

Løsningsforslag til Øving 12
Høst 2015

Oppgave 1

Det komplekse potensialet er generelt gitt ved

$$w(z) = \Phi + i\Psi. \quad (1)$$

Vi finner derfor hastighetspotensialet og strømfunksjonen ved å hhv. finne real- og imaginærdel av det komplekse potensialet.

a

Her har vi

$$w(z) = Uz^{\pi/\alpha} = Ur^{\pi/\alpha} \exp\left(i\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) = Ur^{\pi/\alpha} \left(\cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) + i\sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)\right), \quad (2)$$

som gir

$$\Phi = Ur^{\pi/\alpha} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) \quad \text{og} \quad \Psi = Ur^{\pi/\alpha} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right). \quad (3)$$

Finner hastighetene fra enten hastighetspotensialet eller strømfunksjonen;

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \quad \text{og} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad (4)$$

som gir

$$v_r = \frac{\pi U}{\alpha} r^{(\frac{\pi}{\alpha}-1)} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) \quad \text{og} \quad v_\theta = -\frac{\pi U}{\alpha} r^{(\frac{\pi}{\alpha}-1)} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) \quad (5)$$

b

Volumstrømmen Q er generelt gitt ved

$$Q = \int \vec{V} \cdot \vec{n} dA, \quad (6)$$

hvor \vec{n} er normalvektoren til flaten dA som det strømmen gjennom. I potensialteorien kan man gjøre dette enda enklere ved å ta differansen mellom strømfunksjonen Ψ over flaten det strømmen gjennom. Altså, for denne oppgaven er det (minst) tre måter å finne volumstrømmen på:

1:

Differansen mellom strømfunksjonen i origo og i punktet ($r = b, \theta = \alpha/2$):

$$Q = \Psi(r = b, \theta = \alpha/2) - \Psi(r = 0, \theta) = Ub^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (7)$$

2:

Et integral over sirkelbuen med toppunkt i O og radius b : (langs denne flaten er det kun radiell strøm som bidrar)

$$Q = \int_0^{\alpha/2} v_r b d\theta = \frac{\pi U}{\alpha} b^{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{\alpha/2} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} d\theta = Ub^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (8)$$

3:

Et integral over linjen fra O til B ($\theta = \alpha/2$): (langs denne flaten er det kun tangensiell strøm som bidrar)

$$Q = - \int_0^b v_\theta dr = Ub^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (9)$$

hvor minustegnet skyldes at strømmingen går i negativ θ -retning.

c

For potensialstrømning er $\nabla \times \vec{V} = 0$ og vi kan følgelig benytte oss av Bernoulli mellom to vilkårlige punkter. Vi skriver:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho V_0^2 + p_0}_{\text{origo}} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho V^2 + p}_{\text{vilkaarlig punkt}}. \quad (10)$$

Da $V_0 = 0$ i origo og

$$V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{\pi U}{\alpha}\right)^2 r^{2(\frac{\pi}{\alpha}-1)} \quad (11)$$

fåes

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\pi U}{\alpha}\right)^2 r^{2(\frac{\pi}{\alpha}-1)}. \quad (12)$$

Trykket er ikke realistisk for store r da vi kan få negativt trykk for en valgt p_0 .

Oppgave 2

Det komplekse potensialet for en kilde i origo med styrke λ er

$$w(z) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln z. \quad (13)$$

For uendelig mange ekvidistante kilder får vi følgelig

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\lambda}{2\pi} [\ln z + \ln(z - ia) + \ln(z + ia) + \ln(z - 2ia) + \ln(z + 2ia) + \dots] \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \ln [z(z - ia)(z + ia)(z - 2ia)(z + 2ia)\dots] \end{aligned} \quad (14)$$

Ved hjelp av tredje kvadratsetning kan vi skrive

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\lambda}{2\pi} \ln [z(z^2 + a^2)(z^2 + 4a^2)\dots] \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \ln \left[z \prod_{n=1}^{\infty} (z^2 + n^2 a^2) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Av oppgitt formel:

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{\pi z}{a}\right) &= \frac{\pi z}{a} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^2 + n^2 a^2}{n^2 a^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi z}{a} \left(\prod_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^2 a^2}\right)\right) \left(\prod_{n=1}^N (z^2 + n^2 a^2)\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} C_N \cdot z \prod_{n=1}^N (z^2 + n^2 a^2), \end{aligned} \quad (16)$$

hvor C_N er en konstant for hver N (uavhengig av z), har vi

$$w(z) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \left[z \prod_{n=1}^{\infty} (z^2 + n^2 a^2) \right] = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \sinh\left(\frac{\pi z}{a}\right) - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2\pi} \ln C_N. \quad (17)$$

Som vi vet er ikke konstanten vi finner i potensialteorien av fysisk betydning (er alltid ute etter deriverte eller differanser) og vi kan derfor velge å se bort fra denne. Det komplekse potensialet er følgelig gitt som

$$w(z) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \sinh \left(\frac{\pi z}{a} \right). \quad (18)$$

Av

$$\sinh \frac{\pi z}{a} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right)} \exp \left[i \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{a}}{\tanh \frac{\pi x}{a}} \right], \quad (19)$$

finnes

$$w(z) = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right)} + i \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{a}}{\tanh \frac{\pi x}{a}} \right\} \quad (20)$$

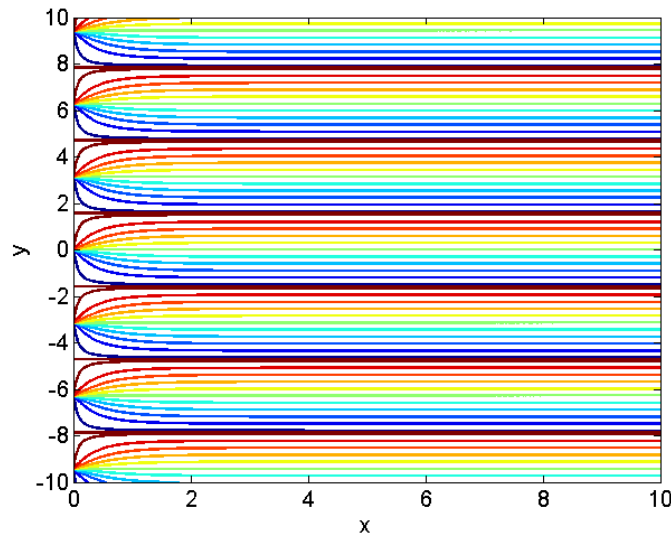
Ved å ta real- og imaginærdelen av uttrykket ovenfor finner hhv. hastighetspotensialet og strømfunksjonen til å være:

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi} \ln \left(\frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right) \quad (21)$$

og

$$\Psi = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{a}}{\tanh \frac{\pi x}{a}} \quad (22)$$

Figuren nedenfor viser noen strømlinjer for $a = \pi$ og $\lambda = 2\pi$.



For store x ligner strømlinjene det vi får for en uniform strømming i x -retning. Dette som forventet da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\tanh x) = 1, \quad (23)$$

slik at strømfunksjonen blir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\Psi) = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{a}}{1} = \frac{\lambda}{2a} y \quad (24)$$

som nettopp er strømfunksjonen for en uniform strøm i x -retning.