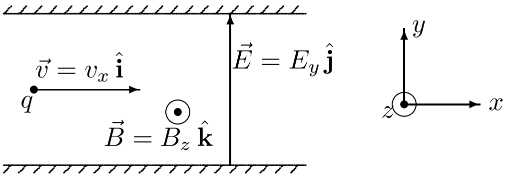
TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

Øving 9, løsningsskisse.
Magnetfelt.

Oppgave 1. Lorentzkrafta: Hastighetsfilter.



Lager først et koordinatsystem etter opplysningene i teksten. $\vec{v}$, $\vec{E}$, og $\vec{B}$ er alle normalt på hverandre og legger dem da langs hver sin akse som figuren viser.
Når det ikke er noen avbøyning av partikler, har vi i følge Newtons lov at resulterende Lorentzkraft er lik null, elektrisk og magnetisk kraft oppveier hverandre. Begge krefter går i y-retning, og vi får ifølge høyrehåndsregelen

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) = q\left(E_y\,\hat{\mathbf{j}} + v_x\cdot B_z(-\hat{\mathbf{j}})\right) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = v_x\cdot B_z \\ \Rightarrow \quad v_x &= \frac{E_y}{B_z} = \frac{300\,\mathrm{V}/0,020\,\mathrm{m}}{0,100\,\mathrm{T}} = \underline{1,5\cdot 10^5\,\mathrm{m/s}.} \qquad \text{(enhetsregning: T = Vs/m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Oppgave 2. Gauss' lov for B-feltet.

Gauss lov for $\vec{B}$-feltet er gitt ved $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ (integralform) eller $\mathrm{div}\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (differensialform). Dersom dette ikke er oppfylt for et gitt B-felt, kan feltet ikke være fysisk mulig. Matematisk sett er det altså et vektorfelt, men kan ikke være et gyldig magnetfelt.

Det er enklest å sjekke om Gauss lov på differensialform er oppfylt:

a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k(1+1+1) = 3k \neq 0.$

b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k(1+0-1) = 0.$

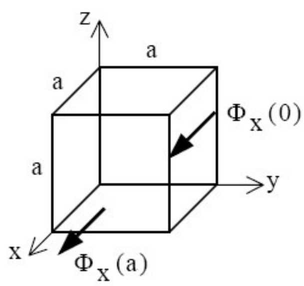
c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k(1-1-1) = -k \neq 0.$

d) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k(y-x+(x-y)) = 0.$

Følgelig er b) og d) mulige mens a) og c) ikke er mulige.

Ved å bruke integralformen gjør vi det forståelsesmessig enklere, men regnemessig mye vanskeligere:

Beregner netto fluks ut av f.eks. en kube med sidekant a plassert med ene hjørnet i origo (slik vi også gjorde det for E-feltet i øving 2). For x-retning får vi fluks inn $\Phi_x(x=0)$ og $\Phi_x(x=a)$ ut. Φ_x er gitt av kun B's x-komponent, slik at nettofluks ut er



$$\Delta\Phi_x = \Phi_x(x=a) - \Phi_x(x=0) = \int_0^a\!\!\int_0^a B_x(x=a)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \int_0^a\!\!\int_0^a B_x(x=0)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

og tilsvarende for $\Delta\Phi_y$ og $\Delta\Phi_z$.

Total fluks ut av kuben blir

$$\Delta\Phi_B = \Delta\Phi_x + \Delta\Phi_y + \Delta\Phi_z\,.$$

a)
$$\left.\begin{array}{lll} B_x(x=a) = ka, \quad B_x(x=0) = 0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_x = ka\cdot a^2 \\ B_y(y=a) = ka, \quad B_y(y=0) = 0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_y = ka\cdot a^2 \\ B_z(z=a) = ka, \quad B_z(z=0) = 0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_z = ka\cdot a^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_B = 3ka^3 \neq 0$$

b)
$$\left.\begin{array}{lll} B_x(x=a) = ka, \quad B_x(x=0) = 0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_x = ka\cdot a^2 \\ B_y(y=a) = kz, \quad B_y(y=0) = kz & \Rightarrow & \Delta\Phi_y = 0 \\ B_z(z=a) = -ka, \quad B_z(z=0) = 0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_z = -ka\cdot a^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_B = 0.$$

c)
$$\left.\begin{array}{lll} B_x(x=a) = ka, \quad B_x(x=0) = 0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_x = ka\cdot a^2 \\ B_y(y=a) = -ka, \quad B_y(y=0) = 0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_y = -ka\cdot a^2 \\ B_z(z=a) = -ka, \quad B_z(z=0) = 0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_z = -ka\cdot a^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_B = -ka\cdot a^2 \neq 0.$$

d) $$\left.\begin{array}{lllr} B_x(x=a,y,z)=kay, & B_x(x=0,y,z)=0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_x=\frac{1}{2}ka^4 \\ B_y(x,y=a,z)=-kax, & B_y(x,y=0,z)=0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_y=-\frac{1}{2}ka^4 \\ B_z(x,y,z=a)=kax-kay, & B_z(x,y,z=0)=0 & \Rightarrow & \Delta\Phi_z=\frac{1}{2}ka^4-\frac{1}{2}ka^4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\Phi_B=0.$$

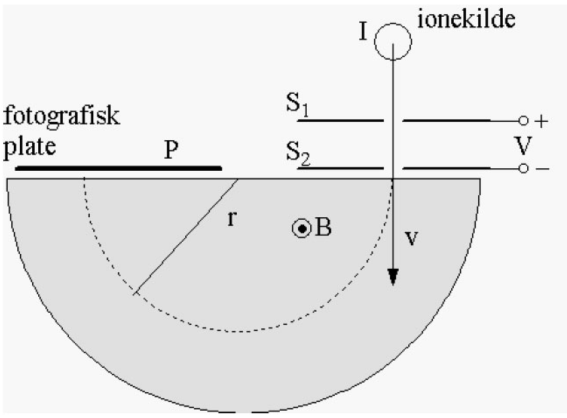
I d) er $\Delta\Phi_x$ er beregnet:

$$\Delta\Phi_x=\int_0^a \mathrm{d}z\int_0^a kay\,\mathrm{d}y=(a-0)\cdot ka\frac{1}{2}(a^2-0^2)=\frac{1}{2}ka^4$$

og tilsvarende for $\Delta\Phi_y$ og $\Delta\Phi_z$.

Konklusjonen blir som over; a) og c) er umulig som B-felt, mens b) og d) er OK.

Oppgave 3. Massespektrometer.



a) Hastigheten til protonet idet det når aperturen i den negative plata finnes ved å se på energien. Elektrisk potensiell energi er lik kinetisk energi:

$$q_\mathrm{p}V = \frac{1}{2}m_\mathrm{p}v^2 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad v = \left(\frac{2q_\mathrm{p}V}{m_\mathrm{p}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 3,0\cdot 10^{3}\,\mathrm{V}}{1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}\right)^{1/2} = 7,587\cdot 10^5\,\mathrm{m/s.} = \underline{7,59\cdot 10^5\,\mathrm{m/s}}.$$

Avstanden $d = 1,000$ mm mellom platene har ingen betydning.

b) Vi finner treffposisjon på den fotografiske plata ved å se på krafta som virker på protonet i det magnetiske feltet. Krafta er $F_\mathrm{p}=|q_\mathrm{p}\vec{v}\times\vec{B}|=q_\mathrm{p}vB$ fordi hastighetsvektoren $\vec{v}$ og det magnetiske feltet $\vec{B}$ står vinkelrett på hverandre. Krafta står vinkelrett på både $\vec{v}$ og $\vec{B}$ slik at krafta peker radielt innover i en sirkel. Protonet følger altså en sirkel med radius r_p og akselerasjonen er gitt ved sentripetalakselerasjonen F_s:

$$F_\mathrm{p}\equiv F_\mathrm{s} \quad\Rightarrow\quad q_\mathrm{p}vB=m_\mathrm{p}\cdot\frac{v^2}{r_\mathrm{p}} \quad\Rightarrow\quad r_\mathrm{p}=\frac{m_\mathrm{p}v}{q_\mathrm{p}B}. \tag{2}$$

Protonet treffer den fotografiske plata i en avstand L_p fra aperturen:

$$L_\mathrm{p}=2r_\mathrm{p}=2\frac{m_\mathrm{p}v}{q_\mathrm{p}B}=2\cdot\frac{1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot 7,587\cdot 10^5\,\mathrm{m/s}}{1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,400\,\mathrm{T}}=\underline{3,96\,\mathrm{cm}}.$$

c) Det er flere måter å finne løsningen på. Enkleste regning kanskje ved å søke etter masseforholdet m_1/m_p. Sirkelbevegelsen gir for henholdsvis partikkel 1 og for proton, se likn. (2):

$$m_1\cdot\frac{v_1^2}{r_1}=q_1v_1B \quad\text{og}\quad m_\mathrm{p}\cdot\frac{v_\mathrm{p}^2}{r_\mathrm{p}}=q_\mathrm{p}v_\mathrm{p}B \quad\overset{\text{likningsdivisjon}}{\Longrightarrow}\quad \frac{m_1}{m_\mathrm{p}}=\frac{q_1}{q_\mathrm{p}}\frac{v_1}{v_\mathrm{p}}\frac{r_1}{r_\mathrm{p}}\frac{v_\mathrm{p}^2}{v_1^2}=\frac{q_1}{q_\mathrm{p}}\frac{r_1}{r_\mathrm{p}}\frac{v_\mathrm{p}}{v_1}. \tag{3}$$

Vi trenger hastighetsforholdet $\frac{v_\mathrm{p}}{v_1}$ som vi finner fra akselerasjonslikningen (1)

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}^2=q_\mathrm{p}V \quad\text{og}\quad \frac{1}{2}m_1v_1^2=q_1V \quad\overset{\text{likningsdivisjon}}{\Longrightarrow}\quad \frac{v_\mathrm{p}^2}{v_1^2}=\frac{q_\mathrm{p}}{q_1}\frac{m_1}{m_\mathrm{p}} \quad\Rightarrow\quad \frac{v_\mathrm{p}}{v_1}=\sqrt{\frac{q_\mathrm{p}}{q_1}}\sqrt{\frac{m_1}{m_\mathrm{p}}}$$

som gir innsatt i likn. (3)

$$\frac{m_1}{m_\mathrm{p}}=\frac{q_1}{q_\mathrm{p}}\frac{r_1}{r_\mathrm{p}}\sqrt{\frac{q_\mathrm{p}}{q_1}}\sqrt{\frac{m_1}{m_\mathrm{p}}}=\sqrt{\frac{q_1}{q_\mathrm{p}}}\frac{r_1}{r_\mathrm{p}}\sqrt{\frac{m_1}{m_\mathrm{p}}} \quad\Rightarrow\quad \frac{m_1}{m_\mathrm{p}}=\frac{q_1}{q_\mathrm{p}}\left(\frac{r_1}{r_\mathrm{p}}\right)^2=2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{8}.$$

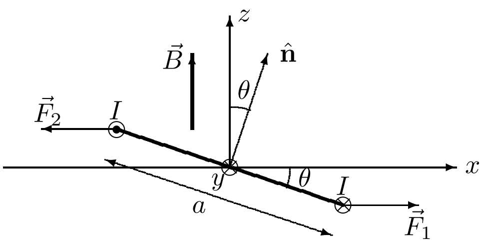
Tilsvarende vil vi finne vi for den andre partikkelen,

$$\frac{m_2}{m_\mathrm{p}}=\frac{q_2}{q_\mathrm{p}}\left(\frac{r_2}{r_\mathrm{p}}\right)^2=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Massene i kg blir

$$m_1=\frac{25}{8}m_\mathrm{p}=\underline{5,2\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}, \qquad m_2=\frac{25}{2}m_\mathrm{p}=\underline{21\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}.$$

Oppgave 4. **Kraftmoment i magnetfelt.**



a) I figuren er kreftene på strømmene i $+y$ og $-y$-retninger inntegnet som henholdsvis $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$. Disse bidrar til kraftmoment $\vec{\tau}$ om y-aksen. Kreftene $\vec{F}_3$ og $\vec{F}_4$ på de to andre greiner (ikke inntegnet) er motsatt like store, virker i $+y$-retning og $-y$-retning og kan ikke rotere sløyfa (bidrar ikke til $\vec{\tau}$). Uttrykk for kreftene:

$$\vec{F}_1 = I\vec{\ell}_1 \times \vec{B} = I\left(a\,\hat{\mathbf{j}} \times B\,\hat{\mathbf{k}}\right) = \underline{IaB\,\hat{\mathbf{i}}}\,, \tag{4}$$

$$\vec{F}_2 = I\vec{\ell}_2 \times \vec{B} = I\left(-a\,\hat{\mathbf{j}} \times B\,\hat{\mathbf{k}}\right) = \underline{-IaB\,\hat{\mathbf{i}}}\,. \tag{5}$$

Den nærmeste greina i figuren med strøm ned mot høyre:

$$\vec{F}_3 = I\vec{\ell}_4 \times \vec{B} = IaB\sin(\pi/2+\theta)(-\,\hat{\mathbf{j}}\,) = \underline{-IaB\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}}\,.$$

og for greina bakerst med strøm opp mot venstre:

$$\vec{F}_4 = I\vec{\ell}_3 \times \vec{B} = IaB\sin(\pi/2-\theta)\,\hat{\mathbf{j}} = \underline{IaB\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}}\,,$$

Kreftene F_3 og F_4 nuller hverandre ut. Totalt kraftmoment om origo er da $\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$, hvor $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ er de tilhørende "armene". Da $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ og $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$, er kraftmomentet lik fra begge kreftene. Med $|r_1| = |r_2| = a/2$, $|F_1| = IaB$ og vinkel θ mellom $\vec{r}_1$ og $\vec{F}_1$ gir høyrehåndsregelen at totalt kraftmoment er lik

$$\vec{\tau} = 2\,\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = 2\cdot a/2 \cdot IaB \cdot \sin\theta\,(-\,\hat{\mathbf{j}}\,) = \underline{-Ia^2B\,\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}}\,.$$

b) Det magnetiske moment er $\vec{\mu} = IA\,\hat{\mathbf{n}} = Ia^2\,\hat{\mathbf{n}}$, og idet vi innser at θ er lik vinkelen mellom $\vec{\mu}$ og $\vec{B}$ (dvs. mellom $\hat{\mathbf{n}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$) og at $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}$, ser vi at vi kan skrive

$$\underline{\vec{\mu} \times \vec{B} = Ia^2\,\hat{\mathbf{n}} \times B\,\hat{\mathbf{k}} = Ia^2B(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\,) = \vec{\tau}}\,,$$

som skulle vises.

c) Potensiell energi $\mathrm{d}U \overset{\text{def}}{=} -\mathrm{d}W = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\vec{\tau}\cdot\mathrm{d}\theta\,\hat{\mathbf{j}} = Ia^2B\sin\theta\mathrm{d}\theta$. Obs fortegn: økende θ gir økende pot. energi. Integrert:

$$U(\theta) - U(\pi/2) = \int_{\pi/2}^{\theta}\mathrm{d}U = \int_{\pi/2}^{\theta} Ia^2B\sin\theta\mathrm{d}\theta = -Ia^2B\,[\cos\theta]_{\pi/2}^{\theta} = \underline{-Ia^2B\cos\theta = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}}\,.$$

Utledningene i denne oppgaven tilsvarer den presentert i forelesning og i kap. 27.7 i Young & Freedman.

Oppgave 5. **Flervalgsoppgaver.**

Oppgave:	a	b	c	d
Rett svar:	E	D	C	C

Detaljer om spørsmålene:

a) **E** Vanskelig oppgave hvis man begynner å regne i detaljer på Gauss' lov. Bruk heller geometri og symmetribetraktninger! Ifølge Gauss' lov er total elektrisk fluks gjennom ei lukka flate som omslutter en punktladning q lik $\Phi = q$. Av symmetrigrunner må det passere like stor andel av denne fluksen gjennom de resterende 7 kubene som skal til for å lage en større kube med q i sentrum (8 oktanter i 3-dimensjonalt system) Hver av disse kubene har 3 "hosliggende" sideflater der D er parallell med flata og ingen fluks går gjennom dem. Videre har de 8 kubene 3 "motstående" sideflater, hvor den skraverte flata er en av dem (en kube har 6 sideflater!). Av symmetrigrunner må det gå like mye fluks gjennom alle disse 3. Vi har altså $3\times 8 = 24$ slike likeverdige sideflater, og fluks gjennom hver av dem blir da $\Phi/24 = q/24$.

b) **D** Feil å påstå at $V = 0$ i en leder. Kravet er $V =$ konstant, vi kan velge $V = 0$ der det passer oss.

c) **C** For at en partikkel skal gå rett fram må den magnetiske og den elektriske krafta være like stor for partikkelen: $qE = qvB$. Dette gir krav at hastigheten må være lik for alle partikler $v = E/B$, uansett ladningen og massen på partikkelen. Nå er ikke samme hastighet noe oppgitt svaralternativ. Men fordi energien $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, må også $E_k/m = \frac{1}{2}v^2$ være lik for partiklene.

d) **C** Høyrehåndsregel gir retning langs positiv z-akse, så A eller C er rett. Innsetting av tallverdi gir at C blir rett: Vinkel mellom I og B er $180° - 50° = 130°$. $F = IB\ell\,\sin 130° = 1{,}61\,\mathrm{N}$.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 19. feb. 15.