Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 14

9.7.18 Vi skal finne Maclaurin-rekka til funksjonen

$$L(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Vi bruker den kjente rekka til $\cos x$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Ved å bruke substitusjonen $x = t^2$, finner vi at

$$\cos(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n} = 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \dots.$$

Vi kan nå finne Maclaurin-rekka til $L(x)$ ved å integrere opp denne ledd for ledd,

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_0^x \left(1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \dots\right) \mathrm{d}t \\ &= x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!} x^{4n+1}. \end{aligned}$$

Siden Maclaurin-rekka til $\cos x$ er gyldig for alle x, er denne også det.

9.7.20 Denne oppgaven er en direkte fortsettelse av 9.7.18. Med $x = 0{,}5$ har vi at

$$L(0{,}5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!\,2^{4n+1}}.$$

Dette er en alternerende rekke. Videre ser vi at $|a_n|$ er avtagende, slik at $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ for alle $n \geq 0$, og at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Altså vet vi fra den alternerende rekke–testen at denne rekka konvergerer. Dersom vi lar s_N være summen av alle ledd opp til $n = N$,

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!\,2^{4n+1}},$$

vet vi at feilen er begrenset av absoluttverdien til det neste leddet. Det vil si at

$$|L(0{,}5) - s_N| \leq |a_{N+1}| = \frac{1}{(4N+5)(2N+2)!\,2^{4N+5}}.$$

Vi ønsker å finne $L(0{,}5)$ med tre desimalers nøyaktighet. Dette er oppfylt når

$$\frac{1}{(4N+5)(2N+2)!\,2^{4N+5}} < 0{,}0005.$$

Ved å sette inn for ulike verdier av N, ser vi at denne ulikheten holder for $N \geq 1$. Det betyr at vi kun trenger å ta med to ledd. Altså er

$$L(0{,}5) \approx \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!\,2^{4n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 2^5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{320} \approx 0{,}497$$

med tre desimalers nøyaktighet.

"Review Exercises 14", side 561

Vi er gitt rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{n^2}{(1+2^n)(1+n\sqrt{n})}.$$

Ved å skrive ut nevneren kan vi vise at

$$a_n = \frac{n^2}{1 + 2^n + n\sqrt{n} + n\sqrt{n}2^n} \leq \frac{n^2}{n\sqrt{n}2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} = b_n.$$

Det følger nå av sammenligningstesten at rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer dersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gjør det. For å vise at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer kan vi bruke forholdstesten. Vi vet at $b_n > 0$ for alle n. Videre er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Det følger derfor av forholdstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer. Det betyr at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ også konvergerer.

"Review Exercises 22", side 561

Vi er gitt rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{(5-2x)^n}{n}$$

Legg først merke til at dersom vi velger $|5-2x| > 1$ divergerer rekka fordi a_n ikke konvergerer mot null. Området $|5-2x| > 1$ er ekvivalent med at $x < 2$ eller $x > 3$.

Vi sjekker så for absolutt konvergens ved å se på leddene

$$|a_n| = \frac{|5-2x|^n}{n}.$$

Vi kan vise at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|5-2x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|5-2x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} |5-2x| \frac{n}{n+1} = |5-2x|.$$

Det følger av forholdstesten at rekka er absolutt konvergent når $0 \leq |5 - 2x| < 1$ eller ekvivalent når $2 < x < 3$. Vi vet at absolutt konvergens impliserer konvergens. Derfor kan vi konkludere med at rekka er konvergent for alle $x \in (2, 3)$.

Endepunktene $x = 2$ og $x = 3$ må vi sjekke spesielt. For $x = 2$ har vi at $a_n = \frac{1}{n}$. Denne rekka er som kjent divergent.

For $x = 3$ har vi at $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Dette er en alternerende rekke der

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = |a_n|$$

og der $\lim_{n\to\infty} = 0$. Det følger av den alternerende rekke–testen at rekka konvergerer. Derimot er $|a_n| = \frac{1}{n}$, slik at rekka ikke er absolutt konvergent.

Oppsummert har vi at rekka er

- Divergent for $x \leq 2$ eller $x > 3$.
- Absolutt konvergent for $x \in$ (2,3).
- Betinget konvergent for $x = 3$.

"Review Exercises 44", side 561

Vi er gitt rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-4}}{(2n-1)!}.$$

La oss heller studere potensrekka

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-4}}{(2n-1)!}.$$

Vi ser at ved å sette $x = \pi$ får vi den opprinnelige rekka. Vi ønsker nå å kunne gjenkjenne denne rekka som en kjent Maclaurin-rekke. Vi vet at Maclaurin-rekka til $\sin x$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Denne ligner til en viss grad på vår rekke. La oss starte med å gjøre et variabelskifte $m = n + 1$, slik at

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2m-2}}{(2m+1)!}$$

Nå er nevneren lik. La oss så bruke at $(-1)^{m+1} = (-1)(-1)^m$ og at $x^{2m-2} = x^{-3}x^{2m+1}$. Da har vi at

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^m x^{-3} x^{2m+1}}{(2m+1)!} = (-x^{-3}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Nå er også telleren i summen lik. Den eneste forskjellen er nå startpunktet for summen. Husk at generelt gjelder det at

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - b_0.$$

Det første leddet i summen vår er x, slik at

$$S(x) = (-x^{-3}) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} - x \right).$$

Vi kan nå sette inn for Maclaurin-rekka til $\sin x$. Det gir at

$$S(x) = (-x^{-3}) (\sin x - x) = \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Innsatt $x = \pi$ har vi at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-4}}{(2n-1)!} = S(\pi) = \frac{\pi - \sin \pi}{\pi^3} = \frac{1}{\pi^2}.$$