\ln\frac{r}{2}\right), \text{ dermed}$$

$$Q = \frac{\pi\cdot\Delta p}{2\mu L}\int_1^2\left(4r - r^3 + \frac{3}{\ln 2}\cdot r\ln\frac{r}{2}\right)dr$$

$$= \frac{\pi\cdot\Delta p}{2\mu L}\left\{\underbrace{\Big|_1^2\left(2r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right)}_{=9/4} + \frac{3}{\ln 2}\int_1^2 r\ln\frac{r}{2}\,dr\right\}$$

Tar ut delintegralet $\left(\frac{r}{2} = x\right)$

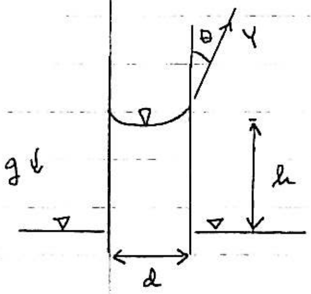
$$\int_1^2 r\ln\frac{r}{2}\,dr = 4\int_{1/2}^1 x\ln x\,dx = 4\Big|_{1/2}^1\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Altså

$$Q = \frac{\pi\cdot\Delta p}{2\mu L}\left\{\frac{9}{4} + \frac{3}{\ln 2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\right)\right\}$$

$$Q = \frac{3\pi\cdot\Delta p}{8\mu L}\left(5 - \frac{3}{\ln 2}\right)$$

TEP 4105 Kontinuasjonseksamen august 2004



Løsning Oppgave 4

Betrakter én lengdeenhet inn i planet.

Vertikalkomponenten $2Y\cos\theta$ av kraften fra overflate-spenningen Y må ved likevekt balansere tyngden $\gamma \cdot d \cdot h$ av vannsøylen:

$$2Y\cos\theta = \gamma d h \quad , \quad \text{hvor } \gamma = \rho g.$$

$$\Rightarrow: \quad \underline{h = \frac{2Y\cos\theta}{\gamma d}}$$

Innsatt:

$$\underline{h} = \frac{2 \cdot 0{,}073 \cdot \cos 10^\circ}{10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \text{ m} = 0{,}0072 \text{ m} = \underline{0{,}72 \text{ cm}}$$