FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.

Løsningsforslag til øving 12

Oppgave 1. Varmeskjold

Ved stasjonære forhold er varmestrømmen j mellom skjoldene den samme overalt. Vi starter fra den kalde siden med temperatur T_L, og skriver opp ligningene for energistrømmen mellom hver plate, helt til vi kommer over til den varme siden med temperatur T_H. Med Stefan-Boltzmanns lov er netto varmestrøm pr flateenhet i

$$
\begin{aligned}
1.\,\text{intervall}: \quad j &= \sigma(T_1^4 - T_L^4) \\
2.\,\text{intervall}: \quad j &= \sigma(T_2^4 - T_1^4) \\
&\ldots \\
(N-1).\,\text{intervall}: \quad j &= \sigma(T_{N-1}^4 - T_{N-2}^4) \\
N.\,\text{intervall}: \quad j &= \sigma(T_N^4 - T_{N-1}^4) \\
N+1.\,\text{intervall}: \quad j &= \sigma(T_H^4 - T_N^4)
\end{aligned}
$$

De mellomliggende N ukjente temperaturene $T_1, ..T_N$ kan nå elimineres ved å legge sammen disse N ligningene:

$$(N+1)\; j = \sigma(T_H^4 - T_L^4) = j_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{j}{j_0} = \frac{1}{N+1},$$

der j_0 er varmestrømmen uten skjold, dvs $N = 0$. Kommentar: Temperaturen på skjoldene kan nå bestemmes ved å addere de k første intervallene. Dette gir $kj = \sigma(T_k^4 - T_L^4)$, eller $T_k^4 = T_L^4 + kj/\sigma$, som innsatt for j gir

$$T_k = \left[\frac{(N+1-k)T_0^4 + kT_H^4}{N+1}\right]^{1/4}.$$

Oppgave 3. Kokte poteter

For diffusjon av partikler fant vi at diffusjonslengden r går som kvadratroten av tida t, dvs $r \sim \sqrt{t}$. Det samme må da gjelde for varmetransport, som beskrives ved samme differensialligning. Når lengdedimensjoner endres med en faktor a, vil følgelig tidsforløp endres med en faktor a^2 for systemer med samme form. [Dvs: Differensialligningen forblir uendret dersom nye variable $t' = ta^2$ og $r' = ra$ innføres og samme grensebetingelser brukes.] Når tyngden, og dermed volumet til potetene endres med en faktor $v = 2$, vil lengder endres med en faktor $a = v^{1/3} = 2^{1/3}$. Tida endres derfor med faktoren $\tau = a^2 = 2^{2/3} = 1.59$. Så med dobbelt så tunge poteter endres koketida til 25 minutter $\cdot \tau \simeq 40$ minutter.

Oppgave 4. Fjernvarmeanlegg

a) Det er $24 \cdot 365 = 8760$ timer i et år. Midlere effekt levert av fjernvarmeanlegget er dermed $P = 600 \cdot 10^9/8760 \simeq 68.5$ MW.

Vannmasse gjennom anlegget pr tidsenhet:

$$
\begin{aligned}
dM/dt &= \frac{dQ/dt}{dQ/dM} = \frac{P}{c\,dT} \\
&= \frac{68.5 \cdot 10^6}{4184 \cdot 80} \\
&= 205 \text{ kg/s}
\end{aligned}
$$

Maksimal strømningshastighet (faktor 2 pga 2 sløyfer):

$$\begin{aligned} v &= \frac{dz}{2dt} = \frac{dV/A}{2dt} = \frac{dV/2dt}{\pi r_2^2} \\ &= \frac{0.205/2}{\pi \cdot 0.125^2} \\ &\simeq 2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b) Dette er det samme som regnet igjennom i avsnitt 10.4 i PCH, sluttresultatet er ligningen umiddelbart over ligning 10.18 s. 144 i PCH.

c) Varmekapasiteten pr masseenhet er

$$c = C/M = C/\rho V = C/\rho AL = 4C/\rho L\pi d_2^2.$$

Dermed:

$$j = (dQ/dt)/L = -(CdT/dt)/L = -(C/L)(dT/dz)(dz/dt),$$

som med $v = dz/dt$ og C/L fra forrige ligning gir

$$j = -\frac{1}{4}c\rho\pi d_2^2 v\,\frac{dT}{dz}.$$

d) Vi har nå to uttrykk for j som kan settes lik hverandre. Etter litt rydding gir dette diffligningen

$$\frac{dT}{T - T_0} = -\beta\,dz,$$

med

$$\beta = \frac{8\kappa}{c\rho d_2^2 v \ln(d_1/d_2)}.$$

Integrasjon av diffligningen på begge sider gir så det oppgitte svaret

$$T(z) = T_0 + [T(0) - T_0]\,e^{-\beta z}.$$

e) Vi setter $T(z) - T_0 = 90$ K og $T(0) - T_0 = 95$ K, slik at

$$e^{-\beta z} = 90/95,$$

med andre ord

$$\beta = \ln(95/90)/10000 = 5.41 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Minste strømningshastighet blir dermed

$$v = \frac{8\kappa}{c\rho d_2^2 \beta \ln(d_1/d_2)} = \frac{8 \cdot 0.035}{4184 \cdot 1000 \cdot 0.25^2 \cdot 5.41 \cdot 10^{-6} \cdot \ln(7/5)} = 0.59\,\mathrm{m/s}.$$

Dette er (heldigvis!) mindre enn den maksimale hastigheten beregnet i punkt a).