

Oppgave 1

a) Fra forelesningene har vi $\langle v^2 \rangle = 3kT/m_{\text{molekyl}} = 3RT/M$, der R er gasskonstanten og M er molekylenes molare masse. Denne bør i følge oppgaven være mindre enn $V^2/36 = Gm/18r$, dvs

$$\frac{3RT}{M} < \frac{Gm}{18r} \Rightarrow T < \frac{GMm}{54Rr},$$

hvis vi på lang sikt skal unngå at molekylene forsvinner helt fra atmosfæren.

b) Jordas masse er $6.0 \cdot 10^{24}$ kg og dens radius er $6.4 \cdot 10^6$ m. Hydrogen, med molar masse 2 g, kunne derfor tenkes å finnes i jordas atmosfære dersom jordas overflatetemperatur var mindre enn ca 280 K. I gjennomsnitt er den litt høyere enn dette, ca 290 K, så vi kan ikke forvente å finne særlig mye hydrogen i vår atmosfære, konsistent med de faktiske forhold. Nitrogen og oksygen, derimot, har hhv 14 og 16 ganger større molar masse enn hydrogen, noe som gir en tilsvarende høyere toleranse for overflatetemperaturen, hhv 3900 K og 4460 K. Med andre ord, ingen overraskelse at både N_2 og O_2 har holdt seg på plass her nede.

For Jupiter er masse og radius hhv $1.9 \cdot 10^{27}$ kg og $7.2 \cdot 10^7$ m. Dette gir mulighet for hydrogen i atmosfæren med overflatetemperatur opp mot 8000 K. I virkeligheten er den ikke mer enn i overkant av 120 K, så det er fullt mulig med hydrogen på Jupiter. Jupiters atmosfære inneholder da også omlag 90% hydrogen.

Vår måne har masse og radius hhv $7.4 \cdot 10^{22}$ kg og $1.7 \cdot 10^6$ m. En atmosfære med nitrogen ville dermed fordre en overflatetemperatur mindre enn 177 K. I realiteten kommer temperaturen ved månens ekvator opp mot 400 K (på solsiden, selvsagt), konsistent med at månen praktisk talt ikke har noen atmosfære.

Oppgave 2

a) Sannsynlighetsfordelingen $p(s)$ må være normert, slik at

$$1 = p(1) + p(-1) = C(e^{-x} + e^x) = 2C \cosh x.$$

Dette fastlegger konstanten C og dermed partisjonsfunksjonen Z :

$$Z = 1/C = 2 \cosh x = 2 \cosh \frac{\mu_B B}{kT}.$$

b) Magnetiseringen blir $M = Nm/V$, dvs

$$M = \frac{N\mu_B}{V} (-p(1) + p(-1)) = \frac{N\mu_B}{V} C (-e^{-x} + e^x) = \frac{N\mu_B}{V} \frac{2 \sinh x}{2 \cosh x} = \frac{N\mu_B}{V} \tanh x,$$

med $x = \mu_B B/kT$. Vi bruker oppgitte grenseverdier for hyperbolsk tangens og får for høye temperaturer, dvs $x \ll 1$:

$$M = \frac{N\mu_B}{V} \cdot \frac{\mu_B B}{kT} = \frac{N\mu_B^2}{kV} \cdot \frac{B}{T},$$

i tråd med Curies lov, som nettopp sier at magnetiseringen er omvendt proporsjonal med temperaturen, for ikke for lave temperaturer.

I den motsatte grensen, dvs $x \gg 1$, er $\tanh x = 1$, og magnetiseringen blir

$$M = \frac{N\mu_B}{V}.$$

Som ventet: Det ytre magnetfeltet er så sterkt at alle elektronspinnene peker i samme retning som magnetfeltet (her: i positiv z -retning).

Hvis $T = 0$, er $x = \infty$ uansett styrken på magnetfeltet. Igjen er alle elektronspinn i laveste energitilstand (grunntilstanden), med samme retning som \mathbf{B} .

Oppgave 3

a) Tilstandssummen for en samling av N uavhengige oscillatorer er gitt ved

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{h^N N!} (Z_1)^N, \\ Z_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2/2m} e^{-\beta kx^2/2} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta k}}. \end{aligned}$$

b) Vi finner først indre energi

$$U = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = \frac{N}{\beta}.$$

Her er $\beta = 1/k_B T$. Fra dette vinner vi varmekapasiteten $C_v = Nk_B = N \cdot 2 \cdot k_B/2$. Dette er i samsvar med ekvipartisjonsprinsippet, siden hver oscillator har to uavhengige kvadratiske frihetsgrader.

c) Trykket i denne gassen er null. Oscillatorne sitter fast rundt hver sine punkter, holdt på plass av en fjær. Da når de ikke ut til veggene og utøver dermed ikke noe trykk mot disse.

d) Med et anharmonisk ledd finner vi tilsvarende

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{h^N N!} (Z_1)^N, \\ Z_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2/2m} e^{-\beta kx^2/2} (1 - \alpha \beta x^4) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta k}} \left(1 - \frac{3\alpha}{k^2 \beta}\right). \end{aligned}$$

Her har vi brukt at

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-\gamma x^2} = \left(-\frac{d}{d\gamma}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \frac{1}{\gamma^2}.$$

Under forutsetning av at $\alpha/k^2\beta \ll 1$, og siden $\ln(1+x) \approx x$ for små x , kan vi nå skrive indre energi

$$U = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = N \left(k_B T + 3 \frac{\alpha}{k^2 \beta^2} \right).$$

Ved å derivere dette med hensyn på temperatur T , finner vi

$$C_v = N \left(k_B + 6 \frac{\alpha}{k^2} k_B T \right).$$

Dette kunne vi ikke utledet fra ekvipartisjonsprinsippet, siden det forutsetter at de kvadratiske frihetsgradene som opptrer må være uavhengige av alle de øvrige leddene i energi-funksjonen. I den anharmoniske

oscillatoren er dette ikke tilfelle, siden frihetsgraden x opptrer både kvadratisk og bikvadratisk. Når $\alpha = 0$ får vi tilbake et resultat som forventet fra ekvipartisjonsprinsippet.

Oppgave 4

a) Igjen har vi

$$Z = \frac{1}{N!} (Z_1)^N,$$

denne gangen med

$$Z_1 = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-\beta \hbar^2 l(l+1)/2I}.$$

NB!! Legg merke til faktoren $2l+1$ i Z_1 ! Den skyldes at det svarer $2l+1$ tilstander til hvert energinivå i kvante-rotatoren, energinivåene er degenererte. Siden vi summerer over *tilstander* i (Z, Z_1) , må vi ta med degenerasjonsgraden for hvert nivå når vi konverterer til sum over energinivåer!

b) Vi definerer

$$k_B T_0 = \frac{\hbar^2}{2I} \quad (1)$$

der vi har

$$I = 2m_N \left(\frac{z_0}{2} \right)^2.$$

Her er m_N massen til nitrogen-atomet, og z_0 er avtanden mellom nitrogen-atomene i N_2 -molekylet. Numeriske verdier (jeg fant disse ved hjelp av Google Scholar): $m_N = 2.32 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, $z_0 = 109 \cdot 10^{-12} \text{ m}$. Fra dette finnes $I = 1.38 \cdot 10^{-48} \text{ kg m}^2$. Ved å bruke $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ finnes $T_0 = 3.95 \text{ K}$. Dette grove estimatet for når systemet endrer seg fra å oppføre seg kvantemekanisk til å oppføre seg klassisk, er i brukbart samsvar med den eksperimentelle verdien på $T = 3 \text{ K}$ der en ser endring i varmekapasiteten til en sterkt fortynnet N_2 -gass som funksjon av temperatur.

c) Vi ser først på lave temperaturer.

$$Z_1 \approx 1 + 3e^{-2\gamma},$$

der $\gamma = \beta \hbar^2 / 2I \gg 1$. Det innebærer at $\ln(Z_1) \approx e^{-2\gamma}$. Dermed har vi

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln(Z_1)}{\partial \beta} \\ &= 3 \frac{2N \hbar^2}{I} e^{-2\gamma}. \end{aligned}$$

Ved å derivere dette med hensyn på temperaturen T , finner vi

$$C_v = 24Nk_B \gamma^2 e^{-2\gamma}.$$

Ved høye temperaturer har vi $\gamma \ll 1$. Da kan vi gjøre om summen over l i Z_1 til et integral, slik

$$Z_1 \approx \int_0^{\infty} dl (2l+1) e^{-\gamma l(l+1)} = \int_0^{\infty} du e^{-\gamma u} = \frac{1}{\gamma}.$$

Videre

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln(Z_1)}{\partial \beta} \\ &= -N \frac{\partial \ln(1/\gamma)}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln(1/\beta)}{\partial \beta} = \frac{N}{\beta}. \end{aligned}$$

Ved å derivere dette med hensyn på T , finner vi $C_v = Nk_B = N \cdot 2 \cdot k_B/2$. Dette er i samsvar med ekvipartisjons-prinsippet, siden kinetisk energi klassisk er gitt ved $E_k^{rot} = I(\omega_x^2 + \omega_y^2)/2$, altså to kvadratiske frihetsgrader.