

Øving 12

Oppgave 1. Tilstandsligning, van der Waals gass

Molar tilstandsligning for en van der Waals gass er gitt ved

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

i samme notasjon som brukt i forelesninger. a og b er positive konstanter som representerer effekten av henholdsvis svake attraktive langtrekkende krefter og kort-rekkevidde repulsive krefter mellom partiklene i gassen. Tidligere har vi sett på evnen en gass har til å virke som et kjølemedium i et kjøleskap eller lignende. Størrelsen som sier noe om dette, er Joule-Thomson koeffisienten, definert ved (Kap. 5.5 i PCH, og behandlet i forelesninger)

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H.$$

μ_{JT} kan generelt skrives på formen

$$\mu_{JT} = \frac{1}{C_p} \left(T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right).$$

For en ideell gass har vi $\mu_{JT} = 0$.

a) Vis at for en van der Waals gass har vi

$$\begin{aligned} \mu_{JT} &= \frac{1}{C_p} \left(\frac{RT}{\mathcal{P}} - V \right) \\ \mathcal{P} &= \frac{RT}{V-b} - \frac{2a(V-b)}{V^3}. \end{aligned}$$

b) Vil en økning i repulsive eller attraktive krefter mellom partiklene føre til en økning eller reduksjon av μ_{JT} ?

c) Vis at inversjonskurven for van der Waals gassen, definert ved $\mu_{JT} = 0$, er gitt ved

$$\begin{aligned} 1 - \frac{b}{V} &= \sqrt{\frac{T}{T_0}}, \\ T_0 &= \frac{2a}{Rb}. \end{aligned}$$

d) Vis at trykket på inversjonslinjen er gitt ved

$$p = \frac{a}{b^2} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_0}} \right) \left(3\sqrt{\frac{T}{T_0}} - 1 \right),$$

som er positivt i intervallet $1/9 < T/T_0 < 1$. Legg merke til at nedre grense for det fysisk meningsfylte temperaturintervallet, $T = T_0/9$, er mindre enn den kritiske temperaturen for van der Waals gassen $T_c =$

$8a/27Rb = 4T_0/27 > T_0/9$. Dersom vi også holder oss over T_c , unngår vi at en van der Waals gass som sendes igjennom en dyse og kjøles ned (Joule-Thomson effekten), kondenserer.

God kjennskap til inversjons-kurven, og Joule-Thomson koeffisienten, er av enorm praktisk og teknologisk betydning. Særlig gjelder dette når man skal designe systemer for kjøling, eller ved design av rørsystemer der gass/væske skal transporteres fra områder under høyt trykk gjennom rørledninger (en dyse), til et lagringsområde. Et eksempel på dette kan være transport av gass i rørledninger fra gassfelt til raffinerier. I dette tilfellet bør en unngå uheldige kjølevirkninger som kan føre til uønsket kjøling, kondensasjon, og mulig ”ising” innvendig i rørledningene, og derved tetting av disse. Nøyaktig kjennskap til T_0 og T_c , og assosiert inversjonstrykk er helt avgjørende for å unngå slike problemer. Disse kan bli svært kostbare, både i form av reparasjonskostnader og driftsavbrudd.

e) Dersom en ønsker å bruke et kjølesystem der gass/væske sirkuleres gjentatte ganger gjennom lukket system, som i et kjøleskap, hva slags type gass/væske er mest egnet dersom en ønsker å unngå tetting av rørene over lang tids bruk?

Oppgave 2. Varmeskjold

En svart overflate som holdes på konstant (høy) temperatur T_N er parallell med en annen svart overflate med konstant temperatur T_0 . Det er vakuum mellom platene.

For å redusere varmestrømmen på grunn av stråling innføres et varmeskjold som består av $N - 1$ parallelle svarte plan som plasseres mellom den kalde og varme overflaten. Etter en stund oppnås stasjonære forhold. Beregn hvilken reduksjon av energistrømmen mellom overflatene T_N og T_0 varmeskjoldet gir.

(Svar: $1/N$)

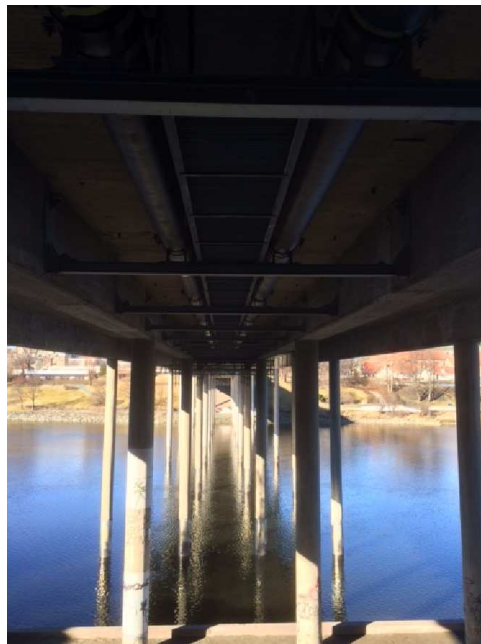
Oppgave 3. Kokte poteter

Poteter av en viss størrelse trenger 25 minutter for å koke ferdig. Anta at poteter er kokt ferdig når temperaturen i midten overstiger en viss verdi. Hvor lang tid trengs da for å koke ferdig poteter av samme type og samme form, men som er dobbelt så tunge?

(Svar: 40 min)

Oppgave 4. Fjernvarmeanlegg

På Tiller produseres varme ved forbrenning av avfall. Årlig energiproduksjon er 600 GWh. Varmen distribueres til kunder i Trondheim og Klæbu ved hjelp av varmt vann som strømmer gjennom isoporisolerte rør. Rørene ligger stort sett under bakken men går åpent under Elgesæter bro:



a) Hvor stor (gjennomsnittlig) effekt leverer fjernvarmeanlegget? Dersom den produserte varmen benyttes til å heve temperaturen i vann fra 15 til 95°C, hvor mye vann kan da passere gjennom anlegget på Tiller pr tidsenhet? (Varmekapasiteten til vann er $c = 1 \text{ cal/g K}$, dvs 4184 J/kg K.) Anta at dette vannet sirkulerer i to hovedsløyfer, en til Trondheim og en til Klæbu, begge med sirkulære rør med (indre) diameter $d_2 = 25 \text{ cm}$. Vis at strømningshastigheten da er begrenset til (ca) $v = 2 \text{ m/s}$.

b) Anta at rørene er isolert med et 5 cm tykt isoporlag, slik at ytre diameter er $d_1 = 35 \text{ cm}$. Vis at varme avgitt pr tidsenhet, og pr lengdeenhet av røret, i avstand z fra fjernvarmeanlegget, er gitt ved

$$j(z) = \frac{dQ/dt}{L} = \frac{2\pi\kappa[T(z) - T_0]}{\ln(d_1/d_2)}.$$

Her er $\kappa = 0.035 \text{ W/m K}$ varmeledningsevnen til isopor, T_0 er temperaturen i bakken omkring røret (antatt konstant), og $T(z)$ er vannets temperatur i avstand z fra anlegget. (Vi antar for enkelhets skyld at temperaturen er konstant over det indre rørs tverrsnitt.)

c) På grunn av varmetapet vil temperaturen i vannet falle. "Stasjonære forhold" betyr her konstant temperatur $T(z)$ i en gitt avstand z fra anlegget. Følger vi en gitt vannmengde, derimot, avtar temperaturen med tiden t . Kjenner vi vannets hastighet $v = dz/dt$, kan $T(t)$ for en gitt vannmengde enkelt "oversettes" til den stasjonære $T(z)$. Vis at $j(z)$ kan skrives som

$$j(z) = -\frac{1}{4} c\rho\pi d_2^2 v \frac{dT}{dz}.$$

Her er $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ massetettheten til vann, og andre størrelser er definert tidligere.

d) Kombineres de to uttrykkene for $j(z)$, blir resultatet en differensialligning for $T(z)$, med løsning

$$T(z) = T_0 + [T(0) - T_0] e^{-\beta z}.$$

Vis dette, og vis dermed at

$$\beta = \frac{8\kappa}{c\rho d_2^2 v \ln(d_1/d_2)}.$$

e) Anta at temperaturen nede i bakken ikke blir lavere enn $T_0 = 0^\circ\text{C}$. Anta videre at temperaturen i vannet ikke skal falle med mer enn 5°C over en avstand $z = 10 \text{ km}$. Hvor stor må da strømningshastigheten v minst

være?