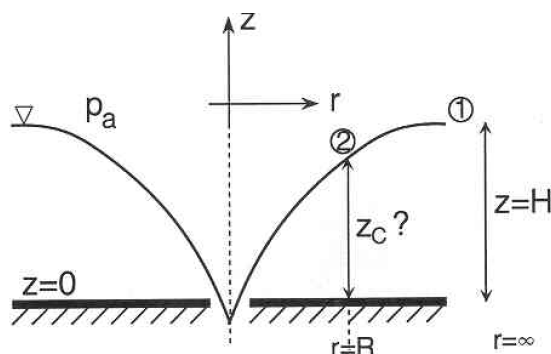


## Løsningsforslag til Øving 8 Høst 2015

### Oppgave 4.060

Vi skal undersøke om strømmingen er rotasjonsfri (virvlingsfri), og bestemme dybden  $z_C$  ved  $r = R$ .



Gitt hastigheten

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = (0, \frac{KR^2}{r}, 0). \quad (1)$$

Strømmingen er rotasjonsfri dersom  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . Her har vi kun én hastighetskomponent  $v_\theta$  (dette er åpenbart fysisk sett en tilnærming; det betyr at det ikke renner vann ned i sluket i det hele tatt!) som kun varierer i  $r$ -retning. I det generelle uttrykket

$$\nabla \times \vec{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right), \quad (2)$$

blir alle ledd lik null, altså er strømmingen rotasjonsfri.

Vi skal videre finne dybden  $z_C$ . Bruker Bernoullis ligning fra 1 til 2 langs den fri overflaten (MERK: det finnes ingen strømlinje fra 1 til 2, ettersom all hastighet er tangensiell her, men ettersom strømmingen er rotasjonsfri, kan vi bruke Bernoulli mellom to vilkårlige punkter):

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2} v_\theta|_{r=R}^2 + gz_C = \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2} v_\theta|_{r \rightarrow \infty}^2 + gH. \quad (3)$$

Her er  $v_\theta|_{r=R} = KR$  og  $v_\theta|_{r \rightarrow \infty} = 0$ , så vi får

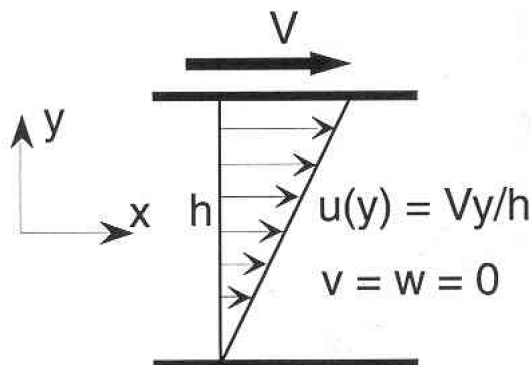
$$z_C = H - \frac{K^2 R^2}{2g}. \quad (4)$$

Vi kan merke oss et viktig poeng: når Bernoulli brukes mellom to punkter som *ikke* ligger langs samme strømlinje (som her), betyr  $v^2$  fremdeles lengden til *hele* hastighetsvektoren, ikke bare komponenten som peker langs den lokale strømlinjen. Dette skyldes at Bernoulli uttrykker energibevarelse. Vi husker helt analogt at kinetisk energi til et legeme i bevegelse var  $\frac{1}{2}mv^2$ , der  $v$  igjen er lengden til *hele* hastighetsvektoren.

Oppgave 4.70 i 7. utgave

### Oppgave 4.062

Vi skal vise at den lineære Couette-strømningen har en strømfunksjon, men ikke hastighetspotensial.



Betingelsen for strømfunksjonen er 2-dimensjonal strømning. Her har vi kun  $u = u(y)$ , dvs. strømning i  $xy$ -planet. Kontinuitetsligningen reduserer seg til

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

som har to ledd, altså er betingelsene for strømfunksjonen  $\psi$  oppfylt.

Vi finner  $\psi$  fra definisjonen

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \psi = \int u \cdot dy = \frac{V}{2h} y^2 + f(x) \quad (6)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \psi = -\int v \cdot dx = 0 + g(y). \quad (7)$$

begge disse uttrykkene er riktige hvis og bare hvis

$$\psi = \frac{V}{2h} y^2 + C \quad (8)$$

Betingelsen for hastighetspotensialet er at strømningen er virvlingsfri, dvs.  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . I kartesiske koordinater er

$$\nabla \times \vec{v} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (9)$$

Her kan vi kun få bidrag fra den siste komponenten ( $z$ -komponenten), som blir

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{du}{dy} = -\frac{V}{h} \neq 0. \quad (10)$$

Hastighetspotensialet kan dermed ikke eksistere.

(4.72 i 7. utgave)

### Oppgave 4.065

Vi skal undersøke om strømningen er rotasjonsfri og finne hastighetspotensialet i så tilfelle. Dernest skal vi lage en skisse av strømningen.

Gitt hastighetskomponentene

$$u = -\frac{Ky}{y^2 + x^2}, \quad v = \frac{Kx}{y^2 + x^2}. \quad (11)$$

Betingelsen for hastighetspotensialet er virvlingsfri strømming, altså at  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . Kartesisk:

$$\nabla \times \vec{v} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (12)$$

Vi får kun bidrag fra det siste leddet, altså  $z$ -komponenten:

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{K(x^2 + y^2) - Kx \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-K(x^2 + y^2) + Ky \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \quad (13)$$

Strømningen er altså rotasjonsfri, og vi finner hastighetspotensialet fra definisjonen:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = \int u dx = \int -\frac{Ky dx}{y^2 + x^2} = -K \arctan(x/y) + f(y) \quad (14)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \phi = \int v dy = \int \frac{Kx dy}{y^2 + x^2} = K \arctan(y/x) + g(x), \quad (15)$$

der vi har brukt relasjonen

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan(x/a) + C. \quad (16)$$

Uttrykkene ser ved første øyekast ikke ut til å kunne forenes, men med sammenhengen

$$\arctan(x/y) = \frac{\pi}{2} - \arctan(y/x), \quad (17)$$

får vi at

$$\phi = K \arctan(y/x) + C. \quad (18)$$

Om vi bruker sammenhengen med polarvinkelen  $\theta \in [0, 2\pi)$ :

$$\theta = \arctan(y/x) + C', \quad (19)$$

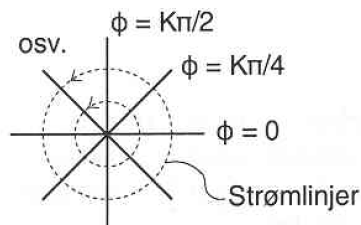
der

$$C' = \begin{cases} 0; & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi; & \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \\ 2\pi & \theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \end{cases}, \quad (20)$$

kan vi skrive dette penere med polare koordinater:

$$\phi = K\theta + C. \quad (21)$$

Skisse: (har valgt  $C = 0$  og  $K > 0$ ):

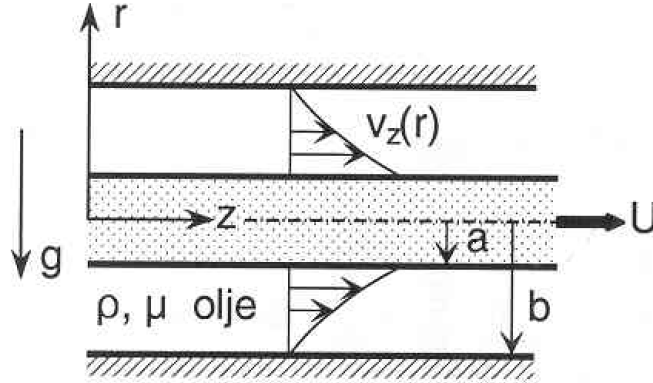


.

(4.75 i 7. utgave)

### Oppgave 4.088

Vi skal finne hastighetsfordelingen  $v_z(r)$  når det er gitt at trykket er konstant og vi har strømming kun i aksial retning. Videre skal vi avgjøre hva som vil være de korrekte grensebetingelsene for problemet.



$z$ -komponenten av Navier-Stokes ligning i polarkoordinater:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \quad (22)$$

Da trykket er konstant og  $\vec{v} = (0, 0, v_z)$ , reduseres (22) til:

$$0 = \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (23)$$

$$r \cdot \frac{dv_z}{dr} = \int 0 \cdot dr = C_1 = \text{konst.} \quad (24)$$

$$v_z = \int \frac{C_1}{r} dr = C_1 \ln r + C_2 \quad (25)$$

Grensebetingelsene er som vi er vant til: heft til veggene. Det gir  $v_z(r = a) = U$  og  $v_z(r = b) = 0$ . Vi bestemmer de to konstantene til

$$C_1 = \frac{U}{\ln(a/b)} \quad (26)$$

$$C_2 = -C_1 \ln b, \quad (27)$$

så

$$\underline{v_z(r) = U \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}}. \quad (28)$$

(4.99 i 7. utgave)

Løsning

Regner ut

$$\nabla \cdot \vec{V} = (\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}) \cdot (V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta)$$

$$= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (V_r \vec{e}_r) + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r \vec{e}_r) + \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (V_\theta \vec{e}_\theta) + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \vec{e}_\theta)$$

$$\text{Her er } \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r,$$

$$|\vec{e}_r|^2 = |\vec{e}_\theta|^2 = 1, \quad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0.$$

Det gir

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$