Chapter 13.3

13.3:6 Finn området i det komplekse planet gitt ved

$$\operatorname{Re}(1/z) < 1.$$

Løsning:
La $z = x + iy$. Da er

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

så $\operatorname{Re}(1/z) < 1$ hvis og bare hvis $\frac{x}{x^2+y^2} < 1$. Dvs.

$$\begin{aligned} 0 &< y^2 + x^2 - x \\ &= y^2 + (x-1/2)^2 - 1/4 \\ &\iff \\ (1/2)^2 &< y^2 + (x-1/2)^2. \end{aligned}$$

Altså området *utenfor* sirkelen med radius $1/2$ og sentrum i $(1/2, 0)$.

13.3:15 Avgjør om f gitt ved

$$f(z) = \begin{cases} |z|^2 \operatorname{Im}(1/z), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $z = 0$.

Løsning:
La $z \neq 0$. Fra oppgave 6 ser vi at

$$f(z) = |z|^2 \frac{-y}{x^2+y^2} = -y$$

og dermed er

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{x,y\to 0} f(x+iy) \\ &= \lim_{x,y\to 0} -y \\ &= 0 = f(0) \end{aligned}$$

og f er kontinuerlig.

$\boxed{\text{13.3:16}}$ Avgjør om f gitt ved

$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{Im}(z^2)/|z|^2, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $z = 0$.

Løsning:
Vi beregner at for $z \neq 0$ er $f(z) = f(x+iy) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Funksjonen er *ikke* kontinuerlig i $z = 0$ fordi på langs diagonalen $x = y$ er

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x+ix) &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} 1 \\ &= 1 \neq 0 = f(0). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{13.3:18}}$ Finn $f'(i)$ når

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Løsning:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{(z-i)'(z+i) - (z-i)(z+i)'}{(z+i)^2} \\ &= \frac{2i}{(z+i)^2} \\ &\Rightarrow \\ f'(i) &= \frac{2i}{(2i)^2} \\ &= \frac{1}{2i} \\ &= -\frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Chapter 13.4

Cauchy-Riemann: Teorem 2 s. 627.

$$\begin{gathered} u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x, \qquad \text{der } u_x, u_y, v_x, v_y \in C(D). \\ \Rightarrow \\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad \text{er analytisk i } D. \end{gathered}$$

$\boxed{\text{13.4:2}}$ Er

$$f(z) = iz\overline{z}$$

analytisk?

Løsning:

$$f(x+iy) = i(x^2+y^2) = u(x,y) + iv(x,y)$$

der $u \equiv 0$ og $v = x^2 + y^2$. Dermed er f ikke analytisk ved teorem 1 s. 625 fordi

$$u_x = 0 \neq 2y = v_y.$$

$\boxed{\text{13.4:10}}$ Er

$$f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

analytisk?

Løsning:
Skriv z på polarform: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ der $-\pi < \theta \leq \pi$. Da er

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \\ &= \ln r + i\theta \\ &= u(r,\theta) + iv(r,\theta) \end{aligned}$$

der $u = \ln r$ og $v = \theta$. Dermed er

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r}, \\ v_\theta &= 1, \\ v_r &= 0 = u_\theta \end{aligned}$$

som tilfredsstiller Cauchy-Riemann-ligningene i polarkoordinater:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

Men f er *ikke* analytisk på noe område D som inneholder deler av den negative x-aksen: La $r_0 > 0$ og anta at $-r_0 \in D$. Da er

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to -\pi^+} f(r_0(\cos\theta + i\sin\theta)) &= \lim_{\theta \to -\pi^+} (\ln r_0 + i\theta) \\ &= \ln r_0 - \pi i \end{aligned}$$

som ikke er lik

$$\begin{aligned} f(r_0(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))) &= f(-r_0) \\ &= \ln r_0 + \pi i \end{aligned}$$

og f er ikke kontinuerlig, og dermed ikke analytisk i D.

$\boxed{\text{13.4:18}}$ Er

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

harmonisk? Isåfall, finn en analytisk funksjon $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Løsning:
Vi har at $u_x = 3x^2 - 3y^2$, $u_{xx} = 6x$, $u_y = -6xy$, $u_{yy} = -6x$, så

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$$

og u er harmonisk.

Vi må finne en funksjon v slik at u og v tilfredsstiller C-R-ligningene.

$$\begin{aligned}
v_y &= u_x = 3x^2 - 3y^2 \\
&\iff \\
v &= \int (3x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= 3x^2y - y^3 + C_1(x). \\
v_x &= -u_y = 6xy \\
&\iff \\
v &= \int 6xy\,\mathrm{d}x \\
&= 3x^2y + C_2(y).
\end{aligned}$$

Dermed må vi ha

$$\begin{aligned}
0 &= v - v \\
&= 3x^2y - y^3 + C_1(x) - (3x^2y + C_2(y)) \\
&= -y^3 + C_1(x) - C_2(y).
\end{aligned}$$

Så $C_1(x) = c$ konstant og $C_2(y) = -y^3 + c$. Et naturlig valg er sette $c = 0$ og vi har den analytiske funksjonen

$$f(z) = u + iv = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

$\boxed{\text{13.4:19}}$ Er

$$u(x,y) = e^{-x}\sin 2y$$

harmonisk? Isåfall, finn en analytisk funksjon $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Løsning:
Vi har at $u_x = -e^{-x}\sin 2y$, $u_{xx} = e^{-x}\sin 2y$ og $u_y = 2e^{-x}\cos 2y$, $u_{yy} = -4e^{-x}\sin 2y$ så

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -3e^{-x}\sin 2y \neq 0$$

og u er ikke harmonisk.

$\boxed{\text{13.4:30}}$ La f være analytisk. Vis at hver av de følgende betingelsene er tilstrekkelig for at f er konstant.

a)
$$\operatorname{Re} f(z) = c, \qquad \text{konstant.}$$

b)
$$\operatorname{Im} f(z) = c, \qquad \text{konstant.}$$

c)
$$f'(z) = 0.$$

Løsning: a)
Skriv $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ der $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = c_1$. Fra C-R-ligningene vet vi at

$$\begin{aligned} v_y &= u_x \\ &= 0, \\ &\Rightarrow \\ v &= h(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= v_x = -u_y = 0, \\ &\Rightarrow \\ v &= h(x) = c_2. \end{aligned}$$

Altså er
$$f(z) = u + iv = c_1 + ic_2, \qquad \text{konstant.}$$

Løsning: b)
Løses på samme måte som i **a)**.

Løsning: c)
Anta at $f'(z) = 0$. Ved formel (4) og (5) i boken er

$$\begin{aligned} 0 &= f'(z) \\ &= u_x + iv_x \\ 0 &= f'(z) \\ &= -iu_y + v_y. \end{aligned}$$

Altså er $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, og etter integrering finner vi at

$$f(z) = z_0, \qquad \text{konstant.}$$

Chapter 13.5

$\boxed{\text{13.5:20}}$ Finn alle løsninger til ligningen

$$e^z = 4 + 3i.$$

Tegn noen av dem i det komplekse planet.

Løsning:
Vi skriver $4+3i$ på polarform: $r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ og $\theta_0 = \arctan 3/4 \approx 0.64$.

$$4 + 3i = 5(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0).$$

La $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
5(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) &= 4 + 3i \\
&= e^z \\
&= e^x(\cos y + i\sin y) \\
&\iff \\
e^x = 5 \qquad \text{og} \qquad y + 2k\pi &= \theta_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Dvs. Løsningen på ligningen er alle tallene $z_k = x + iy_k$ der $x = \ln 5$ og $y_k = \theta_0 + 2k\pi$:

$$z_k = \ln 5 + i(\arctan 3/4 + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Chapter 13.6

$\boxed{\text{13.6:10}}$ Skriv

$$\sinh(3+4i)$$

på formen $u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$.

Løsning:
Vi bruker definisjonen $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$:

$$\begin{aligned}
\sinh(3+4i) &= \frac{1}{2}(e^{3+4i} - e^{-3-4i}) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^3(\cos 4 + i\sin 4) - e^{-3}(\cos(-4) + i\sin(-4))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^3(\cos 4 + i\sin 4) - e^{-3}(\cos 4 - i\sin 4)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 4(e^3 - e^{-3}) + i\sin 4(e^3 + e^{-3})\right) \\
&= \cos 4 \sinh 3 + i \sin 4 \cosh 3.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{13.6:16}}$ Løs ligningen

$$\sin z = 100.$$

Løsning:
La $z = x + iy$. Formel (6b) i boken gir

$$\begin{aligned}
100 &= \sin z \\
&= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.
\end{aligned}$$

Altså må

i) $\sin x \cosh y = 100$

ii) $\cos x \sinh y = 0$

Vi ser at $y = 0$ *ikke* er en mulighet i ii) ettersom $\cosh 0 = 1$ og $\sin x = 100$ har ingen løsninger. Dermed må $\cos x = 0$, men det er bare x på formen $x = \pi/2 + 2k\pi$ som også vil gi løsninger i i), ($\cosh y$ er positiv). Ligningen er nå redusert til

$$\begin{aligned} 100 &= \cosh y \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \\ 0 &= e^y - 200 + e^{-y} \\ &\iff \\ 0 &= e^{2y} - 200e^y + 1 \\ &= u^2 - 200u + 1, \qquad u := e^y. \end{aligned}$$

Denne andregradsligningen gir $u = 100 \pm \sqrt{9999}$, så løsningene på ligningen er de to horisontale stripene

$$\begin{aligned} x &= \pi/2 + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\ y &= \ln(100 \pm \sqrt{9999}) = \pm \ln(100 + \sqrt{9999}). \end{aligned}$$

(Bruk konjugatsetningen for å vise den siste likheten for y).

$\boxed{13.6{:}19}$ Løs ligningen

$$\sinh z = 0.$$

Løsning:
La $z = x + iy$. Formelen utledet i oppgave 13.6:1 gir

$$\begin{aligned} 0 &= \sinh z \\ &= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \\ &\iff \\ \sin y = 0 \qquad &\text{og} \qquad \sinh x = 0 \end{aligned}$$

Altså, $x = 0$ og $y = k\pi$:

$$z = ik\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$