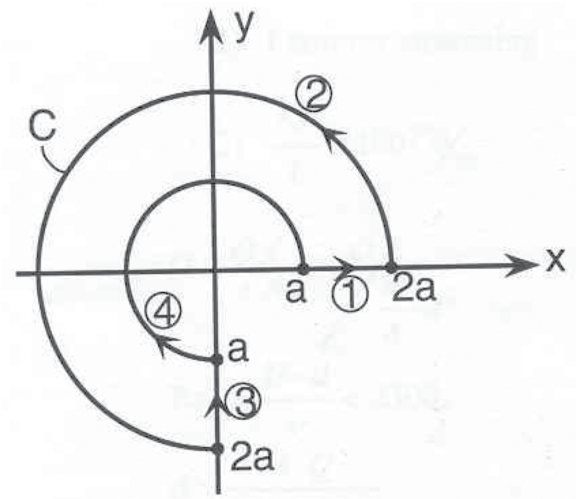
Løsningsforslag til Øving 9
Høst 2015 (Nummerne refererer til White's 6. utgave)

Oppgave 8.012

Vi skal finne sirkulasjonen Γ langs kurven C gitt en potensialvirvel i origo med styrke K. I oppgaven står det at vi skal beregne kurveintegralet med klokka i motsetning til det som er vanlig; definisjonen av Γ, ligning (8.15) forutsetter integrasjon mot klokka, og vi må generelt huske et minustegn dersom vi integrerer motsatt vei slik oppgaven sier. Her integrerer vi *mot* klokka.



Sirkulasjonen er da definert som

$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}. \tag{1}$$

Vi har sett at en potensialvirvel har hastighetskomponentene (i polarkoordinater)

$$v_r = 0, \qquad v_\theta = \frac{K}{r}. \tag{2}$$

Vi deler kurveintegralet opp i fire biter som vist i figuren. Linjeelementene $d\vec{s}$ langs de respektive kurvene er $\vec{e}_r dr$, $\vec{e}_\theta r d\theta$, $-\vec{e}_r dr$ og $-\vec{e}_\theta r d\theta$ for henholdsvis kurvestykke (1),(2),(3) og (4):

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{(1)} v_r dr + \int_{(2)} v_\theta r d\theta + \int_{(3)} v_r dr + \int_{(4)} v_\theta r d\theta \\ &= 0 + \int_0^{3\pi/2} \frac{K}{2a} \cdot 2a d\theta + 0 + \int_{3\pi/2}^{0} \frac{K}{a} \cdot a d\theta = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Hadde vi integrert med klokka, hadde svaret naturligvis blitt det samme!

Dersom vi hadde husket fra tidligere øvinger at hastighetsfeltet rundt en potensialvirvel er virvlingsfritt bortsett fra origo, kunne ha sett løsningen direkte ved bruk av Stokes teorem:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dA \tag{4}$$

(S er flaten som omsluttes av C. Når C går mot klokka, peker $\vec{n}$ ut av papirplanet). Ettersom kurven ikke omslutter origo, er $\nabla \times \vec{v} = 0$ overalt innenfor konturen, og Γ blir null.

Overflateintegralet i (4) "teller opp" all virvlingen innenfor kurven; virvlingen Γ er dermed et mål på "hvor mye virvling" kurven omslutter.

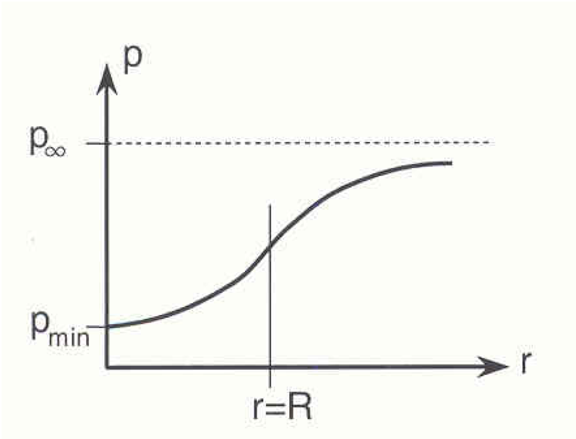
Oppgave 8.014

Vi skal bestemme virvlingen og trykkfordelingen i en tornado gitt modellen:

$$v_r = v_z = 0, \qquad v_\theta = \omega r \text{ for } r < R, \qquad v_\theta = \omega R^2/r \text{ for } r > R. \tag{5}$$

Strømningen er rotasjonsfri (virvlingsfri) hvis

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = 0. \tag{6}$$



I vår modell er

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) = \begin{cases} 2\omega, & \text{for } r \leq R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases} \tag{7}$$

Trykket i radiell retning finnes vha. r-komponenten av impulsligningen, ligning D5 i White:

$$\begin{aligned} 0 + 0 - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + 0 + 0 \\ \Longrightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr} &= \begin{cases} \rho\omega^2 r, & \text{for } r \leq R \\ \rho\omega^2 R^4/r^3 & \text{for } r > R \end{cases}. \end{aligned} \tag{8}$$

Merk at vi over har konkludert med at trykket ikke endrer seg i θ- eller z-retning; det kan det ikke, da hastighetsfeltet er konstat mhp. θ og z. Vi integrerer opp mhp. r på høyre og venstre side (konstantene som fremkommer i integrasjonen ville generelt være funksjoner av θ og z):

$$p_{r\leq R} = \int \rho\omega^2 r dr = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + C_1 \tag{9}$$

$$p_{r>R} = \int \frac{\rho\omega^2 R^4 dr}{r^3} = -\frac{\rho\omega^2 R^4}{2r^2} + C_2. \tag{10}$$

For å bestemme konstantene bruker vi grensebetingelser for trykket:

$$p_{r>R} \to p_\infty \text{ når } r \to \infty \Longrightarrow C_2 = p_\infty \tag{11}$$

$$p_{r\leq R} \to p_{r>R} \text{ når } r \to R \Longrightarrow C_1 = p_\infty - \rho\omega^2 R^2. \tag{12}$$

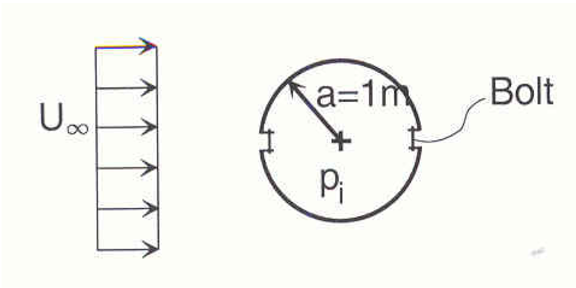
Vi får løsningen

$$p(r) = \begin{cases} p_\infty - \rho\omega^2 R^2(1 - r^2/(2R^2)), & \text{for } r \leq R \\ p_\infty - \rho\omega^2 R^4/(2r^2) & \text{for } r > R \end{cases}. \tag{13}$$

Det laveste trykket er i origo, der trykket er $p_{\min} = p_\infty - \rho\omega^2 R^2$.

Oppgave 8.046

Vi skal beregne boltekreftene i Newton gitt forutsetning om friksjonsfri strømning og tallverdiene $U_\infty = 25\text{m/s}$, $D = 2\text{m}$, $p_i = 50\text{kPa}$ (overtrykk), $n = 10$ bolter/m på hver side.



Fra potensialteorien modelleres strømningen rundt en sylinder ved uniform strømning pluss en dublett (se oppgave 8.47). Etter å ha funnet hastighetskomponentene v_r og v_θ, funnet styrken på dubletten $\lambda = U_\infty D^2/4$ fra kravet om $v_r = 0$ på sylinderveggen, finner vi p_s fra Bernoullis ligning. Vi kan bruke Bernoulli fordi strømningen er friksjonsfri. Bernoullis ligning blir også særlig enkel å bruke når srømningen som her er virvlingsfri; da kan vi sette opp Bernoullis ligning mellom to vilkårlige punkter, uavhengig av om det finnes en strømlinje som forbinder dem. Bernoulli mellom et punkt uendelig langt unna til et punkt på rørveggen, $(r = D/2, \theta)$:

$$p_s - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (1 - 4\sin^2\theta). \tag{14}$$

Vi ser på halve sylinderen. Trykket både inni og utenfor er gitt som overtrykk ("gage"). Den resulterende kraften pr. lengdeenhet fås ved å integrere trykket over sylinderflaten. Trykk "oppover" og "nedover" fra innsiden:

$$F_i = p_i D = 100\text{kN/m}. \tag{15}$$

Trykk fra utsiden av røret

$$F_s = \int_0^\pi (p_s - p_\infty)\sin\theta r d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (1 - 4\sin^2\theta)\sin\theta r d\theta = -1275\text{N/m}. \tag{16}$$

Total kraft pr. bolt blir

$$F_{\text{Bolt}} = \frac{F_i - F_s}{2n} = \frac{100\,^{\text{kN}}/_{\text{m}} + 1.3100\,^{\text{kN}}/_{\text{m}}}{20\,^{\text{bolt}}/_{\text{m}}} = 5065\,\text{bolt/m} \tag{17}$$

i hver retning.

Oppgave 8.057

I prinsippet er det mulig å bruke roterende sylindere som flyvinger. Vi har en sylinder med diameter 30cm som roterer med $\omega = 2400$ omdreininger pr. minutt=251, 3 rad/s. Vingen skal løfte et 55kN fly som flyr med hastighet 100 m/s. Hva må sylinderlengden være? Hvor stor effekt kreves for å holde denne hastigheten? Vi neglisjerer lengdeeffekter på den roterende vingen.

Løsning med potensialteori

Strømfunksjonen til en uniform strømning forbi en sylinder med sirkulasjon er (se figur 8.14 i boka):

$$\psi = U_\infty \sin\theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right) - K \ln(r/a) \tag{18}$$

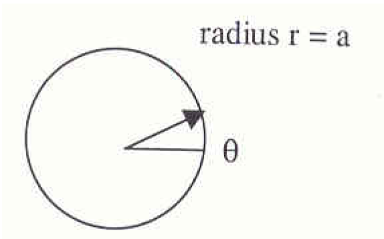
der a er sylinderens radius. K er et mål på sirkulasjonens styrke. Vi er interessert i å regne ut løftet på sylinderen og trenger da et uttrykk for trykket langs sylinderoverflaten. Ettersom virvlingen er null kan vi bruke Bernoulli. Vi vet at $v_r = 0$ på sylinderoverflaten. v_θ er gitt ved

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{K}{r}. \tag{19}$$

Ved sylinderoverflaten er $v_\theta(r = a) = -U_\infty \sin\theta + K/a$. Vi bruker nå Bernoulli mellom uendeligheten og et punkt på sylinderoverflaten i vinkel θ:

$$\begin{aligned} P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 &= P_s + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2 (r = a) \\ \Longrightarrow P_s &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left(1 - 4\sin^2\theta + \frac{4K}{U_\infty a}\sin\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 a^2} \right). \end{aligned} \tag{20}$$

Med θ



definert som i figuren, finner vi løftekraften som ($dA = ab \cdot d\theta$ der b er sylinderens lengde)

$$\int (P_s - P_\infty)\sin\theta dA = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 ab \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta - 4\sin^3\theta + \frac{4K}{U_\infty a}\sin^2\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 a^2}\sin\theta \right) d\theta. \tag{21}$$

Vi vet at integralet over en hel omdreining av sinus opphøyd i en odde potens er null, og dermed er det kun tredje ledd som ikke er null. Vi får

$$L = -\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 ab \frac{4K}{U_\infty a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) d\theta = -2\pi K b \rho U_\infty, \tag{22}$$

så, med $K = \omega a^2$, $\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{r}} \frac{2400 \frac{\text{r}}{\text{min}}}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}} = 251\,\text{rad/s}$,

$$b = \frac{-L}{2\pi K \rho U_\infty} = \underline{12,6\text{m}}. \tag{23}$$

Med potensialteori er drag på sylinderen null, så det kreves ingen effekt for å holde flyet igang. Dette stemmer dårlig med virkeligheten.

Løsning utifra eksperimentelle data, figur 8.15

Vi bruker nå eksperimentelle data for løft på roterende sylinder som gitt i figur 8.15 i White. "Hastighetsforholdet":

$$\frac{a\omega}{U_\infty} = 0.38\,\text{rad}. \tag{24}$$

Vi leser av figuren at $C_L \approx 0.5$ og $C_D \approx 1.5$. Løser ligning 8.40 med hensyn på b når $L = 55000\text{N}$:

$$b = \frac{L}{C_L \rho U_\infty^2 a} = \underline{61\text{m}} \tag{25}$$

Draget er nå gitt ved

$$D = C_D \frac{\rho U_\infty^2}{2} \cdot 2ab = 164700\text{N}. \tag{26}$$

Påkrevet effekt blir $P = DU_\infty = 16.47\text{MW}$, som er en formidabel effekt! Her er heller ikke effekten som trengs for å holde sylinderen i rotasjon inkludert. Dette er med andre ord en svært lite økonomisk måte å fly på.