NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

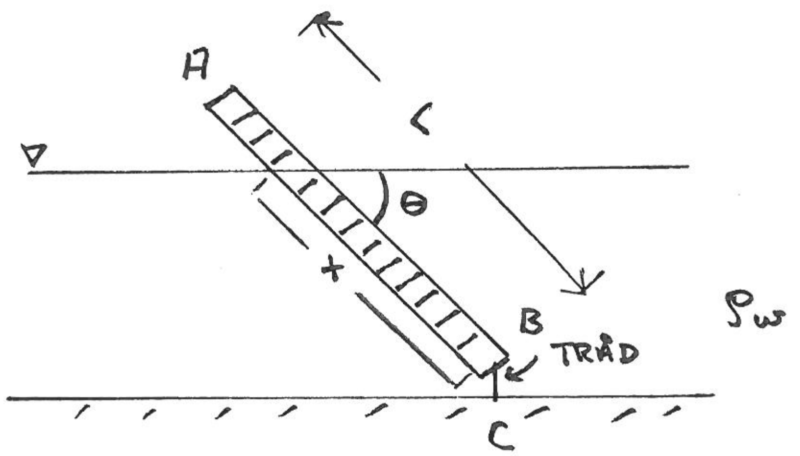
Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555
Antall sider: 4, pluss 4 sider formelliste.
Hver oppgave teller likt under sensuren, hvis ikke annerledes oppgitt.

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

Onsdag 7. desember 2011
Tid: 1500 - 1900
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller innen 9. januar 2012

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i samsvar med NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



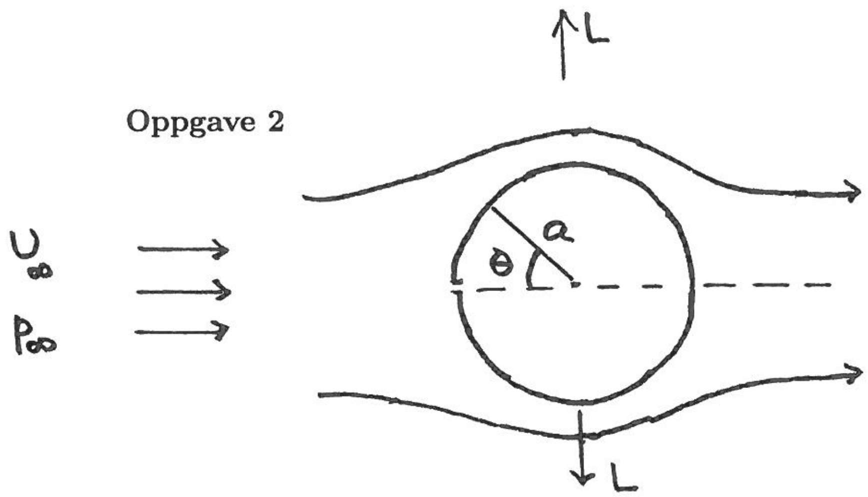
En stav AB av lengde L, tverrsnittsareal A, og tetthet ρ_{stav} mindre enn vannets tetthet ρ_w, er festet til bunnen med en vertikal tråd BC. Staven blir ved likevekt stående i delvis neddykket tilstand, som vist på figuren. Tyngdens akselerasjon er g.

a) Lengden x av den del av staven som ligger under vann, måles. Vis hvordan ρ_{stav} kan uttrykkes som funksjon av ρ_w, x og L. [Hint: Betrakt momentbalansen for staven.]

b) Alternativt kan strekk-kraften S i tråden måles. Vis hvordan en kan da uttrykke forholdet $\rho_{\text{stav}}/\rho_w$ som funksjon av parameteren

$$K \equiv \frac{S}{ALg\rho_w}.$$

Oppgave 2



Utkikkstønnen i et skip har form av en sylinder med radius a og høyde H, og er festet til en vertikal mast slik at tønnens og mastens akser er sammenfallende med hverandre og med z-aksen. Tønnens vegger er av glass, men har en smal vertikal spalt i hele tønnens lengde slik at atmosfæren slipper inn. Anta at $H \gg a$, slik at strømningen kan antas todimensjonal. Det blåser en horisontal vind med konstant hastighet U_∞ rett inn mot spalten ($\theta = 0$). Se bort fra luftas tyngde og viskositet. Luftas tetthet er ρ. Atmosfæretrykket er p_∞.

a) Strømfunksjonen for en uniform strøm, og for en dipol, er som kjent i polarkoordinater

$$\psi_{\text{uniform}} = U_\infty r \sin\theta, \quad \psi_{\text{dipol}} = -\frac{\lambda}{r}\sin\theta.$$

Vis hvordan summen av disse uttrykkene gir strømfunksjonen ψ for situasjonen skissert i figuren ovenfor. Skriv ned sammenhengen mellom radius a, hastigheten U_∞ og dipolens styrke λ. Finn overflatetrykket $p_s(\theta)$ på tønnens utside. Hvor stort er lufttrykket p_i inne i tønnen?

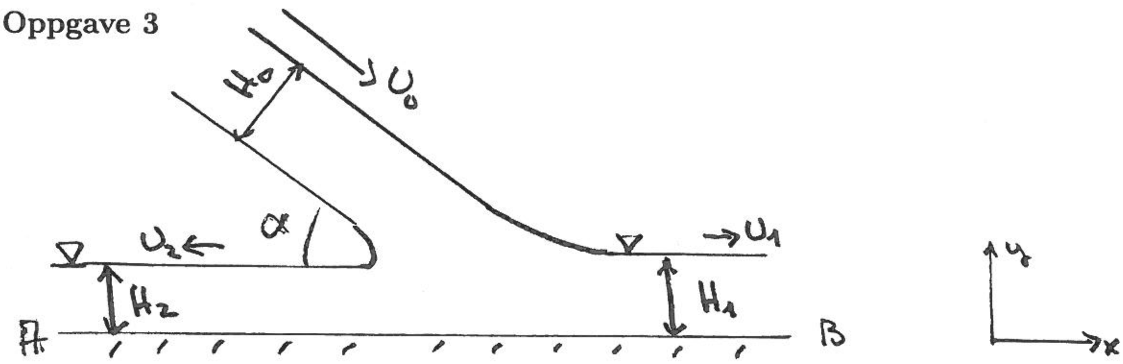
b) På grunn av lufttrykket virker det en kraft (løft) L ~~per lengdeenhet~~ på tønnens øvre halvpart (se figuren). Tilsvarende virker det en like stor kraft nedover, på nedre halvpart. Finn L, uttrykt ved ρ, U_∞, a og H.

c) Betrakt nå generelt en stasjonær luftstrømning omkring en kompakt sylinder på tvers. Definer trykkmotstandskoeffisienten $C_p(\theta)$ som

$$C_p(\theta) = \frac{p_s(\theta) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}.$$

Bruk først resultatene fra punkt a) til å tegne opp $C_p(\theta)$ for $0 < \theta < 180^0$ dersom strømningen er ideell (ingen viskositet). Skissér dernest i samme diagram hvordan $C_p(\theta)$ varierer i tilfelle av realistiske forhold, med (i) laminært grensesjikt, og (ii) med turbulent grensesjikt. Gi en kort forklaring.

Oppgave 3



En plan vannstråle med bredde H_0 faller inn på skrå mot en plan plate AB. Helningsvinkelen er α. Neglisjér vannets viskositet, og neglisjér tyngdekraften. Vannstrålen deler seg ved platen i to horisontale grener, med bredder H_1 og H_2 som vist på figuren. Foruten vinkelen α antas H_0 samt innfallende hastighet U_0 å være kjent. Anta uniformt hastighetsprofil i alle de tre grenene. Regn med én lengdeenhet inn i papirplanet. Vannets tetthet er ρ.

a) Hvor stor er den kraft $\mathbf{F}_{\mathbf{plate}}$ som strålen utøver mot platen?

b) Hvor store er grenstrømmenes hastigheter U_1 og U_2? Regn ut breddene H_1 og H_2 uttrykt ved H_0 og α. [Hint: Utnytt at kraften tangensielt til platen er lik null.]

Oppgave 4 (halv vekt)

Gitt en monokromatisk bølge på dypt vann. Hastighetspotensialet er

$$\phi = \frac{ag}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx),$$

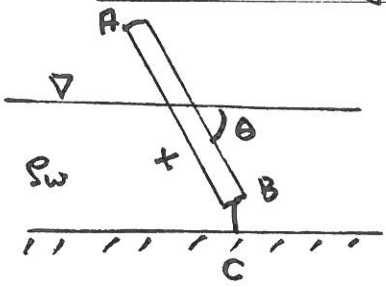
hvor a er amplituden. Vis at midlere energifluks $\overline{P(t)}$ over en periode gjennom et vertikalt tverrsnitt per enhetsbredde er

$$\overline{P(t)} = Ec_g,$$

hvor $E = \frac{1}{2}\rho g a^2$ er den midlere energi per enhet grunnflate. Angi verdien av c_g. Se bort fra atmosfæretrykket.

TEP4105 FLUIDMEKANIKK EKSAMEN 7. DES. 2011

Løsning Oppgave 1



a) Tyngde av staven $W = \rho_{stav}\, g A \cdot L$

Oppdrift $F_B = \rho_w g A \cdot x$

Momentbalanse om punkt B :

$$F_B \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} x \cancel{\cos\theta} = W \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} L \cancel{\cos\theta}$$

$$\rho_w g A x^2 = \rho_{stav}\, g A L^2 \,, \quad \underline{\rho_{stav} = \rho_w \left(\frac{x}{L}\right)^2} \qquad (1)$$

b) Vertikal kraftbalanse : $W + S = F_B$

$\uparrow$ STREKK

$$\rho_{stav}\, g A L + S = \rho_w g A x$$

Innfører $K = \dfrac{S}{A L g \rho_w}$ og får

$$\frac{\rho_{stav}}{\rho_w} + K = \frac{x}{L}$$

. Kvadrerer, og benytter (1):

$$\left(\frac{\rho_{stav}}{\rho_w} + K\right)^2 = \frac{\rho_{stav}}{\rho_w}$$

$$\left(\frac{\rho_{stav}}{\rho_w}\right)^2 - (1 - 2K)\frac{\rho_{stav}}{\rho_w} + K^2 = 0$$

Løsning

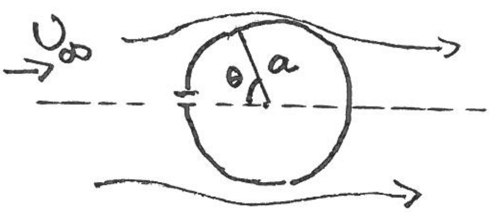
$$\frac{\rho_{stav}}{\rho_w} = \frac{1}{2} - K \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - K\right)^2 - K^2} = \frac{1}{2} - K \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4K}$$

I grensen $\rho_{stav} = \rho_w$ må $S = 0$, dvs. $K = 0$. Det betyr at øvre fortegn må brukes. Altså

$$\underline{\frac{\rho_{stav}}{\rho_w} = \frac{1}{2} - K + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4K}}$$

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. 7. DESEMBER 2011

Oppgave 2



a) Adderer ψ for uniform strøm og dipol:

$$\psi = U_\infty r \sin\theta - \frac{\lambda}{r}\sin\theta \text{ , altså}$$

$$\underline{\psi = U_\infty\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta} \text{ , hvor } \underline{a^2 = \frac{\lambda}{U_\infty}}$$

Bernoulli: $$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_s(\theta) + \frac{1}{2}\rho\left(V_r^2 + V_\theta^2\right)\Big|_{r=a}.$$

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta = 0 \text{ når } r = a,$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta = -2U_\infty\sin\theta \text{ når } r = a.$$

Dermed gir Bernoulli $\underline{p_s(\theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - 2\rho U_\infty^2 \sin^2\theta}$ (1)

Trykk p_i inne i tønnen er lik stagnasjonstrykket ved $\theta = 0$:

$$\underline{p_i = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

b) For vilkårlig θ er trykkforskjell mellom indre og ytre trykk

$$p_i - p_s(\theta) = 2\rho U_\infty^2 \sin^2\theta.$$

Overflateelement er $a\,d\theta \cdot H$. Løftet L finnes ved å integrere over øvre halvsirkel:

$$L = \int_0^\pi \left(2\rho U_\infty^2 \sin^2\theta\right)\cdot \sin\theta \cdot a\,d\theta \cdot H = 2\rho U_\infty^2 a H \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$$

Integralet $\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \int_{-1}^{1} (1 - u^2)\, du = \frac{4}{3}$ $\quad (u = \cos\theta)$.

Altså:

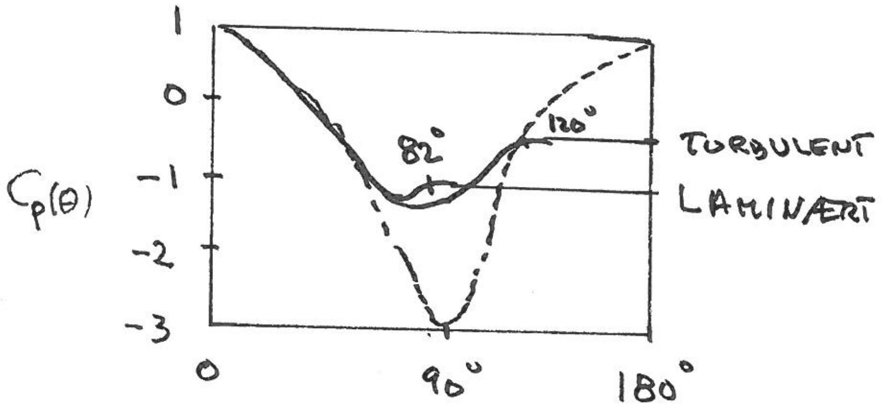
$$\underline{L = \frac{8}{3}\rho U_\infty^2 a H}$$

Oppgave 2c)

Definisjon $C_p(\theta) = \dfrac{p_s(\theta) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$

For ideell strømning er ifølge ① $p_s(\theta) - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - 2\rho U_\infty^2 \sin^2\theta$

Altså: $\underline{C_p(\theta) = 1 - 4\sin^2\theta}$, ideell strømning.



Laminært grensesjikt: Avløsningspunkt ved $\theta \simeq 82°$

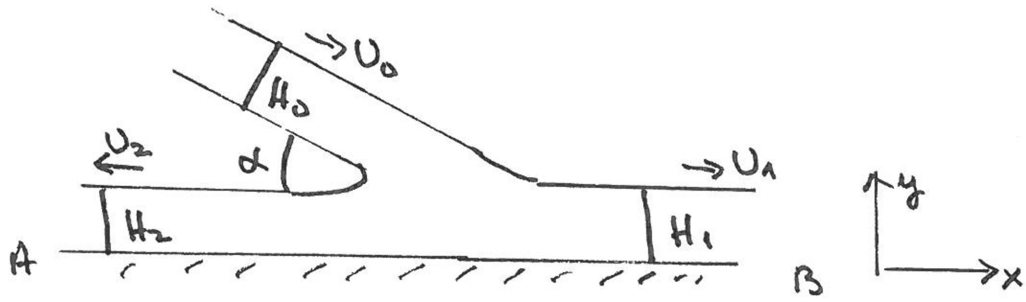
Turbulent —"— : —"— $\theta \simeq 120°$

Etter avløsningen er trykket konstant.

Kinetisk energi i turbulent grensesjikt er større enn i et laminært grensesjikt. Avløsningen skjer derfor senere.

TEP4105 FLUIDMEKANIKK, 7. DESEMBER 2011

Oppgave 3



a) Impulsfluksen er $\rho U_0^2 H_0$ i innfallende stråle. Den gir følgende kraftkomponent normalt på platen:

$$\underline{\vec{F}_{plate} = -\rho U_0^2 H_0 \sin\alpha \, \vec{e}_y}\quad . \qquad \text{Rettet nedover.}$$

b) Bernoulli gir $\underline{U_1 = U_0,\ U_2 = U_0}$

Kontinuitet gir at volumfluks $Q = U_0 H_0$ for innfallende stråle er lik $Q = U_1 H_1 + U_2 H_2 = U_0(H_1 + H_2)$ for utfallende stråler. Altså

$$\underline{H_0 = H_1 + H_2} \qquad ①$$

Ingen kraft tangensielt til platen: $\dot{M}_{UT} = \dot{M}_{INN}$ langs platen. Det betyr

$$\rho U_0^2 H_0 \cos\alpha = \rho U_0^2 H_1 - \rho U_0^2 H_2 \text{ , eller}$$

$$\underline{H_0 \cos\alpha = H_1 - H_2} \qquad ②$$

Av ① og ② følger

$$\underline{H_1 = \tfrac{1}{2} H_0 (1 + \cos\alpha), \qquad H_2 = \tfrac{1}{2} H_0 (1 - \cos\alpha)}$$

Sjekk: $\alpha = 90°$ gir $H_1 = H_2 = \frac{1}{2} H_0$.

Grenstrømmene 1 og 2 er like.

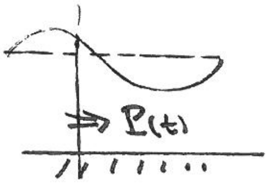
Oppgave 4

Gitt $\phi = \frac{ag}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$.

Hastighetskomponenter

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \sin(\omega t - kx) \qquad V^2 = u^2 + w^2 = \left(\frac{agk}{\omega}\right)^2 e^{2kz}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$



Energifluks

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\eta} [\underbrace{p}_{\text{TRYKK}} + \underbrace{\rho g z}_{\text{POTENSIELL ENERGI}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\rho V^2}^{\text{KINETISK ENERGI}}] \cdot u \, dz$$

Siste ledd av orden a^3, som neglisjeres.

Dynamiske trykk $p_d = p + \rho g z$

Generelt er $p_d = -\rho \, \partial\phi/\partial t = \rho g a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$

Øvre integrasjonsgrense η erstattes med 0 i lineær teori.

$\Rightarrow$

$$P(t) = \int_{-\infty}^{0} p_d u \, dz = \int_{-\infty}^{0} \rho g a e^{2kz} \sin^2(\omega t - kx) \cdot \frac{agk}{\omega} \, dz$$

$$= \frac{\rho (ga)^2 k}{\omega} \sin^2(\omega t - kx) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{2kz} dz}_{\frac{1}{2k}}$$

Midler over en periode: $\overline{\sin^2(\omega t - kx)} = \frac{1}{2}$. Det gir

$$\overline{P(t)} = \frac{\rho (ga)^2}{4\omega} = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\rho g a^2\right)}_{E} \frac{g}{2\omega}$$

. Da $\omega^2 = gk$ blir

$$\underline{\overline{P(t)} = E \cdot \frac{\omega}{2k} = E \cdot c_g}, \quad \underline{c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} c \text{ er gruppehastigheten.}}$$