TMA4245 Statistikk
Vår 2015

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving nummer 9, blokk II

Oppgave 1

Densiteten (massetettheten) av snø er høyst 1 kg/dm^3 (veldig våt snø). Anta at sannsynlighetstettheten for densiteten i kg/dm^3 av en tilfeldig valgt snøprøve er gitt ved $f(x) = \beta(\beta+1)x(1-x)^{\beta-1}$, $0 \le x \le 1$, der β er en positiv parameter.

a) Anta, bare i dette punktet, at $\beta = 2$.

Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt snøprøve har densitet mellom 0,5 og 0,9 kg/dm^3?

b) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for β basert på et tilfeldig utvalg X_1, X_2, ..., X_n av snødensiteter.

Hva blir estimatet hvis $n = 100$ og $\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i) = -104{,}0$?

Oppgave 2

Utrykningspolitiet (UP) vil undersøke kor ofte det skjer grove fartsoverskridingar på innfartsvegane til Oslo. Med ei grov fartsoverskriding er meint køyring i over $130 km/t$ på strekningar der fartsgrensa er $90 km/t$. Vi skal gå utifrå at talet på slike overskridingar, X, over eit tidsrom på t timar er poissonfordelt med parameter λt.

a) Gå utifrå at $\lambda = 0.5$ og la X vere talet på grove fartsoverskridingar i ein periode på 5 timar. Skriv opp sannsynsfordelinga til X. Finn sannsynet for at det skjer ingen grove fartsoverskridingar i denne perioden og sannsynet for at det skjer meir enn to slike. Kva forventing og varians har X?

b) Det blir brukt laser til å måle farten på bilane. Dersom den sanne farten på bilane er μ, skal vi gå utifrå at lasermålingane er normalfordelte med forventing μ og standardavvik $\sigma = 1.5 km/t$. Finn sannsynet for at laseren viser meir enn $130 km/t$ for ein bil som køyrer i $129 km/t$.

Utrykningspolitiet ynskjer å setje ein verdi slik at sannsynet for feilaktig å påstå at ei grov fartsoverskriding har skjedd, når ein måler farten med laser, skal vere mindre enn 0.01. Kva er den minste verdien denne konstanten kan vere?

c) Eigentlig er dei litt usikre på om $\lambda = 0.5$ og vil skaffe seg eit estimat for denne. Det blei føreteke målingar av grove fartsoverskridingar i 4 forskjellige periodar. Dei to første periodane var på 5 timar. La talet på overskridingar i desse vere X_1 og X_2. Dei to siste periodane var på 10 timar. La X_3 og X_4 vere talet på overskridingar i desse periodane. Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren for λ basert på X_1, X_2, X_3 og X_4 er gitt ved

$$\widehat{\lambda} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{30}.$$

Finn forventinga til denne og vis at variansen til $\widehat{\lambda}$ er $\lambda/30$.

d) Dersom variansen i ei poissonfordeling er større enn 10, vil normalfordelinga vere ei god tilnærming til poissonfordelinga. Kva fordeling er det rimelig å tru vil vere ei god tilnærming for fordelinga til

$$\frac{\widehat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\widehat{\lambda}/30}}?$$

Grunngje svaret. Bruk så dataane nedanfor til å finne eit tilnærma 95% konfidensintervall for λ.

t_i	5	5	10	10
x_i	3	4	5	8

e) Gå i dette punktet utifrå at $\lambda = 0.5$. La T vere tida til ein observerer 1. fartsoverskriding. Utlei fordelinga til T.

Fordelinga til T vil vere den same som fordelinga til tida mellom to fartsoverskridingar. Ein dag UP er på jobb, held dei på til dei har registrert 9 fartsoverskridingar. Finn sannsynet for at det kortaste tidsintervallet mellom to av desse fartsoverskridingane er mindre enn 15 min. Du kan gå utifrå at alle tider mellom fartsoverskridingar er uavhengige.

Oppgave 3

Bremselengde for bil med to ulike dekktyper skal undersøkes. En bremseprøve utføres ved at man begynner å bremse når bilen kjører i $80 km/t$ og bremselengde måles. For dekktype 1 utføres n slike prøver. La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ betegne bremselengdene målt i disse prøvene. Helt tilsvarende utføres m bremseprøver for dekktype 2. La $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ betegne bremselengdene målt her.

Anta at $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ alle er uavhengige og normalfordelt. Anta videre at X_1, X_2, ..., X_n har ukjent forventningsverdi μ_1, at Y_1, $Y_2, \ldots, Y_m$ har ukjent forventningsverdi μ_2 og at X_1, $X_2 \ldots, X_n$, Y_1, $Y_2, \ldots, Y_m$ alle har samme kjente varians σ_0^2.

Utled et $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for differansen $\mu_1 - \mu_2$.

Regn også ut intervallet numerisk når $\alpha = 0.05$, $n = m = 10$, $\sigma_0^2 = 2^2$ og observerte bremselengder er som gitt i følgende tabell

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	33.0	30.8	28.0	28.7	28.9	26.6	27.9	28.9	27.8	27.4
y_i	23.4	25.3	25.0	28.9	26.7	25.9	24.4	26.8	28.8	25.5

Det oppgis at $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 28.80$ og $\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i = 26.07$.

Oppgave 4

Levetiden T (målt i antall døgn) til en ny type ventiler som benyttes på oljeplattformer i Nordsjøen, skal undersøkes. Det antas at T er eksponensialfordelt. Det er velkjent at levetidene er avhengig av blant annet temperatur og trykk der ventilene benyttes, og den kjemiske sammensetningen av oljen som går gjennom ventilene. Effekten av disse forholdene måles som en *stress*-faktor, z, og en vet av erfaring at

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\mu}{z}$$

Parameteren μ er altså karakteristisk for en bestemt type ventiler, mens z beskriver miljøet der en ventil benyttes. Levetidene til forskjellige ventiler antas uavhengige.

a) Anta i dette punktet at $\mu = 1000$.

For en ventil med stress-faktor $z = 2.0$, bestem $\mathrm{P}(T \leq 1000)$.

Bestem hvilken stress-faktor en ventil må operere under for at $\mathrm{P}(T \leq 1000) = 0.5$.

Betrakt to ventiler med stress-faktorer henholdsvis $z_1 = 1.0$ og $z_2 = 2.0$ og tilhørende levetider T_1 og T_2. Bestem $\mathrm{P}(T_2 \geq T_1)$.

For å undersøke kvaliteten på den nye typen ventiler har man prøvd ut $n = 10$ ventiler. La $z_1, z_2, \ldots, z_n$ betegne stress-faktorene som disse ventilene opererer under og la $T_1, T_2, \ldots, T_n$ betegne tilhørende levetider. De observerte verdier er gitt i følgende tabell:

Ventil i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	1.0	3.4	1.9	2.4	1.2	4.0	3.2	2.2	1.4	3.2
t_i	917	610	978	326	609	88	488	591	2170	28

Det oppgis at $\sum_{i=1}^{n} z_i t_i = 12703.8$.

b) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for μ er gitt ved

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i T_i$$

Er estimatoren forventningsrett? Finn også $\mathrm{Var}(\widehat{\mu})$.

c) Sett opp den moment-genererende funksjon for T_i. Benytt så denne til å vise at

$$V = \frac{2n\widehat{\mu}}{\mu}$$

er χ^2-fordelt med $2n$ frihetsgrader. (Hint: Du kan benytte oppgitte formler for moment-generende funksjoner for eksponensial- og χ^2-fordelingene i formelsamlingen.)

d) Benytt resultatet i punkt **c**) til å utlede et $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall for μ. Hva blir konfidensintervallet når $\alpha = 0.10$ og dataene er som gitt over?

Fasit

1. **a**) 0.472 **b**) 1.545

2. **a**) $0.082, 0.456, \mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = 2.5$ **b**) $0.251, 133.5$ **c**) $\mathrm{E}(\widehat{\lambda}) = \lambda$ **d**) $[0.38, 0.96]$ **e**) 0.632

3. $[0.977, 4.483]$

4. **a**) 0.86, 0.69, 1/3 **b**) $\widehat{\mu}$ er forventningsrett, $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \mu^2/n$ **d**) $[2n\widehat{\mu}/z_{\alpha/2}, 2n\widehat{\mu}/z_{1-\alpha/2}]$, [808.90, 2341.71]