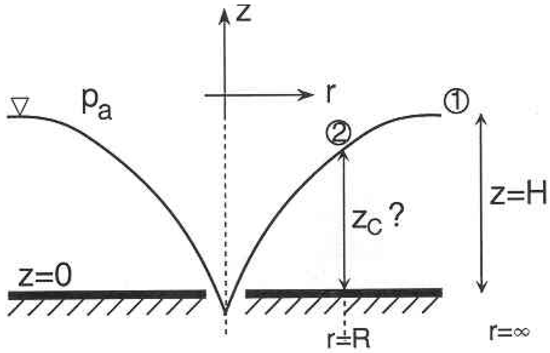
NTNU

TEP4105: Fluidmekanikk

Løsningsforslag til Øving 8
Høst 2014

Oppgave 4.060

Vi skal undersøke om strømningen er rotasjonsfri (virvlingsfri), og bestemme dybden z_C ved $r = R$.



Gitt hastigheten

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = (0, \frac{KR^2}{r}, 0). \tag{1}$$

Strømningen er rotasjonsfri dersom $\nabla \times \vec{v} = 0$. Her har vi kun én hastighetskomponent v_θ (dette er åpenbart fysisk sett en tilnærming: det betyr at det ikke renner vann ned i sluket i det hele tatt!) som kun varierer i r-retning. I det generelle uttrykket

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right), \tag{2}$$

blir alle ledd lik null, altså er strømningen rotasjonsfri.

Vi skal videre finne dybden z_C. Bruker Bernoullis ligning fra 1 til 2 langs den fri overflaten (MERK: det finnes ingen strømlinje fra 1 til 2, ettersom all hastighet er tangensiell her, men ettersom strømningen er rotasjonsfri, kan vi bruke Bernoulli mellom to vilkårlige punkter):

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}\left. v_\theta \right|_{r=R}^2 + g z_C = \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}\left. v_\theta \right|_{r\to\infty}^2 + gH. \tag{3}$$

Her er $\left. v_\theta \right|_{r=R} = KR$ og $\left. v_\theta \right|_{r\to\infty} = 0$, så vi får

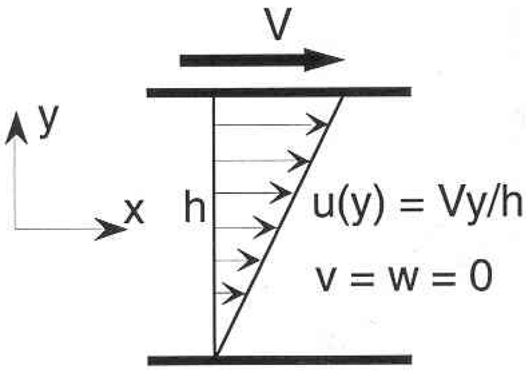
$$z_C = H - \frac{K^2 R^2}{2g}. \tag{4}$$

Vi kan merke oss et viktig poeng: når Bernoulli brukes mellom to punkter som *ikke* ligger langs samme strømlinje (som her), betyr v^2 fremdeles lengden til *hele* hastighetsvektoren, ikke bare komponenten som peker langs den lokale strømlinjen. Dette skyldes at Bernoulli uttrykker energibevarelse. Vi husker helt analogt at kinetisk energi til et legeme i bevegelse var $\frac{1}{2}mv^2$, der v igjen er lengden til *hele* hastighetsvektoren.

Oppgave 4.70 i 7. utgave

Oppgave 4.062

Vi skal vise at den lineære Couette-strømningen har en strømfunksjon, men ikke hastighetspotensial.



Betingelsen for strømfunksjonen er 2-dimensjonal strømning. Her har vi kun kun $u = u(y)$, dvs. strømning i xy-planet. Kontinuitetsligningen reduserer seg til

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

som har to ledd, altså er betingelsene for strømfunksjonen ψ oppfylt.

Vi finner ψ fra definisjonen

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \psi = \int u \cdot dy = \frac{V}{2h} y^2 + f(x) \tag{6}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad \psi = -\int v \cdot dx = 0 + g(y). \tag{7}$$

begge disse uttrykkene er riktige hvis og bare hvis

$$\underline{\psi = \frac{V}{2h} y^2 + C} \tag{8}$$

Betingelsen for hastighetspotensialet er at strømningen er virvlingsfri, dvs. $\nabla \times \vec{v} = 0$. I kartesiske koordinater er

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \tag{9}$$

Her kan vi kun få bidrag fra den siste komponenten (z-komponenten), som blir

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{du}{dy} = -\frac{V}{h} \neq 0. \tag{10}$$

Hastighetspotensialet kan dermed ikke eksistere.

(4.72 i 7. utgave)

Oppgave 4.065

Vi skal undersøke om strømningen er rotasjonsfri og finne hastighetspotensialet i så tilfelle. Dernest skal vi lage en skisse av strømningen.

Gitt hastighetskomponentene

$$u = -\frac{Ky}{y^2 + x^2}, \qquad v = \frac{Kx}{y^2 + x^2}. \tag{11}$$

Betingelsen for hastighetspotensialet er virvlingsfri strømning, altså at $\nabla \times \vec{v} = 0$. Kartesisk:

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \tag{12}$$

Vi får kun bidrag fra det siste leddet, altså z-komponenten:

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{K(x^2+y^2) - Kx \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-K(x^2+y^2) + Ky \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = 0. \tag{13}$$

Strømningen er altså rotasjonsfri, og vi finner hastighetspotensialet fra definisjonen:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = \int u dx = \int -\frac{Kydx}{y^2+x^2} = -K \arctan(x/y) + f(y) \tag{14}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \phi = \int v dy = \int \frac{Kxdy}{y^2+x^2} = K \arctan(y/x) + g(x), \tag{15}$$

der vi har brukt relasjonen

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan(x/a) + C. \tag{16}$$

Uttrykkene ser ved første øyekast ikke ut til å kunne forenes, men med sammenhengen

$$\arctan(x/y) = \frac{\pi}{2} - \arctan(y/x), \tag{17}$$

får vi at

$$\underline{\phi = K \arctan(y/x) + C.} \tag{18}$$

Om vi bruker sammenhengen med polarvinkelen $\theta \in [0, 2\pi\rangle$:

$$\theta = \arctan(y/x) + C', \tag{19}$$

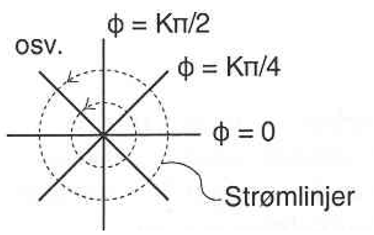
der

$$C' = \begin{cases} 0; & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}\rangle \\ \pi; & \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle \\ 2\pi & \theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle \end{cases}, \tag{20}$$

kan vi skrive dette penere med polare koordinater:

$$\underline{\phi = K\theta + C.} \tag{21}$$

Skisse: (har valgt $C = 0$ og $K > 0$):

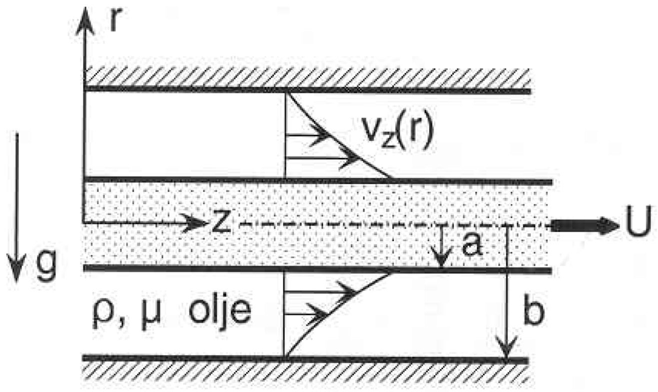


.

(4.75 i 7. utgave)

Oppgave 4.088

Vi skal finne hastighetsfordelingen $v_z(r)$ når det er gitt at trykket er konstant og vi har strømning kun i aksiell retning. Videre skal vi avgjøre hva som vil være de korrekte grensebetingelsene for problemet.



z-komponenten av Navier-Stokes ligning i polarkoordinater:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]. \quad (22)$$

Da trykket er konstant og $\vec{v} = (0, 0, v_z)$, reduseres (22) til:

$$0 = \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dv_z}{dr}\right) \quad (23)$$

$$r \cdot \frac{dv_z}{dr} = \int 0 \cdot dr = C_1 = \text{konst.} \quad (24)$$

$$v_z = \int \frac{C_1}{r} dr = C_1 \ln r + C_2 \quad (25)$$

Grensebetingelsene er som vi er vant til: heft til veggene. Det gir $v_z(r = a) = U$ og $v_z(r = b) = 0$. Vi bestemmer de to konstantene til

$$C_1 = \frac{U}{\ln(a/b)} \quad (26)$$

$$C_2 = -C_1 \ln b, \quad (27)$$

så

$$\underline{v_z(r) = U \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}}. \quad (28)$$

(4.99 i 7. utgave)

TEP4105 FLUIDMEKANIKK

TILLEGG ØVING 8

<u>Løsning</u>

Regner ut

$$\nabla \cdot \vec{V} = \left(\vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e_\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot \left(V_r\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta}\right)$$

$$= \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r}(V_r\vec{e_r}) + \frac{\vec{e_\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(V_r\vec{e_r}) + \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r}(V_\theta\vec{e_\theta}) + \frac{\vec{e_\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta\vec{e_\theta})$$

Her er $\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial \theta} = \vec{e_\theta}$, $\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial \theta} = -\vec{e_r}$,

$|\vec{e_r}|^2 = |\vec{e_\theta}|^2 = 1$, $\vec{e_r} \cdot \vec{e_\theta} = 0$.

Det gir

$$\underline{\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}}$$