FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.

Løsningsforslag til øving 8

Oppgave 1

Hensikten med denne øvingen, er å se litt på en Carnot-prosess med en helt annen type arbeids-substans enn det vi har sett på før, og med et annet perspektiv enn det vi har hatt før. Vi tar utgangspunkt i $U = U(S, V, N)$ og Gibbs-Duhem-relasjonen som sier at det må finnes en tilstandsligning som kan uttrykkes ved hjelp av intensive variable alene. Det leder til uttrykkene for T, p, μ som er gitt i starten av oppgaven. Det er disse uttrykkene vi nå skal jobbe med.

a) Vi løser ligningen for T som er gitt innledningsvis i oppgaven, mhp S, og finner

$$S = \sqrt{\frac{NVT}{3a}}.$$

b) Ved å sammenligne utgangsuttrykket for U med uttrykket for p, finner vi $U = pV$. Vi setter inn det funne uttrykket for S, inn i uttrykkene for U og p, og får da

$$\begin{aligned} U &= \frac{a}{NV} \left(\frac{NVT}{3a}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{N}{27a}}\, V^{1/2}\, T^{3/2}, \\ p &= \frac{a}{NV^2} \left(\frac{NVT}{3a}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{N}{27a}}\, V^{-1/2}\, T^{3/2}, \end{aligned}$$

Legg merke til at på en adiabat, er $TV = konstant$, og på en isoterm er $U/\sqrt{V} = konstant$. Vi ser også at isotermt reversibelt arbeid er gitt ved

$$dW_T = (pdV)_T = \sqrt{\frac{N}{27a}}\, V^{-1/2}\, T^{3/2} dV.$$

På den annen side har vi at isoterm endring i indre energi er gitt ved

$$dU_T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{27a}}\, V^{-1/2}\, T^{3/2} dV,$$

slik at vi ser at $dW_T = 2dU_T$.

c) Vi bruker først at på en isoterm er $U/\sqrt{V} = konstant$. Da har vi for punktene A og B

$$\frac{U_A}{\sqrt{V_A}} = \frac{U_B}{\sqrt{V_B}},$$

som gir

$$U_B = \sqrt{\frac{V_B}{V_A}}\;\; U_A.$$

Punktene B og C er forbundet med en adiabat, og her gjelder at $TV = konstant$. Fra uttrykkene for U og p innebærer det videre at $U/T = konstant$, $UV = konstant$. Dermed har vi

$$\begin{aligned} \frac{U_C}{T_1} &= \frac{U_B}{T_2} \\ U_C &= \frac{T_1}{T_2}\; U_B = \frac{T_1}{T_2}\; \sqrt{\frac{V_B}{V_A}}\;\; U_A. \end{aligned}$$

Punktene A og D er forbundet med adiabater, slik at her gjelder

$$\begin{aligned}\frac{U_A}{T_2} &= \frac{U_D}{T_1} \\ U_D &= \frac{T_1}{T_2}\ U_A.\end{aligned}$$

d) Det tilføres varme på isotermen AB. (Det avgis varme på isotermen CD). Termodynamikkens første lov anvendt på isotermen AB, gir $dQ_T = dU_T + dW_T$.Vi har tidligere vist at $dW_T = 2dU_T$, slik at $dQ_T = 3dU_T$. Tilført varme på denne isotermen er dermed

$$Q_{AB} = 3(E_B - E_A) = 3\left(\sqrt{\frac{V_B}{V_A}} - 1\right)\ U_A.$$

Det totale arbeidet utført, er gitt ved

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}.$$

Vi ser først på de to isoterme arbeidene W_{AB} og W_{CD}. I begge tilfeller gjelder, som vist over, at $dW_T = 2dU_T$. Altså har vi

$$\begin{aligned}W_{AB} &= 2(U_B - U_A) = 2\left(\sqrt{\frac{V_B}{V_A}} - 1\right)\ U_A, \\ W_{CD} &= 2(U_D - U_C) = 2\frac{T_1}{T_2}\left(1 - \sqrt{\frac{V_B}{V_A}}\right)\ U_A.\end{aligned}$$

Vi ser nå på de adiabatiske arbeidene. Termodynamikken første lov gir at $dQ = 0 = dU + dW$, slik at $dW = -dU$. Dermed har vi

$$\begin{aligned}W_{BC} &= -(U_C - U_B) = U_B - U_C = \sqrt{\frac{V_B}{V_A}}\ \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)\ U_A, \\ W_{DA} &= -(U_A - U_D) = U_D - U_A = \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) U_A.\end{aligned}$$

Vi adderer alle disse bidragene, og finner

$$W = 3\left(\sqrt{\frac{V_B}{V_A}} - 1\right)\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)\ U_A.$$

Virkningsgraden er gitt ved $\eta = W/Q_{AB} = 1 - T_1/T_2$.

Oppgave 2

a) Tilstandssummen Z (også kalt partisjonsfunskjonen), er gitt ved

$$Z = \frac{1}{C} = \sum_{s=\pm 1} e^{-sx},$$

der $x = \mu_B B/kT$. Dette gir $Z = 2\cosh(x)$.

b) Elektronets midlere magnetiske moment er gitt ved

$$\begin{aligned} m &= -\mu_B \sum_{s=\pm 1} sCe^{-sx} = -\mu_B C\left(e^{-x} - e^{x}\right) \\ &= 2\mu_B C\sinh(x) = \mu_B \tanh(x). \end{aligned}$$

For høye temperaturer har vi $x \ll 1$. Da har vi $\tanh(x) \approx x + ...$, som innebærer at

$$m \approx \mu_B x = \mu_B^2 \frac{B}{kT},$$

som er i samsvar med Curies lov $m \sim 1/T$. I motsatt grense, $x \gg 1$, har vi $\tanh(x) \approx 1$, slik at

$$m \approx = \mu_B.$$

Dette er rimelig, da spinnene retter seg helt inn etter magnetfeltet ved lave T, slik at det midlere magnetiske mmenent per elektron blir det samme som størrelsen på det magnetiske momentet til hver elektron, da alle spinn adderer maksimalt.