Løsningsforslag - Øving 12

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 16.2

1

$$f(z) = \sin^4\left(\frac{z}{2}\right)$$

Funksjonen $f(z)$ har nullpunkt for

$$\frac{z}{2} = \pi n$$
$$z = \underline{2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...}$$

og de er av fjerde orden. Er man i tvil om dette er det alltid mulig å sjekke ordenen ved å derivere:

$$f'(z) = \sin^3\left(\frac{z}{2}\right)\left[2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right], \quad => \quad f'(2\pi n) = 0$$
$$f''(z) = \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\left[3\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right], \quad => \quad f''(2\pi n) = 0$$
$$f^{(3)}(z) = \sin\left(\frac{z}{2}\right)\left[3\cos^3\left(\frac{z}{2}\right) - 5\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right], \quad => \quad f^{(3)}(2\pi n) = 0$$
$$f^{(4)}(z) = 2\cos(2z) - \frac{\cos z}{2}, \quad => \quad f^{(4)}(2\pi n) = 3/2 \neq 0$$

7

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+2i)^2} - \frac{z}{z-i} + \frac{z+1}{(z-i)^2} \\ &= \frac{1}{(z+2i)^2} + \frac{-z(z-i)+z+1}{(z-i)^2} \\ &= \frac{(z-i)^2 + (z+2i)^2(-z^2+zi+z+1)}{(z+2i)^2(z-i)^2} \end{aligned}$$

Uttrykket i nevneren er lik null for $z = -2i$ og $z = i$. For $z = -2i$ er uttrykket i telleren lik -9, mens for $z = i$ er uttrykket lik $-9 - 9i$, altså $\neq 0$ i begge tilfellene. Dermed har funksjonen $f(z)$ har en singularitet av andre orden i $z = -2i$ og en singularitet av andre orden i $z = i$.

9 Funksjonen

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - \pi}$$

har en såkalt "removable singularity" i $z = \pi$, fordi denne singulariteten kan fjernes ved å sette $f(\pi) = -1$, siden

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\pi} \frac{\sin z}{z-\pi} &= \lim_{z\to\pi}\frac{\cos z}{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 16.3

$\boxed{1}$ Funksjonen

$$f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^6}$$

har en pol i $z = 0$ av 5. orden (ikke 6. orden på grunn av felles nullpunkt i $z = 0$ for teller og nevner). Finner residyen ved å se på laurentrekken:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}z^{2n-5}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{z^5} - \frac{2^3}{3!z^3} + \frac{2^5}{5!z} - ... \end{aligned}$$

Finner dermed at

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = \frac{2^5}{5!} = \underline{\frac{4}{15}}$$

$\boxed{4}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathrm{e}^{1/(1-z)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(z-1)^{-n} \\ &= 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{6(z-1)^3} + ... \end{aligned}$$

Funksjonen $f(z)$ har en essensiell singularitet i $z = 1$. Residuen er koeffisienten foran $(z-1)^{-1}$ i laurentrekka:

$$\underline{\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -1}$$

$\boxed{6}$

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{z-23}{z^2-4z-5}\,\mathrm{d}z, \qquad C: |z-2-i| = 3.2 \\ &= \oint_C \frac{z-23}{(z-5)(z+1)}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Integranden har singulariteter i $z = 5$ og $z = -1$ av første orden, som begge ligger innenfor kurven C. Delbrøksoppspalter:

$$\frac{z-23}{(z-5)(z+1)} = \frac{-3}{z-5} + \frac{4}{z+1}$$

$$\oint_C \left(\frac{-3}{z-5} + \frac{4}{z+1}\right) \mathrm{d}z = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=5} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)\right)$$
$$= 2\pi i \left(\lim_{z\to 5} \frac{z-23}{z+1} + \lim_{z\to -1} \frac{z-23}{z-5}\right)$$
$$= 2\pi i(-3+4)$$
$$= \underline{2\pi i}$$

$\boxed{8}$

$$\oint_C e^{\frac{1}{z}} dz, \qquad C : |z| < 1 \text{ mot klokka}$$

Vet at $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad |z| < \infty \qquad \Longrightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \quad |z| > 0$

Essensiell singularitet i $z = 0 \quad \Longrightarrow \oint_C e^{\frac{1}{z}} dz = 1 \cdot 2\pi i = 2\pi i \qquad$ (Koeff. til $z^{-1} = 1$)

$\boxed{9}$

$$\oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin(4z)} dz, \qquad C : |z| = 1.5$$

e^{-z^2} er analytisk for $|z| < 2$

$$\sin(4z) = 0 \Longleftrightarrow 4z = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \Longleftrightarrow z = \frac{n\pi}{4} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$\Longrightarrow$ $\sin(4z)$ har nullpunker av orden 1 på innsiden av C: $z = 0 \pm \frac{\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin(4z)} dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{4}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z)\right)$$
$$= 2\pi i \left(\frac{e^{-z^2}}{4\cos(4z)}\Big|_{z=-\frac{\pi}{4}} + \frac{e^{-z^2}}{4\cos(4z)}\Big|_{z=0} + \frac{e^{-z^2}}{4\cos(4z)}\Big|_{z=\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$= \frac{\pi i}{2}\left(-e^{-\frac{\pi^2}{16}} + 1 - e^{-\frac{\pi^2}{16}}\right) = \frac{1}{2}\pi i \left(1 - 2e^{-\frac{\pi^2}{16}}\right)$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 16.4

$\boxed{3}$ Setter $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ => $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$, $\sin\theta = (z - z^{-1})/(2i)$, $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z/(iz)$, slik at

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \oint_C \frac{\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{5 - 4(z+z^{-1})/2}\,\frac{\mathrm{d}z}{iz}, \qquad C : |z| = 1 \\
&= \frac{-1}{4i} \oint_C \frac{z^2 - 2 + z^{-2}}{5z - 2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{i}{4} \oint_C \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(-2z^2 + 5z - 2)}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{-i}{8} \oint_C \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(z-2)(z-\frac{1}{2})}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Integranden $f(z)$ har en andreordens pol i $z = 0$, en førsteordens pol i $z = 2$ og en førsteordens pol i $z = 1/2$. Av disse ligger $z = 0$ og $z = 1/2$ innenfor enhetssirkelen. Integralet blir dermed

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \left(\frac{-i}{8}\right) 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1/2} f(z)\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\lim_{z\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}\right)\right) + \lim_{z\to 1/2}\left(\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(z-2)}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\lim_{z\to 0}\left(\frac{(4z^3 - 4z)(z^2 - \frac{5}{2}z + 1) - (z^4 - 2z^2 + 1)(2z - \frac{5}{2})}{(z^2 - \frac{5}{2}z + 1)^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{2^{-4} - 2\cdot 2^{-2} + 1}{2^{-2}(2^{-1} - 2)}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) \\
&= \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}$$

$x^4 + 1$ har 4 nullpunkter:

$$\begin{aligned}
x^4 + 1 = 0 \Longleftrightarrow & x^2 = i \implies x_1 = e^{\frac{\pi i}{4}} \quad x_2 = e^{\frac{5\pi i}{4}} \\
& x^2 = -i \implies x_3 = e^{\frac{3\pi i}{4}} \quad x_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}}
\end{aligned}$$

$\implies$ To nullpunkter i øvre halvplan: x_1 og x_3. Begge er av orden 1.

$$\begin{aligned}
\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{x=x_1} \left(\frac{x^2+1}{x^4+1} \right) + \operatorname*{Res}_{x=x_3} \left(\frac{x^2+1}{x^4+1} \right) \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{i+1}{4e^{3i\frac{\pi}{4}}} + \frac{-i+1}{4e^{9i\frac{\pi}{4}}} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{i+1}{4\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)} + \frac{-i+1}{4\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{i+1}{4(-\sqrt{2}^{-1} + i\sqrt{2}^{-1})} + \frac{-i+1}{4(\sqrt{2}^{-1} + i\sqrt{2}^{-1})} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}\pi i}{4} \left(\frac{i+1}{-1+i} + \frac{-i+1}{1+i} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi i}{2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{1} \right) \right) = \sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Ser på

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^4 - 1} \\
&= \frac{1}{(z^2+1)(z^2-1)} \\
&= \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)}
\end{aligned}$$

Funksjonen har førsteordens pol i $z = \pm 1$ og $z = \pm i$. Av disse ligger $z = i$ i det øvre planet, mens $z = \pm 1$ ligger langs x-aksen. Vi får dermed

$$\begin{aligned}
&\text{pr. v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - 1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) \right) \\
&= 2\pi i \frac{1}{(i+i)(i+1)(i-1)} + \pi i \left(\frac{1}{(-1+i)(-i-1)(-1-1)} + \frac{1}{(1+i)(1-i)(1+1)} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{-4i} \right) + \pi i \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \underline{-\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

$\boxed{10}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 3x^2 - 4}$$

Nullpunkter til $x^4 + 3x^2 - 4$:

$$\begin{aligned}
&\text{La } y = x^2 \implies y^2 + 3y - 4 = 0 \\
&\qquad \implies y_1 = 1, \quad y_2 = -4 \\
&\qquad \implies x_1 = -1 \in \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad x_2 = 1 \in \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad x_3 = 2i \quad \text{Øvre halvplan} \\
&\qquad\qquad x_1 = -2i \quad \text{Nedre halvplan}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{pr. v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 3x^2 - 4} = \\
&2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \right) + \pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \right) + \pi i \operatorname*{Res}_{z=1} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \right) \\
&2\pi i \left(-\frac{1}{20i} \right) + \pi i \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) = -\frac{\pi}{10},
\end{aligned}$$

der vi har brukt

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=2i} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \right) = \left[\frac{1}{4x^3 + 6x} \right]_{z=2i} = \frac{1}{-32i + 12i} = \frac{1}{-20i} \\
&\operatorname*{Res}_{z=-1} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \right) = \left[\frac{1}{4x^3 + 6x} \right]_{z=-1} = \frac{1}{-4 - 6} = -\frac{1}{10} \\
&\operatorname*{Res}_{z=1} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \right) = \left[\frac{1}{4x^3 + 6x} \right]_{z=1} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$