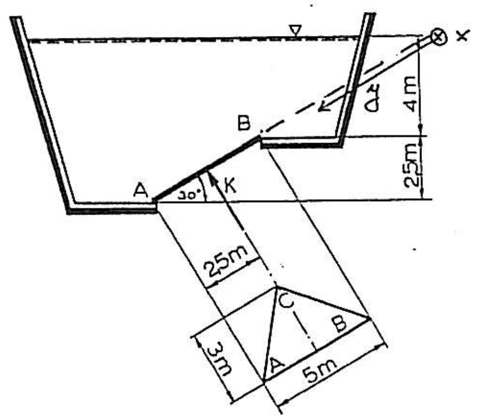
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: (735) 93555

**KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. VII**
Tirsdag 6. august 1996
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet

Oppgave 1



I bunnen av et basseng er det en trekantet luke ABC beliggende slik at sidekanten AB er parallell med figurens plan. Luka kan åpnes med en kraft K som virker vinkelrett på lukas plan i punktet C. Bassenget er fylt med vann til en høyde 4 m over punktet B, og til 6,5 m over punktet A. Vinkelen mellom lukas plan og horisontalplanet er 30^0. Se bort fra atmosfæretrykket, og sett $\gamma = 10^4$ Pa/m.

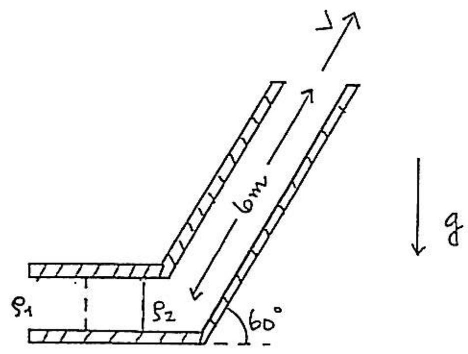
a) Finn den resulterende hydrostatiske trykkraft F på luka.

b) Legg y-aksen i figurens plan, parallelt med AB, og la x-aksen peke vinkelrett inn i planet som vist på figuren. Finn y-koordinaten y_p for trykksenteret.

Oppgitt: For en likebent trekant med grunnlinje b og høyde h ligger centroiden h/3 over grunnlinjen. Flatens treghetsmoment omkring en akse langs høyden er $I_{xc} = b^3h/48$.

c) I x-retningen vil trykksenteret ligge i avstanden h/3 = 1 m fra grunnlinjen AB. Hvorfor? Benytt dette til å beregne hvor stor kraften K må være for å åpne luka når denne er hengslet langs AB.

Oppgave 2



Luft med opprinnelig tetthet ρ_1 kommer inn i et kammer (peis) hvor den varmes opp og får tettheten ρ_2. Den oppvarmede lufta stiger opp gjennom en skorstein som danner vinkelen 60^0 med horisontalplanet. Skorsteinens lengde er 6 m. Luftas utløpshastighet til fri atmosfære er V. Anta at lufta er inkompressibel, bortsett fra i forbrenningssonen. Luftas kinetiske energi kan neglisjeres i kammeret. Tyngdens akselerasjon er g.

Finn V, når det oppgis at lufttemperaturen er $t_1 = 5^0$ C, og at temperaturen i kammeret etter oppvarmingen er $t_2 = 150^0$ C.

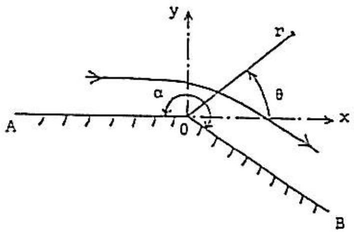
Oppgave 3

a) For todimensjonal stasjonær potensialstrømning vil differansen i strømfunksjonen ψ mellom to strømlinjer være lik volumstrømningen mellom strømlinjene.
Vis det.
Gi også en kort utledning av den grensebetingelse som ψ må oppfylle på en fast overflate.

b) Vis at

$$\psi = Ar^{m+1} \sin [(m+1)\theta - m\pi] ,$$

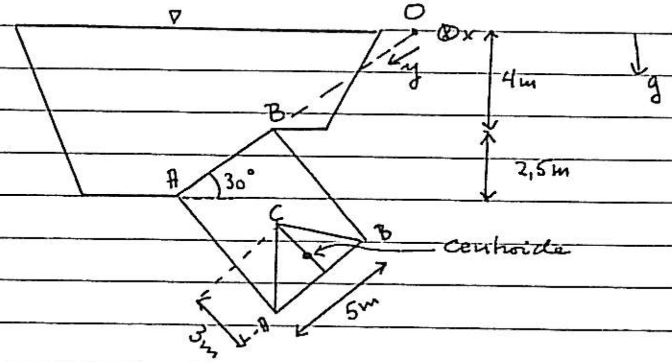
hvor konstanten A er positiv og m et negativt tall mellom -1/2 og 0, er strømfunksjonen for potensialstrømning rundt et hjørne AOB med utvendig vinkel $\alpha = \pi/(m+1)$ (se figuren). [Hint: Vis at $\nabla^2\psi = 0$, og at grensebetingelsen for ψ på flaten AOB er oppfylt.]



c) Regn ut hastighetskvadratet $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2$, og vis at trykket p avhenger av r men er uavhengig av θ. Finn p(r), når trykket p(1) for r = 1 er kjent, lik p_1. Væskens tetthet kalles ρ. Tyngden neglisjeres.

61124 FLUIDMEKANIKK , 6. august 1996 ①

Løsning Oppgave 1

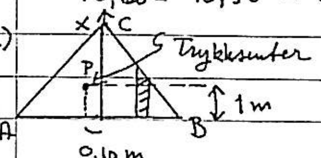


a) $F = \gamma h_c A$, hvor centroidens dybde er
$h_c = 4 + \frac{2,5}{2} = 5,25$ m (centroiden ligger på trekantens midtlinje).
Trekantens areal $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7,5\ m^2$
$\Rightarrow \underline{F =} 10^4 \cdot 5,25 \cdot 7,5 = \underline{3,94 \cdot 10^5\ N}$

b)
Formel $y_p = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A}$

Fra figuren: $y_c = OB + \frac{5}{2} = 8 + \frac{5}{2} = 10,5$ m.
Fra oppgitt formel: $I_{xc} = \frac{1}{48} b^3 h = \frac{1}{48} \cdot 5^3 \cdot 3 = 7,81\ m^4$
$\Rightarrow$
$\underline{y_p} = 10,5 + \frac{7,81}{10,5 \cdot 7,5} = \underline{10,60\ m}$ (trykksenteret ligger
10,60 − 10,50 = 0,10 m nedenfor trekantens symmetrilinje).

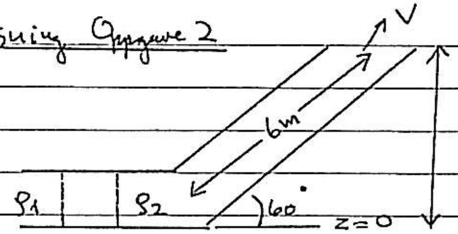
c)



Det er ingen trykkvariasjon over en areal-stripe som er parallell med x-retningen (skravert stripe). Ved å ta kraftmomentet om AB fås derfor samme integral som når en tar flatemomentet. Trykksenterets avstand fra AB derfor den samme som flatesenterets, dvs. $x_p = x_c = h/3 = 1$ m.
Momentbalanse: $K \cdot 3 = F \cdot 1 = 3,94 \cdot 10^5$

$\underline{K = 1,31 \cdot 10^5\ N}$

Løsning Oppgave 2



Tilstandsligningen er $p = \rho R T$. Betingelsen konstant trykk over forbrenningssonen gir ρT = konstant, altså $\rho_1/\rho_2 = T_2/T_1$.

Inkompressibel gass i pipa gjør at Bernoulli kan benyttes:

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\rho_2 V_2^2}_{\text{negl.}} + p_0 + 0 = \tfrac{1}{2}\rho_2 V^2 + (p_0 - \rho_1 g z) + \rho_2 g z$$

atmosfæretrykk eller forbrenningssonen

Her er benyttet at trykket er det samme like innenfor som like utenfor utløpet av pipa.

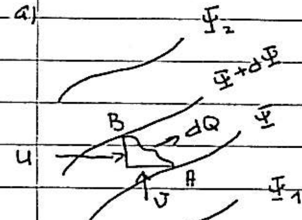
$$V = \sqrt{\frac{2(\rho_1 - \rho_2) g z}{\rho_2}} = \sqrt{2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) g z}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) g z} = \sqrt{2\left(\frac{423}{278} - 1\right) \cdot 9{,}81 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}$$

$$\underline{V = 7{,}3 \text{ m/s}}$$

Løsning Oppgave 3

a)



Forskjell i Ψ mellom to strømlinjer Ψ_1 og Ψ_2:

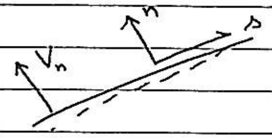
$$\Psi_2 - \Psi_1 = \int_1^2 d\Psi = \int_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \int_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

$$= \int_1^2 (-v\,dx + u\,dy).$$

På figuren er $dx < 0$ og $dy > 0$ når en går fra A til B. Dermed er $(-v\,dx + u\,dy) = dQ$, og

$\underline{\Psi_2 - \Psi_1} = \int dQ = \underline{Q_{12}}$, volumstrømningen.

Grensebetingelse fast overflate:



Da normalkomponenten $V_n = -\partial\Psi/\partial s$ må være null på flaten, følger Ψ = konstant på flaten.

b)

Gitt $\Psi = A r^{m+1} \sin[(m+1)\theta - m\pi]$

Av formelark:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$$

Regner ut

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = A(m+1) r^m \sin[(m+1)\theta - m\pi]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = A(m+1)^2 r^m \sin[(m+1)\theta - m\pi]$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -A(m+1)^2 r^{m-1} \sin[(m+1)\theta - m\pi]$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\nabla^2 \Psi} = \frac{1}{r} \cdot A(m+1)^2 r^m \sin[(m+1)\theta - m\pi] - A(m+1)^2 r^{m-1} \sin[(m+1)\theta - m\pi] = \underline{0}$$

Grensebetingelser:

Flaten AO, $\theta = \pi$: $\quad \underline{\Phi} = A r^{m+1} \sin[(m+1)\pi - m\pi] = \underline{\underline{0}}$

Flaten OB, $\theta = -(\alpha - \pi) = \dfrac{m\pi}{m+1}$: $\quad \underline{\Phi} = A r^{m+1} \sin(m\pi - m\pi) = \underline{\underline{0}}$

Altså er $\underline{\Phi}$ konstant over hele flaten AOB. Dermed gir $\underline{\Phi}$ en potensialstrømning.

c) Hastighetskomponenter:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = A(m+1) r^m \cos[(m+1)\theta - m\pi]$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -A(m+1) r^m \sin[(m+1)\theta - m\pi]$$

$$\Rightarrow \underline{V^2} = V_r^2 + V_\theta^2 = \underline{A^2 (m+1)^2 r^{2m}}, \text{ uavhengig av } \theta.$$

Bernoulli: $p(r,\theta) + \frac{1}{2}\rho V^2(r) =$ konstant over hele fluidet.
Altså er $p(r,\theta) = p(r)$, uavhengig av θ.
Benytter et vilkårlig punkt på sirkelen $r = 1$ i Bernoulli:

$$p(r) + \frac{1}{2}\rho A^2 (m+1)^2 r^{2m} = p_1 + \frac{1}{2}\rho A^2 (m+1)^2 \cdot 1^{2m}$$

$$\Rightarrow \underline{p(r) = p_1 + \frac{1}{2}\rho A^2 (m+1)^2 (1 - r^{2m})}.$$