Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving nummer Ekstraøving, blokk I

Oppgave 1

X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Finn sannsynlighetsfordelingen til

a) $U = X - 2$

b) $V = -2X$

c) $W = X^2$

Oppgave 2

La $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Utled fordelingen til $Y = X/\sigma - \mu/\sigma$.

Oppgave 3

En havneby observerer ankommende skip ved å bruke radar. Vi antar for enkelhets skyld at skipene alltid ankommer fra nord. Radaren er plassert 1 kilometer vest for havna. Det er ønskelig å oppdage ankommende skip så tidlig som mulig av praktiske og sikkerhetsmessige årsaker. Når skipet første gang fanges inn på radaren, observerer radaren vinkelen $Y \in [0, \pi/2)$, som vist i Figur 1. Radaren observerer kun vinkelen Y, og ikke avstanden til skipet. Vinkelen Y varierer fra skip til skip av mange årsaker.

La den kumulative fordelingsfunksjonen til Y være

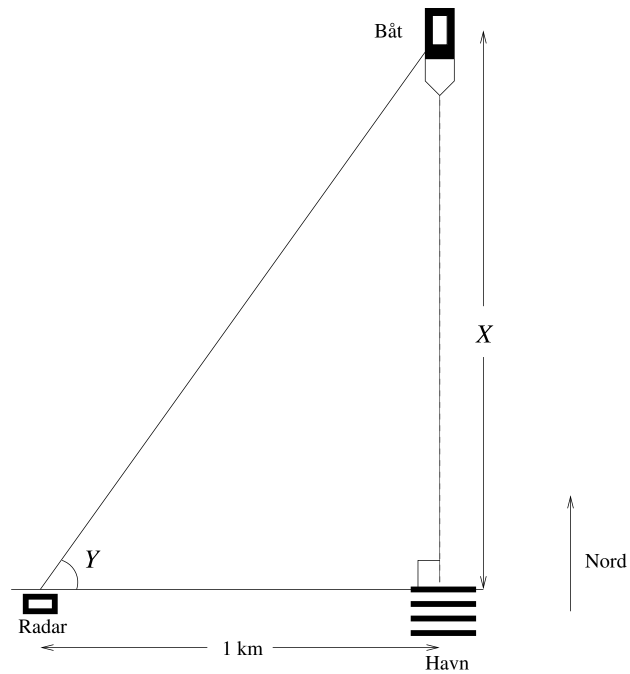
$$F(y; \beta) = P(Y \leq y) = \frac{1 - \exp\{-y/\beta\}}{1 - \exp\{-\pi/(2\beta)\}}, \quad y \in [0, \pi/2),$$

der $\beta > 0$ er en parameter.

a) Anta bare i dette punktet at $\beta = \pi/8$.
Regn ut $\mathrm{P}\left(Y > \frac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right)$ og $\mathrm{P}\left(Y > \frac{\pi}{4} \mid Y < \frac{\pi}{3}\right)$.

b) Vis at sannsynlighetstettheten $f(y; \beta)$ til Y er

$$f(y; \beta) = \frac{1}{\beta - \beta \exp\{-\pi/(2\beta)\}} \exp\{-y/\beta\}, \quad y \in [0, \pi/2).$$



Figur 1: Illustrasjon til oppgave 3.

Havnebyen er mer interessert i avstanden til havna når skipet først oppdages enn vinkelen Y som radaren observerer. La X betegne denne avstanden, som vist i Figur 1.

Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten til X.

Det oppgis at $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ og $\frac{d}{dx}(\text{arc } \tan(x)) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$.

Oppgave 4

I semifinalen mellom Frankrike og Tyskland i et verdensmesterskap i fotball er resultatet uavgjort etter ekstraomganger.

Vi definerer en runde i straffesparkkonkuransen til å være at hvert lag skyter en straffe hver.

I første del av straffesparkkonkurransen er det 5 runder, 5 straffespark fra hvert lag, og laget som skårer flest ganger vinner.

Dersom lagene skårer like mange ganger i første del, går man over til andre del av straffesparkkonkurransen. Nå spilles det en og en runde: Hvert lag har en straffe hver. Dersom det ene laget skårer og det andre bommer, har vi en vinner. Ellers spilles en ny runde (hvert lag får en straffe hver) inntil vi har en vinner.

Anta at de tyske spillerene har sannsynlighet $p_T = 0.80$ for å skåre på straffe, at de franske spillerene har sannsynlighet $p_F = 0.70$ for å skåre, og at utfallene av straffesparkene er uavhengige av hverandre.

a) Hva er sannsynligheten for at stillingen blir 5-5 etter første del?

Hva er sannsynligheten for at stillingen blir 3-3 etter første del?

Sett opp uttrykk for / algoritme for hvordan man kan finne sannsynligheten p_{D1-lik} for at lagene står likt etter første del?

Du trenger ikke å finne tallsvar, og kan senere i oppgaven benytte at $p_{D1-lik} = 0.27$

b) Anta i dette punktet at vi er kommet til del 2 av straffesparkkonkuransen.

Hva er sannsynligheten $p_{V1|D2}$ for at vi har en vinner etter første runde i del to?

Gitt at vi har en vinner etter første runde i del 2, hva er sannsynligheten $p_{T|V1,D2}$ for at dette er Tyskland?

Hva er sannsynligheten $p_{T|D2}$ for at Tyskland vinner konkurransen (gitt at vi er kommet til del 2)?

c) La X være antall runder i del 2 til og med runden det blir kåret en vinner i.

Hvilken fordeling har X? Begrunn svaret og oppgi parameter/re.

Hva er forventningsverdi og varians i antall runder (i del 2) til det blir kåret en vinner?

d) Vi antar at det alltid blir spilt 5 runder i del 1. Hva er forventet totalt antall runder i straffesparkkonkurransen (del 1 og evt. del 2) til det blir kåret en vinner?

Finn også variansen av det totale antall runder i straffesparkkonkurransen (del 1 og evt. del 2) inntil det blir kåret en vinner.

Oppgave 5

Anta at levetiden til en bestemt type elektroniske komponenter er eksponensialfordelt med forventningsverdi lik $1/\lambda$. Det finnes mange produsenter av denne typen elektroniske komponenter og kvaliteten på produktet varierer fra produsent til produsent. Dvs. de forskjellige produsentene har forskjellig parameterverdi λ og verdien på λ beskriver dermed gjennomgående kvalitet på komponenter fra den enkelte produsent. Anta videre at dersom en tilfeldig velger en produsent så kan en betrakte tilhørende λ som en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel som er eksponensialfordelt med forventningsverdi $1/\theta$.

Anta at en kunde, som skal kjøpe en elektronisk komponent, går frem på følgende måte. Først velger han tilfeldig en produsent og deretter går han og kjøper en komponent produsert av denne produsenten. La T betegne levetiden for den komponenten kunden kjøper. Finn sannsynlighetsfordelingen for T.

Fasit

3. a) 0.1192, 0.0671, 0.0708

5. $f(t) = \theta/(t+\theta)^2$