

Øving 4, løsningsskisse.

Elektrisk potensial og Gauss' lov.

Oppgave 1. Potensial rundt elektrisk dipol.

a) Med vårt valg av polarvinkel θ ser vi fra figuren at

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \\z &= r \cos \theta \\r &= \sqrt{x^2 + z^2}.\end{aligned}$$

b) Vi bruker superposisjonsprinsippet for å bestemme potensialet fra de to punktladningene. Med punktet (x, z) i en avstand r_1 fra q og en avstand r_2 fra $-q$ får vi

$$\begin{aligned}V(x, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}} \right).\end{aligned}$$

Avstandene r_1 og r_2 uttrykt ved x og z ser vi direkte fra figuren.

c) Potensialet på x -aksen blir

$$V(x, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2/4}} \right) = 0.$$

d) Potensialet på z -aksen blir

$$V(0, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} \right).$$

Legg merke til at vi her må bruke absoluttverditegn hvis vi vil ha *ett* uttrykk som gjelder på *hele* z -aksen. Med $z > a/2$:

$$\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} = \frac{1}{z - a/2} - \frac{1}{z + a/2} = \frac{a}{z^2 - a^2/4}.$$

Med $z < -a/2$:

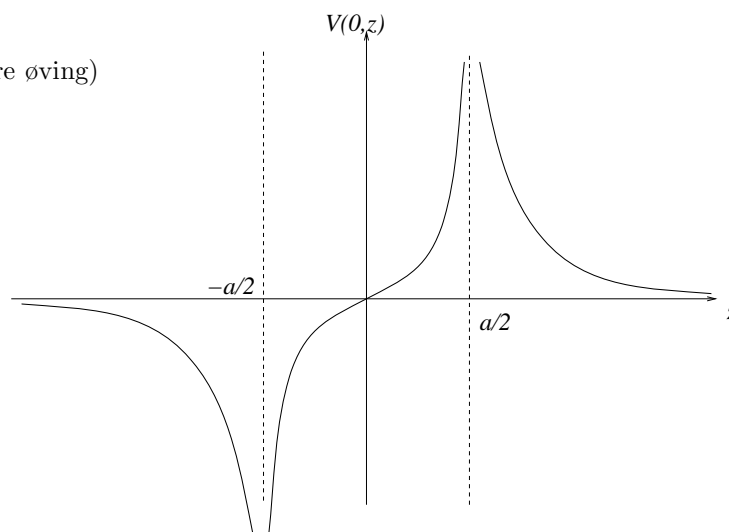
$$\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} = -\frac{1}{z - a/2} + \frac{1}{z + a/2} = -\frac{a}{z^2 - a^2/4}.$$

Med $-a/2 < z < a/2$:

$$\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} = -\frac{1}{z - a/2} - \frac{1}{z + a/2} = -\frac{2z}{z^2 - a^2/4} = \frac{2z}{a^2/4 - z^2}.$$

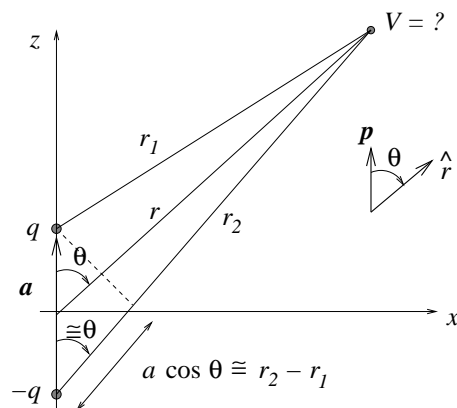
Skisse av $V(0, z)$:

(mer detaljert i en seinere øving)



e) Vi bruker tipset gitt i oppgaveteksten, samt betraktning av følgende figur, og får:

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \\ \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{pr \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$



Vi kan alternativt gå litt saktere fram: Fra figuren ser vi at følgende tilnærmelser kan brukes for r_1 og r_2 .

$$r_1 \approx r - \frac{a}{2} \cos \theta \quad (1)$$

$$r_2 \approx r + \frac{a}{2} \cos \theta. \quad (2)$$

Da blir

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right)^{-1} = \frac{1}{r} (1 - x)^{-1} \approx \frac{1}{r} (1 + x) \quad (3)$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right)^{-1} = \frac{1}{r} (1 + x)^{-1} \approx \frac{1}{r} (1 - x), \quad (4)$$

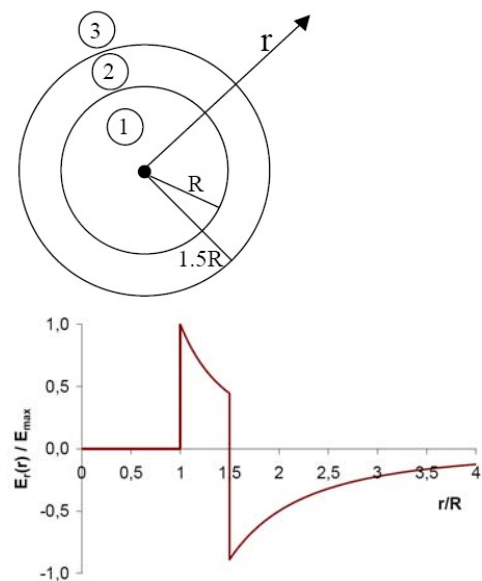
der vi har definert $x = \frac{a \cos \theta}{2r}$, og siden $x \ll 1$ for $r \gg a$ gjelder rekkeutviklingen $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$. Da får vi endelig

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} (1 + x - (1 - x)) = \frac{2x}{r} = \frac{a \cos \theta}{r^2}. \quad (5)$$

Merk at mens potensialet fra en enkelt punktladning ("monopol") avtar som $1/r$, avtar altså potensialet fra en dipol *raskere*, nemlig som $1/r^2$. Dette er rimelig fordi dipolens negative og positive ladning bidrar med motsatt fortegn til det totale potensialet og vil delvis oppheve hverandre. På hele x -aksen vil de to bidragene *eksakt* oppheve hverandre.

Oppgave 2. To kuleskall.

For å finne E -feltet deler vi rommet opp i tre områder: 1, 2 og 3 og bruker Gauss' lov i hver av dem.



1: $r < R$ Innenfor det indre skallet er det ingen ladning $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

2: $R < r < \frac{3}{2}R$. Gaussflate = kuleflate som omslutter indre skall. Ladningen innenfor Gaussflata blir $Q_{\text{encl}} = q$ og Gauss' lov lyder

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

P.g.a. symmetri må \vec{E} være konstant og radiell over kuleflata: $\vec{E} = E(r) \hat{r}$, slik at

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (6)$$

3: $\frac{3}{2}R < r$. Gaussflate = kuleflate som omslutter ytre skall. Ladningen innenfor Gaussflata blir $Q_{\text{encl}} = q - 3q = -2q$.

$$E(r) = \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (7)$$

Til venstre ei skisse av $E(r)$.

b) Vi kan finne potensialet på to måter, enten bruke E -felt fra oppgave a, eller bruke at potensialet fra et kuleskall

er kjent ($V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$), og addere bidraget fra de to kuleskall. Vi presenterer her den første metoden:

$$\Delta V = V_{\frac{3}{2}R} - V_R = - \int_R^{\frac{3}{2}R} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_R^{\frac{3}{2}R} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\frac{3}{2}R} - \frac{1}{R} \right] = - \frac{q}{12\pi\epsilon_0 R}. \quad (8)$$

c) Når skallene blir forbundet, blir potensialforskjellen mellom dem null. Systemet kan betraktes som én leder, som ikke har noen ladning inni. All ladning går da til det ytterste skallet, som får ladning $q - 3q = -2q$.

Oppgave 3. Kule med gitt $Q(r)$.

Oppgaveteksten virker kanskje litt “tricky”, siden det er ladningen som er gitt og ikke ladningstettheten. Men ganske likt oppgaver vi har sett tidligere er dette ei kule med en ladningstetthet som er avhengig av r innenfor, og ingen ladningstetthet utenfor. Det blir faktisk enklere å anvende Gauss’ lov da her ladning Q_{encl} innenfor et visst kuleskall er gitt.

a) Vi bruker Gauss’ lov, med Gaussflate lik ei kule konsentrisk til ladningsfordelinga. For $r \geq R$ er det elektriske feltet som rundt en punktladning ved $r = 0$ og med ladning Q_0 . Dette har vi beregnet flere ganger tidligere:

$$E(r \geq R) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}, \quad (9)$$

der det ved siste likhetstegn er satt $Q_0 = \frac{4\pi\rho_0}{3} R^3$ og vi her og videre uttrykker størrelsene ved r/R .

For $r \leq R$ er $Q_{\text{encl}} = Q(r)$ som gitt i oppgaven. Da $\vec{E} = E(r) \hat{r}$ er konstant over ei kuleflate blir:

$$r \leq R: \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{R}r^4 \right) \Rightarrow \underline{E(r \leq R) = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} \left(4\frac{r}{R} - 3\frac{r^2}{R^2} \right)}. \quad (10)$$

b) Det elektriske potensialet for $r \geq R$, relativt uendelig, er gitt ved:

$$V(r \geq R) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^r \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{\infty}^r = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} \frac{R}{r}. \quad (11)$$

Det elektriske potensialet for $r \leq R$ kan skrives

$$V(r) = [V(r) - V(R)] + V(R),$$

hvor $V(r) - V(R)$ bestemmes ved å integrere (10):

$$V(r) - V(R) = - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_R^r \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(4r - \frac{3}{R}r^2 \right) \cdot dr = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[2r^2 - \frac{r^3}{R} \right]_R^r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[R^2 - 2r^2 + \frac{r^3}{R} \right]$$

og $V(R)$ finnes ved innsetting i likning (11):

$$V(R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R^2.$$

Dermed er

$$V(r \leq R) = [V(r) - V(R)] + V(R) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} \left[2 - 2\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{R^3} \right] \quad (12)$$

En potensialfunksjon kan ikke ha noen sprang. (Dette ville innebære energiendring over null forflytning.) Kontrollinnsetting av $r = R$ i de to uttrykkene for $V(r)$ vil vise at potensialet er kontinuerlig her:

$$\begin{aligned} r \geq R, \quad \text{likning (11):} \quad V(R) &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R^2 \\ r \leq R, \quad \text{likning (12):} \quad V(R) &= \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} [2 - 2 + 1] = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R^2 \end{aligned}$$

c) Romladningstettheten er definert $\rho(r) = \frac{dQ}{dV}$. Med kulesymmetri bruker vi volumelement $dV = 4\pi r^2 dr$, slik at vi med oppgitt $Q(r)$ får

$$\rho(r) = \frac{dQ}{4\pi r^2 dr} = \frac{4\pi\rho_0}{4\pi r^2} \frac{d\left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{R}r^4\right)}{dr} = \frac{\rho_0}{r^2} \left(4r^2 - \frac{4}{R}r^3 \right) = \underline{4\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)}. \quad (13)$$

Kan også beregne ρ fra Gauss’ lov på differensialform. Da må vi passe på å bruke rett uttrykk for divergens i kulekoordinater (fra formelark) og $E(r)$ fra likn. (10):

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \{ r^2 E(r) \} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(4r^3 - \frac{3}{R}r^4 \right) \right\} = \frac{\rho_0}{3} \frac{1}{r^2} \left\{ 12r^2 - \frac{12}{R}r^3 \right\} = 4\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

d) Ved bruk av dataplott er det gunstig å bruke dimensjonsløse størrelser. Isf. r plottes s.f.a. r/R osv. Videre er gode dimensjonsløse variable gitt ved:

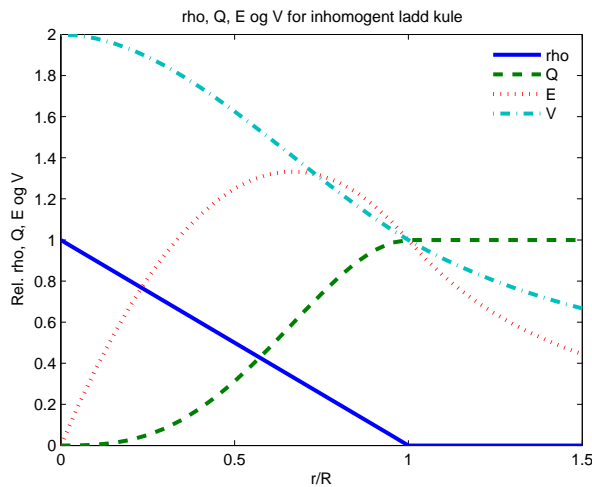
For $r/R < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\rho(r)}{4\rho_0} &\stackrel{(13)}{=} 1 - \frac{r}{R} \\ \frac{Q(r)}{\frac{4\pi\rho_0}{3}R^3} &\stackrel{(\text{oppgitt})}{=} 4\left(\frac{r}{R}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{R}\right)^4 \\ \frac{E(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R} &\stackrel{(10)}{=} 4\left(\frac{r}{R}\right) - 3\left(\frac{r}{R}\right)^2 \\ \frac{V(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2} &\stackrel{(12)}{=} 2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^3\end{aligned}$$

For $r/R \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\rho(r)}{4\rho_0} &\stackrel{(\text{oppgitt})}{=} 0 \\ \frac{Q(r)}{\frac{4\pi\rho_0}{3}R^3} &\stackrel{(\text{oppgitt})}{=} 1 \\ \frac{E(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R} &\stackrel{(9)}{=} \left(\frac{r}{R}\right)^{-2} \\ \frac{V(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2} &\stackrel{(11)}{=} \left(\frac{r}{R}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Og grafene for $r/R < \frac{3}{2}$ generert med Matlab:



```
% Matlabkode:
x = [0 : 1/20 : 1.5]; % Verdier for x = r/R
sizeX = size(x); %dimensjon til x, (#row, #col)
for ii = 1:sizeX(2)
    if x(ii)<1.0
        rho(ii) = 1 - x(ii);
        Q(ii) = 4*x(ii)^3 - 3*x(ii)^4;
        E(ii) = 4*x(ii) - 3*x(ii)^2;
        V(ii) = 2 - 2*x(ii)^2 + x(ii)^3;
    else
        rho(ii) = 0;
        Q(ii) = 1;
        E(ii) = x(ii)^(-2);
        V(ii) = x(ii)^(-1);
    end;
end
plot(x,rho,'-', x,Q,'--', x,E,'.', x,V,'-.', 'LineWidth',2.5);
title('rho, Q, E og V for inhomogent ladd kule')
xlabel('r/R'); % Tekst på aksene
ylabel('Rel. rho, Q, E og V');
handle=legend('rho', 'Q', 'E', 'V','location','northeast');
set(handle, 'Box', 'off'); % Ikke boks rundt legend
```

Oppgave 4. Flervalgsoppgaver.

a) **C** $\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ dersom $d\vec{l} \perp \vec{E}$.

b) **B** På samme måte som et legeme med null starthastighet faller i gravitasjonsfeltet fra f.eks. jorda, dvs. beveger seg i retning lavere potensiell energi, vil en ladet partikkel med null starthastighet bevege seg i retning lavere potensiell energi i et elektrisk felt.

Matematisk: (\vec{F} = kraft, q = ladning ($q < 0$), U = potensiell energi, V = potensial)

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{E} = -|q|\vec{E} \\ \vec{E} &= -\nabla V \\ U &= qV = -|q|V \\ \vec{F} &= -\nabla U = -q\nabla V = |q|\nabla V\end{aligned}$$

Mulige rette svar er altså: Beveger seg 1) i retning lavere potensiell energi U , 2) i retning høyere potensial V , 3) i motsatt retning av \vec{E} eller 4) i samme retning som kraft \vec{F} , hvorav bare 1) var gitt som et mulig flervalg.

c) **D** $U = e \cdot V = e \cdot k \frac{e}{r} = e \cdot 8,988 \cdot 10^9 \text{ Vm/C} \cdot \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{0,10 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = e \cdot 14,4 \text{ V} = 14,4 \text{ eV}.$