NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

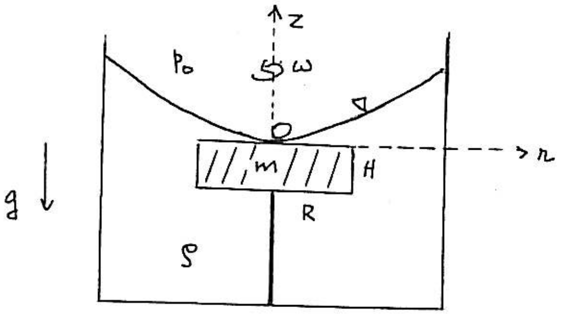
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TEP4105 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. F1
(Linje for Fysikk og matematikk)
..15..august 2005
Tid: 0900 – 1300
Studiepoeng: 7,5

Sensuren faller i uke .36...

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

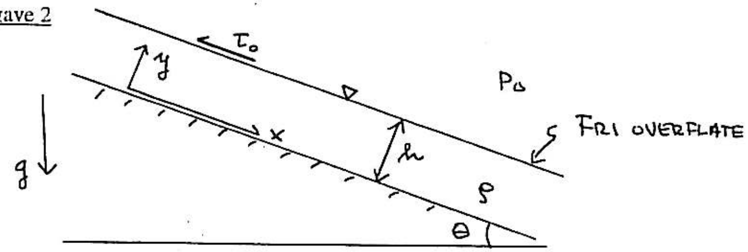


En lukket sylindrisk beholder er festet til en stav og holdt på plass i et kar fylt med væske med konstant tetthet ρ. Beholderen med innhold har masse m. Dens ytre radius er R; høyden er H. Atmosfæretrykket er p_0.

Karet med innhold dreies om sin symmetriakse (z-akse) med konstant vinkelhastighet ω slik at sentrum O av beholderens toppflate blir fri mot atmosfæren.

a) Finn trykkfordelingen p(r) over beholderens toppflate og bunnflate.
b) Finn stangkraften.

Oppgave 2



En væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν renner laminært og stasjonært nedover et skråplan som har helningsvinkel θ. Væskesjiktet har fri overflate mot atmosfæren. Atmosfæretrykket er p_0. Strømningen er todimensjonal, med strømlinjer som overalt er parallelle med x-aksen. Tyngdens akselerasjon er g. Anta at det blåser en vind imot den frie overflaten, slik at det oppstår en konstant skjærspenning (tangensialspenning) τ_0 oppover, imot den viste x-retningen. Anta at τ_0 (> 0) er en kjent størrelse.

a) De eneste ukjente størrelsene er trykket p samt hastigheten u = u(y) i x-retningen. Skriv opp x- og y- komponentene av Navier-Stokes' ligning, og vis at størrelsen K, definert ved

$$K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \sin\theta \ ,$$

hvor $\gamma = \rho g$, er en konstant som er uavhengig av x og y.

b) Spesifisér grensebetingelsene på hastighetsfeltet ved y = 0 og y = h. Hvorfor er $\partial p / \partial x = 0$ overalt i væsken?

c) Vis ved integrasjon at hastighetsprofilet blir

$$u(y) = \frac{gh\sin\theta}{\nu} y\left(1 - \frac{y}{2h}\right) - \frac{\tau_0}{\rho\nu} y \ .$$

d) Bestem skjærspenningen τ_0 på sjiktets ytterkant slik at netto massestrøm i sjiktet blir lik null. Lag en kvalitativ skisse av hastighetsprofilet gjennom sjiktet for dette tilfellet.

Oppgave 3

En tornado modelleres som en potensialstrømning, hvor et sluk av styrke m (< 0) er superponert med en virvel av styrke K. Hastighetspotensialet oppgis å være

$$\phi = m \ln r + K\theta$$

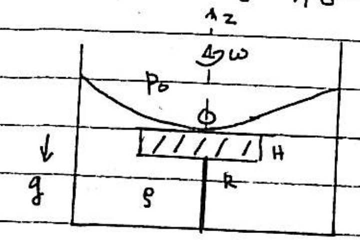
hvor r og θ er plane polarkoordinater.

a) Skriv opp uttrykket for strømfunksjonen ψ, og bestem strømlinjenes form. Skissér en typisk strømlinje for tilfellet $m/K = -1/\pi$.

b) Anta at volumstrømningen Q inn i sluket (per lengdeenhet i vertikal z-retning), samt sirkulasjonen Γ omkring z-aksen, er kjent. (Sett Q > 0.) Finn sammenhengen mellom konstantene m, K og Q, Γ.

c) Fluidet har en fri overflate som langt unna z-aksen er horisontal og gitt ved z = 0. Finn ligningen for overflaten i rz-planet, og skissér resultatet for tilfellet gitt under pkt. a) og med Q = 0,84 m^2/s. Sett g = 9,81m/s^2.

Løsning Oppgave 1



a) Bevegelseslikning i roterende system:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}$$

Inkompressibel væske:

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$p = -\gamma z + \tfrac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + C, \quad \gamma = \rho g$$

Da $p = p_0$ i $r = 0, z = 0$ er $p_0 = C$, og $p = -\gamma z + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0$

Toppflate $z = 0$ gir $\underline{p(r) = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0}$ ①

Bunnflate $z = -H$ gir $\underline{p(r) = \gamma H + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0}$ ②

b) Trykkraft på toppflate:

$$P_{topp} = 2\pi\int_0^R \left(\tfrac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0\right) r\,dr = \pi R^2\left(\rho R^2\omega^2 + p_0\right)$$

Bunnflate: $P_{bunn} = 2\pi\int_0^R \left(\gamma H + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0\right) r\,dr =$

$$= \pi\gamma H R^2 + \pi R^2\left(\rho R^2\omega^2 + p_0\right)$$

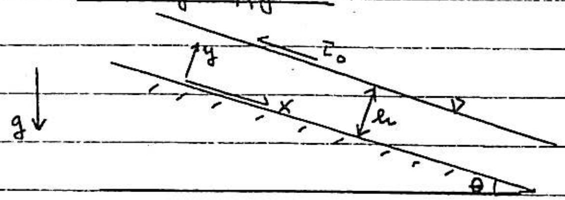
Netto trykkraft $P = P_{bunn} - P_{topp} = \gamma\cdot\pi R^2 H.$

Dette kunne en se direkte ut fra ① og ②: Verken sentrifugaltrykket $\frac{1}{2}\rho r^2\omega^2$ eller atmosfæretrykket har betydning for netto trykkraft.

Strengkraft S: Av kraftbalansen $S + mg = P$ fås

$$\underline{S = \gamma\cdot\pi R^2 H - mg}$$

Løsning Oppgave 2



$\vec{g} = (g\sin\theta, -g\cos\theta)$

a) Navier-Stokes:

x: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \nu\frac{d^2u}{dy^2}$ ①

y: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\theta$ ②

② skrives som $\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma\cos\theta$, $p = -\gamma y\cos\theta + f(x)$, $f(x)$ vilkårlig

$\Rightarrow \partial p/\partial x = f'(x)$, uavhengig av y.

Skriver ① som $\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta = \mu\frac{d^2u}{dy^2}$, $\mu = \rho\nu$.

Da venstre side avhenger bare av x, høyre side bare av y, må

$K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ være en konstant, uavhengig av x og y.

b) Grensebetingelser:

1) Heftbetingelse $u = 0$ ved $y = 0$.

2) Da generelt $\tau = \mu\frac{du}{dy}$ og $\tau = -\tau_0$ ved $y = h$, vil

$\left.\frac{du}{dy}\right|_h = -\frac{\tau_0}{\mu}$. Negativ størrelse.

Da K er konstant, må $\partial p/\partial x$ være konstant. Kan evalueres i fri overflate, hvor $p = p_0$ = konstant. Altså $\partial p/\partial x = 0$ overalt.

c) Integrerer ligningen $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{K}{\mu}$, og får

$\frac{du}{dy} = \frac{K}{\mu}y + C_1$, $u(y) = \frac{K}{2\mu}y^2 + C_1 y + C_2$

Grensebet. $u(0) = 0$ gir $C_2 = 0$, mens $\left.\frac{du}{dy}\right|_h = -\frac{\tau_0}{\mu}$ gir

$\frac{K}{\mu}\cdot h + C_1 = -\frac{\tau_0}{\mu}$, $\Rightarrow$ $u(y) = -\frac{Kh}{\mu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right) - \frac{\tau_0}{\mu}\cdot y$

Da $K = -\gamma\sin\theta$: $u(y) = \frac{gh\sin\theta}{\nu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right) - \frac{\tau_0}{\rho\nu}y$

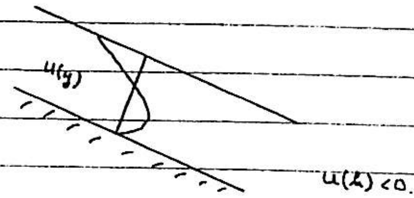
Oppgave 2, forts.

d) Antar én lengdeenhet inn i planet.

Massestrøm $\dot{m} = \rho\int_0^h u\,dy = 0 \Rightarrow$

$$\frac{gh\sin\theta}{\nu}\underbrace{\int_0^h\left(y - \frac{y^2}{2h}\right)dy}_{\frac{1}{3}h^2} - \frac{\tau_0}{\rho\nu}\underbrace{\int_0^h y\,dy}_{\frac{1}{2}h^2} = 0$$

$\therefore$ $\tau_0 = \frac{2}{3}\gamma h\sin\theta$



TEP 4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 15. august 2005

Løsning Oppgave 3

a) Gitt $\phi = m \ln r + K\theta$. Tilsvarende strømfunksjon er

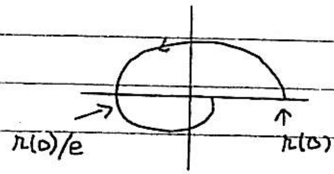
$$\underline{\psi = -K \ln r + m\theta}$$ (formelark).

Strømlinjer ψ = konstant bestemt av

$$K \ln r = -\psi + m\theta \;, \Rightarrow$$

$$\underline{r = e^{-\psi/K} \cdot e^{m\theta/K} = e^{-\psi/K} \cdot e^{-|m|\theta/K}}$$

Hvis $|m|/K = 1/\pi$ fås $\underline{r = e^{-\psi/K} \cdot e^{-\theta/\pi} = r(0) e^{-\theta/\pi}}$



b) Volumstrømning inn per lengdeenhet: $\underline{Q} = 2\pi r \cdot |V_r| = 2\pi r \cdot \frac{|m|}{r} = \underline{2\pi |m|}$

Sirkulasjon $\underline{\Gamma} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = V_\theta \cdot 2\pi r = \frac{K}{r} \cdot 2\pi r = \underline{2\pi K}$

c) For potensialstrømning er $\nabla \times \vec{V} = 0$ og Bernoulli kan brukes.

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p_0}{\rho} + gz = \left[\frac{1}{2}V^2 + \frac{p_0}{\rho}\right]_\infty$$

Da $V \to 0$ når $r \to \infty$ fås $-z(r) = \frac{V^2}{2g} = \frac{V_r^2 + V_\theta^2}{2g} = \frac{m^2 + K^2}{2g} \frac{1}{r^2}$

Fra pkt. a) er $K^2 = m^2 \pi^2$, $\Rightarrow$

$$\underline{-z(r)} = \frac{m^2(1+\pi^2)}{2g} \frac{1}{r^2} = \frac{Q^2(1+\pi^2)}{8\pi^2 g} \frac{1}{r^2}$$

Numerisk $\underline{-z(r)} = \frac{0{,}84^2(1+\pi^2)}{8\pi^2 \cdot 9{,}81} \frac{1}{r^2} = \underline{\frac{0{,}010}{r^2}}$