NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

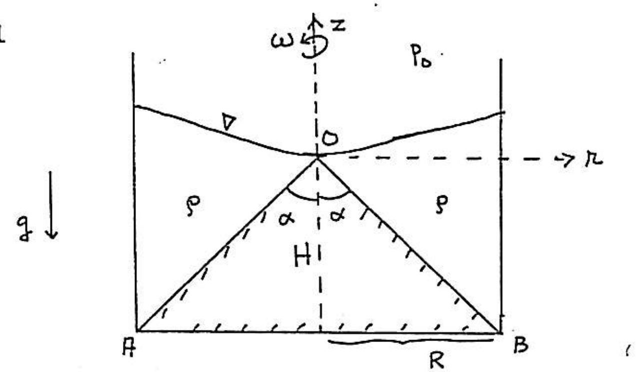
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F

(Linje Fysikk og matematikk)
Onsdag 6. mai 1998
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU tillatt.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

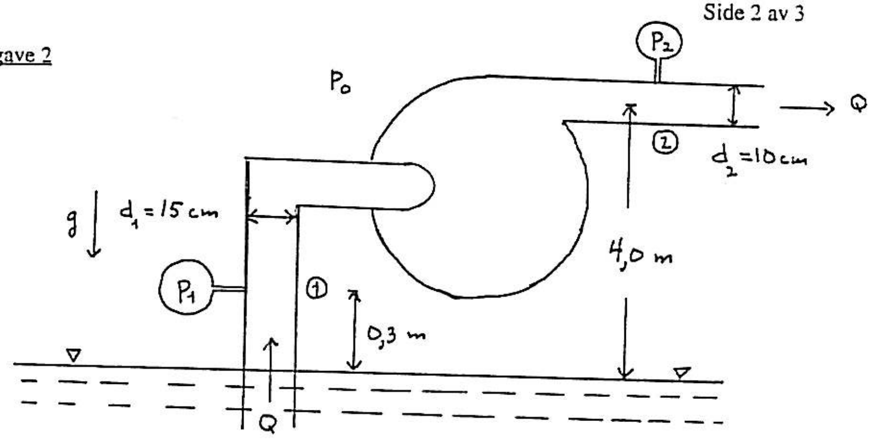


En massiv kjegle AOB er plassert på bunnen av et kar med sylindrisk grunnflate AB. Kjeglens radius er R, lik karets radius. Kjeglens høyde er $H = R \cot \alpha$ (se figuren). Karet fylles med vann (på utsiden av kjeglen). Hele systemet settes i rotasjon omkring z-aksen med konstant vinkelhastighet ω, slik at når likevekt har innstilt seg, vil den frie overflaten berøre kjeglen i dens toppunkt O. Vannets tetthet er ρ, tyngdens akselerasjon er g, og atmosfæretrykket er p_0. Benytt sylinderkoordinater, og legg origo i punktet O.

a) Skriv ned vannets bevegelsesligning i det roterende koordinatsystem, og finn trykket $p(r,z)$ i vannet. Bestem formen på den frie overflate.

b) Skriv ned trykket $p_k(z)$ i et punkt på kjegleflaten uttrykt ved punktets vertikale posisjonskoordinat z, og finn ved integrasjon vertikalkomponenten F_z av den totale kraft som vannet utøver mot kjegleflaten.

Oppgave 2



En vannpumpe trekker vann opp av et basseng, og avleverer det under trykket $p_2 = 180$ kPa. Atmosfæretrykket er $p_0 = 101$ kPa. Manometret ved ① viser et svakt undertrykk relativt til atmosfæretrykket, $p_1 = 95$ kPa. Forholdene er stasjonære. Volumgjennomstrømningen er Q m^3/s. Rørdiametre og høyder er angitt på figuren. Tapshøyden, på grunn av friksjon inne i pumpen, antas å være $h_L = 0{,}8$ m. Anta uniforme hastighetsprofiler i rørene, både ved ① og ②. Sett $\rho = 10^3$ kg/m³, $g = 10$ m/s².

a) Finn Q idet du ser bort fra friksjonstap utenfor pumpen.

b) Finn pumpens effekt P.

Oppgave 3

I et plant strømningsfelt av et ideelt inkompressibelt fluid er hastighetskomponentene i plane polarkoordinater

$$V_r = 0 \quad \text{for alle } r\,, \qquad V_\theta = \begin{cases} \alpha r^2\,, & r \le r_0 \\ \dfrac{A}{r}\,, & r > r_0. \end{cases}$$

Her er α og r_0 kjente konstanter. Fluidets tetthet er ρ. Tyngdekraften neglisjeres.

a) Bestem konstanten A slik at V_θ blir en kontinuerlig funksjon av r, og finn virvlingens z-komponent ζ_z i hele området $0 < r < \infty$.

b) Finn trykket $p(r)$ for $0 < r < \infty$, når det er kjent at $p = p_\infty$ for $r \to \infty$. Skissér $p(r)$.

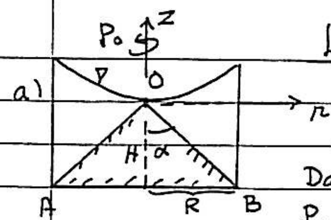
c) Finn strømfunksjonen Ψ for $0 < r < \infty$, og regn herav ut $\nabla^2\Psi$ i samme område. Kunne du ha insett resultatet for $\nabla^2\Psi$ direkte, uten å regne?

Oppgitt: Eulerligningens r-komponent

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

Løsning Oppgave 1

a)



Eulerlign. i roterende koordinatsystem:

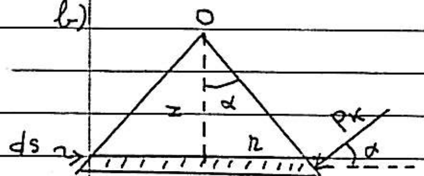
$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2\vec{e}_r + \vec{g}$$

Da ρ er konstant: $\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0$, som gir $\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}r^2\omega^2 - gz + C$. Konstanten C bestemmes av at $p = p_0$ i origo, dvs. $C = p_0/\rho$. Altså

$$p(r,z) = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z + p_0, \quad \text{hvor } \gamma = \rho g.$$

Fri overflate, $p = p_0$, gir $z = \frac{r^2\omega^2}{2g}$

b)



Av fig.: $r = -z\tan\alpha$, slik at

$$p_K(z) = \frac{1}{2}\rho z^2\omega^2\tan^2\alpha - \gamma z + p_0$$

Vertikalkomponent av trykkraften på et flateelement dA: $dF_z = -p_K(z)\sin\alpha\cdot dA$, hvor arealet dA av en ring tilsvarende linjeelementet ds langs kjegleflaten er

$$dA = 2\pi r\,ds = 2\pi\cdot(-z\tan\alpha)\cdot dz/\cos\alpha = -2\pi(\tan\alpha/\cos\alpha)\cdot z\,dz.$$

Altså $dF_z = 2\pi p_K\cdot\tan^2\alpha\cdot z\,dz$. Integrerer:

$$F_z = \int_{\text{kjegle}} dF_z = 2\pi\tan^2\alpha\int_{-H}^{0}\left(\frac{1}{2}\rho z^3\omega^2\tan^2\alpha - \gamma z^2 + p_0 z\right)dz$$

$$= 2\pi\tan^2\alpha\Big|_{-H}^{0}\left(\frac{1}{8}\rho z^4\omega^2\tan^2\alpha - \frac{1}{3}\gamma z^3 + \frac{1}{2}p_0 z^2\right) =$$

$$= 2\pi\tan^2\alpha\left(-\frac{1}{8}\rho H^4\omega^2\tan^2\alpha - \frac{1}{3}\gamma H^3 - \frac{1}{2}p_0 H^2\right). \text{ Da } H^2\tan^2\alpha = R^2:$$

$$F_z = -\pi R^2\left(\frac{1}{4}\rho\omega^2R^2 + \frac{2}{3}\gamma H + p_0\right).$$ Her kan bidraget fra p_0 utelates.

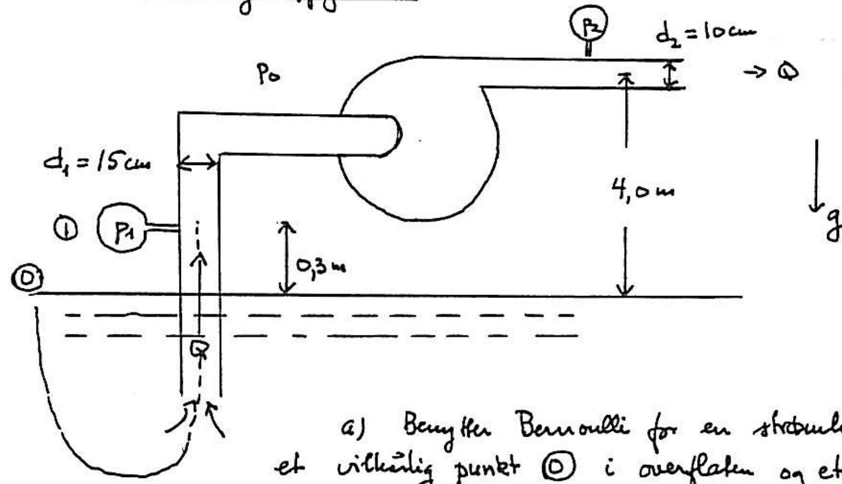
Alternativt kan en innføre flateelementets vertikale projeksjon $dA_z = 2\pi r\,dr$ og integrere over r:

$$F_z = -\int_0^R p_K\cdot 2\pi r\,dr = -2\pi\int_0^R\left(\frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + \gamma\cdot r\cot\alpha + p_0\right)r\,dr$$

$$= -2\pi\left(\frac{1}{8}\rho\omega^2R^4 + \frac{1}{3}\gamma R^3\cot\alpha + \frac{1}{2}p_0R^2\right)$$

$$= -\pi R^2\left(\frac{1}{4}\rho\omega^2R^2 + \frac{2}{3}\gamma H + p_0\right),$$ som før.

Løsning Oppgave 2



a) Benytter Bernoulli for en strømlinje mellom et vilkårlig punkt ⓪ i overflaten og et punkt i snittet ①:

$$\frac{p_0}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V_0^2}_{=0} + gz_0 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1$$

$$V_1 = \sqrt{2\left[\frac{p_0-p_1}{\rho} + g(z_0-z_1)\right]} = \sqrt{2\left[\frac{(101-95)\cdot10^3}{10^3} + 10\cdot(-0{,}3)\right]} = 2{,}45\ \mathrm{m/s}$$

$$Q = A_1V_1 = \frac{1}{4}\pi d_1^2\cdot V_1 = \frac{1}{4}\pi\cdot 0{,}15^2\cdot 2{,}45 = 0{,}043\ \mathrm{m^3/s}$$

b) Mekanisk energiligning langs strømlinje, fra ⓪ til ②:

$$\left(\frac{p_0}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V_0^2}_{=0} + gz_0\right) - w_s = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2\right) + gh_L$$

$$-w_s = \frac{p_2-p_0}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + g(z_2-z_0) + gh_L.$$

V_2 finnes av $V_2 = V_1\frac{A_1}{A_2} = V_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 2{,}45\left(\frac{15}{10}\right)^2 = 5{,}51$ m/s

$\Rightarrow$

$$-w_s = (180-101) + \frac{1}{2}\cdot 5{,}51^2 + 10\cdot 4 + 10\cdot 0{,}8 = 142{,}2\ \mathrm{m^2/s^2}$$

Dette er effekt per masseenhet. For å finne P, må en gange med ρ, og deretter med volumgjennomstrømningen Q:

$$P = (-w_s)\cdot\rho\cdot Q = 142{,}2\cdot 10^3\cdot 0{,}043 = 6115\ \mathrm{W} \simeq 6{,}12\ \mathrm{kW}$$

Løsning Oppgave 3

a) Kontinuitet av V_θ ved $r = r_0$ gir $\underline{A = \alpha r_0^3}$, slik at

$$V_\theta = \frac{\alpha r_0^3}{r} \quad \text{for } r \ge r_0.$$

Virvling $\zeta_z \equiv (\nabla \times \vec{V})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_\theta)$.

$r \le r_0$: $\underline{\zeta_z} = \underline{3\alpha r}$, $\quad r > r_0$: $\underline{\zeta_z = 0}$

b) Ettersom $\zeta_z = 0$ for $r > r_0$ er Bernoullis konstant i dette området den samme for alle punkter:

$$p(r) + \frac{1}{2}\rho V^2(r) = p_\infty$$

$r > r_0$: $\underline{p(r) = p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{\alpha^2 r_0^6}{r^2}}$

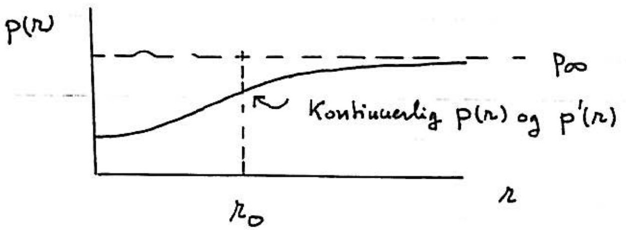
For $r < r_0$ er $\zeta_z \neq 0$ slik at Eulers ligning må benyttes:

$$-\frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \text{altså} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \alpha^2 r^3$$

$p(r) = \frac{1}{4}\rho\alpha^2 r^4 + C$, hvor C bestemmes av at $p(r)$ er kontinuerlig ved $r = r_0$: $p_\infty - \frac{1}{2}\rho\alpha^2 r_0^4 = \frac{1}{4}\rho\alpha^2 r_0^4 + C$

$C = p_\infty - \frac{3}{4}\rho\alpha^2 r_0^4$.

Altså, for $r \le r_0$ er $\underline{p(r) = p_\infty - \frac{1}{4}\rho\alpha^2(3r_0^4 - r^4)}$



Løsning Oppgave 3, forts.

3c) Strømfunksjonen Ψ finnes av $V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$

$r \le r_0$: $-\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \alpha r^2$, $\quad \underline{\Psi = -\frac{1}{3}\alpha r^3}$

$r > r_0$: $-\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\alpha r_0^3}{r}$, $\quad \underline{\Psi = -\alpha r_0^3 \ln r}$

Av $\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)$ finnes

$r \le r_0$: $\underline{\nabla^2\Psi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-\alpha r^3) = \underline{-3\alpha r}$

$r > r_0$: $\underline{\nabla^2 \Psi} = \underline{0}$

Stemmer med den generelle relasjonen $\nabla^2 \Psi = -\zeta_z$ i plane polarkoordinater.