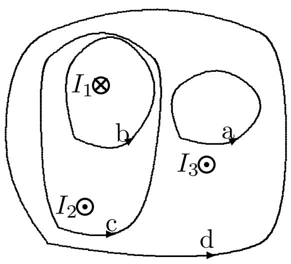
TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

Øving 11, løsningsskisse.
Amperes lov og spoler.

Oppgave 1. Amperes lov.



Vi bruker Amperes lov $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\rm encl}$ for å finne linjeintegralet $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ for hver vei. Integrasjonsretningen er som oppgitt alltid mot klokka. Det er da bare å summere strømmene gjennom de forskjellige sløyfene. Høyrehåndsregelen bestemmer fortegn: Strøm opp (ring med punkt) er positiv og strøm ned (kryss) er negativ.

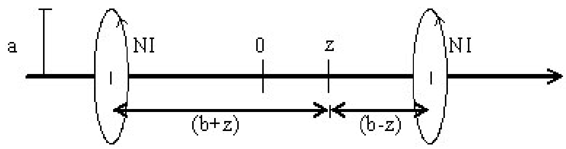
a: $I_{\rm encl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \underline{0\,\text{Tm}}$.

b: $I_{\rm encl} = -I_1 = -4{,}0\,\text{A} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = -\mu_0 \cdot 4{,}0\,\text{A} = \underline{-5{,}03\cdot 10^{-6}\,\text{Tm}}$.

c: $I_{\rm encl} = -I_1 + I_2 = -4{,}0\,\text{A} + 6{,}0\,\text{A} = 2{,}0\,\text{A} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \underline{2{,}51\cdot 10^{-6}\,\text{Tm}}$.

d: $I_{\rm encl} = -I_1 + I_2 + I_3 = 4{,}0\,\text{A} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \underline{5{,}03\cdot 10^{-6}\,\text{Tm}}$.

Oppgave 2. Helmholtz-spoler.



a) Velger origo midt mellom spolene og skal finne B-feltet i et punkt z på aksen (se figur). Avstandene fra dette punktet og til henholdsvis venstre og høyre spole vil være henholdsvis $(b+z)$ og $(b-z)$. Vi bruker uttrykket for B-feltet fra en sirkulær strømsløyfe samt superposisjonsprinsippet, og får følgende B-felt som ifølge høyrehåndsregelen er retta langs aksen mot venstre:

$$B(z) = N\cdot B_{\rm sloyfe}(b+z) + N\cdot B_{\rm sloyfe}(b-z) = \underline{\frac{\mu_0 N I a^2}{2}\left[\left(\frac{1}{a^2+(z+b)^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{a^2+(z-b)^2}\right)^{3/2}\right]}. \quad (1)$$

b) Likn. (1) over kan skrives dimensjonsløs:

$$\frac{B}{B_0} = \alpha^2\left[\left(\frac{1}{\alpha^2+(\zeta+1)^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{\alpha^2+(\zeta-1)^2}\right)^{3/2}\right] \quad (2)$$

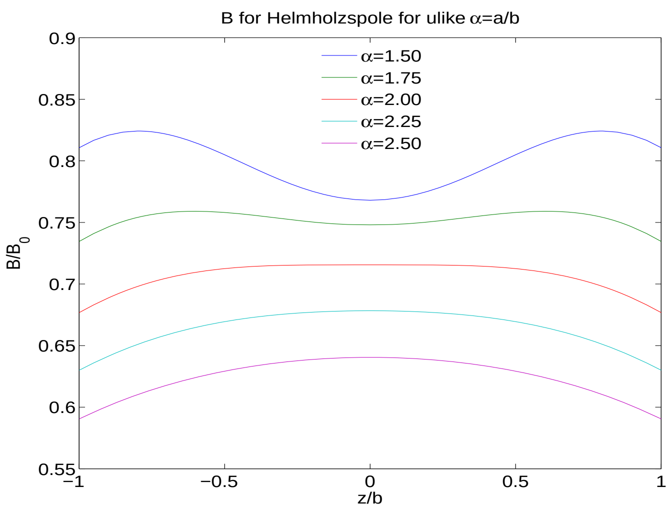
med dimensjonsløse størrelser:

$B_0 = \dfrac{\mu_0 N I}{2b}$, $\alpha = \dfrac{a}{b}$ og $\zeta = \dfrac{z}{b}$.

I figuren til høyre er vha. Matlab B/B_0 plottet som funksjon av ζ og med fem ulike verdier av α.

Kurva er klart flatest for $\alpha = 2{,}0$, som tilsvarer $a = 2b$, magnetfeltet er altså best homogent her. Men testen vår begrenser seg til B-feltet langs aksen, vi kunne også testet homogeniteten på tvers av aksen. Men det har vi ikke likninger til her.

Et forslag til Matlab-kode er vist på siste side i dette løsningsforslaget.

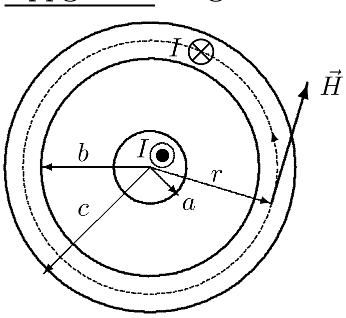


c) Med $b = \frac{1}{2}a$ og $z = 0$ i likningen får vi

$$B(0) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2}\left[\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}^2}\right)^{3/2} + \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}^2}\right)^{3/2}\right] = \frac{\mu_0 N I}{2a}\cdot 2\left(\frac{1}{5/4}\right)^{3/2} = \frac{\mu_0 N I}{a}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad NI = B(0)\cdot\frac{a}{\mu_0}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} = 50\,\mu\text{T}\cdot\frac{0{,}25\,\text{m}}{\mu_0}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} = 13{,}9\,\text{A} = \underline{14\,\text{A}}.$$

Oppgave 3. **Magnetfelt i koaksialkabel.**



Vi bruker Ampères lov for magnetfeltstyrken H med integrasjonsveg lik sirkel med radius r konsentrisk med kabelen (se stiplet sirkel på figuren).

P.g.a. symmetri vil H være asimutalt retta: $\vec{H} = H\,\hat{\phi}$ og ha konstant verdi på integrasjonvegen. Retningen gitt av høyrehåndsregelen. Amperes lov gir

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = H \cdot 2\pi r \quad \stackrel{\text{(Amp)}}{=} \quad I_{\text{encl}} = \iint \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{3}$$

der I_{encl} er strømmen i arealet innenfor integrasjonsvegen.

Med jamt fordelt strøm blir strømtettheten konstant innenfor hvert område og lik henholdsvis

$$J = \begin{cases} J_a = \frac{I}{\pi a^2} & r < a \\ 0 & r \in [a, b] \\ J_{bc} = \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)} & r \in [b, c] \\ 0 & r > c\,. \end{cases} \tag{4}$$

For alle er $\vec{J} \| \mathrm{d}\vec{A}$ og $\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r$, slik at strømmen I_{encl} i tverrsnitt mellom radius r_1 og r_2 blir

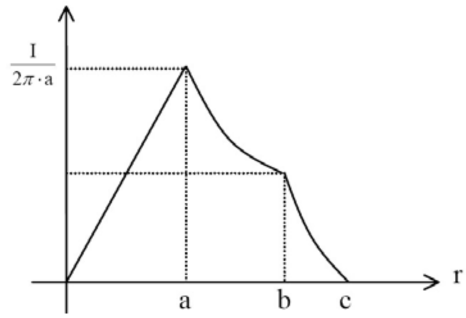
$$I_{\text{encl}} = \iint \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = J \cdot 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \mathrm{d}r = J\pi\, r^2\Big|_{r_1}^{r_2}\,, \tag{5}$$

Løsning av likning (3) for de ulike områdene gir

$$H \cdot 2\pi r \quad = \quad \begin{cases} J_a\pi(r^2 - 0^2) = I \cdot \frac{r^2}{a^2} & r < a \\ I & r \in [a, b] \\ I + J_{bc}\pi(r^2 - b^2) = I - I \cdot \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} & r \in [b, c] \\ 0 & r > c \end{cases}$$

$$H(r) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi} \cdot \dfrac{r}{a^2} & r < a \\ \dfrac{I}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{r} & r \in [a, b] \\ \dfrac{I}{2\pi}\left(1 - \dfrac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)\dfrac{1}{r} & r \in [b, c] \\ 0 & r > c \end{cases}$$

Skisse av $H(r)$:



Oppgave 4. **Magnetisering i jern.**

Antall atomer i et mol er gitt ved Avogadros tall N_{A}. Antall mol per volum er gitt ved $\rho_{\mathrm{J}}/M_{\mathrm{J}}$. (Sjekk enhet!) Antall uparede elektroner per volumenhet i jern er da gitt ved

$$n_e = 2 \cdot N_{\mathrm{A}} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{J}}}{M_{\mathrm{J}}} = 2 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1} \cdot \frac{7{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}}{56 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}} = 1{,}68 \cdot 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3}\,,$$

som gir magnetisering

$$M = \frac{\sum \mu}{V} = \mu_e \cdot n_e = 9{,}3 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{Am}^2 \cdot 1{,}68 \cdot 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3} = \underline{1{,}56 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}}\,.$$

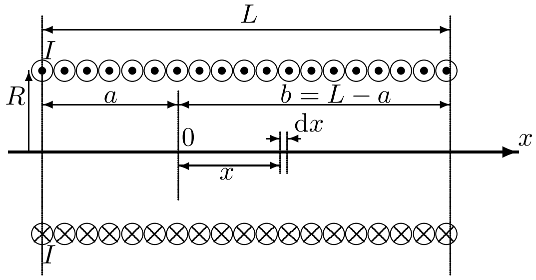
I jernet er det ingen "ytre felt" H, slik at magnetfeltet blir

$$B = B_{\text{ytre}} + B_{\text{indre}} = 0 + \mu_0 M = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 1{,}56 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m} = \underline{1{,}96\,\mathrm{T}}\,,$$

noe som stemmer ganske bra med målte magnetfelt inni jern, som maksimalt kan komme opp i mot 2 T.

Dette betyr at å øke ytre H-felt ikke fører til ubegrenset økning av $B = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0 H$, men B når en metningsverdi.

Oppgave 5. **Magnetfelt på akse i solenoide.**



a) Feltet på aksen i avstand x fra éi strømsløyfe med radius R er gitt ved likning (28.15) i Y& F:

$$B_x = \frac{\mu_0 \, IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}} \,.$$

Sløyfene ligger svært tett og innenfor en lengde dx har vi $n\,\mathrm{d}x$ sløyfer, der $n = N/L$ er antall sløyfer per lengdeenhet. Dvs. innenfor lengden dx går det en sirkulær strøm $\mathrm{d}I = I\,n\,\mathrm{d}x$. Det infinitesimale solenoideelementet dx gir derfor et bidrag til magnetfelt dB_x i avstand x fra dette elementet som er lik

$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0 \cdot I\,n\,\mathrm{d}x \cdot R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}} \,.$$

Vi finner total B i origo ved integrasjon over alle sirkulære strømelement langs solenoiden, dvs. fra $x = -a$ til $x = b$:

$$B_x = \int_{-a}^{b} \mathrm{d}B_x = \int_{-a}^{b} \frac{\mu_0 \cdot In\,\mathrm{d}x \cdot R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot In \cdot R^2}{2} \int_{-a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \,.$$

Følgende integral var oppgitt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{X^{3/2}} = \frac{1}{ac-b^2}\frac{ax+b}{X^{1/2}}, \quad \text{der } X = ax^2+2bx+c\,.$$

I vårt tilfelle er er $a = 1, b = 0$ og $c = R^2$, og integrasjonen gir

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 \cdot In \cdot R^2}{2}\,\frac{1}{R^2}\,\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\bigg|_{-a}^{b} \\ &= \underline{\frac{\mu_0 In}{2}\left(\frac{b}{(b^2+R^2)^{1/2}} - \frac{-a}{(a^2+R^2)^{1/2}}\right)}, \end{aligned} \tag{6}$$

som skulle vises.

b) $a \gg R$ og $b \gg R$ gir

$$B_x \approx \frac{\mu_0 In}{2}\left(\frac{b}{(b^2)^{1/2}} + \frac{a}{(a^2)^{1/2}}\right) = \underline{\mu_0 In}\,. \tag{7}$$

c) Vi har i a) funnet feltet i avstand a og b fra henholdsvis venstre og høyre ende. I sentrum er $a = b = 0,10$ m for en 20 cm lang solenoide. Antall viklinger per lengdeenhet blir

$$n = \frac{N}{L} = \frac{600}{0,20\,\mathrm{m}} = 3000\,\mathrm{m}^{-1}\,,$$

og tallsvaret for likning (6) blir

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 \cdot 4,0\,\mathrm{A} \cdot 3000\,\mathrm{m}^{-1}}{2} \cdot 2\left(\frac{0,10\,\mathrm{m}}{((0,10\,\mathrm{m})^2+(0,014\,\mathrm{m})^2)^{1/2}}\right) \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 12000\,\mathrm{A/m} \cdot 0,9903 = 14,93\,\mathrm{mT} = \underline{14,9\,\mathrm{mT}}. \end{aligned}$$

Fra den tilnærmede likning (7) får vi

$$B_x = \mu_0 In = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 12000\,\mathrm{A/m} = 15,08\,\mathrm{mT} = \underline{15,1\,\mathrm{mT}} \tag{8}$$

Vi ser at ved forholdet $r/L = 1,4/20 = 0,07$ gjelder altså tilnærmelsen bra, under 1% feil. Merk at det eksakte svaret alltid gir lavere verdi enn det tilnærmede.

Oppgave 2. **Helmholtz-spoler.**

Forslag til Matlab-kode (det er uttallige måter å skrive dette på, denne er ikke på noen måte optimal)

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                Losningsforslag til Helmholtz-spole (Øv 11 TFY4155)          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear; % Nullstille alle variabler og deres dimensjoner
a = [1.5 1.75 2.0 2.25 2.5]; %verdier for alfa (=a/b)
z = [-1 : 1/20 : 1];  % Verdier for zeta (=z/b)
sizez = size(z); %dimensjon til z, (#row, #col)
sizea = size(a);
for ii=1:sizez(2)
  for nn=1:sizea(2)
  B(nn,ii) = a(nn)^2 * ((a(nn)^2+(z(ii)+1)^2)^(-3/2) + (a(nn)^2+(z(ii)-1)^2)^(-3/2)) ;
  end
end
figure(1); % Ber om å vise figur
plot(z,B);  %Plotter alle B(i) s.f.a. z i en figur.
xlabel('z/b'); % Tekst på aksene
ylabel('B/B_0');
title('B for Helmholzspole for ulike \alpha=a/b')
% Må bruke sprintf for å få a(i) inn i legend:
s1 = strcat('\alpha=', sprintf('%4.2f',a(1)), '(øverst)');
s2 = strcat('\alpha=', sprintf('%4.2f',a(2)));
s3 = strcat('\alpha=', sprintf('%4.2f',a(3)));
s4 = strcat('\alpha=', sprintf('%4.2f',a(4)));
s5 = strcat('\alpha=', sprintf('%4.2f',a(5)),'(nederst)');
handle=legend(s1, s2, s3, s4, s5, 'location','north');
set(handle, 'Box', 'off'); % Ikke boks rundt legend
```

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 2. mars 15.