NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

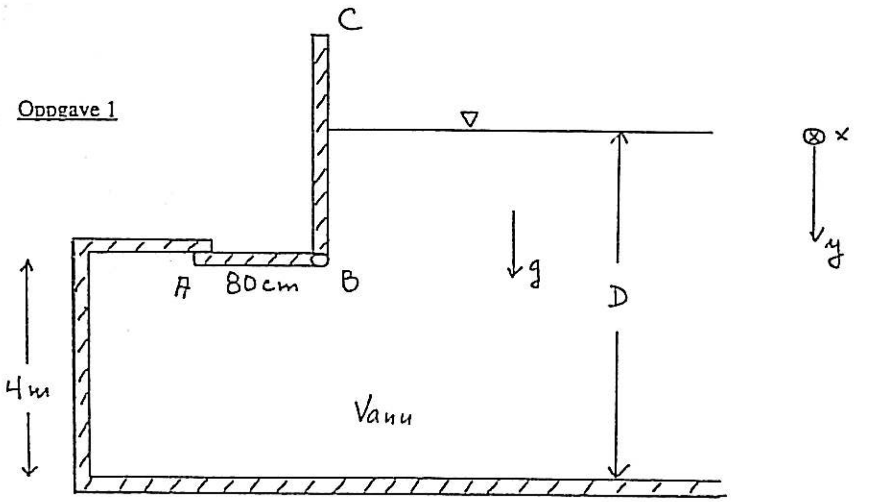
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik Helge Anderssson
Tlf.: 73 59 35 55 73 59 35 56

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. VII

Tirsdag 5. august 1997
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU tillatt.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

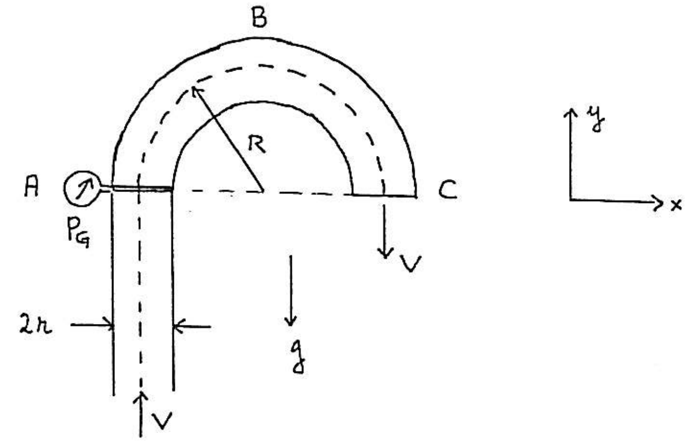


ABC på figuren er en stiv damport som kan svinge fritt om en aksling gjennom B. Porten har lengden 2m inn i papirplanet (dvs. i x-retningen). Porten vil åpne seg ved A og slippe ut vann dersom vanndybden blir stor nok. For hvilken vanndybde D vil porten begynne å åpne seg? Se bort fra portens tyngde.

Oppgitt: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment om en akse parallell med x-aksen gjennom centroiden

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12}$$

Oppgave 2.



Vann strømmer stasjonært gjennom et sirkulært rør med radius r = 10 cm. Middelhastigheten er V = 5,0 m/s. Til røret er det sveiset fast et halvsirkelformet bend ABC i posisjon A. Midtlinjens radius er R = 1,20 m. Rør og bend har samme radius r, slik at når vannet strømmer fritt ut i posisjon C, har det samme middelhastighet V som før. Posisjonene A og C ligger på samme horisontale nivå. Ved A måles gage-trykket $p_G = 0{,}8 \cdot 10^4$ Pa. Sett tyngdens akselerasjon lik $g = 10$ m/s^2.

a) Se bort fra bendets tyngde, og finn den kraft $\bar{F}_{sveis}$ som sveisen må overføre for å holde bendet når vannet strømmer igjennom.

b) Dette bendet har friksjonstap. Hvor stor er den tilhørende tapshøyden h_L? Hva ville $\bar{F}_{sveis}$ være dersom bendet ble gjennomstrømmet med vann med samme (middel-) hastighet V som ovenfor, men uten friksjonstap?

Oppgave 3

Hastighetspotensialet for monokromatiske vannbølger med liten amplitude a (ka << 1) er, for vilkårlig vanndyp d,

$$\Phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx).$$

Dispersjonsrelasjonen er $\omega^2 = gk \tanh kd$. Det dynamiske trykket er $p_d = -\rho\, \partial\Phi/\partial t$.

a) Vis at gruppehastigheten c_g kan skrives som

$$c_g = \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd}\right) ,$$

hvor c er fasehastigheten.

b) Vis at middelverdien $\bar{P}(t)$ av den instantane energifluks P(t) gjennom et vertikalt tverrsnitt,

$$P(t) = \int_{-d}^{\eta} \left[p + \rho g z + \frac{1}{2} (u^2 + w^2)\right] u \, dz ,$$

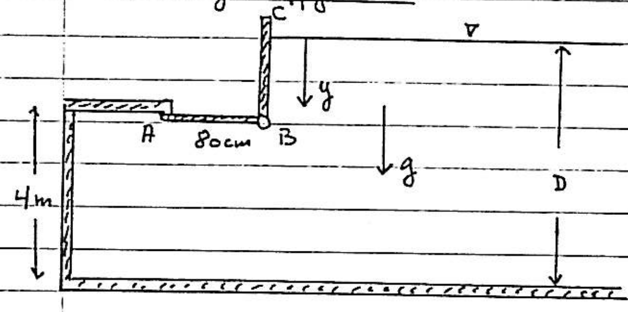
er

$$\bar{P}(t) = E c_g ,$$

hvor $E = \frac{1}{2} \rho g a^2$ er energien per overflateenhet. Atmosfæretrykket neglisjeres.

61124 FLUIDMEKANIKK 5. august 1997

Løsning Oppgave 1



Trykk på luke AB: $p_{AB} = \gamma(D-4)$

Kraft på luke AB: $F_{AB} = p_{AB} \cdot A = p_{AB} \cdot 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6\gamma(D-4)$

Tilhørende kraftmoment: $M_B = F_{AB} \cdot 0{,}4 = 0{,}64\gamma(D-4)$ ①

Kraft på vertikal luke BC: $F_{BC} = \gamma h_c \cdot (D-4) \cdot 2$, hvor centroidens dybde h_c er $h_c = (D-4)/2$.
Altså $F_{BC} = \gamma(D-4)^2$.

Differanse mellom trykksenter y_p og centroide:

$$y_p - y_c = \frac{I_{xc}}{y_c \cdot (D-4) \cdot 2} .$$ Her er $y_c = h_c = \frac{D-4}{2}$ og

$$I_{xc} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot (D-4)^3 = \frac{1}{6}(D-4)^3.$$ Altså

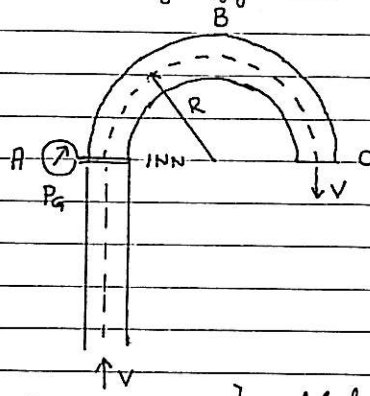
$$y_p - \frac{D-4}{2} = \frac{\frac{1}{6}(D-4)^3}{\frac{D-4}{2} \cdot (D-4) \cdot 2} = \frac{D-4}{6}, \quad y_p = \frac{2}{3}(D-4)$$

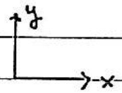
Arm, for kraftmomentet om B på vertikal luke:
$(D-4) - \frac{2}{3}(D-4) = \frac{1}{3}(D-4) \Rightarrow$
$M_B = F_{BC} \cdot \frac{1}{3}(D-4) = \frac{1}{3}\gamma(D-4)^3$ ②

Setter ① og ② lik hverandre: $0{,}64\gamma(D-4) = \frac{1}{3}\gamma(D-4)^3$

$(D-4)^2 = 1{,}92$, $D = 4 + 1{,}39 = 5{,}39$ m

Løsning Oppgave 2





Ingen krefter eller impulsfluksen i x-retningen. $\vec{F}_{sveis}$ virker i y-retningen.

a) Impulsbalanse i y-retningen, når bare skalare størrelser benyttes,

$\sum F = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN}$, hvor kontrollvolumet legges inntil rørbendet ABC.

$\sum F$ er sammensatt av trykkraft $p_G A$ ved INN-seksjonen, vannets tyngde W_G, og kraften F_{sveis} som sveisen må overføre: $\sum F = p_G A - W_G + F_{sveis}$. Her er $A = \pi r^2 = \pi \cdot 0{,}01$. $p_G A = 0{,}8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 0{,}01 = 251\ N$.

$W_G = \gamma A \cdot \pi R = 10^4 \cdot 0{,}01\pi \cdot \pi \cdot 1{,}2 = 1184\ N$

Impulsbalansen altså

$$251 - 1184 + F_{sveis} = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN} = -2\dot{M}_{INN} = -2\rho V^2 \cdot A$$

$$= -2 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot \pi \cdot 0{,}01 = -1571\ N$$

$\underline{F_{sveis} = -638\ N}$, virker nedover.

b) Av mekanisk energiligning:

$\frac{p_G}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz - w_s = \frac{1}{2}V^2 + gz + gh_L$ følger, ettersom $w_s = 0$,

$\frac{p_G}{\rho} = gh_L$, $h_L = \frac{p_G}{\gamma} = \frac{0{,}8 \cdot 10^4}{10^4} = \underline{0{,}8\,m}$

Null tap gir at $p_G \to 0$. Da vil $-W_G + F_{sveis} = -2\rho V^2 \cdot A$

$$\underline{F_{sveis}} = W_G - 2\rho V^2 A = 1184 - 1571 = \underline{-387\ N}$$

Løsning Oppgave 3

a) Deriverer $\omega^2 = gk \tanh kd$:

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(gk \tanh kd\right) = g \tanh kd + \frac{gkd}{\cosh^2 kd}$$

Gruppehastighet $c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega}\left(\tanh kd + \frac{kd}{\cosh^2 kd}\right)$

Kan også multiplisere med ω i teller og nevner og skrive c_g slik:

$$c_g = \frac{g\omega}{2\omega^2} \cdot \tanh kd \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd}\right)$$

$$= \frac{g\omega \tanh kd}{2gk \tanh kd}\left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd}\right)$$

Da fasehastigheten er $c = \omega/k$:

$$\underline{c_g = \frac{1}{2}c\left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd}\right)}$$

5. august 1997

Løsning Oppgave 3, forts.

b) $$\Phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx)$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx) \qquad (\Theta = \omega t - kx)$$

Når atmosfæretrykket $p_0 = 0$ er det dynamiske trykk $p_d = p + \varrho g z$.

$$p_d = -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \varrho a g \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx)$$

$$P(t) = \int_{-d}^{\eta} (p + \varrho g z + \underbrace{\tfrac{1}{2} V^2}_{\substack{O(a^2),\\ \text{negl.}}}) u \, dz = \int_{-d}^{\eta} p_d u \, dz$$

Kan erstatte øvre grense med 0, fordi korreksjonen er av $O(a^3)$. Altså

$$P(t) = \int_{-d}^{0} p_d u \, dz = \frac{\varrho g^2 k a^2}{\omega} \frac{\sin^2 \theta}{\cosh^2 kd} \int_{-d}^{0} \cosh^2 k(z+d) \, dz .$$

Integralet er $\int_{-d}^{0} \cosh^2 k(z+d) \, dz = \int_{-d}^{0} \frac{\cosh 2k(z+d) + 1}{2} dz$

$$= \int_{-d}^{0} \left(\frac{1}{4k} \sinh 2k(z+d) + \frac{z}{2} \right) = \frac{\sinh 2kd}{4k} + \frac{d}{2} = \frac{\sinh 2kd}{4k} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)$$

Middel: $\overline{\sin^2 \Theta} = \frac{1}{2}$. Altså

$$\overline{P}(t) = \frac{\varrho g^2 k a^2}{\omega} \frac{\frac{1}{2}}{\cosh^2 kd} \cdot \frac{\sinh 2kd}{4k} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} \varrho g a^2 \right)}_{E} \cdot \underbrace{\frac{g}{2\omega} \tanh kd \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)}_{c_g} = \underline{E \cdot c_g}$$