NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TEP4105 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. NT (Fysikk og matematikk)
OG FAK. IME (Teknisk kybernetikk)
Torsdag 17. august 2006
Tid: 0900 – 1300
Studiepoeng: 7,5

Sensuren faller i uke 36 .

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1.
Gitt en stasjonær todimensjonal strømning hvor hastighetspotensialet er

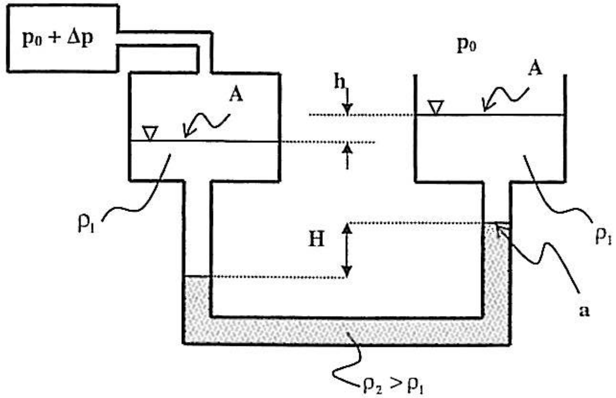
$$\phi(x,y) = xy + x^2 - y^2 .$$

a) Sjekk at $\nabla^2\phi = 0$. Hva betyr dette fysisk? Finn strømfunksjonen $\psi(x,y)$.

b) Finn komponentene a_x og a_y av strømningsfeltets akselerasjon $\bar{a}$.

c) Finn trykket p(x,y), når det er kjent at trykket i origo er p_0. Væskens tetthet er ρ.

Oppgave 2.



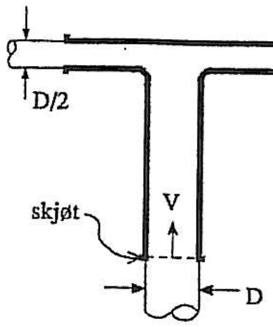
Figuren over viser et manometer beregnet til å måle små trykkforskjeller Δp. Et U-rør med tverrsnittsareal **a** har et kar med tverrsnittsareal **A** montert over hver ende av U-røret. Det venstre karet har en lukket luftforbindelse til målepunktet, mens det høyre karet er åpent mot atmosfæretrykket p_0. Nederst i U-røret er det væske med tetthet ρ_2, mens i øvre del og i karene er det væske med tetthet $\rho_1 < \rho_2$. Tyngdens akselerasjon er $g = 10$ m/s^2.

a) Anta at tetthetene til de to manometervæskene er like, $\rho_2 = \rho_1 = 1000$ kg/m^3. Finn høydeforskjellen **h** i de to karene som funksjon av overtrykket Δp. Sett til slutt inn for talleksempelet $\Delta p = 1$ Pa.

b) Anta at $A \gg a$ slik at høydeforskjellen **h** i de to karene kan neglisjeres. Finn høydeforskjellen **H** i U-røret for den nedre væsken som funksjon av overtrykket Δp. Sett til slutt inn for talleksempelet $\Delta p = 1$ Pa når tetthetsforskjellen $\rho_2 - \rho_1 = 1$ kg/m^3.

c) Beskriv kort hva som vil skje hvis manometeret utsettes for fritt fall mens overrtykket Δp holdes konstant.

Oppgave 3



Gass med tetthet ρ_g strømmer stasjonært gjennom et vertikalt rør med sirkulært tverrsnitt med diameter D. Til røret er det festet et T-bend som leder gassen inn i to identiske horisontale rør med sirkulære tverrsnitt med diametre D/2. Strømningshastighet og trykk antas å være konstant over rørtverrsnittene såvel ved innstrømningen til som ved utstrømningen fra T-bendet. Ved innstrømningen til T-bendet er hastigheten V_{inn} og trykket p_{inn}. Virkningen av tyngdekraften og atmosfæretrykket neglisjeres og gassens tetthet antas å være konstant.

a) Bestem hastigheten U og volumstrømmen Q gjennom hver av de to horisontale rørene.

b) Bestem vertikalkraften som skjøten mellom T-bendet og det vertikale røret må overføre.

Ved tiden $t=t_0$ passerer fronten av en lang oljeplugg med tetthet ρ_o skjøten mellom T-bendet og det vertikale røret. Pluggens oppoverrettede hastighet er V_o og trykket ved skjøten er nå p_o. I resten av oppgaven kan gasstettheten ρ_g neglisjeres.

c) Finn et uttrykk for hvordan bevegelsesmengden inne i T-bendet øker med tiden inntil pluggen treffer toppen av bendet.

TEP4105 Fluidmekanikk 17. august 2006

Løsning

Oppgave 1

a)

$$\phi = xy + x^2 - y^2,$$
$$u = \partial\phi/\partial x = y + 2x, \quad v = \partial\phi/\partial y = x - 2y,$$
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Det betyr inkompressibel væske, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

Strømfunksjonen ψ bestemmes av at $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$:

$$y + 2x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}y^2 + 2xy + f(x),$$

og

$$x - 2y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2y - f'(x) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + konst.$$

Det gir

$$\psi = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + 2xy,$$

når konstanten settes lik null.

b) Komponentene av akselerasjonen

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 5x,$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 5y.$$

c) Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = C$$

gir

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left[(y + 2x)^2 + (x - 2y)^2\right] = C.$$

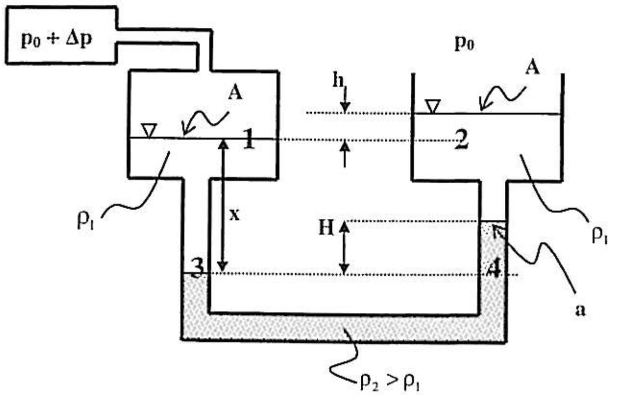
Innsatt $x = y = 0$:

$$p_0/\rho = C.$$

Altså

$$p = p_0 - \frac{5}{2}\rho(x^2 + y^2).$$

Oppgave 2



a)
Siden de to manometervæskene har samme tetthet er trykket det samme i et vilkårlig horisontalt snitt (i væske). Sammenlikner trykket i punkt 1 og 2 (vekten av luft neglisjeres):

$$p_1 = p_0 + \Delta p \quad \text{og} \quad p_2 = \rho_1 g h + p_0 \qquad \text{Disse må være like:}$$

$$p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \rho_1 g h \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h = \frac{\Delta p}{\rho_1 g}}}$$

Tallverdi: $h = \dfrac{1\text{Pa}}{1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{10^{-4}\text{m}}}$ dvs 0.1 mm; "vanskelig" å måle nøyaktig.

b)
Manometervæskene har nå forskjellig tetthet. Trykket er det samme i et horisontalt snitt hvis vi befinner oss i den nederste væsken. Innfører ukjent høyde x lik avstanden mellom punkt 1 og 3, og sammenlikner trykket i punkt 3 og 4:

$$p_3 = \rho_1 g x + p_0 + \Delta p \quad \text{og} \quad p_4 = \rho_2 g H + \rho_1 g (x - H + h) + p_0 \qquad \text{Disse må være like:}$$

$$p_3 = p_4 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 g \cancel{x} + \cancel{p_0} + \Delta p = \rho_2 g H + \rho_1 g \left(\cancel{x} - H + \underbrace{\cancel{h}}_{\text{neglisjeres}} \right) + \cancel{p_0}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p = \rho_2 g H - \rho_1 g H \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{H = \frac{\Delta p}{g(\rho_2 - \rho_1)}}}$$

Tallverdi: $H = \dfrac{1\text{Pa}}{10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \underline{\underline{0.1\text{m}}}$ dvs 10 cm; mye mer nøyaktig avlesning enn i a).

c)

Ved fritt fall i tyngdefeltet er manometeret vektløst, dvs tyngdekraften manifiesteres ved masse · aks. Dermed har vi ikke statikk lenger, en trykkforskjell kan ikke balanseres med noen tyngde, så vi vil få bevegelse: Manometervæskene vil strømme ut mot atmosfæren gjennom det åpne karet til høyre.

TEP 4105 Fluidmekanikk 17. august 2006

Oppgave 3

a) Massebevarelse gir:

$$\cancel{\frac{\pi}{4}D^2 \cdot V_{inn} = Q + Q \Rightarrow \underline{Q = \frac{\pi}{8}D^2 \cdot V_{inn}}}$$

$$Q = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot U = \frac{\pi}{8}D^2 \cdot V_{inn} \Rightarrow \underline{U = 2V_{inn}}$$

b) Impulssatsen $\Sigma\vec{F} = \iint\limits_{CS} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$ gir her i vertikal retning (y-retning):

$$p_{inn}\cdot\frac{\pi}{4}D^2 - F = \rho_g V_{inn}(-V_{inn})\frac{\pi}{4}D^2 \Rightarrow \underline{F = \frac{\pi}{4}D^2(\rho_g V_{inn}^2 + p_{inn})}$$

c) Bevegelsesmengde i y-retning:

$$\iiint\limits_{CV} \rho V_y dV = \underline{\underbrace{\frac{\pi}{4}D^2\cdot V_0(t - t_0)}_{\text{pluggvolum over skjøten}}\cdot\rho_0 V_0}$$