"Other Review Exercises 2, side 389"

Vi gjenkjenner dette integralet som et uegentlig integral og skriver det om til en grense,

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x+x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Integranden kan deles opp i to brøker ved hjelp av delbrøkoppspalning. Vi ønsker å finne konstanter A, B og C slik at

$$\frac{1}{x+x^3} = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

for alle x. Hvis vi multipliserer med felles faktor får vi at

$$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A.$$

Vi ser umiddelbart at $A = 1$ og $C = 0$. Videre må $A + B = 1$, slik at $B = -1$. Altså har vi at

$$\frac{1}{x+x^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Det ubestemte integralet kan nå skrives som en sum av to integraler,

$$\int \frac{1}{x+x^3}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \ln x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

For det andre integralet bruker vi substitusjonen $u = 1 + x^2$, slik at $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Dette gir

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Vi har dermed at

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+x^3}\,\mathrm{d}x &= \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\\ &= \ln x - \ln(1+x^2)^{1/2}\\ &= \ln\left(\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\right).\end{aligned}$$

Innsatt i uttrykket for det bestemte integralet får vi

$$\begin{aligned}I = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x+x^3}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\ln\left(\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_1^R\\ &= \lim_{R\to\infty}\left\{\ln\left(\frac{R}{(1+R^2)^{1/2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{2^{1/2}}\right)\right\}\\ &= \lim_{R\to\infty}\ln\left(\frac{R}{(1+R^2)^{1/2}}\right) + \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Vi regner så ut grenseverdien til argumentet til ln,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R}{(1+R^2)^{1/2}} = \lim_{R\to\infty} \frac{R}{R\left(\frac{1}{R^2}+1\right)^{1/2}} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{R^2}+1\right)^{1/2}} = 1.$$

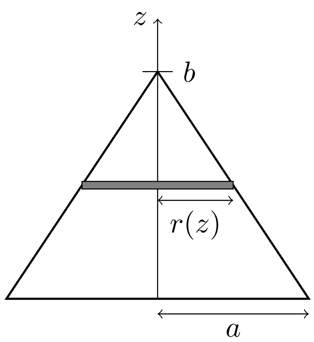
Siden $\ln x$ er kontinuerlig i $x = 1$ har vi at (se Teorem 7 side 82 i boka)

$$\lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{R}{(1+R^2)^{1/2}}\right) = \ln\left(\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R}{(1+R^2)^{1/2}}\right)\right) = \ln 1 = 0.$$

Oppsummert har vi vist at

$$I = \frac{1}{2}\ln 2.$$

$\boxed{\text{7.4.12}}$ Vi starter (som alltid) med å tegne opp en figur, denne gangen et tverrsnitt av kjegla:



På figuren har vi også tegnet inn et lite volumelement – en sirkulær skive – med tykkelse (høyde) $\mathrm{d}z$. Tettheten til kjegla er gitt som $\rho(z) = kz$, mens radiusen er gitt som

$$r(z) = a - \frac{a}{b}z = a\left(1 - \frac{z}{b}\right).$$

Volumet til volumelementet er $\mathrm{d}V = \pi r(z)^2\,\mathrm{d}z$, slik at massen av det blir

$$\mathrm{d}m = \rho(z)\,\mathrm{d}V = \pi\rho(z)r(z)^2\mathrm{d}z = \pi kza^2\left(1-\frac{z}{b}\right)^2\mathrm{d}z = \pi ka^2\left(z - \frac{2z^2}{b} + \frac{z^3}{b^2}\right)\mathrm{d}z.$$

Massen til hele kjeglen er derfor

$$\begin{aligned} m = \int_{z=0}^{z=b}\mathrm{d}m = \pi ka^2 \int_0^b\left(z - \frac{2z^2}{b} + \frac{z^3}{b^2}\right)\mathrm{d}z \\ &= \pi ka^2\left(\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3b} + \frac{z^4}{4b^2}\right)\Bigg|_0^b \\ &= \pi ka^2\left(\frac{b^2}{2} - \frac{2b^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right) \\ &= \frac{\pi ka^2b^2}{12}. \end{aligned}$$

For å finne massesenteret utnytter vi symmetrien i problemet. Kjegla er symmetrisk om z-aksen og tettheten er ikke avhengig av r. Derfor må massesenteret ligge langs z-aksen.

Momentet om $z = 0$ av volumelementet er gitt som arm ganger masse, altså,

$$\mathrm{d}M_{z=0} = z\,\mathrm{d}m = \pi k a^2 \left(z^2 - \frac{2z^3}{b} + \frac{z^4}{b^2} \right) \mathrm{d}z.$$

Vi integrerer opp og får at

$$\begin{aligned} M_{z=0} &= \pi k a^2 \int_0^b \left(z^2 - \frac{2z^3}{b} + \frac{z^4}{b^2} \right) \mathrm{d}z \\ &= \pi k a^2 \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2b} + \frac{z^5}{5b^2} \right) \Bigg|_0^b \\ &= \pi k a^2 \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{5} \right) \\ &= \frac{\pi k a^2 b^3}{30}. \end{aligned}$$

Massesenteret finner vi så med å dele på massen,

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{\frac{\pi k a^2 b^3}{30}}{\frac{\pi k a^2 b^2}{12}} = \frac{12b}{30}.$$

Dette ser ut til å være et rimelig svar, ikke så langt fra midtpunktet langs z-aksen.

$\boxed{9.1.8}$ Vi er gitt følgen

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n n}{\mathrm{e}^n} \right\}.$$

De første leddene i følgen er

$$a_1 = -\frac{1}{\mathrm{e}}, \quad a_2 = \frac{2}{\mathrm{e}^2}, \quad a_3 = -\frac{3}{\mathrm{e}^3}, \quad a_4 = \frac{4}{\mathrm{e}^4}.$$

Siden e^n vokser raskere enn n, ser vi at følgen er begrenset ovenfra av $\frac{2}{\mathrm{e}^2}$ og nedenfra av $-\frac{1}{\mathrm{e}}$. Videre er det en alternerende følge, da annenhvert ledd er positivt og negativt. Vi ser også at

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0.$$

Det betyr at følgen konvergerer mot 0.

$\boxed{9.1.18}$ Vi evaluerer a_n i grensen $n \to \infty$ ved å dele teller og nevner på n^2,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} - 3} = -\frac{1}{3}.$$

9.2.10 La oss starte med å skrive om rekken til en sum av to rekker,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + 2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}}.$$

Dette minner om noe som ligner på geometriske rekker. For en geometrisk rekke (side 505–507 i boka) har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

når $|r| < 1$. Observer at ved å endre summasjonsgrensene kan vi skrive denne regelen på ekvivalent form

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = \frac{a}{1-r}.$$

Vi ønsker nå å skrive om de to rekkene på denne formen. Vi starter med den første,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

På tilsvarende vis får vi for den andre summen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^2 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Den totale summen får vi så ved å legge sammen de to bidragene,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

9.2.12 Vi bruker delbrøkoppspalting til å skrive om leddene til en sum av to ledd,

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}.$$

Dette betyr at

$$1 = A(2n+1) + B(2n-1) = 2An + A + 2Bn - B = 2(A+B)n + (A-B).$$

For at dette skal være oppfylt for alle n må

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ A - B &= 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}.$$

Delsummen, S_N, blir nå

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n &= \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{4(N-1)-2} - \frac{1}{4(N-1)+2}\right) + \left(\frac{1}{4N-2} - \frac{1}{4N+2}\right) \end{aligned}$$

Vi ser at alle leddene, med unntak av det første og siste, kanselleres. Dette er derfor en teleskoperende rekke (se *Telescoping series* side 507 i boka). Vi står igjen med

$$S_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{4N+2}.$$

Vi lar så $N \to \infty$, og ser at summen av rekken blir

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{9.3.4}$ I denne oppgaven bruker vi sammenligningstesten (Teorem 9 side 514 i boka). For $n > 0$ har vi at

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} = b_n.$$

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er en p-rekke (se side 512 i boka) og konvergerer siden $p = \frac{3}{2} > 1$. Ettersom $a_n \leq b_n$, konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ved sammenligningstesten.

$\boxed{9.3.22}$ Vi er gitt rekken

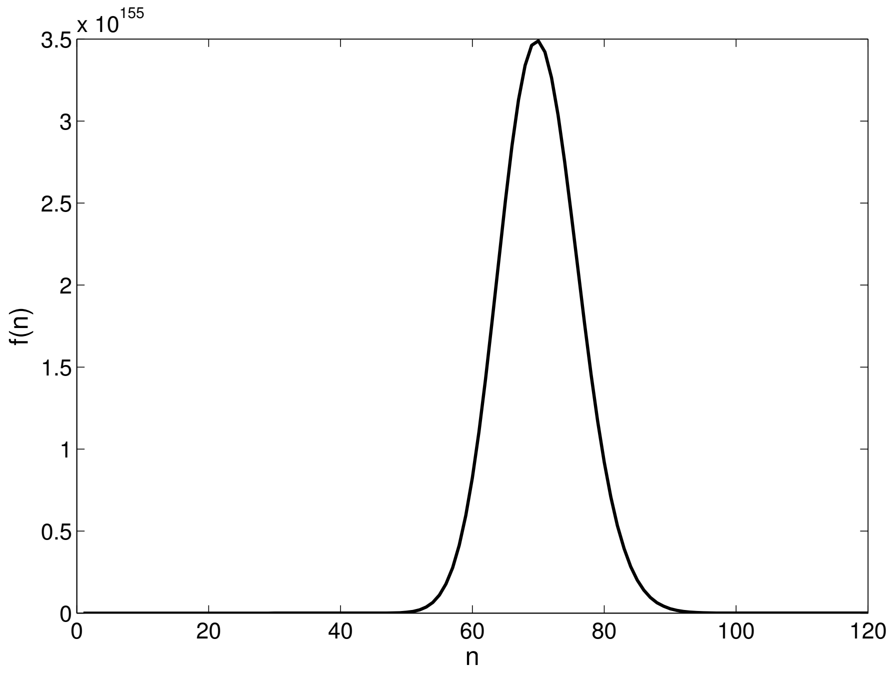
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}2^n}{\sqrt{n!}}.$$

Vær oppmerksom på at $0! = 1$, slik at a_0 er definert. Vi ser at $a_n > 0$ for alle $n \geq 0$, og utfører rottesten (Teorem 11 side 517 i boka),

$$\begin{aligned}
\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{100}2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{n^{100}2^n}{\sqrt{n!}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} \sqrt{\frac{1}{n+1}} \\
&= 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Av rottesten følger det derfor at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer.

<u>Kommentar:</u> Dette resultatet virker kanskje litt overraskende, men det sier noe om hvor raskt $n!$ vokser. Under følger et plot av $f(n) = \frac{n^{100}2^n}{\sqrt{n!}}$. Vi ser at leddene blir raskt veldig store. Faktisk er $a_2 \approx 3{,}6 \cdot 10^{30}$ og $\max a_n = a_{70} \approx 3{,}5 \cdot 10^{155}$. Likevel blir $\sqrt{n!}$ såpass dominerende for store n at rekken konvergerer.


x 10^155
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
f(n)
0
20
40
60
80
100
120
n