FY1001/TFY4145 Mekanisk Fysikk Eksamen 16. desember 2014

FORMLER: Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene.

MEKANISK FYSIKK INKL SVINGNINGER

- Newtons andre lov: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$
- Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- Arbeid: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$
- Konservativ kraft og potensiell energi: $U(r) = -\int_{r_0}^{r} F \cdot dr$
- Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$
- Luftmotstand (liten v): $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ Luftmotstand (stor v): $\mathbf{f} = -Dv^2\hat{v}$
- Tyngdepunkt: $\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i} \mathbf{r}_{i} m_{i} \rightarrow \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \cdot dm$ Tyngdepunktbevegelsen: $M\ddot{\mathbf{R}}_{CM} = \mathbf{F}_{\mathbf{ytre}}$
- Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$
- Dreiemoment: $\tau = (r r_0) \times F$ Statisk likevekt: $\Sigma F_i = 0$ $\Sigma \tau_i = 0$
- Dreieimpuls: $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r} \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{p}$ N2 rotasjon: $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$
- Stivt legeme, refleksjonssymmetri mhp rotasjonsaksen: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_b + \boldsymbol{L}_s = (\boldsymbol{R}_{CM} \boldsymbol{r}_0) \times M\boldsymbol{V} + I_0 \boldsymbol{\omega}$
- Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2 dm$
- Stivt legeme, rotasjon om fast akse: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
- N2 rotasjon, akse med fast orientering: $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$
- Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$
- $\bullet \quad \text{Gravitasjon:} \quad U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} = -\hat{r} \frac{dU(r)}{dr} \quad V(r) = \frac{U(r)}{m} \quad \boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -\hat{r} \frac{dV(r)}{dr}$
- Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega_0$ $f = 1/T = \omega_0/2\pi$ Masse i fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$
- Fri, dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
 $\omega_0^2 = k/m$ $\gamma = b/2m$

Underkritisk demping $(\gamma < \omega_0)$ $x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Overkritisk demping $(\gamma > \omega_0)$ $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Kritisk demping $(\gamma = \omega_0)$ $x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$

• Tvungen svingning, harmonisk ytte kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

(partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$

amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$

halvverdibredde: $\Delta\omega \simeq 2\gamma$

Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega$

BØLGEFYSIKK

• Harmonisk plan bølge (forplantning i positiv x-retning):

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$
 , $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$

• Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

• Fasehastighet: $v = \lambda/T = \omega/k$

• Gruppehastighet: $v_g = d\omega/dk$

• Lineær respons i elastiske, isotrope medier (Hookes lov):

 $mekanisk spenning = elastisk modul \times relativ tøyning$

S = strekk-kraft, B = bulkmodul, E = elastisitetsmodul, G = skjærmodul

• For transversale bølger på streng: $v = \sqrt{S/\mu}$

 \bullet For longitudinale bølger (lydbølger) i fluider (gasser og væsker): $v=\sqrt{B/\rho}$

• For longitudinale bølger i tynn stang (fast stoff): $v = \sqrt{E/\rho}$

• For longitudinale (v_P) og transversale (v_S) bølger i faste stoffer (bulk):

$$v_P = \sqrt{(B + 4G/3)/\rho}$$
 ; $v_S = \sqrt{G/\rho}$

• Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2$$

• Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan longitudinal bølge (lydbølge):

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 \xi_0^2$$

• Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2 y_0^2$$

• (Midlere) Intensitet i harmonisk plan longitudinal bølge (lydbølge):

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

• Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

• Lydtrykksnivå:

$$\beta(dB) = 10 \log \frac{I}{I_0} \mod I_0 = 10^{-12} \,\text{W/m}^2$$

• Refleksjon og transmisjon av bølge på streng:

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0} \; ; \; y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0} \; ; \; R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i} = \left(\frac{y_{r0}}{y_{i0}}\right)^2 \; ; \; T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i} = 1 - R$$

• Dopplereffekt:

$$f_{\rm O} = \frac{v + v_{\rm m} - v_{\rm O}}{v + v_{\rm m} - v_{\rm S}} f_{\rm S}$$

• Svevning ("interferens i tid"):

$$f_S = |f_1 - f_2|$$

• Interferens (romlig):

$$I_{\text{max}}$$
 for $d \sin \theta = n \lambda$ $(n = 0, 1, 2, ...)$

RELATIVITETSTEORI

• Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

• Lorentztransformasjonene (\overline{S} har hastighet $\mathbf{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\overline{x} = \gamma (x - vt)
\overline{y} = y
\overline{z} = z
\overline{t} = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma (\overline{x} + v\overline{t})
y = \overline{y}
z = \overline{z}
t = \gamma \left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right)$$

• Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

• Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

• Hastighet i S $(\boldsymbol{u}=u_x\hat{x}+u_y\hat{y}+u_z\hat{z})$: $u_x=dx/dt$ $u_y=dy/dt$ $u_z=dz/dt$ Hastighet i \overline{S} $(\overline{\boldsymbol{u}}=\overline{u}_x\hat{x}+\overline{u}_y\hat{y}+\overline{u}_z\hat{z})$: $\overline{u}_x=d\overline{x}/d\overline{t}$ $\overline{u}_y=d\overline{y}/d\overline{t}$ $\overline{u}_z=d\overline{z}/d\overline{t}$ Transformasjon av hastigheter:

$$u_x = (\overline{u}_x + v)/(1 + \overline{u}_x v/c^2) \quad u_y = (\overline{u}_y/\gamma)/(1 + \overline{u}_x v/c^2) \quad u_z = (\overline{u}_z/\gamma)/(1 + \overline{u}_x v/c^2)$$

• Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning; Einsteins addisjonsformel):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

• Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

• Relativistisk energi:

$$E = \gamma mc^2$$
 ; $E_0 = mc^2$; $K = E - E_0$; $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$

- Elastisk prosess: E, p, K og m bevart.
- Uelastisk prosess: $E ext{ og } p$ bevart.

MIDDELVERDI OG FEIL I MÅLINGER

- Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q}{\partial a_i} \Delta a_i\right)^2$
- Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
- Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N (x_i \overline{x})^2\right)}$
- Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\overline{x}} = \delta_x / \sqrt{N}$

KONSTANTER, OMREGNINGSFAKTORER OG DEKADISKE PREFIKSER

• Fundamentale konstanter:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$
 $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2)$ $\hbar = h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
 $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $m_p = m_n = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

• Omregningsfaktorer:

$$1 \text{ eV} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

 $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$

• Dekadiske prefikser: p = piko = 10^{-12} , n = nano = 10^{-9} , μ = mikro = 10^{-6} , m = milli = 10^{-3} , c = centi = 10^{-2} , k = kilo = 10^{3} , M = mega = 10^{6} , G = giga = 10^{9}

4