Øving 1, løsningsskisse.
Ladninger og Coulombs lov.

Oppgave 1. Ladning i kopper.

a) $m = \rho V = \rho\pi R^2 d = 8,92 \cdot 10^3 \mathrm{kg/m^3} \cdot \pi(0,10\,\mathrm{m})^2 \cdot 2,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 8,92 \cdot 10^3 \mathrm{kg/m^3} \cdot 62,8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3} = \underline{0,560\,\mathrm{kg}}$.

b) Koppers molvekt er $M_{\mathrm{Cu}} = (29 + 34,54)\ \mathrm{g/mol} = 63,54\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ og dermed masse per kopperatom:
$m_{\mathrm{atom}} = M_{\mathrm{Cu}}/N_{\mathrm{A}} = 63,54\,\mathrm{g\,mol^{-1}}/6,02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}} = 1,06 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{g} = \underline{1,0556 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}}$.

Alternativt: $m_{\mathrm{atom}} = 29 \cdot m_{\mathrm{p}} + 34,54 \cdot m_{\mathrm{n}} + 29 \cdot m_{\mathrm{e}} = 63,54 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} + 29 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} = 1,06 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg} + 2,6 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg} = \underline{1,06 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}}$.
Elektronenes masse er $2,5 \cdot 10^{-4}$ av kjernens og altså uten betydning.

c) $n_{\mathrm{Cu}} = m/m_{\mathrm{atom}} = 0,560\,\mathrm{kg}/1,06 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg} = \underline{5,28 \cdot 10^{24} = 8,78\,\mathrm{mol}}$.

d)
$q_{\mathrm{p}} = 29 \cdot n_{\mathrm{Cu}} \cdot e = 29 \cdot 5,28 \cdot 10^{24} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = \underline{2,45 \cdot 10^7\,\mathrm{C}}$.
$q_{\mathrm{e}} = 29 \cdot n_{\mathrm{Cu}} \cdot (-e) = 29 \cdot 5,28 \cdot 10^{24} \cdot (-1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) = \underline{-2,45 \cdot 10^7\,\mathrm{C}}$.
Totalladningen er null.

e) Uniform ladning σ_0 per flateenhet og areal πR^2 gir total ladning

$$Q = \sigma_0 \pi R^2 = 25\,\mu\mathrm{C/m^2} \cdot \pi(0,10\,\mathrm{m})^2 = \underline{0,785\,\mu\mathrm{C}}.$$

Her kunne en kanskje tenke seg at ei slik skive vil ha to sider, og dermed en overflate med totalt areal $2\pi R^2$. Men en oppgitt flateladning σ_0 for ei tynn skive tolkes i første omgang som gjort her. (*Spør* hvis du er i tvil om hvordan en oppgave skal tolkes!)

Altså andel $0,785\,\mu\mathrm{C}/2,45 \cdot 10^7\,\mathrm{C} = 3,2 \cdot 10^{-14}$ av ladning av alle elektroner i skiva, som også er lik andelen av elektroner som er fjernet. Disse elektroner er fjernet helt ytterst i overflata av metallet, som vi skal ta opp litt seinere i kurset.

f)

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\mathrm{skive}} dq = \int_0^R \sigma_0\,(1 - r/R) \cdot 2\pi r \cdot dr \\ &= 2\pi\sigma_0 \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}\frac{r^3}{R}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi\sigma_0 \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}R^2\right) = \underline{\frac{1}{3}\sigma_0 \pi R^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 2. Gravitasjonskraft – elektrisk kraft.

a) Fluoridionet har

$$\begin{aligned} \text{ladning} \quad -e &= -1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}, \quad \text{og} \\ \text{masse} \quad m_{\mathrm{F}} &= \frac{19\ \mathrm{g\,mol^{-1}}}{6,02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}} = 3,16 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{g} = 3,16 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}\,. \end{aligned}$$

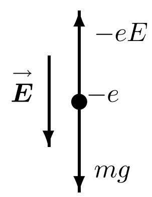
Massen kan også beregnes fra $m_{\mathrm{F}} = 19 m_p$, der $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg er protonmassen (som er omtrent like stor som nøytronmassen).

Tyngdekrafta er lik den elektriske krafta når

$$m_{\mathrm{F}}\,g = eE,$$

som gir nødvendig elektrisk feltstyrke

$$E = \frac{m_{\mathrm{F}}\,g}{e} = \frac{3,16 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}}{1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 1,94 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/C} = \underline{1,9\,\mu\mathrm{N/C}}.$$



Elektrisk kraft må virke oppover og når ladningen er negativ må da elektrisk felt peke nedover, samme retning som tyngdefeltet.

b) 100 N/C er mye større enn svaret for E i a) som opphevet tyngdekrafta, slik at et fritt fluoridion vil forsvinne oppover i atmosfæren inntil feltet er avtatt til $1,9\,\mu$N/C. (Atmosfæren er positivt ladd, atmosfære pluss jordkloden er totalt nøytralt. Derfor avtar E-feltet utover i atmosfæren og er lik null utenfor.)

c) Man oppnår et tilsvarende stort elektrisk felt E fra et fluoridion som er i avstand r fra det første:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e}{r^2} = k\cdot\frac{e}{r^2} \\ \Rightarrow r &= \sqrt{\frac{ke}{E}} = \sqrt{\frac{9,0\cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{1,94\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/C}}} = \underline{0,027\,\mathrm{m}}. \end{aligned}$$

d) Gravitasjonstiltrekning: $F_{\rm g} = G\dfrac{m_{\rm F}\,m_{\rm F}}{r^2}$ og elektrisk frastøtning: $F_{\rm e} = k\dfrac{ee}{r^2}$, slik at

$$\underline{\frac{F_{\rm e}}{F_{\rm g}} = \frac{k}{G}\frac{e^2}{m_{\rm F}^2}} = \frac{9,0\cdot 10^9\,\mathrm{m/F}}{6,67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}}\frac{(1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(3,16\cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg})^2} = \underline{3,5\cdot 10^{33}}$$

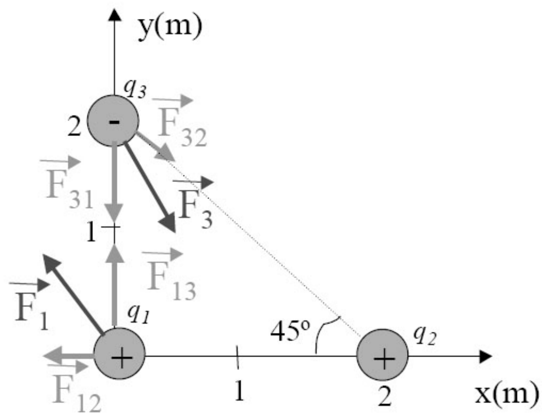
og er uavhengig av avstanden mellom ionene. (Sjekk gjerne enhetene i siste uttrykket! Alternative enheter for k først i øvingstekst.) Gravitasjonskraft mellom ioner er altså helt uten betydning.

Oppgave 3. Punktladninger I.

Dette er mest en oppgave i vektorregning. Krafta på q_1 kommer fra tilstedeværelse av ladningene q_2 og q_3. Vi finner krafta fra q_2 og q_3 separat og adderer dem vektorielt etterpå for å finne den totale krafta på q_1 (superposisjonsprinsippet). Det samme gjør vi for å beregne krafta på q_3.

Krafta på q_1 blir :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = k\cdot q_1\left[\frac{q_2}{r_{12}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12} + \frac{q_3}{r_{13}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{13}\right]$$



I figuren er krefter tegnet inn i den retningen de virker ifølge oppgitte ladninger, f.eks. vil $\vec{F}_{13}$ peke i positiv y-retning. Merk at $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ (retning fra q_2 til q_1) peker i negativ x-retning og $\hat{\mathbf{r}}_{13}$ i negativ y-retning:

$$\hat{\mathbf{r}}_{12} = -\hat{\mathbf{i}} \quad \text{og} \quad \hat{\mathbf{r}}_{13} = -\hat{\mathbf{j}}$$

Innsatt verdier finnner vi

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= 9,0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{Nm^2/C^2}\cdot 2,0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\left[\frac{2,0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(2,0\,\mathrm{m})^2}(-\hat{\mathbf{i}}\,) + \frac{-3,0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(2,0\,\mathrm{m})^2}(-\hat{\mathbf{j}}\,)\right] \\ &= \underline{-9,0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{N}\cdot\hat{\mathbf{i}}\ +\ 13,5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{N}\cdot\hat{\mathbf{j}}} = \underline{(-9,0\cdot\hat{\mathbf{i}}\ +\ 14\cdot\hat{\mathbf{j}}\,)\,\mathrm{nN}}\,. \end{aligned}$$

$|F_1| = \sqrt{9,0^2 + 13,5^2}\cdot 10^{-9}$ N $= 16,2$ nN $=$ $\underline{16\,\mathrm{nN}}$ og har retning som vist på figuren, med vinkel $\theta = \arctan 13,5/9,0 =$ $\underline{56^\circ}$ $\underline{\text{med } x\text{-aksen}}$.

Krafta på q_3 blir helt analogt:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = k\cdot q_3\left[\frac{q_1}{r_{31}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{q_2}{r_{32}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{32}\right]$$

Her er $r_{32}^2 = r_{12}^2 + r_{13}^2$ og enhetsvektorene

$$\hat{\mathbf{r}}_{31} = \hat{\mathbf{j}} \quad \text{og} \quad \hat{\mathbf{r}}_{32} = -\cos 45^\circ\,\hat{\mathbf{i}} + \sin 45^\circ\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\,)$$

Innsatt verdier:

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= 9,0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{Nm^2/C^2}\cdot(-3,0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C})\left[\frac{2,0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(2,0\,\mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2,0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(2,0\,\mathrm{m})^2 + (2,0\,\mathrm{m})^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\,)\right] \\ &= -13,5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{N}\cdot\hat{\mathbf{j}}\ +\ 4,77\cdot 10^{-9}\,\mathrm{N}\cdot\hat{\mathbf{i}}\ -\ 4,77\cdot 10^{-9}\,\mathrm{N}\cdot\hat{\mathbf{j}} \\ &= 4,77\cdot 10^{-9}\,\mathrm{N}\cdot\hat{\mathbf{i}}\ -\ 18,27\cdot 10^{-9}\,\mathrm{N}\cdot\hat{\mathbf{j}} \quad = \underline{(4,8\cdot\hat{\mathbf{i}}\ -\ 18\cdot\hat{\mathbf{j}}}\,)\,\mathrm{nN}\,. \end{aligned}$$

$|F_3| = \sqrt{4,77^2 + 18,27^2}\cdot 10^{-9}$ N $= 18,88$ nN $=$ $\underline{19\,\mathrm{nN}}$ og har retning som vist på figuren, med vinkel $\theta =$ $\arctan 18,27/4,77 = 75,4^\circ$ med x-aksen, dvs. $\underline{14,6^\circ \text{ med } y\text{-aksen}}$.

Oppgave 4. Punktladninger II.

a) Størrelsene på kreftene er gitt av Coulombs lov, der kreftene er negative når de er tiltrekkende og positive når frastøtende. Med $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r = 0,10$ m (likesidet trekant) får vi følgende tre likningene for å bestemme de tre ladningene q_1, q_2 og q_3:

$$\begin{aligned} F_{12} &= k\frac{q_1 q_2}{r^2} = -5,40\,\mathrm{N} \\ F_{13} &= k\frac{q_1 q_3}{r^2} = 15,0\,\mathrm{N} \\ F_{23} &= k\frac{q_2 q_3}{r^2} = -9,0\,\mathrm{N}\,. \end{aligned}$$

En måte å løse disse er ved å ta forholdet

$$\frac{F_{13}}{F_{23}} = \frac{q_1}{q_2} = -\frac{15,0}{9,0} \qquad \Rightarrow \quad q_2 = -\frac{9,0}{15,0}\cdot q_1$$

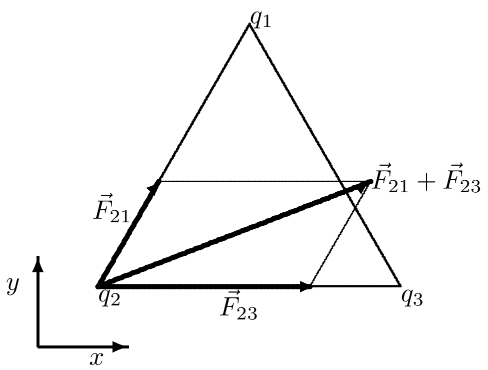
og sette inn q_2 i F_{12}:

$$F_{12} = -k\,\frac{q_1^2}{r^2}\,\frac{9,0}{15,0} \equiv -5,40\,\mathrm{N} \qquad \Rightarrow \quad q_1^2 = \frac{15,0}{9,0}\cdot\frac{1}{k}\cdot r^2\cdot 5,40\,\mathrm{N} = 1,001\cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}^2\,.$$

(Tegnet $\equiv$ betyr "må være lik ifølge kravene".) Nå er det gitt at q_1 er negativ. Ladningen q_1 er da: $\underline{q_1 = -3,16\,\mu\mathrm{C}}$.

Fra forholdet mellom q_2 og q_1 fra tidligere finnes : $\underline{q_2 = -\frac{9,0}{15,0}q_1 = 1,90\,\mu\mathrm{C}}$.

Ladning q_3 beregnes da fra en av ligningene for F_{13} eller F_{23} og gir: $\underline{q_3 = -5,27\,\mu\mathrm{C}}$.



b) For at nettokrafta på ladningen q_2 ved introduksjon av en fjerde ladning q_4 skal bli null, må q_4 plasseres slik at kraftvirkningen $\vec{F}_{24}$ oppveier $\vec{F}_{21}$ og $\vec{F}_{23}$. Matematisk gir dette vektorlikningen:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{24} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \equiv 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{F}_{24} = -(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23})$$

Løser uttrykkene ved å dele opp i x- og y-komponenter. Vinklene i en likesidet trekant er $\theta = 60° = \pi/3$, og vi får

$$\begin{aligned} \vec{F}_{24} &= -(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}) \\ &= -|F_{21}|\cdot(\cos\pi/3\cdot\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\pi/3\cdot\,\hat{\mathbf{j}}\,) - |F_{23}|\cdot(\cos 0\cdot\,\hat{\mathbf{i}} + \sin 0\cdot\,\hat{\mathbf{j}}\,) \\ &= -(5,40\,\mathrm{N}\cdot 0,50\cdot\,\hat{\mathbf{i}} + 5,40\,\mathrm{N}\cdot 0,866\cdot\,\hat{\mathbf{j}}\,) - 9,0\,\mathrm{N}\cdot\,\hat{\mathbf{i}} \\ &= -11,7\,\mathrm{N}\cdot\,\hat{\mathbf{i}} - 4,68\,\mathrm{N}\cdot\,\hat{\mathbf{j}}\,. \end{aligned}$$

Med negativ x- og y-komponent må krafta $\vec{F}_{24}$ på 2 fra 4 virke i retning ned mot venstre (sydvest). Når både ladning q_2 og q_4 er positive er kraften frastøtende og ladning q_4 må plasseres nordøst for q_2, på forlengelseslinja av vektoren $\vec{F}_{24}$ angitt over, som har vinkel $\theta = \arctan 4,68/11,7 = 22°$ med x-aksen.

Avstanden fra q_2 er avhengig av hvor stor ladningen q_4 er, men følgende må gjelde:

$$|\vec{F}_{24}| = k\frac{q_2 q_4}{r_{24}^2} \equiv \sqrt{11,7^2 + 4,68^2}\ \mathrm{N} = 12,6\,\mathrm{N} \quad \text{altså} \quad \frac{q_4}{r_{24}^2} \equiv \frac{12,6\,\mathrm{N}}{kq_2} = 7,38\cdot 10^{-4}\,\mathrm{C/m}^2\,.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 5. jan. 2012.