

Det komplekse potensial

Elastisitetsteori

Iver Brevik

EPT - Strømningsteknikk
NTNU
2006

1 Det komplekse potensial

Vi skal betrakte en tidsuavhengig potensialstrømning i to dimensjoner. Flu-
idet er friksjonsfritt (ideelt), og virvingen $\zeta \equiv \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$. I kartesiske koordi-
nater er hastighetspotensialet $\Phi = \Phi(x, y)$ og strømfunksjonen $\Psi = \Psi(x, y)$.
Som kjent er komponentene u og v av hastighetsvektoren V gitt ved

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Dette er Cauchy-Riemanns ligninger i matematikken. Vi innfører den kom-
plekse koordinat z og dens kompleks konjugerte

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad (3)$$

og definerer

$$w = \Phi + i\Psi. \quad (4)$$

Da Φ og Ψ tilfredsstiller Cauchy-Riemanns ligninger, vet vi at w er en an-
alytisk (holomorf) funksjon av z overalt i planet hvor Φ og Ψ er definert.
Funksjonen

$$w(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (5)$$

kalles for det *komplekse potensial*.

Potensialet $w(x, y)$ har en veldefinert derivert,

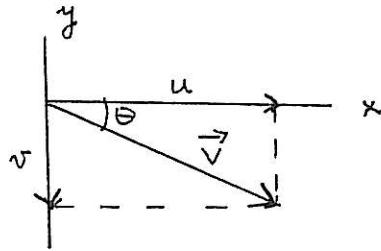
$$\frac{dw}{dz} \equiv w'(z), \quad (6)$$

hvor $w'(z)$ er den samme uansett fra hvilken retning i planet vi regner den
ut. Deriverer, f. eks. i x-retning:

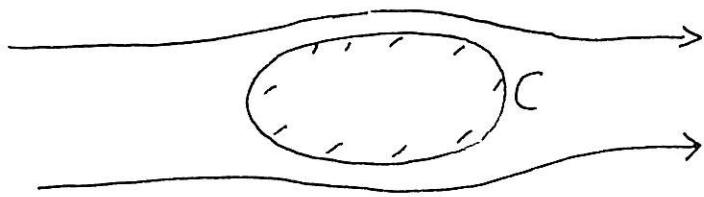
$$w'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u - iv. \quad (7)$$

Dette er den *komplekse hastighet*. Størrelse og argument for $w'(z)$ gir fart V
og vinkel θ mellom \mathbf{V} og x-aksen:

$$w'(z) = V e^{-i\theta}. \quad (8)$$



Anta så en fast flate C , med potensialstrømning omkring (altså ingen frik-



asjon). På overflaten må hastigheten være tangensiell, $\Psi = konstant$. Kan velge $\Psi = 0$. På C blir altså

$$w(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \rightarrow \Phi(x, y). \quad (9)$$

Strømningsproblemets reduserer seg til å finne en analytisk funksjon $w(z)$ som er reell på randen C .

Benytter residue-teoremet på den komplekse hastighet:

$$\oint_C w'(z) dz = 2\pi i \sum_k A_k, \quad (10)$$

hvor A_k er residuene til $w'(z)$. Vi har også

$$\oint_C w'(z) dz = \oint_C (u - iv)(dx + idy) = \oint_C (udx + vdy) + i \oint_C (udy - vdx) \quad (11)$$

Her er første ledd:

$$\oint_C (udx + vdy) = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \equiv \Gamma, \quad sirkulasjonen. \quad (12)$$

Andre ledd er essensielt volumgjennomstrømningen:

$$dQ = u dy - v dx, \quad Q = \int dQ. \quad (13)$$

Gjennom fast flate er $Q = 0$. Altså

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k. \quad (14)$$

Alle residuene er i dette tilfelle imaginære.

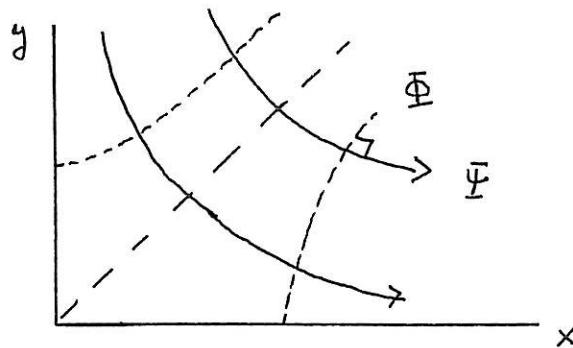
Eksempler:

$$w = z^2 \quad (15)$$

Dette gir

$$\Phi = x^2 - y^2, \quad \Psi = 2xy. \quad (16)$$

Kurvene $\Phi = konst$ og $\Psi = konst$ skjærer hverandre ortogonalt.



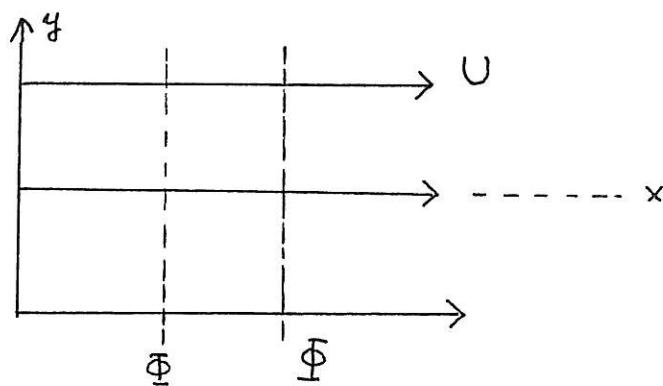
Noen eksempler hvor U er en hastighet og a en lengde:

$$(i) \quad w = Uz. \quad (17)$$

Det gir

$$\Phi = Ux, \quad \Psi = Uy. \quad (18)$$

Dette er en homogen strømning.



$$(ii) \quad w = \frac{Ua^2}{z}. \quad (19)$$

Med $z = re^{i\theta}$:

$$\Psi = -\frac{Ua^2}{r} \sin \theta = -\frac{Ua^2 y}{x^2 + y^2}. \quad (20)$$

Strømlinjer $\Psi = konst$ når

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = konst \equiv \frac{1}{2y_0}, \quad (21)$$

$$x^2 + (y - y_0)^2 = y_0^2. \quad (22)$$

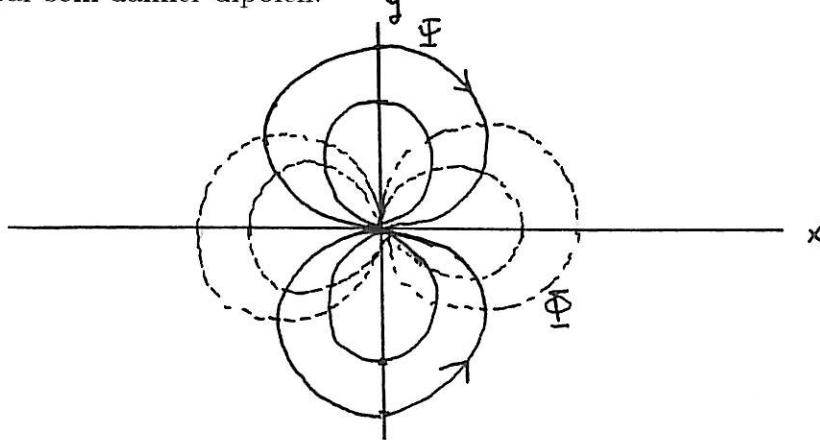
Innfører ny konstant μ ved

$$\frac{\mu}{2\pi} = Ua^2, \quad (23)$$

og får

$$\Psi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \Phi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (24)$$

Her er $\mu = 2\lambda a$ dipolens dipolmoment, hvor λ er styrken til det kilde/sluk par som danner dipolen.

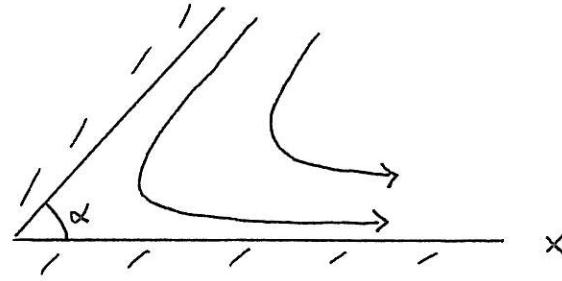


$$(iii) \quad w = Ua \left(\frac{z}{a}\right)^{\pi/\alpha}, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha. \quad (25)$$

Antar at $0 < \alpha < \pi$. Vi får

$$\Phi = Ua \left(\frac{r}{a}\right)^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}, \quad \Psi = Ua \left(\frac{r}{a}\right)^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}. \quad (26)$$

Stagnasjonspunkter: Disse er generelt gitt ved at $u = v = 0$, slik at den kom-



plekse hastighet $w'(z) = 0$. Hvis spesielt $w(z)$ er gitt ved lign.(25) ovenfor, får en at stagnasjonspunktet bestemmes av

$$z^{\frac{\pi}{\alpha}-1} = 0. \quad (27)$$

Når $\alpha < \pi$, som forutsatt ovenfor, blir $\pi/\alpha - 1 > 0$, og stagnasjonspunktet blir i origo.

Fart: Av lign.(8) fås farten V som

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \left| \frac{dw}{dz} \right| \equiv |w'(z)|. \quad (28)$$

Nå er

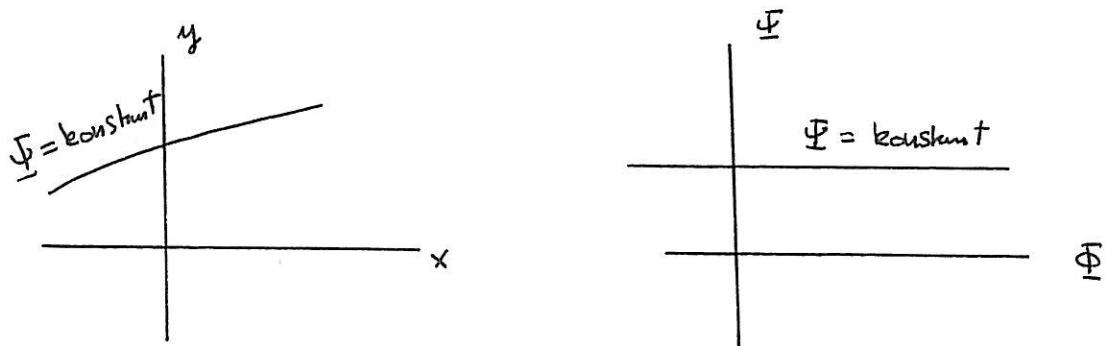
$$\frac{dw}{dz} = u - iv, \quad (29)$$

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \frac{d}{d\bar{z}}(\Phi - i\Psi) = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi - i\Psi) = u + iv, \quad (30)$$

slik at

$$V^2 = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}. \quad (31)$$

Fundamentalt prinsipp for bruk av det komplekse potensial: Funksjonen $w(z)$ bestemmer en avbilding av z -planet på w -planet. Strømlinjene i z -planet avbildes som rette linjer, $\Psi = \text{konst.}$, parallele med den reelle akse, i w -planet. Hvis en kan finne en hensiktsmessig avbilding mellom de to plan, vil dette ofte forenkle bestemmelsen av potensialene.



1.1 Strømning gjennom en åpning

Hvis $w = w(z)$, kan en i prinsipp invertere funksjonen og skrive $z = z(w)$. Noen ganger er dette nyttig.

La oss velge funksjonen

$$z = c \cosh w. \quad (32)$$

Det gir

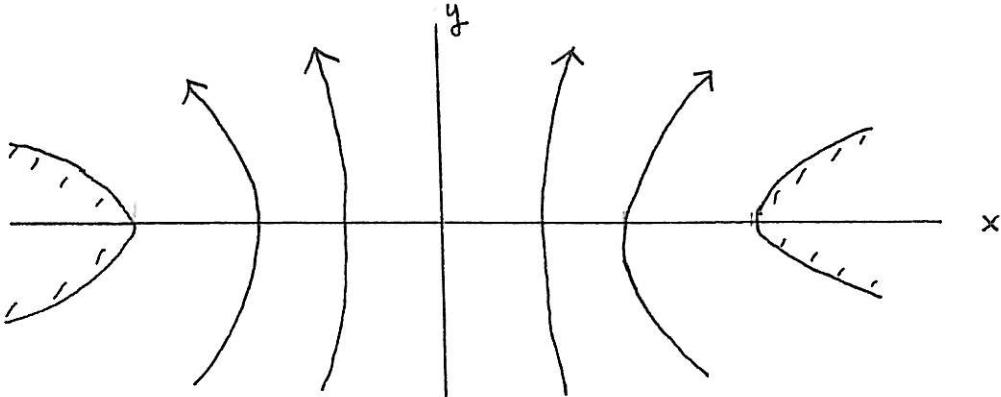
$$x = c \cosh \Phi \cos \Psi, \quad y = c \sinh \Phi \sin \Psi. \quad (33)$$

Eliminerer Φ :

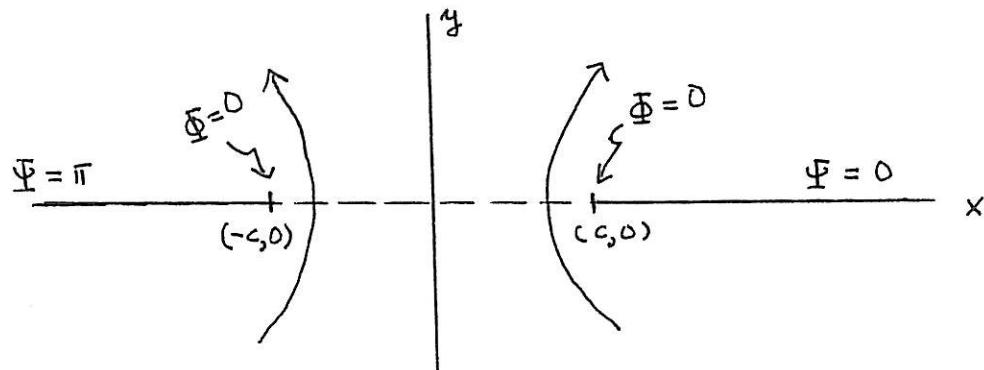
$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \Psi} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \Psi} = 1. \quad (34)$$

Kurvene $\Psi = \text{konst.}$ er hyperbler, med halvakser $c \cos \Psi$, $c \sin \Psi$, og brennpunkter i $(c, 0)$, $(-c, 0)$. Velger en av hyperblene som faste flater. Vi får da et

bilde av strømningen gjennom åpningen. Ta så grensen flat plate, som betyr



at vertikal halvakse er null. Det betyr at $\Psi = 0$ eller π . Vi får et bilde av en



strømning gjennom en åpning av bredde $2c$ i en fast plate. Strømningsbildet er imidlertid urealistisk i kantene, fordi hastigheten går mot uendelig der. Viser dette, ved å regne ut

$$V^2 = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}. \quad (35)$$

På kantene $(c, 0)$ og $(-c, 0)$ finner vi nemlig, av

$$x = c \cosh \Phi \cos \Psi, \quad y = c \sinh \Phi \sin \Psi,$$

at

$$\pm 1 = \cosh \Phi \cos \Psi, \quad 0 = \sinh \Phi \sin \Psi,$$

noe som gir $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ eller π . Altså ved innsetting i (35)

$$\begin{aligned}\frac{1}{V^2} &= c^2 \sinh w \cdot \sinh \bar{w} = \frac{1}{2} c^2 [\cosh(w + \bar{w}) - \cosh(w - \bar{w})] \\ &= \frac{1}{2} c^2 [\cosh 2\Phi - \cos 2\Psi] = \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} (1 - 1) = 0, \quad i.e., \quad V \rightarrow \infty.\end{aligned}\quad (36)$$

1.2 Strømning omkring en sylinder

Gitt det komplekse potensial

$$w(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (37)$$

Det betyr

$$\Phi = V_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \Psi = V_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta. \quad (38)$$

Dette er kjent fra potensialteorien tidligere. Det er her forutsatt at sentrum ligger i origo. Hvis sentrum ligger i $z = z_0$:

$$w(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z - z_0} \right). \quad (39)$$

Sirkulasjonen Γ omkring en sylinder er gitt ved ligningen

$$w(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R}, \quad (40)$$

som betyr

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}, \quad (41)$$

når vi velger $\Psi = 0$ på overflaten.

Kombinerer de to komplekse potensialene:

$$w(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R}. \quad (42)$$

På overflaten, $z = Re^{i\theta}$, er

$$w(Re^{i\theta}) = 2V_\infty R \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad (43)$$

altså reell, slik at $\Psi = 0$ på overflaten.

Stagnasjonspunktene finnes av $dw/dz = 0$. Av

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \quad (44)$$

finnes

$$\frac{z}{R} = \frac{i\Gamma}{4\pi RV_\infty} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi RV_\infty}\right)^2}. \quad (45)$$

Antar at

$$\frac{\Gamma}{4\pi RV_\infty} < 1, \quad (46)$$

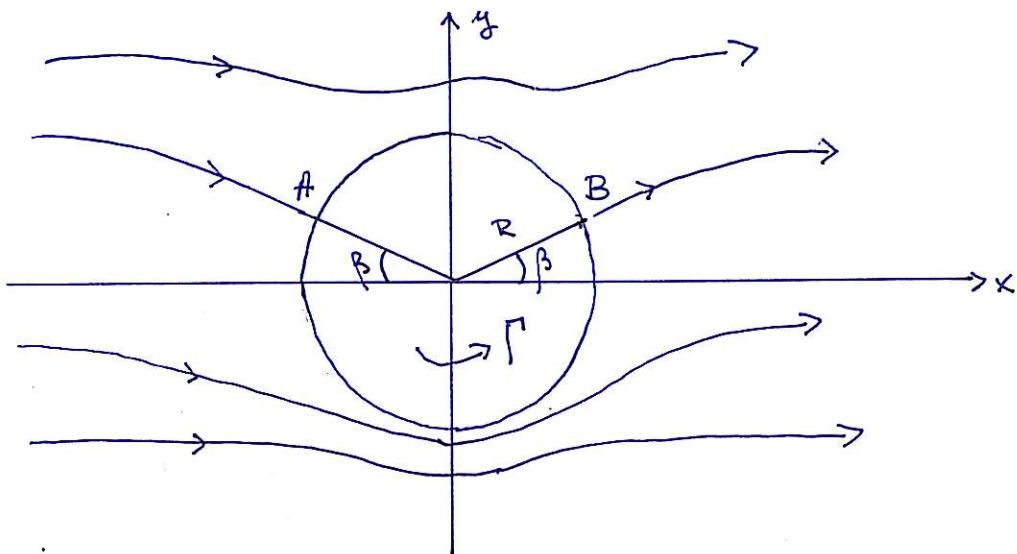
og innfører β slik at

$$\frac{\Gamma}{4\pi RV_\infty} = \sin \beta. \quad (47)$$

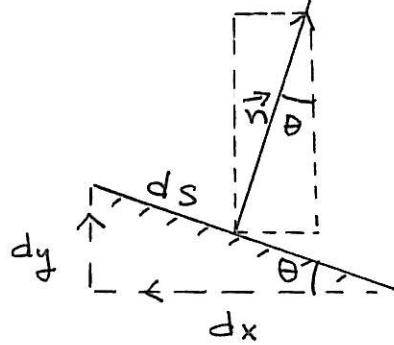
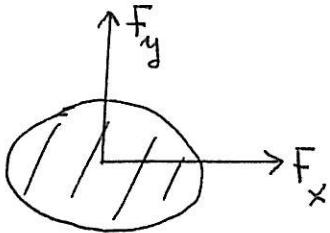
Stagnasjonspunktene er da gitt ved

$$\frac{z}{R} = i \sin \beta \pm \cos \beta. \quad (48)$$

Stagnasjonspunktene er A og B på figuren.



1.3 Blasius' teorem



En sylinder (ikke nødvendigvis med sirkulært tverrsnitt) er plassert i en uniform strømning. Kraftkomponentene er F_x og F_y . Ytre krefter, slik som gravitasjon, utelates. Kraften $d\mathbf{F}$ på et linjeelement ds i to dimensjoner er

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}ds. \quad (49)$$

Da $n_x = \sin \theta$, $n_y = \cos \theta$, er

$$dF_x = -pn_x ds = -pdy, \quad dF_y = -pn_y ds = pdx. \quad (50)$$

Dermed blir

$$d(F_x - iF_y) = -ip(dx - idy) = -ipd\bar{z}. \quad (51)$$

Bernoullis ligning

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C_1 = konstant \quad (52)$$

gir, ettersom C_1 er uten betydning,

$$p \rightarrow -\frac{1}{2}\rho V^2 = -\frac{1}{2}\rho \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}. \quad (53)$$

På overflaten er $\Psi = konstant$, slik at $d\bar{w} = dw (= d\Phi)$. Altså

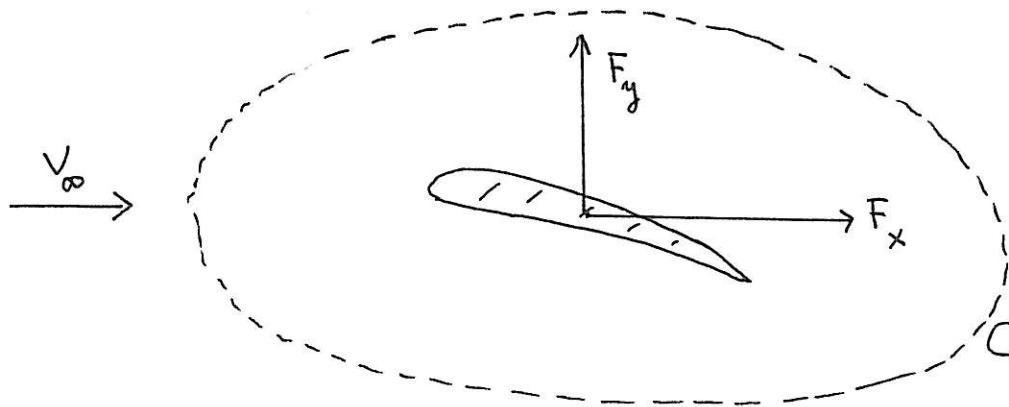
$$d(F_x - iF_y) = \frac{1}{2}i\rho \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \quad (54)$$

og dermed

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \quad (55)$$

Dette er Blasius' teorem.

1.4 Kutta-Joukowsky teoremet



For store verdier av $|z|$ utvikles

$$w'(z) = V_\infty + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots \quad (56)$$

$$w(z) = V_\infty z + A \ln z - \frac{B}{z} + \dots \quad (57)$$

Sammenligning med en enkel virvel,

$$w(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad \text{gir} \quad A = -\frac{i\Gamma}{2\pi}. \quad (58)$$

Vi regner ut

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \left(V_\infty - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots\right)^2 = V_\infty^2 - \frac{i\Gamma V_\infty}{\pi z} + \frac{2V_\infty B - (\Gamma/2\pi)^2}{z^2} + \dots \quad (59)$$

Benytter så Blasius' teorem, lign.(55), og legger integrasjonsveien C langt ute (dette er tillatt, selv om det ikke er bevist her). Vi får da bidrag bare fra $1/z$ - leddet:

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho \frac{-i\Gamma V_\infty}{\pi} \oint_C \frac{dz}{z} = i\rho V_\infty \Gamma. \quad (60)$$

Altså

$$F_y = -\rho V_\infty \Gamma, \quad (61)$$

som vi kjenner fra før.

2. ELASTISITETSTEORI

2.1 Tøyningstensoren

Vi betrakter et elastisk fast legeme som utsettes for en "liten" deformasjon. Vi nøyer oss med å betrakte bare det todimensjonale tilfelle i detalj; generaliseringen til 3 dimensjoner gjøres umiddelbart etterpå.

Vi benytter kartesiske koordinater. Et vilkårlig punkt i legemet hadde før deformasjonen koordinatene x og y . Etter deformasjonen har det samme punktet koordinatene x' og y' . Differansen $x' - x$ og $y' - y$ er komponentene til en vektor \vec{s} som kalles forskyvningsvektoren (displacement vector). Altså

$$\vec{s} = (s_x, s_y) = (x' - x, y' - y). \quad (2.1)$$

Hvis $\vec{s}(x, y)$ er en kjent funksjon av de opprinnelige koordinatene x og y , er den elastiske deformasjonen av legemet fullstendig bestemt.

Når legemet deformeres, vil avstanden mellom to materielle punkter forandres. Betrakt to slike punkter, nær hverandre, som før deformasjonen er adskilt ved vektorkomponentene dx og dy . Deres avstand er

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (2.2)$$

Etter deformasjonen er de tilsvarende vektorkomponentene dx' og dy' , og avstanden mellom punktene er nå

$$dl' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2}. \quad (2.3)$$

Av (2.1) har vi

$$x' = x + s_x, \quad y' = y + s_y, \quad (2.4)$$

som ved differensiering gir

$$dx' = (1 + \frac{\partial s_x}{\partial x})dx + \frac{\partial s_x}{\partial y}dy, \quad (2.5)$$

$$dy' = (1 + \frac{\partial s_y}{\partial y})dy + \frac{\partial s_y}{\partial x}dx. \quad (2.6)$$

Disse ligningene skal kvadreres. Vi utnytter da at s_i ($i=x, y$) er vanligvis små størrelser; for stål er f.eks. $s_i < 0.001$ i det elastiske området. Tilsvarende blir $\frac{\partial s_i}{\partial x_k}$ små størrelser, og vi kan sløyfe 2. ordens ledd i disse størrelsene. Dermed får vi

$$dx'^2 = (1 + 2 \frac{\partial s_x}{\partial x})dx^2 + 2 \frac{\partial s_x}{\partial y} dx dy, \quad (2.7)$$

$$dy'^2 = (1 + 2 \frac{\partial s_y}{\partial y})dy^2 + 2 \frac{\partial s_y}{\partial x} dx dy, \quad (2.8)$$

som ved addisjon gir

$$d\ell'^2 = d\ell^2 + 2 \left[\frac{\partial \delta_x}{\partial x} dx^2 + \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right) dx dy + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} dy^2 \right]. \quad (2.9)$$

Vi innfører tøyningstensoren ε_{ik} , hvor indeksene i og k i 2 dimensjoner går over verdiene x og y (alternativt over 1 og 2). Skjemaet altså

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Definisjonen av tøyningstensoren er

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.11)$$

Tensoren ses å være symmetrisk,

$$\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}. \quad (2.12)$$

Dens komponenter er

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \delta_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \delta_y}{\partial y}. \quad (2.13)$$

La oss nå innføre summekonvensjonen: Betrakt først skalarproduktet av to vilkårlige vektorer \vec{A} og \vec{B} . I to dimensjoner vet vi at

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \equiv A_1 B_1 + A_2 B_2 = \sum_{i=1}^2 A_i B_i. \quad (2.14)$$

Summekonvensjonen betyr at gjentatte indekser skal summeres over tallområdet.

Summetegnet i (2.14) kan altså uteslippes, og vi kan skrive

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i. \quad (2.15)$$

Ligning (2.9) kan nå skrives kompakt slik:

$$d\ell'^2 = d\ell^2 + 2 \varepsilon_{ik} dx_i dx_k. \quad (2.16)$$

Vi sjekker (2.16) ved å skrive ligningen helt ut:

$$\begin{aligned} d\ell'^2 &= d\ell^2 + 2 \varepsilon_{xx} dx^2 + 2 \varepsilon_{xy} dx dy + 2 \varepsilon_{yx} dy dx + 2 \varepsilon_{yy} dy^2 \\ &= d\ell^2 + 2 \varepsilon_{xx} dx^2 + 4 \varepsilon_{xy} dx dy + 2 \varepsilon_{yy} dy^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Med bruk av (2.13) ser vi at (2.17) stemmer med (2.16).

Som enhver annen symmetrisk tensor, kan ε_{ik} diagonaliseres i ethvert punkt. Hovedaksene har vi dersom bare diagonalkomponentene av ε_{ik} (vi skal kalle dem ε_x og ε_y) er forskjellig fra null. Av (2.16) får vi da, ettersom $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$,

$$d\ell'^2 = (1 + 2\varepsilon_x)dx^2 + (1 + 2\varepsilon_y)dy^2. \quad (2.18)$$

Den totale tøyningen kan dermed tenkes sammensatt av uavhengige tøyninger i to ortogonale retninger, nemlig hovedakseretningene i det gitte punkt. Fra (2.18) kan vi tilnærmet skrive

$$\left. \begin{aligned} dx' &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_x} dx = (1 + \varepsilon_x)dx, \\ dy' &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_y} dy = (1 + \varepsilon_y)dy, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

slik at langs hovedaksene blir hovedverdiene ε_x og ε_y av deformasjonstensoren lik den relative lengdeforandring:

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{dy' - dy}{dy}. \quad (2.20)$$

La oss til slutt betrakte "volumet" $dV = dx dy$ av et lite element. Etter deformasjonen er volumet $dV' = dx' dy'$. Av (2.19) fås

$$dV' = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)dx dy = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y)dV \quad (2.21)$$

til laveste orden. Fra matematikken er det kjent at summen $\varepsilon_x + \varepsilon_y$ av hovedverdiene av en tensor er en invariant, lik summen $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ av diagonalkomponentene i et vilkårlig koordinatsystem. Altså gjelder generelt, i 2 dimensjoner,

$$dV' = (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})dV = (1 + \frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y})dV, \quad (2.22)$$

som betyr

$$dV' = (1 + \nabla \cdot \vec{\delta})dV. \quad (2.23)$$

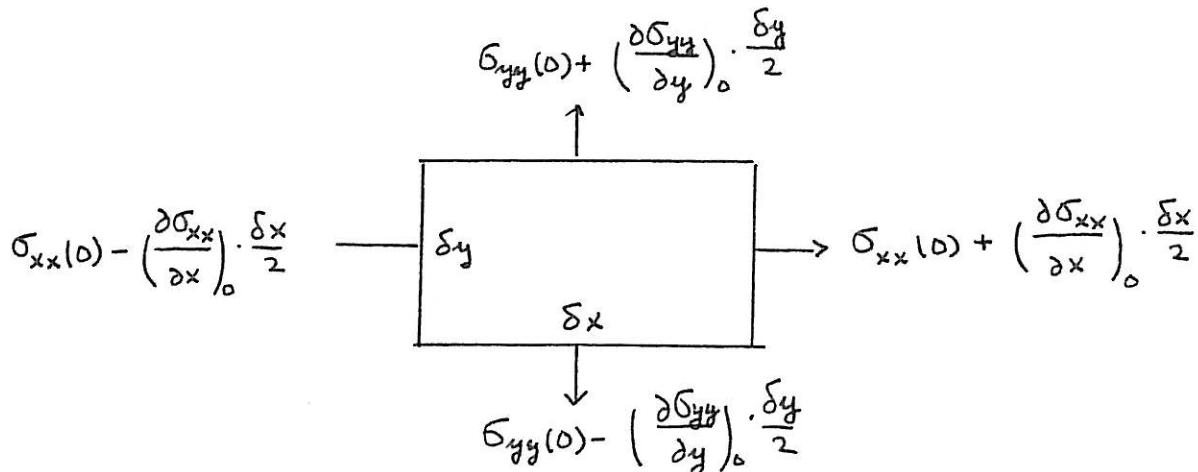
Dette generaliseres umiddelbart til 3 dimensjoner.

2.2 Spenningsstensoren

Elastiske krefter i materialet indusert av deformasjoner kaller en spenninger. I elastisitetsteorien betrakter en bare avstander som er store i forhold til intermolekylære avstander, slik at spenningene kan oppfattes som nærvirkningskrefter, dvs. krefter som har deres opphav i punkter som ligger i nærheten av det punktet vi betrakter. Herav følger det at

kreftene fra omgivelsene på et volumelement i et elastisk legeme virker bare over elementets overflate.

Spenninger beskrives generelt ved spenningstensoren (stress tensor) σ_{ik} . Vi nevner med en gang at σ_{ik} er symmetrisk, på samme måte som tøyningstensoren ϵ_{ik} . I 2 dimensjoner har σ_{ik} altså komponentene σ_{xx} , $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, og σ_{yy} . Diagonalkomponentene σ_{xx} og σ_{yy} beskriver normalspenninger, mens de ikke-diagonale komponentene σ_{xy} og σ_{yx} beskriver skjærspenningene.

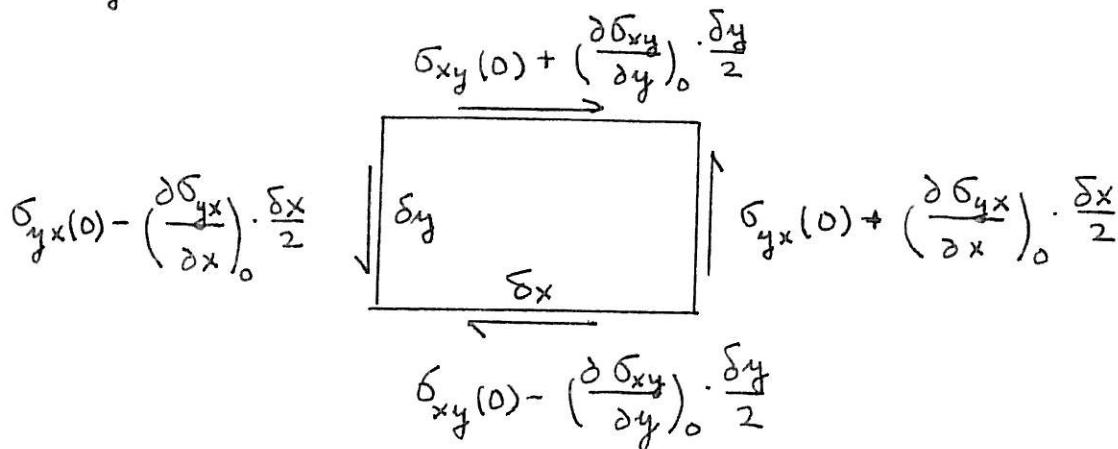


Figuren ovenfor viser normalspenningen på et todimensjonalt element, når det er forutsatt at $\sigma_{xx}(0)$, $\sigma_{yy}(0)$ refererer til normalspenningene i elementets sentrum. Nettokraft på elementet i x-retning fra normalspenningene altså

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)_0 \delta x \delta y = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)_0 \delta V. \quad (2.24)$$

Normalspenningen regnes konvensjonelt positive ved strekk.

Figuren nedenfor viser skjærspenningene på samme element, når det er forutsatt at $\sigma_{xy}(0)$, $\sigma_{yx}(0)$



refererer til elementets sentrum. Nettokraft på elementet i x-retning fra skjærspenningene blir ifølge figuren

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)_0 \delta x \delta y = \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)_0 \delta V. \quad (2.25)$$

Addisjon av (2.24) og (2.25) gir for den resulterende elastiske kraft δF_x på elementet i x-retning (indeks 0 sløyfes)

$$\delta F_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right) \delta V = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_k} \delta V. \quad (2.26)$$

Alternativt kan vi skrive δF_x som et overflateintegral over elementet, idet vi lar komponentene σ_{ik} referere seg til de respektive sider:

$$\delta F_x = \oint \sigma_{xk} n_k dA = \oint (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) dA. \quad (2.27)$$

Her er $\vec{n} = (n_x, n_y)$ normalvektoren som alltid peker ut fra elementet. Sammenligning mellom (2.27) og (2.26) gir, for det infinitesimale element,

$$\oint \sigma_{xk} n_k dA = \frac{\partial \sigma_{xk}}{\partial x_k} \delta V. \quad (2.28)$$

Dette generaliseres til en vilkårlig komponent i 3 dimensjoner, for et volum av vilkårlig størrelse:

$$F_i = \oint \sigma_{ik} n_k dA = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (2.29)$$

Dette tilsvarer Gauss' sats fra vektoranalysen. Vi kan innføre en elastisk krafttetthet \vec{f}_i med komponenter f_i , slik at

$$F_i = \int f_i dV. \quad (2.30)$$

Dermed blir f_i gitt som spenningstensorens divergens:

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (2.31)$$

hvor $i, k = 1, 2, 3$.

Betrakt likevektsbetingelsene for et volumelement: I likevekt må den resulterende elastiske kraft være lik null. Altså

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (2.32)$$

Hvis vi tar hensyn til tyngdekraften, må summen av den elastiske kraft og tyngdekraften per volumenhet være lik null:

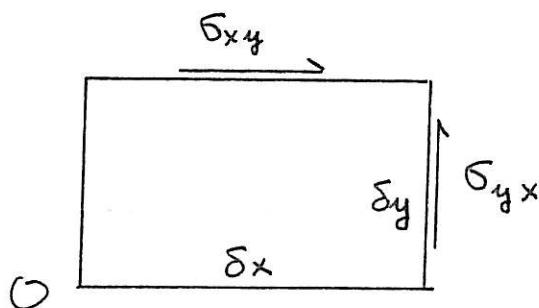
$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0. \quad (2.33)$$

La oss se på randbetingelsen ved legemets overflate dersom det virker en ytre kraft \vec{P} per overflateenhet. Komponenten P_i må balansere kraften $-\sigma_{ik} n_k$ som virker på flaten fra de indre spenningene: $P_i - \sigma_{ik} n_k = 0$, eller

$$P_i = \sigma_{ik} n_k. \quad (2.34)$$

Denne betingelsen må tilfredsstilles i ethvert punkt på overflaten av et legeme i likevekt.

Vi nevnte ovenfor at spenningstensoren er symmetrisk. Beviset kan i forenklet form gis slik:



Ta kraftmomentet om elementets nedre venstre hjørne O. Normalspenningene kan vi se bort fra, da de gir bidrag til kraftmomentet av 3. orden. Igjen blir bare skjærspenningene, som er tegnet inn på figuren. Momentet fra kraften $\sigma_{yx} \delta_y$ på elementets høyreflate er $(\sigma_{yx} \delta_y) \cdot \delta_x$, som ved likevekt må balansere momentet $(\sigma_{xy} \delta_x) \cdot \delta_y$ fra kraften på øvreflate. Altså

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy}, \quad (2.35)$$

som påstått.

Egenskapen (2.35) gjør det alltid mulig å finne en spesiell orientering av koordinataksene hvor spenningstensoren er diagonal. Kalles hovedverdiene σ_x og σ_y , har vi altså i dette systemet

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Oppførselen til σ_{ik} er analog til oppførselen til tøyningstensoren ϵ_{ik} . Og det viser seg at σ_{ik} og ϵ_{ik} blir diagonal i det samme koordinatsystem. Dette er jo rimelig ut fra et fysisk synspunkt, ettersom en vilkårlig infinitesimal deformasjon av et volumelement vil være sammensatt av rene tøyninger (eller kompresjoner) langs hovedakseretningene. Smlgn. lign. (2.19).

2.3 Eksempel: Fluid

Vi har så langt betraktet elastiske legemer i ro. Vi skal nå se på et todimensjonalt fluid, i bevegelse. Formalismen ovenfor kan anvendes umiddelbart: Fluidets hastighet er $\vec{V} = (u, v)$, hvor hastighetskomponentene framkommer ved tidsderivasjon av forskyvningskomponentene s_i :

$$u = \dot{s}_x, \quad v = \dot{s}_y. \quad (2.37)$$

Hastighetskomponentene skrives alternativt som V_i , hvor $i = x, y$, eller 1,2.
Tidsderivasjon av tøyningstensoren (2.11) gir

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.38)$$

Den ikke-diagonale komponenten altså

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.39)$$

som vi kjenner igjen fra tidligere, som skjærdeformasjonshastigheten (shear strain rate). La oss betrakte også lign. (2.23):

$$\frac{\delta V' - \delta V}{\delta t} = \nabla \cdot \vec{s}, \quad (2.40)$$

hvor vi har erstattet symbolet δV for volumelementet med $\delta V'$ for å skille det ut fra hastigheten. Tidsderivasjon av (2.40) gir

$$\frac{1}{\delta t} \frac{d}{dt} \delta V' = \nabla \cdot \vec{V}, \quad (2.41)$$

som vi også kjenner fra før.

Vi nevner uten nærmere bevis at spenningstensoren er symmetrisk,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad (2.42)$$

også når fluidet er i bevegelse.

Betrakt nå et ideelt (ikke-viskøst) fluid. Det er utsatt for et trykk, dvs. negativ spenning, og komponentene av spenningstensoren er dermed negative. Vi har i dette tilfelle

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}, \quad (2.43)$$

hvor δ_{ik} er Kroneckers delta. På skjemaform altså

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Vi sjekker gyldigheten av (2.43) ved å regne ut i-komponenten av den elastiske krafttetthet:

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (2.45)$$

Ettersom akselerasjonskomponentene a_i er kjent fra tidligere,

$$a_i = \frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) V_i , \quad (2.46)$$

får vi ved innsetting av (2.45) i Newtons 2. Lov, idet vi tar hensyn også til tyngdefeltet,

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) V_i \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i . \quad (2.47)$$

Det betyr

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \rho \vec{g} , \quad (2.48)$$

som er Eulers ligning.

Anta dernest at fluidet er viskøst, og inkompressibelt. Vi må da ta hensyn til de ekstra spenninger, både normalspenninger og skjærspenninger, som viskositeten gir opphav til. Vi antar at Newtons friksjonslov gjelder, slik at fluidet har en konstant dynamisk viskositet μ . I dette tilfelle er

$$\sigma_{ik} = - p \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) , \quad (2.49)$$

som altså generaliserer lign. (2.43). Vi utleder ikke (2.49) i detalj, men nevner at den er fysisk sett plausibel ettersom de viskøse spenningene er satt proporsjonal med den tidsderiverte av tøyningstensoren, lign. (2.38).

Den elastiske kraftkomponent blir ifølge (2.49)

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) . \quad (2.50)$$

Her er

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k} = \nabla^2 V_i , \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot \vec{V} = 0 , \quad (2.51)$$

slik at Newtons 2. lov gir

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) V_i \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 V_i + \rho g_i . \quad (2.52)$$

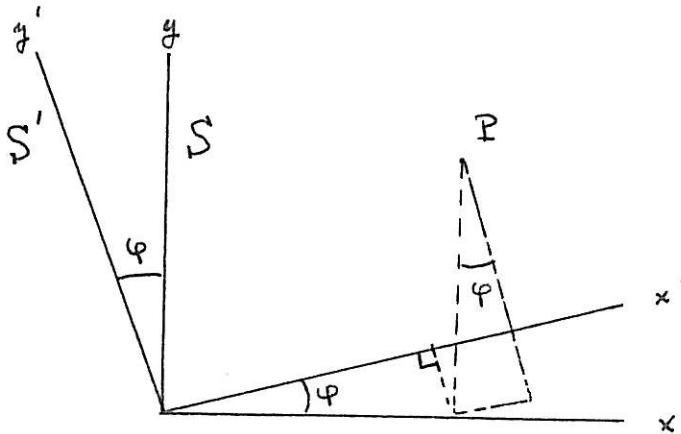
Altså

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{g} , \quad (2.53)$$

som er Navier-Stokes' ligning. Her er $\nu = \mu/\rho$.

2.4 Transformasjon av spenningstensoren

La oss tenke oss at spenningskomponentene σ_{ik} er kjent i et todimensjonalt koordinatsystem S hvor koordinatene er (x, y) . Det vil ofte være av interesse å finne komponentene σ'_{ik} i et annet koordinatsystem S' hvor koordinatene er (x', y') . Som vist på figuren, antar vi at S' er dreiet en vinkel φ i forhold til S .



Av figuren følger det at koordinatene for et punkt P transformerer slik:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dette kan skrives på matriseform:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

som er ekvivalent med ligningen

$$x'_i = a_{ik} x_k, \quad (2.56)$$

hvor a_{ik} er transformasjonsmatrisen

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Dreining av koordinatsystemet er en ortogonal transformasjon. Det vil si at lengden av radius vektor er en konstant, uavhengig av koordinatsystemets orientering. Da kvadratet av lengden er $x_i' x_i'$, får vi altså betingelsen

$$x_i' x_i' = x_i x_i, \quad (2.58)$$

som ved innsetting av (2.56) gir

$$(a_{ik} a_{il} - \delta_{kl}) x_k x_l = 0. \quad (2.59)$$

Da denne ligningen skal være oppfylt for vilkårlige koordinater, må vi ha

$$a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}, \quad (2.60)$$

som er ortogonalitetsbetingelsen.

En tensor transformerer slik som en vektor, for enhver av sine komponenter. Spenningstensoren transformerer altså slik:

$$\sigma'_{ik} = a_{il} a_{km} \sigma_{lm} \quad (2.61)$$

(sum over l og m). Med bruk av denne ligningen kan vi finne σ'_{ik} for en vilkårlig orientering av aksesystemet S' . La oss regne ut to av komponentene, σ'_{xx} og σ'_{xy} , fra (2.61): Først

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= a_{xl} a_{xm} \sigma_{lm} = a_{xx}^2 \sigma_{xx} + a_{xx} a_{xy} \sigma_{xy} + \\ &\quad + a_{xy} a_{xx} \sigma_{yx} + a_{xy}^2 \sigma_{yy}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Innsetting av skjemaet (2.57) gir

$$\sigma'_{xx} = \cos^2 \varphi \sigma_{xx} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sigma_{xy} + \sin^2 \varphi \sigma_{yy}. \quad (2.63)$$

Tilsvarende for skjærspenningskomponenten:

$$\sigma'_{xy} = \sin \varphi \cos \varphi (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sigma_{xy}. \quad (2.64)$$

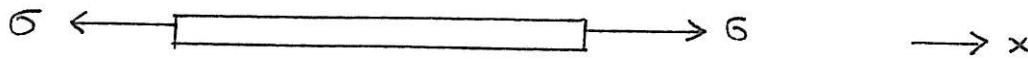
Som enkleste eksempel la oss sette inn spenningstensoren for et ideelt fluid, $\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$. Fra (2.63) og (2.64), samt den tilsvarende ligning for σ'_{yy} , finner vi at

$$\sigma'_{ik} = -p \delta_{ik}. \quad (2.65)$$

Dette er i overenstemmelse med at trykket er en skalar, uavhengig av koordinatsystemets orientering.

2.5 Sammenhengen mellom spenning og tøyning

Vi ser først på en stav som ligger i x-retningen og som er utsatt for en uniform strekkspenning. Strekkraften per overflateenhet (altså strekkspenningen) kalles σ . Dens dimensjon



er pascal (Pa). Av overflatebetingelsen (2.34) følger det at $\sigma_{xx} = \sigma$ inne i staven. Tøyningstensorens xx-komponent er proporsjonal med σ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma}{E} . \quad (2.66)$$

Proporsjonalitetsfaktoren E kalles Youngs modul eller elastisitetsmodulen. Av (2.66) følger det at SI enheten for E er pascal. Noen verdier:

	GPa
Stål	210
Jordskorpen	80
Aluminium	70
Tre	4 – 11

Oftest skriver en bare ε istedenfor ε_{xx} i (2.66), slik at relasjonen mellom "strain" og "stress" blir

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} . \quad (2.67)$$

Oftest snakker en om "microstrain-området": Ved 1 microstrain er $\varepsilon = 10^{-6}$; skrives også som $\mu\varepsilon$. For stål tilsvarer $1 \mu\varepsilon$ en longitudinal spenning på

$$\sigma = E\varepsilon = 210 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} = 0.21 \text{ MPa.}$$

En moderne metode utviklet i 1990-årene til måling av elastiske spenninger i bruer, båter, elektriske kraftoverføringslinjer osv., er å feste optiske fibre med innbakte Bragg-gittere til

konstruksjonen. Ved strekkforandring vil avstandene i gitteret forandres, og dermed gi et forandret interferensbilde i reflektert lys (ofte fra en lysemitterende diode, hvor den optiske spektralbredden kan være opptil 30 nm) gjennom fiberen. Metodens følsomhet er i 1998 omtrent 1 picometer (10^{-12} m) per microstrain, altså $1 \text{ pm}/\mu\epsilon$.

Ved strekk av staven på figuren ovenfor vil stavens tverrsnitt forminskes. Det oppstår tøyningskomponenter også i tverr-retningene. Vi antar sylinderisk tverrsnitt, slik at $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$. Relasjonen mellom tøyning og spenning er nå

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu \epsilon_{xx}, \quad (2.68)$$

hvor koeffisienten ν kalles Poissons tall eller tverrkontraktsjonstallet. Verdien av ν ligger i praksis mellom 0 og $\frac{1}{2}$. For myke materialer er $\nu \approx \frac{1}{2}$. Det er vanlig å sette $\nu=0,25$ f.eks. i forbindelse med teorien for jordskorpen. For optiske fibre er $\nu=0,17$.

Den generelle relasjon mellom σ_{ik} og ϵ_{ik} er komplisert, og vi skal ikke utlede den her. Det er to materialkonstanter som inngår, nemlig E og ν , de samme størrelsene som ovenfor. Relasjonen er:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ll} \delta_{ik} \right), \quad (2.69)$$

som kan inverteres:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ik} - \nu \sigma_{ll} \delta_{ik} \right]. \quad (2.70)$$

La oss skrive ut (2.70) i detalj:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right], \quad (2.71)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right], \quad (2.72)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right], \quad (2.73)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}, \quad \epsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xz}, \quad (2.74)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz}. \quad (2.75)$$

Spesielt, hvis vi igjen ser på den horisontale stav under strekk, får vi av (2.71)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}, \quad (2.76)$$

som stemmer med (2.66). Videre får vi av (2.72) og (2.73)

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} = -\nu \varepsilon_{xx}, \quad (2.77)$$

som stemmer med (2.68).

2.6 Elastiske bølger

Vi betrakter elastiske bølger i et uendelig stort, homogen og isotropt fast medium. Bevegelsesligningen er gitt av Newtons 2.lov: Den elastiske krafttetthet $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ i i-retningen må være lik massetettheten ρ multiplisert med akselerasjonen, dvs.

$$\rho \ddot{s}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.78)$$

Ved å sette inn σ_{ik} fra (2.69) får vi

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_{ll}}{\partial x_i} \right). \quad (2.79)$$

Her er

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_k} + \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\nabla^2 s_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \vec{s} \right), \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ll}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \vec{s}, \quad (2.81)$$

slik at (2.79) gir

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\nabla^2 s_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \vec{s} \right]. \quad (2.82)$$

Altså kan bevegelsesligningen (2.78) skrives

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 s_i + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \vec{s} = \rho \ddot{s}_i. \quad (2.83)$$

Vi ser på det 3-dimensjonale tilfelle, $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$, og antar at \vec{s} avhenger bare av x (den retning bølgen forplanter seg i), samt tiden t .

For en longitudinal bølge er det bare $s_x(x, t)$ som er forskjellig fra null. Da er $\nabla^2 s_x = \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2}$, og vi får av (2.83)

$$\frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2}. \quad (2.84)$$

Denne ligningen skrives slik:

$$\frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial t^2} = 0, \quad (2.85)$$

som viser at

$$c_e = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\beta(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (2.86)$$

er den longitudinale lydhastighet.

For en transversal bølge er det bare komponentene av $\vec{\delta}$ vinkelrett på forplantningsretningen som er forskjellig fra null. La oss velge $\vec{\delta}$ i y-retningen. Da er

$$\nabla^2 \delta_y = \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2}, \quad \nabla \cdot \vec{\delta} = 0, \text{ og (2.83) gir}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial t^2}. \quad (2.87)$$

Omrydding av ligningen:

$$\frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial t^2} = 0, \quad (2.88)$$

viser at

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\beta(1+\nu)}} \quad (2.89)$$

er den transversale lydhastighet.

Da Poissons tall ligger i området $0 < \nu < \frac{1}{2}$, følger av (2.86) og (2.89) at

$$c_e > \sqrt{2} c_t. \quad (2.90)$$