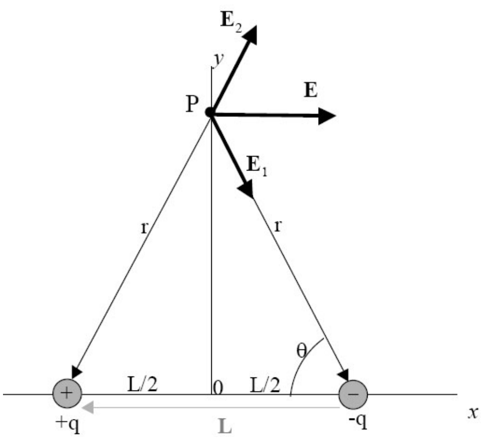
Øving 2, løsningsskisse.
Elektrisk felt, fluks, Gauss' lov.

Oppgave 1. Elektrisk dipol.



Totalt E-felt i punktet P er gitt ved E_1 fra $+q$ og E_2 fra $-q$. Størrelsen på E_1 og E_2 er den samme, men E_1 er i retning fra $+q$ og E_2 i retning mot $-q$. y-komponentene vil kansellere hverandre, og for x-komponenten får vi:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (E_{1x} + E_{2x})\ \hat{\mathbf{i}} = 2E_{1x}\ \hat{\mathbf{i}}\ , \quad \text{hvor} \\ E_{1x} &= E_1 \cos\theta = k \cdot \frac{q}{r^2} \cos\theta\,.\end{aligned}$$

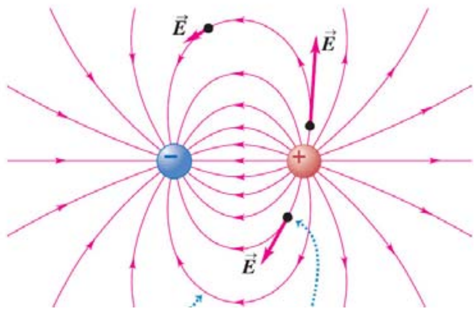
Fra figuren har vi at $\cos\theta = \frac{L/2}{r}$, som gir

$$\vec{E} = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{r^2}\frac{L}{2r}\ \hat{\mathbf{i}} = k \cdot \frac{qL}{r^3}\ \hat{\mathbf{i}} = \underline{-k \cdot \frac{\vec{p}}{r^3}}\,,$$

der vi har brukt at den elektriske dipol (som peker fra negativ til positiv ladning) er gitt ved $\vec{p} = q\vec{L} = qL(-\hat{\mathbf{i}})$.

Merk at det elektriske feltet synker med r som $1/r^3$. Dette er rett for alle punkter (i alle retninger) langt unna en dipol, der det altså er $1/r^2$ for en punktladning. Se eksempler 21-8 og 21-14 i Young & Freedman 13th Ed.

Retningen på feltet er i motsatt retning av dipolmomentet. Dette gjelder kun i denne midtlinja. Husk at feltlinjene fra en dipol ser ut som vist til høyre. Vi har studert kun $\vec{E}$ på midtlinja.



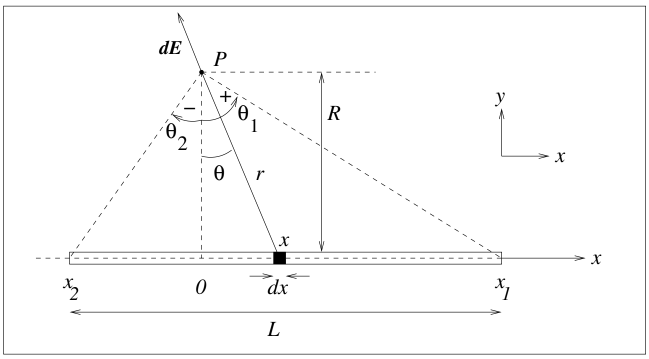
Oppgave 2. Ladet stav.

a) Med "linjeladning" (dvs. ladning per lengdeenhet) λ må ladningene dq og Q på henholdsvis en liten lengde dx og på hele staven bli

$$\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}x \qquad Q = \lambda L$$

b) Elektrisk felt i pkt. P i avstand r fra lengdeelement dx i posisjon x (som vist i figuren):

$$\mathrm{d}\vec{E} = k\,\lambda\frac{\mathrm{d}x}{r^2}\hat{r}$$



der som vanlig $k = 1/4\pi\varepsilon_0$. Fra figuren ser vi at denne vektoren har komponentene

$$\mathrm{d}E_x = -\mathrm{d}E\sin\theta = -\frac{k\,\lambda\,\mathrm{d}x}{r^2}\sin\theta \qquad \mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{k\,\lambda\,\mathrm{d}x}{r^2}\cos\theta$$

Her har vi valgt $x = 0$ når $\theta = 0$, og fortegnet stemmer med oppgaveteksten, dvs $\theta > 0$ når $x > 0$. Vi bruker tipset i oppgaven og uttrykker dx og $1/r^2$ ved vinkelen θ:

$$\left.\begin{aligned} x = R\tan\theta \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{R\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} \\ r = \frac{R}{\cos\theta} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{R^2}\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{r^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{R}$$

De søkte komponentene E_x og E_y av feltet $\vec{E}$ i punktet P fra hele staven får vi ved å integrere $\mathrm{d}E_x$ og $\mathrm{d}E_y$:

$$E_x = \int\limits_{\text{staven}} \mathrm{d}E_x = -\frac{k\,\lambda}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{k\,\lambda}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \cos\theta = \underline{\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)}$$

$$E_y = \int\limits_{\text{staven}} \mathrm{d}E_y = \frac{k\,\lambda}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1} \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{k\,\lambda}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta = \underline{\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right)}\,.$$

KOMMENTAR: Her kunne en ha vært "uheldige" og startet med sammenhengen $x = r\sin\theta$, som gir $\mathrm{d}x = r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \sin\theta\,\mathrm{d}r$, ettersom både θ og r varierer med x. Men det går bra likevel: Vi har $\cos\theta = R/r$, dvs $r = R/\cos\theta$, og dermed

$$\mathrm{d}r = -R\frac{1}{\cos^2\theta}(-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

slik at

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{r^2} &= \frac{r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \sin\theta\,\mathrm{d}r}{r^2} \\
&= \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta\cdot R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{R^2} \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{R}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \frac{\mathrm{d}\theta}{R}
\end{aligned}$$

c) Med P like langt fra stavens to ender er $\theta_1 = -\theta_2$ og følgelig $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0$ og $\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\sin\theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2/4}$. Dermed:

$$E_x = 0$$

og

$$E = E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{R^2 + L^2/4}}.$$

Langt unna staven, dvs $R \gg L$: Vi kan nå erstatte kvadratroten med R, idet vi kan neglisjere $L^2/4$ i forhold til R^2. Vi får da:

$$E \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Dette er det samme som feltet fra en punktladning Q i avstand R. Ikke uventet: Langt unna ser staven essensielt ut som en punktladning med total ladning $Q = \lambda L$.

d) En uendelig lang stav oppnår vi ved å la $\theta_2 \to -\pi/2$ og $\theta_1 \to \pi/2$. Da blir igjen $E_x = 0$ og følgelig

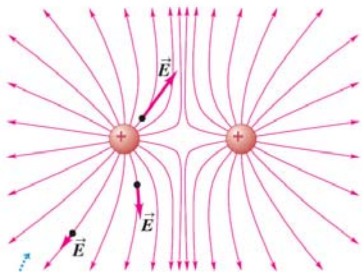
$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Med andre ord: Feltet fra en uendelig lang linjeladning faller av omvendt proporsjonal med R.

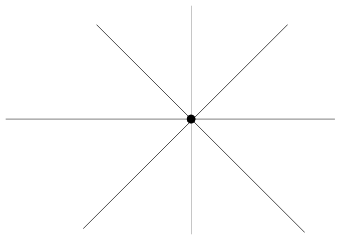
Oppgave 3. Feltlinjer.

a) i) Feltlinjer rundt to like store positive punktladninger:

"Nærbilde". Like mange feltlinjer ut fra hver ladning $+q$ siden de er like. Her valgt 18 feltlinjer fra hver, og feltlinjene går ut til uendelig.

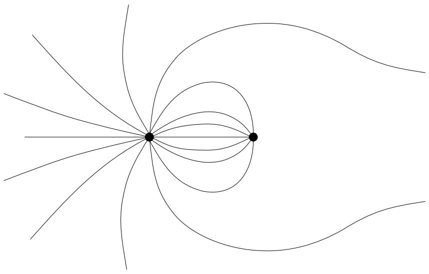


Riktig langt unna ser vi de to ladningene som én punktladning $+2q$. Her valgt kun 8 feltlinjer totalt, og de går til uendelig.

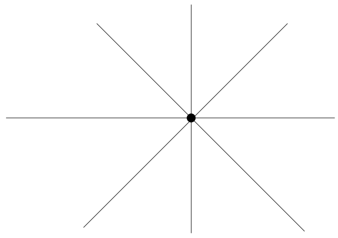


a) ii) Feltlinjer rundt punktladninger $-2q$ og q:

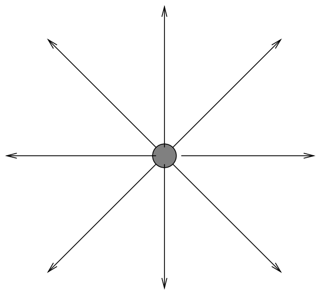
"Nærbilde". Like mange feltlinjer ut per positiv ladning q som inn per negativ ladning $-q$, derfor dobbelt så mange inn mot $-2q$ som ut fra q. De "resterende" må komme fra uendelig. Det er en feil i figuren: det mangler en horisontal feltlinje ut fra $+q$ mot høyre og til uendelig! Det skal da bli 8 linjer ut fra q og 16 linjer inn til $-2q$.



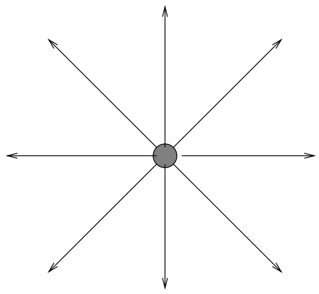
Riktig langt unna ser vi essensielt en punktladning $-2q + q = -q$, dvs. feltlinjene går radielt *inn* mot ladningen:



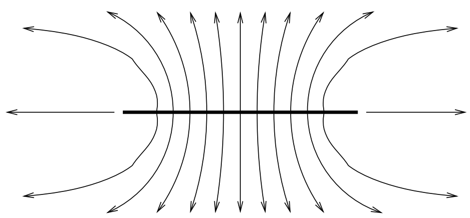
b) i) stav, plan normalt på, nært



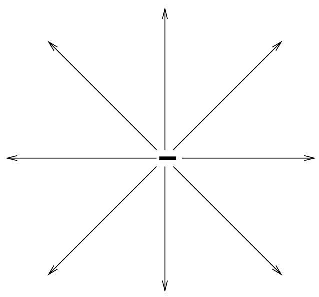
stav, plan normalt på, langt unna



b) ii) stav, plan inneholder staven, nært



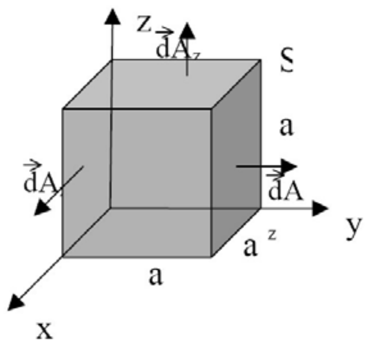
stav, plan inneholder staven, langt unna



Kommentar til oppgave 3: Skissene vist er bare *kvalitative*, ikke *kvantitative*. Legg spesielt merke til at langt unna ser alt ut som en punktladning. På nært hold kan en som regel benytte symmetribetraktninger kombinert med det en vet om feltet i umiddelbar nærhet av eventuelle punktladninger til å tegne opp et temmelig korrekt bilde av feltlinjene.

Oppgave 4. Fluks. Gauss' lov

Den lukkede flata S har sideflater med areal $A_i = a^2$, der $i = x, y, z$. Retningen på d$\vec{A}$ er normalt på sideflata som figuren viser. Når vi beregner fluksen vil sideflater hvor $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{A}$ ikke gi noe bidrag (prikkproduktet er null).

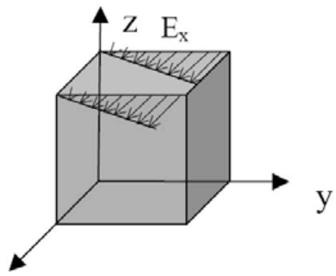


i) $\vec{E} = E_x\,\hat{\mathbf{i}} = C\,\hat{\mathbf{i}}$ = konstant medfører at

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}A = \underbrace{C\cdot a^2}_{\text{flate } x=a} + \underbrace{(-C\cdot a^2)}_{\text{flate } x=0} + \underbrace{0+0+0+0}_{\text{andre flater: } \vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{A}} = \underline{0}\,.$$

Altså bidrar bare 2 av de 6 flatene, og siden E-feltet er uavhengig av x, blir fluks inn lik fluks ut og total fluks blir lik null. Ladning innefor S blir da ifølge Gauss' lov:

$$\underline{Q = \epsilon_0 \Phi_E = 0}\,.$$



ii) $\vec{E} = E_x\,\hat{\mathbf{i}} = C\cdot x\,\hat{\mathbf{i}}$ gir tilsvarende

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}A = \underbrace{Ca\cdot a^2}_{\text{flate } x=a} + \underbrace{C\cdot 0\cdot a^2}_{\text{flate } x=0} + \underbrace{0+0+0+0}_{\text{andre flater: } \vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{A}} = \underline{Ca^3}$$

og

$$\underline{Q = \epsilon_0 \Phi_E = \epsilon_0 C a^3}\,.$$

iii) $\vec{E} = E_x\,\hat{\mathbf{i}} = C\cdot x^2\,\hat{\mathbf{i}}$ gir videre

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}A = \underbrace{Ca^2\cdot a^2}_{\text{flate } x=a} + \underbrace{C\cdot 0\cdot a^2}_{\text{flate } x=0} + \underbrace{0+0+0+0}_{\text{andre flater: } \vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{A}} = \underline{Ca^4} \quad \text{og} \quad \underline{Q = \epsilon_0 C a^4}\,.$$

iv) $\vec{E} = E_x\,\hat{\mathbf{i}} + Ey\,\hat{\mathbf{j}} = C\cdot y\,\hat{\mathbf{i}} + C\cdot x\,\hat{\mathbf{j}}$.
Når E_x ikke er avhengig av x vil fluks ut ved flata $x = a$ være lik fluks inn ved flata $x = 0$, slik at netto fluks blir 0. Tilsvarende argument gjelder for fluks i y-retning og i z-retning er det ingen felt slik at fluks i denne retning er null. Totalt: $\Phi_E = 0$. Om man vil, uttrykt matematisk oppdelt på hver koordinatretning:

$$\Phi_{E,x} = \int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a} Cy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a} Cy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = C\frac{a}{2}a^2 - C\frac{a}{2}a^2 = \underline{0} \quad \text{, likedan } \underline{\Phi_{E,y} = 0} \;\Rightarrow\; \underline{Q = 0}\,.$$

Alternativ måte å finne Q på er å bruke Gauss' lov på differensialform: $\rho(x, y, z) = \epsilon_0\,\mathrm{div}\vec{E}(x, y, z)$. Altså beregne divergensen til $\vec{E}$ og så integrere ρ over kuben. Dette gir mindre arbeid:

i) $\rho = \epsilon_0\,\mathrm{div}\vec{E} = \epsilon_0\,\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \underline{Q = \rho V = 0\cdot a^3 = 0}$.

ii) $\rho = \epsilon_0\,\mathrm{div}\vec{E} = \epsilon_0\,\frac{\partial E_x}{\partial x} = \epsilon_0\,C \quad \Rightarrow Q = \rho\,a^3 = \underline{\epsilon_0\,Ca^3}$.

iii) $\rho = \epsilon_0\,\mathrm{div}\vec{E} = \epsilon_0\,\frac{\partial E_x}{\partial x} = \epsilon_0\,2Cx \quad \Rightarrow Q = \int_0^a \rho\mathrm{d}V = \epsilon_0\,2C\int_0^a x\,\mathrm{d}x\,a^2 = \epsilon_0\,C(a^2 - 0^2)\,a^2 = \underline{\epsilon_0\,Ca^4}$.

iv) $\rho = \epsilon_0\,\mathrm{div}\vec{E} = \epsilon_0\,\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \underline{Q = \rho V = 0\cdot a^3 = 0}$.

Merk at når rommet er divergensfritt i $\vec{E}$ er det også ladningsfritt.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 13.jan. 12.