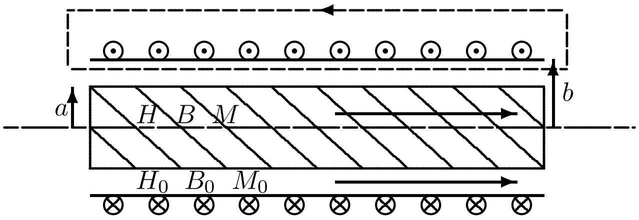
Institutt for fysikk 2011 **TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme**

Øving 12, løsningsskisse.
Solenoide. Grensevilkår. Induksjon.

Oppgave 1.
Magnetfelt ved longitudinalt materialskille.



a+b) Figuren viser et sidesnitt av solenoiden som har en sylinderformet stav av jern inni seg. Strømmen I genererer feltstyrken H uavhengig av materialet på langs i solenoiden. Fra Ampères lov på integrasjonsvegen vist i figuren har vi i tidligere øving eller Ex. 28.10 i læreboka vist at $H = nI$.

Vi får derfor at feltstyrken inni solenoiden, både utenfor og inni jernet er

$$\underline{H_0 = H} = nI = 500\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 4,00\,\mathrm{A} = \underline{2700\,\mathrm{A/m}}.$$

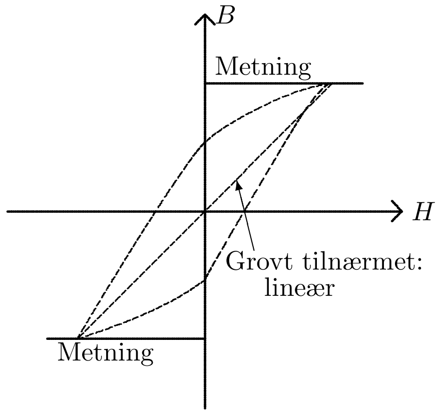
(Tangentkomponenten til $\vec{H}$ er alltid kontinuerlig over ei grenseflate.)

Vi har relasjonen $B = \mu_0(H + M) = \mu_r\mu_0 H$, som bestemmer B-feltet:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \cdot \mu_0 H_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 2700\,\mathrm{A/m} = \underline{3,40\,\mathrm{mT}}, \\ B &= \mu_r \cdot \mu_0 H = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 2700\,\mathrm{A/m} = \underline{6,80\,\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Og endelig er magnetiseringen $M = (\mu_r - 1)H$, som gir

$$\begin{aligned} M_0 &= (1-1) \cdot H_0 = \underline{0\,\mathrm{A/m}}, \\ M &= (2000-1) \cdot H_0 = \underline{5,40 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}}. \end{aligned}$$

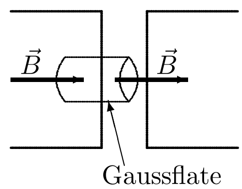


Denne verdien for magnetiseringen M vi har beregnet inni jernet er ikke mulig, da metning M_s inntrer ved en lavere verdi. Vi har i forrige øving vist at metningsmagnetiseringen i jern er ca. $M_s = 1,6 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}$. Den lineære relasjonen $B = \mu_r\mu_0 H$ er derfor bare rimelig for H-verdier opp til en viss grense. Dette kan en se utfra hysteresekurva til høyre. Med $M_s = 1,6 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}$, blir flukstettheten inni jernet $B = \mu_0(H + M_s) = \mu_0(0,002 + 1,6) \cdot 10^6\,\mathrm{A/m} = 2,0\,\mathrm{T}$, og ikke 6,80 T som beregnet verdi ovenfor.

Oppgave 2. Magnetfelt ved transversalt materialskille.

a) For en lang og smal toroide kan vi se bort fra krumningen og H-feltet kan beregnes som for en solenoide:

$$\begin{aligned} H &= In = I\frac{N}{2\pi R} = 0,59\,\mathrm{A} \cdot \frac{400}{2\pi \cdot 0,20\,\mathrm{m}} = \underline{159\,\mathrm{A/m}}. \\ B &= \mu_r\mu_0 H = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 159\,\mathrm{A/m} = \underline{0,400\,\mathrm{T}}. \end{aligned}$$



b) I ei grenseflate er flukstettheten B kontinuerlig. Dette kan vises fra Gauss lov for B-feltet: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$. Den lille figuren viser ei Gaussflate som en sylinder med en endeflate i jernet og andre i spalten. Kravet null B-fluks over sideflatene resulterer i at B-feltet må være likt i jernet og i luftspalten. Vi må da forutsette at gapet er så smalt at B ikke endres over gapet.

Så – i gapet er fremdeles $B_0 = B =$ 0,40 T og følgelig får vi

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} = \frac{0,40\,\mathrm{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}} = \underline{3,18 \cdot 10^5\,\mathrm{A/m}}.$$

Det er klart at spalten må være svært smal for at dette skal holde. Hvis gapet blir breiere vil B-feltlinjer "lure seg ut" og dette igjen innvirker på H-feltet inne i jernet i nærheten av spalten, men på en slik måte at <u>normal</u>komponenten av B alltid er kontinuerlig over grenseflata.

Et slikt gap med sterkt H-felt brukes til magnetisering av f.eks. magnetbånd ("tape") og harddisker.

Oppgave 3. Bevegelsesindusert ems.

a) Den magnetiske fluksen gjennom den lukkede sløyfa er gitt ved:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$

Siden $\vec{B} \| \mathrm{d}\vec{A}$ og siden avstanden D mellom skinnene er konstant, er $\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = B_z \cdot D\,\mathrm{d}x$, og integrasjonen går fra $x = 0$ til $x = vt$. Dette gir:

$$\Phi_B(t) = \int_0^{vt} 3B_0(1+\beta x)D\mathrm{d}x = 3B_0 D\left[x + \frac{1}{2}\beta x^2\right]_0^{vt} = 3B_0 D\left(vt + \frac{1}{2}\beta (vt)^2\right) = \underline{3B_0 Dvt\left(1 + \frac{1}{2}\beta vt\right)}.$$

b) Den induserte elektromotoriske krafta blir ifølge Faradays lov (husk v er konstant):

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -3B_0 D \frac{\mathrm{d}\left(vt + \frac{1}{2}\beta(vt)^2\right)}{\mathrm{d}t} = \underline{-3B_0 Dv\,(1+\beta vt)}\,.$$

c) For å finne strømmen I må vi først bestemme motstand R i kretsen. Motstanden vil øke med økende tid, gitt ved utrykket

$$R(t) = D\cdot(\lambda_A + \lambda) + 2x\lambda = D\cdot(\lambda_A+\lambda) + 2vt\lambda$$

hvor det første leddet skyldes spesifikk motstand i den venstre forbindelsesskinna pluss motstand i staven A-A som dras, og det tidsavhengige leddet skyldes den økende motstanden som inkluderes i kretsen ved at staven A-A forflytter seg mot høyre, og med faktor 2 fordi det er to skinner. Den induserte strømmen blir da, gitt ved Ohms lov:

$$\underline{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{-3B_0 Dv\,(1+\beta vt)}{D\cdot(\lambda_A+\lambda) + 2vt\lambda}}\,.$$

Retningen på strømmen finnes enklest ved å bruke Lenz lov: Det settes opp strøm som produserer et magnetfelt som motvirker økningen av B-fluksen i positiv z-retning. Ifølge høyrehåndsregelen er da strømretningen med urviserne.

d) Krafta på staven A-A finnes fra

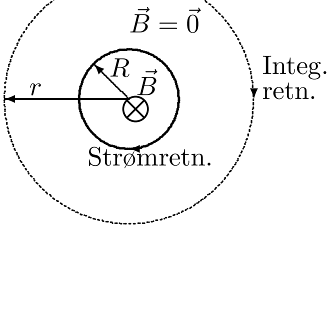
$$\vec{F} = \int_{AA} (I\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}).$$

Nå er $I\mathrm{d}\vec{s} \perp \vec{B}$ og med strømretning $-\hat{\mathbf{j}}$ får $\vec{F}$ etter h.h.regelen retning mot venstre, dvs. $\vec{F} = F_x \cdot \hat{\mathbf{i}}$, med $F_x < 0$. B er konstant over integrasjonevegen som har lengde D, slik at vi får

$$F_x(t) = IDB_z F_x(t) = IDB_z = \frac{-3B_0 Dv\,(1+\beta vt)}{D\cdot(\lambda_A+\lambda)+2vt\lambda} \cdot D \cdot 3B_0(1+\beta vt) = \underline{-\frac{9B_0^2 D^2 v\,(1+\beta vt)^2}{D(\lambda_A+\lambda)+2\lambda vt}}\,.$$

Dette er krafta som virker på staven på grunn av den induserte strømmen i sløyfa. Om staven skal ha jamn hastighet (summen av kreftene lik null, ifølge Newtons 2. lov) må vi skyve med motsatt like stor kraft. Dvs. at krafta vi skyver med er retta i positiv x-retning. Det er naturlig at vi må utføre et positivt arbeid ($\vec{F}$ og $\mathrm{d}\vec{s}$ i samme retning) når vi produserer strøm og spenning, dvs. energi.

Oppgave 4. E-felt rundt en solenoide.



Figuren viser et tverrsnitt gjennom solenoiden med radius R. En integrasjonssirkel rundt solenoiden med radius r er inntegna.

Magnetfelt fra en lang, rett solenoide er

$$\begin{aligned} B &= \mu H = \mu_\mathrm{r}\mu_0 \frac{N}{\ell} I, \quad \text{for } r < R, \\ B &= 0 \qquad\qquad\quad \text{for } r > R\,. \end{aligned}$$

[Med de oppgitte målene vil nok tilnærmelsen være grov, da solenoiden ikke er svært lang i forhold til diameteren, men som oppgitt antar vi å kunne bruke formelen.]

Magnetisk fluks innenfor radius r blir dermed lik fluksen innenfor radius R:

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = B \cdot \pi R^2 = \mu_\mathrm{r}\mu_0 \frac{N}{\ell} I \cdot \pi R^2\,.$$

Faradays lov gir da at indusert ems (volt) langs sirkelen med radius r er lik

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -\mu_r\mu_0\frac{N}{\ell}\cdot\pi R^2\dot{I}\,.$$

Emsen $\mathcal{E}$ er gitt ved integrasjon av $\vec{E}$ (volt/meter) over sirkelen:

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \equiv \mathcal{E}\,.$$

Idet E er konstant i konstant avstand r fra sentrum og $\vec{E}$ går langs (eg. motsatt retta) d$\vec{s}$, vil vi få

$$E(r)2\pi r = \mathcal{E} = -\mu_r\mu_0\frac{N}{\ell}\cdot\pi R^2\dot{I} \qquad \Rightarrow E(r) = -\mu_r\mu_0\frac{N}{\ell}\cdot\frac{R^2}{2r}\dot{I}\,.$$

Ved vekselstrøm har vi $I(t) = I_0\cos(\omega t)$ og $\dot{I} = -\omega I_0\sin(\omega t)$, som gir

$$E(r) = \mu_r\mu_0\frac{N}{\ell}\cdot\frac{R^2}{2r}\omega I_0\sin(\omega t)\,.$$

Amliptyden til E blir, innsatt oppgitte verdier idet vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$:

$$E_0 = \mu_r\mu_0\frac{N}{\ell}\cdot\frac{R^2}{2r}\omega I_0 = 2000\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}\cdot\frac{200}{0,10\,\mathrm{m}}\cdot\frac{1,00\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{2\cdot 0,050\,\mathrm{m}}\cdot 2\pi\cdot 50\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 2,0\,\mathrm{A} = \underline{3,2\,\mathrm{V/m}}\,.$$

Enhetsregning: $\frac{\mathrm{Hm^2A}}{\mathrm{m^3s}} = \frac{\mathrm{(Vs/A)\cdot A}}{\mathrm{m\cdot s}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

Oppgave 5. Varmeutvikling i solenoide.

a) Magnetfeltet inne i en lang, luftfylt spole: $B = \mu_0 In$. For å lage et felt $B = 1{,}00$ T med viklingstetthet $n = 1000\,\mathrm{m}^{-1}$, må vi derfor ha en strømstyrke på

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{1,00\,\mathrm{T}}{4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}\cdot 1000\,\mathrm{m}^{-1}} = 795,8\,\mathrm{A} = \underline{796\,\mathrm{A}}\,.$$

b) I et lederstykke med motstand R som fører en strøm I har vi et effekttap gitt ved

$$P = U\cdot I = R\cdot I^2, \quad \text{eller, per lengdeenhet:} \quad P' = U/\ell\cdot I = R'\cdot I^2\,,$$

der R' er motstand per lengdeenhet i en leder og gitt ved resistiviteten og tverrsnittet:

$$R' = \frac{1}{\ell}\cdot R = \frac{1}{\ell}\cdot\rho\frac{\ell}{A} = \frac{\rho}{A}\,.$$

For den gitte lederen er $A = \pi(d/2)^2 = \pi(0,50\cdot 10^{-3}\mathrm{m})^2 = 0,785\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$ slik at

$$R' = \frac{1,68\cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}}{0,79\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 21,4\,\mathrm{m}\Omega/\mathrm{m}\,.$$

Effekt utviklet per lengdeenhet blir dermed:

$$P' = R'\cdot I^2 = 21,4\,\mathrm{m}\Omega/\mathrm{m}\cdot(795,8\,\mathrm{A})^2 = 13,6\,\mathrm{kW/m} = \underline{14\,\mathrm{kW/m}}\,.$$

Dette er litt av en badstuovn. Det er altså praktisk umulig å lage sterke magnetfelt med luftfylt spole.

Men det hjelper ganske mye å fylle spolen med jern! Da kan vi oppnå et magnetfelt $B_s = \mu_0 M_s$, der M_s er metningsmagnetiseringen i jern. Med $M_s = 1,6\cdot 10^6$ A/m får vi $B = \mu_0\cdot M_s \approx 2$ T, som beregnet i øving 10.

For å oppnå den gitte verdien $B = 1{,}00$ T i jernet trengs det en magnetisk feltstyrke

$$H = \frac{B}{\mu_r\mu_0} = \frac{1\,\mathrm{T}}{2000\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}} = 398\,\mathrm{A/m},$$

dvs. vi greier oss med strømmen

$$I = \frac{H}{n} = \frac{398\,\mathrm{A/m}}{1000\,\mathrm{m}^{-1}} = 0,40\,\mathrm{A}$$

i spoleledningene. Denne strømmen gir effekttap

$$P' = R'\cdot I^2 = 22\,\mathrm{m}\Omega/\mathrm{m}\cdot(0,40\,\mathrm{A})^2 = \underline{3,5\,\mathrm{mW/m}}.$$

En reduksjon med faktor $2000^2 = 4,0\cdot 10^6$!

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 23. april 11.