NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- og PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

August 2008
Tid: 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller i uke

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

Et sylindrisk kar roterer med konstant vinkelhastighet Ω om den vertikale $z-$aksen. Karet inneholder en væske med konstant tetthet ρ. Tyngdens akselerasjon er g.

a) Gå ut fra Eulerligningen, og finn hvordan trykket $p(r, z)$ varierer som funksjon av r og z. Grensebetingelsene er så langt uspesifiserte.

b)

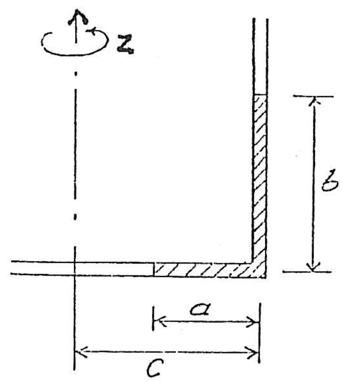


FIG. 1

Et tynt rør med konstant tverrsnitt er bøyd i rett vinkel som vist i fig. 1. Røret er åpent i begge ender. Det roterer i tyngdefeltet med $n = 80$ omdreininger per minutt om den vertikale akse i avstand $c = 50$ cm fra den vertikale gren. Røret inneholder en søyle av en inkompressibel væske ($\rho =$ konstant) med total lengde $l = 80$ cm langs røraksen. Beregn hvordan denne lengden fordeler seg med a på den horisontale og b på den vertikale gren ($a + b = l$). En kan se bort fra atmosfæretrykket. Sett $g = 9,81\, m/s^2$.

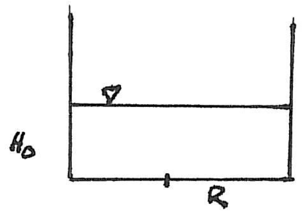


FIG. 2a

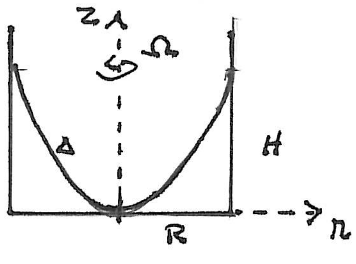
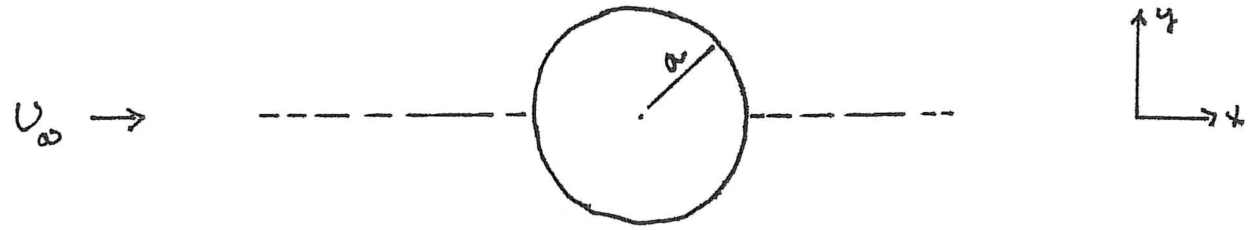


FIG. 2b

c) Se nå på et sylindrisk kar med radius R og stillevannsdybde H_0 (fig.2a). Det settes i rotasjon med konstant vinkelfrekvens Ω. Når likevektstilstanden er inntrådt, er nederste punkt av den frie overflate i berøring med bunnen (fig. 2b). Finn hvilken Ω dette svarer til, uttrykt ved R, g, og H_0.

Oppgave 2



Gitt en uniform potensialstrømning U_∞ i $x-$retning omkring en sylinder som har radius a og sentrum i origo. Sylinderen inneholder en dublett med styrke $U_\infty a^2$ og en virvel med styrke K (> 0), begge i origo. Strømfunksjonen for $r > a$ oppgis å være

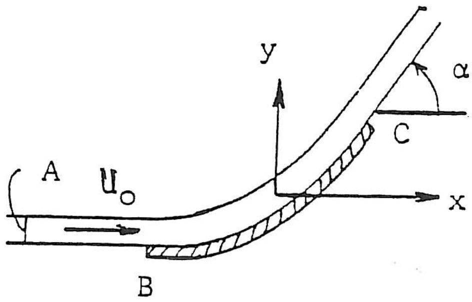
$$\psi = U_\infty \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin\theta - K \ln r.$$

a) Finn hastighetskomponentene V_r og V_θ. For moderate verdier av K vil det være to stagnasjonspunkter på sylinderens overflate. Finn de tilhørende stagnasjonsvinkler θ_s. Hva er betingelsen for at stagnasjonspunktene skal falle sammen?

b) Finn sirkulasjonen Γ ved å integrere V_θ over en sirkel i stor avstand R fra origo, $R \gg a$ (ta med bare de dominerende ledd i V_θ). En ville få det samme resultat for Γ ved å integrere over en sirkelbue med vilkårlig radius r. Hvorfor?

c) Finn trykket $p = p(r, \theta)$ i hele området $r \geq a$, idet du setter $p_\infty = 0$ for $r \longrightarrow \infty$. Finn størrelse og retning av løftet $\mathbf{L}$ på sylinderen, per lengdeenhet.

Oppgave 3



En vannjet med tverrsnitt A og hastighet U_0 er opprinnelig rettet parallelt med $x-$aksen. Jeten avbøyes av en skovl. Tangentene til skovleflaten ved innløpet B og utløpet C danner vinkelen α med hverandre. Anta rette, parallelle strømlinjer både ved B og C. Vannets tetthet er ρ. Neglisjer viskositet og tyngde.

a) Bestem kraften fra vannet på skovlen når skovlen står i ro.

b) Bestem kraften fra vannet på skovlen når skovlen beveger seg i $x-$retning med konstant hastighet $U < U_0$.

c) Ved hvilken konstant skovlhastighet U får effekten av kraften på skovlen maksimal verdi, og hvor stor er den maksimale effekt?

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008 ①

Løsn. Oppgave 1

a) Eulerligningen gir i det roterende koordinatsystem, hvor akselerasjonen er null,

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\Omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}$$

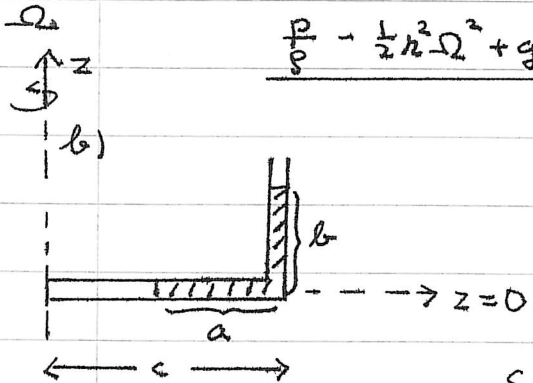
$\uparrow$ Sentrifugalkraft

Da $r\vec{e}_r = \nabla(\frac{1}{2}r^2)$, $\vec{g} = (0,0,-g)$ med $g = 9{,}8$ m/s^2, fås

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + gz\right) = 0, \text{ altså}$$

$$\underline{\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + gz = C}.$$ Verdien av C avhenger av grensebetingelsene.

b)



Ganger ligningen ovenfor med ρ, og kaller den nye sekkekonstanten C:

$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \gamma z + C.$$

Ser bare på nivået $z = 0$:

$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 + C.$$

To grensebetingelser:

1. $p = 0$ i venstre grenseflate av søylen ($r = c - a$):

$$0 = \frac{1}{2}\rho(c-a)^2\Omega^2 + C.$$

2. $p =$ hydrostatisk trykk γb ved $r = c$:

$$\gamma b = \frac{1}{2}\rho c^2\Omega^2 + C$$

Ved subtraksjon av ligningene faller C bort:

$$\gamma b = \frac{1}{2}\rho\left[c^2 - (c-a)^2\right]\Omega^2, \text{ eller } gb = a(c - \tfrac{1}{2}a)\Omega^2$$

Setter inn $b = l - a$, $\quad g(l-a) = a(c - \frac{1}{2}a)\Omega^2 \Rightarrow$

$$\Omega^2 a^2 - 2(g + c\Omega^2)a + 2gl = 0, \qquad \Omega = \frac{80}{60}\cdot 2\pi = 8{,}38\ s^{-1}.$$

$$a = \frac{(g+c\Omega^2) \pm \sqrt{(g+c\Omega^2)^2 - 2gl\Omega^2}}{\Omega^2}$$

$g + c\Omega^2 = 44{,}9$ m/s^2

$2gl\Omega^2 = 1160$ m^2/s^4

$$a = \begin{cases} 1{,}07\text{ m} \\ 0{,}21\text{ m} \end{cases}$$

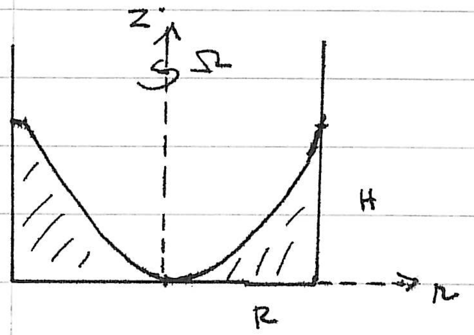
Brukbar løsning $\underline{a = 21\text{ cm}}$

$\underline{b = l - a = 59\text{ cm}}.$

TEP4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008.

Løsning Oppgave 1, forts.

c)



Som før er $p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \gamma z + C$.

Men $p = 0$ i $r = 0, z = 0 \Rightarrow C = 0$

så: $p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \gamma z$.

Fri overflate, $p = 0$, gir

$$\underline{z = \frac{r^2\Omega^2}{2g}}$$

Ved kanten $r = R$ er $z = H$: $H = \frac{R^2\Omega^2}{2g}$.

Finner volumet V av vannet ved integrasjon:

$$V = 2\pi \int_{VANN} z\, r\, dr = 2\pi \cdot \frac{\Omega^2}{2g}\int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi R^4 \Omega^2}{4g}$$

Innsetting av $H = \frac{R^2\Omega^2}{2g}$ gir $\underline{V = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot H}$

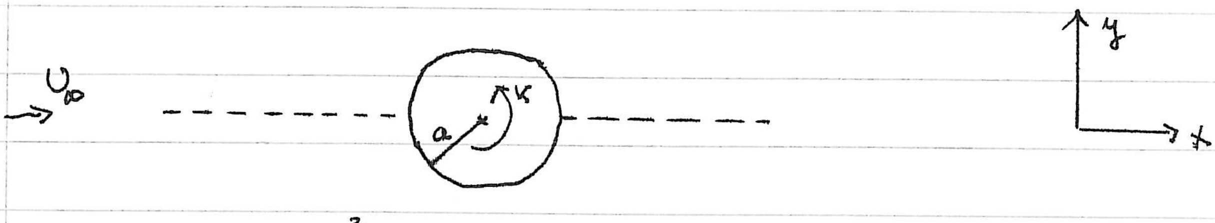
Samme volum ved stillevann: $V = \pi R^2 \cdot H_0$, dvs. $\underline{H = 2H_0}$

Av $2H_0 = \frac{R^2\Omega^2}{2g}$ følger $\left(R^2 = \frac{4gH_0}{\Omega^2}\right)$

$$\underline{\Omega = \frac{2}{R}\sqrt{gH_0}}$$

TEP 4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008

Løsning Oppgave 2



$$\psi = U_\infty\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta - K\cdot\ln r$$

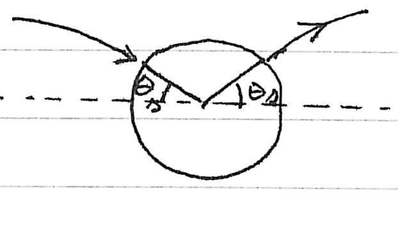
a) $$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$\underline{V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{K}{r}}$$

Stagnasjonspunkter der hvor $V_\theta = 0$ på overflaten $r = a$.

$\Rightarrow$: $0 = -2U_\infty \sin\theta_s + \frac{K}{a}$, $\underline{\sin\theta_s = \frac{K}{2U_\infty a}}$

Her er K begrenset av at $\frac{K}{2U_\infty a} \leq 1$. De to løsningene for θ_s er supplementvinkler.



Sammenfallende stagnasjonspunkter når $\underline{\frac{K}{2U_\infty a} = 1}$

b) I stor avstand er tilnærmet $V_\theta = -U_\infty \sin\theta + \frac{K}{r}$

Sirkulasjon $\underline{\Gamma} = \oint \vec{V}\cdot d\vec{l} = R\int_0^{2\pi} V_\theta \, d\theta = R\int_0^{2\pi}\left(-U_\infty \sin\theta + \frac{K}{R}\right)d\theta$

$$= K\int_0^{2\pi} d\theta = \underline{2\pi K}$$

Stokes' sats: Differansen mellom $\oint \vec{V}\cdot d\vec{l}$ tatt over en stor sirkel R, og over en sirkel med vilkårlig radius r, er lik flateintegralet $\oint(\nabla\times\vec{V})\cdot\vec{n}\, dA$ over flaten mellom r og R. Da $\nabla\times\vec{V} = 0$ (potensialstrømning) er differansen lik null. Γ altså uavhengig av veien.

TEP4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008

Løsning Oppgave 2, forts.

c) Bernoulli $\frac{1}{2}\rho V^2 + p = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + \underbrace{p_\infty}_{=0}$

Regner ut

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = U_\infty^2\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^2\cos^2\theta + U_\infty^2\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{K}{U_\infty r}\right]^2$$

$$= U_\infty^2\left\{\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^2\cos^2\theta + \left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)^2\sin^2\theta - \frac{2K}{U_\infty r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{K^2}{U_\infty^2 r^2}\right\}$$

$$= U_\infty^2\left\{1 + \frac{a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta - \frac{2K}{U_\infty r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{K^2}{U_\infty^2 r^2}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{p} = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho V^2 = \underline{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left\{-\frac{a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta + \frac{2K}{U_\infty r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 r^2}\right\}}$$

Løft finnes enklest fra Kutta-Joukowsky:

$\underline{L} = -\rho U_\infty \Gamma = \underline{-\rho U_\infty \cdot 2\pi K}$. Virker i negativ y-retning ($K>0$).

Alternativt kan en integrere y-komponenten av trykkraften over overflaten. På $r = a$ er

$$p = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left\{-1 + 2\cos 2\theta + \frac{4K}{U_\infty a}\sin\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 a^2}\right\}.$$

$$\Rightarrow L = -\int_0^{2\pi} p\sin\theta \cdot a\,d\theta = -\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 a\int_0^{2\pi}\left\{-1 + 2\cos\theta + \frac{4K}{U_\infty a}\sin\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 a^2}\right\}\sin\theta\,d\theta$$

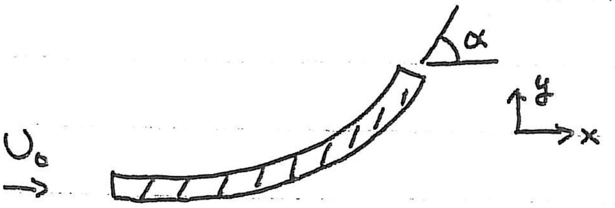
Her gir bare 3. ledd i {} bidrag:

$$\underline{L} = -\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 a\cdot\frac{4K}{U_\infty a}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta}_{\pi} = \underline{-\rho U_\infty \cdot 2\pi K},$$

som ovenfor.

TEP4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008.

Løsning Oppgave 3



a) Legger kontrollvolumet slik at det omslutter skovlen. Kraften $\vec{F}$ på væsken i kontrollvolumet er $\vec{F} = \dot{\vec{M}}_{UT} - \dot{\vec{M}}_{INN}$, hvor $\dot{\vec{M}}_{UT} = \int_{UT} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dA$, $\dot{\vec{M}}_{INN} = -\int_{INN} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dA$.

Her blir $(\dot{M}_x)_{UT} = \rho U_0^2 A\cos\alpha$, $(\dot{M}_y)_{UT} = \rho U_0^2 A\sin\alpha$
$(\dot{M}_x)_{INN} = \rho U_0^2 A$, $(\dot{M}_y)_{INN} = 0$.

$\Rightarrow$ $F_x = \rho U_0^2 A(\cos\alpha - 1)$, $F_y = \rho U_0^2 A\sin\alpha$

Kraften på skovlen er $\vec{F}_{skovl} = -\vec{F}$.
Altså

$$(F_{skovl})_x = \rho U_0^2 A(1-\cos\alpha), \quad (F_{skovl})_y = -\rho U_0^2 A\sin\alpha$$

b) Transformerer til det system hvor skovlen er i ro. Da er innkommende vannhastighet lik $(U_0 - U)$. Regningen den samme som ovenfor, med (U_0-U) istedenfor U_0. Altså

$$(F_{skovl})_x = \rho (U_0-U)^2 A(1-\cos\alpha), \quad (F_{skovl})_y = -\rho(U_0-U)^2 A\sin\alpha$$

c) Effekt $P = (F_{skovl})_x \cdot U = \rho U(U_0-U)^2 A(1-\cos\alpha)$

Maksimalverdi for P når $\frac{dP}{dU} = 0$, $\Rightarrow$

$(U_0-U)^2 = 2U(U_0-U)$, som gir $\underline{U = \frac{1}{3}U_0}$

$$\underline{P_{max} = \frac{4}{27}\rho U_0^3 A(1-\cos\alpha)}$$