Løsningsforslag til Øving 12
Høst 2014

Oppgave 1

Det komplekse potensialet er generelt gitt ved

$$w(z) = \Phi + i\Psi. \tag{1}$$

Vi finner derfor hastighetspotensialet og strømfunksjonen ved å hhv. finne real- og immaginærdel av det komplekse potensialet.

a

Her har vi

$$w(z) = Uz^{\pi/\alpha} = Ur^{\pi/\alpha} \exp\left(i\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) = Ur^{\pi/\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) + i\sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)\right), \tag{2}$$

som gir

$$\Phi = Ur^{\pi/\alpha}\cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) \quad \text{og} \quad \Psi = Ur^{\pi/\alpha}\sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right). \tag{3}$$

Finner hastighetene fra enten hastighetspotensialet eller strømfunksjonen;

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad \text{og} \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \tag{4}$$

som gir

$$v_r = \frac{\pi U}{\alpha} r^{\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)}\cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) \quad \text{og} \quad v_\theta = -\frac{\pi U}{\alpha} r^{\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)}\sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) \tag{5}$$

b

Volumstrømmen Q er generelt gitt ved

$$Q = \int \vec{V} \cdot \vec{n} dA, \tag{6}$$

hvor $\vec{n}$ er normalvektoren til flaten dA som det strømmen gjennom. I potensialteorien kan man gjøre dette enda enklere ved å ta differansen mellom strømfunksjonen Ψ over flaten det strømmer gjennom. Altså, for denne oppgaven er det (minst) tre måter å finne volumstrømmen på:

1:

Differansen mellom strømfunksjonen i origo og i punktet $(r = b, \theta = \alpha/2)$:

$$Q = \Psi(r = b, \theta = \alpha/2) - \Psi(r = 0, \theta) = Ub^{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{7}$$

2:

Et integral over sirkelbuen med toppunkt i O og radius b: (langs denne flaten er det kun radiell strøm som bidrar)

$$Q = \int_0^{\alpha/2} v_r b d\theta = \frac{\pi U}{\alpha} b^{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{\alpha/2} \cos\frac{\pi\theta}{\alpha} d\theta = Ub^{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{8}$$

3:

Et integral over linjen fra O til B ($\theta = \alpha/2$): (langs denne flaten er det kun tangensiell strøm som bidrar)

$$Q = -\int_0^b v_\theta dr = U b^{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{9}$$

hvor minustegnet skyldes at strømningen går i negativ θ-retning.

c

For potensialstrømning er $\nabla \times \vec{V} = 0$ og vi kan følgelig benytte oss av Bernoulli mellom to vilkårlige punkter. Vi skriver:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho V_0^2 + p_0}_{\text{origo}} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho V^2 + p}_{\text{vilkårlig punkt}} \quad . \tag{10}$$

Da $V_0 = 0$ i origo og

$$V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{\pi U}{\alpha}\right)^2 r^{2\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)} \tag{11}$$

fåes

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\pi U}{\alpha}\right)^2 r^{2\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)}. \tag{12}$$

Trykket er ikke realistisk for store r da vi kan få negativt trykk for en valgt p_0.

Oppgave 2

Det komplekse potensialet for en kilde i origo med styrke λ er

$$w(z) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln z. \tag{13}$$

For uendelig mange ekvidistante kilder får vi følgelig

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\lambda}{2\pi}\left[\ln z + \ln(z-ia) + \ln(z+ia) + \ln(z-2ia) + \ln(z+2ia) + \ldots\right] \\ &= \frac{\lambda}{2\pi}\ln\left[z(z-ia)(z+ia)(z-2ia)(z+2ia)\ldots\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Ved hjelp av tredje kvadratsetning kan vi skrive

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\lambda}{2\pi}\ln\left[z\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+4a^2\right)\ldots\right] \\ &= \frac{\lambda}{2\pi}\ln\left[z\prod_{n=1}^{\infty}\left(z^2+n^2a^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Av oppgitt formel:

$$\sinh\left(\frac{\pi z}{a}\right) = \frac{\pi z}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^2+n^2a^2}{n^2a^2}\right) = \frac{\pi z}{a}\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2a^2}\right)\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(z^2+n^2a^2\right)\right) = C_1 z\prod_{n=1}^{\infty}\left(z^2+n^2a^2\right), \tag{16}$$

hvor C_1 er en konstant (uavhengig av z), har vi

$$w(z) = \frac{\lambda}{2\pi}\ln\left[z\prod_{n=1}^{\infty}\left(z^2+n^2a^2\right)\right] = \frac{\lambda}{2\pi}\ln\sinh\left(\frac{\pi z}{a}\right) - \frac{\lambda}{2\pi}\ln C_1. \tag{17}$$

Som vi vet er ikke konstanten vi finner i potensialteorien av fysisk betydning (er alltid ute etter deriverte eller differanser) og vi kan derfor velge å se bort fra denne. Det komplekse potensialet er følgelig gitt som

$$w(z) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \sinh\left(\frac{\pi z}{a}\right). \tag{18}$$

Av

$$\sinh \frac{\pi z}{a} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}\right)\right)} \exp\left[i \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{a}}{\tanh \frac{\pi x}{a}}\right], \tag{19}$$

finnes

$$w(z) = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}\right)\right)} + i \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{a}}{\tanh \frac{\pi x}{a}} \right\} \tag{20}$$

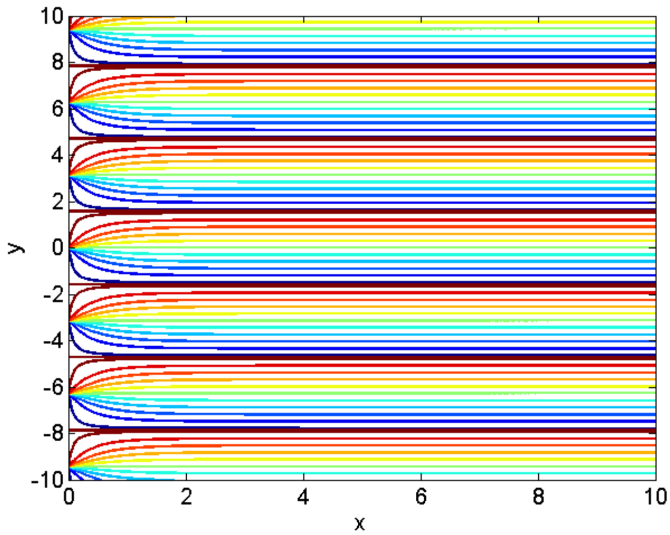
Ved å ta real- og immaginærdelen av utrykket ovenfor finner hhv. hastighetspotensialet og strømfunksjonen til å være:

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{2}\left(\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}\right)\right) \tag{21}$$

og

$$\Psi = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{a}}{\tanh \frac{\pi x}{a}} \tag{22}$$

Figuren nedenfor viser noen strømlinjer for $a = \pi$ og $\lambda = 2\pi$.



For store x ligner strømlinjene det vi får for en uniform strømning i x-retning. Dette som forventet da

$$\lim_{x\to\infty} (\tanh x) = 1, \tag{23}$$

slik at strømfunksjonen blir

$$\lim_{x\to\infty} (\Psi) = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{a}}{1} = \frac{\lambda}{2a} y \tag{24}$$

som nettopp er strømfunksjonen for en uniform strøm i x-retning.