Chapter 17.1

$\boxed{17.1{:}10}$ Skissér området

$$|z| \leq \frac{1}{2}, \qquad -\frac{\pi}{8} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{8}$$

og dets bilde under transformasjonen

$$w = z^2.$$

Løsning:
Skriv $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$, $\theta = \operatorname{Arg} z$. Da er

$$w = z^2 = r^2 e^{i2\theta}$$

og vi ser at

$$|w| = r^2 \leq \frac{1}{4}$$

og

$$-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} w < \frac{\pi}{4}$$

fordi $\operatorname{Arg} w = 2\theta$.

$\boxed{17.1{:}17}$ Finn punktene der funksjonen

$$f(z) = \sin \pi z$$

ikke er konform.

Løsning:

Funksjonen er analytisk så avbildningen er konform bortsett fra der $f'(z) = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= f'(z) \\
&= \pi \cos \pi z \\
&\iff \\
0 &= e^{i\pi z} + e^{-i\pi z} \\
&\iff \\
0 &= e^{2i\pi z} + 1 \\
&\iff \\
2i\pi z &= \ln(-1) \\
&= \ln|-1| + i(\operatorname{Arg}(-1) + 2n\pi) \\
&= 0 + i(\pi + 2n\pi) \\
&= i(2n+1)\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Altså, hvis $z = x + iy$ så må $2i\pi x - 2\pi y = i(2n+1)\pi$. Dvs. funksjonen er ikke konform i punktene

$$y = 0, \qquad x = \frac{2n+1}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Chapter 14.2

$\boxed{\text{14.2:4}}$ Hvis integralet av en funksjon over enhetssirkelen er lik 2 og over sirkelen med radius 3 er lik 6, kan da funksjonen være analytisk i annulusen $1/2 < |z| < 7/2$?

Løsning:
Nei. Ved Cauchys integralteorem for *multiply connected domains*, må de to integralene være like hvis funksjonen er analytisk.

$\boxed{\text{14.2:13}}$ Integrér

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1.2}$$

mot klokken over enhetssirkelen.

Løsning:
Funksjonen er analytisk bortsett fra i punktene der $z^4 = 1.2$. Dvs. i punktene

$$\sqrt[4]{1.2},\ i\sqrt[4]{1.2},\ -\sqrt[4]{1.2},\ -i\sqrt[4]{1.2}$$

som alle ligger utenfor enhetssirkelen. Dermed er

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

ved Cauchys integralteorem.

$\boxed{\text{14.2:22}}$ Finn integralet

$$\oint_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$$

der C er øvre halvdel av enhetssirkelen, inkludert diameteren, orientert mot klokken.

Løsning:
Integranden er ikke analytisk, så Cauchys integralteorem kan ikke benyttes. Kurven C kan parametriseres i to deler: diameteren C_1 gitt ved

$$z_1(t) = t, \qquad -1 \leq t \leq 1$$

og halvsirkelen C_2 gitt ved

$$z_2(t) = \cos t + i \sin t, \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
\oint_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z &= \int_{C_1} \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z + \int_{C_2} \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{-1}^{1} \operatorname{Re} z_1(t) \dot{z}_1(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \operatorname{Re} z_2(t) \dot{z}_2(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} t \cdot 1 \, \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \cos t(-\sin t + i \cos t) \, \mathrm{d}t \\
&= 0 - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2t \, \mathrm{d}t + \frac{i}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4} \Big|_0^{\pi} \cos 2t + \frac{i}{2} \Big|_0^{\pi} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \\
&= \frac{i\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{14.2:23}}$ Finn integralet

$$\oint_C \frac{2z - 1}{z^2 - z} \, \mathrm{d}z$$

der C er en enkelt lukket kurve med orientering mot klokken som omslutter punktene 0 og 1.

Løsning:
Ved delbrøkoppspaltning finner vi at integranden er lik $\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$. Dermed er

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{2z - 1}{z^2 - z} \, \mathrm{d}z &= \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} + \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z - 1} \\
&= 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i
\end{aligned}$$

ved eksempel 6.

$\boxed{\text{14.2:24}}$ Finn integralet

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 1}$$

der C er en lukket, ∞-formet kurve som omslutter punktene 1 og -1.

Løsning:
Ved delbrøkoppspaltning finner vi at integranden er lik $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$. Ved å dele $C = C_1 \cup C_2$ i to enkle lukkede kurver der C_1 omslutter 1 med orientering mot klokken og C_2 omslutter -1 og har orientering *med* klokken, får vi at

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 1} &= \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 1} + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z - 1} - \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z + 1} + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z - 1} - \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z + 1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z - 1} - 0 + 0 - \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z + 1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi i - (-2\pi i)\right) \\
&= 2\pi i.
\end{aligned}$$

Chapter 14.3

Cauchys integralformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

$\boxed{\text{14.3:1}}$ Finn integralet

$$\oint_C \frac{z^2}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z$$

der C er sirkelen $|z + 1| = 3/2$.

Løsning:
Integranden er lik $\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{z-1} - \frac{z^2}{z+1}\right)$ og sirkelen C omslutter bare den ene polen $z = -1$. Dermed er

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{z^2}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2} \oint_C \frac{z^2}{z - 1}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2} \oint_C \frac{z^2}{z + 1}\,\mathrm{d}z \\
&= 0 - \frac{1}{2} 2\pi i \Big|_{z=-1} z^2 \\
&= -\pi i.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{14.3:11}}$ Finn integralet

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4}$$

der C er ellipsen $4x^2 + (y-2)^2 = 4$ orientert mot klokken.

Løsning:
Ved delbrøkoppspaltning finner vi at integranden er lik

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{i/4}{z+2i} - \frac{i/4}{z-2i}.$$

Ellipsen C har sentrum i $2i$, men punktet $-2i$ ligger utenfor. Dermed er

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4} &= \frac{i}{4}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z+2i} - \frac{i}{4}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-2i} \\ &= 0 - \frac{i}{4}2\pi i \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{14.3:13}}$ Finn integralet

$$\oint_C \frac{z+2}{z-2}$$

der C er sirkelen $|z-1| = 2$ orientert mot klokken.

Løsning:
Polen $z = 2$ ligger innenfor sirkelen C som har sentrum i 1 og radius 2. Dermed er

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z+2}{z-2} &= 2\pi i\Big|_{z=2}(z+2) \\ &= 8\pi i.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{14.3:18}}$ Finn integralet

$$\oint_C \frac{\sin z}{4z^2 - 8iz}\,\mathrm{d}z$$

der C er som angitt av figuren på s. 663 i boken.

Løsning:
Klipp langs x-aksen og dann to nye lukkede kurver. Kurven C_1 i øvre halvplan vil følge ruten $1, 3, 3i, -3, -1, i, 1$. Den nedre kurven er tilsvarende og langs overlappingen på x-aksen vil de ha motsatt retning, og dermed kanselere hverandre under integrering. Altså vil

$$\oint_C \frac{\sin z}{4z^2 - 8iz}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1 \cup C_2} \frac{\sin z}{4z^2 - 8iz}\,\mathrm{d}z.$$

Ved delbrøkoppspaltning finner vi at integranden er lik

$$\frac{i \sin z}{8}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2i}\right).$$

Begge polene ligger utenfor C_2, og polen $z = 0$ ligger utenfor C_1. Skriv $f(z) := \frac{i \sin z}{8}$. Dette gir forenklingen

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\sin z}{4z^2 - 8iz}\,\mathrm{d}z &= -\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-2i}\,\mathrm{d}z \\
&= -2\pi i f(2i) \\
&= \frac{\pi}{4}\sin 2i \\
&= \frac{\pi i}{4}\sinh 2.
\end{aligned}$$

Chapter 14.4

Deriverte av analytiske funksjoner:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

$\boxed{\text{14.4:3}}$ Finn integralet

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

der C er enhetssirkelen med orientering mot klokken.

Løsning:
La $f(z) = e^{-z}$, som er analytisk. Da er $f^{(n)}(z) = (-1)^n e^{-z}$ og

$$\begin{aligned}
(-1)^n &= f^{(n)}(0) \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{e^{-z}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

for $n = 0, 1, 2 \ldots$. Dermed er

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

for $n = 1, 2, \ldots$.

$\boxed{\text{14.4:16}}$ Finn integralet

$$\oint_C \frac{e^{4z}}{z(z-2i)^2}\,\mathrm{d}z$$

der C består av sirkelen $|z-i|=3$ orientert mot klokken og sikelen $|z|=1$ orientert med klokken.

Løsning:
Delbrøkoppspaltning:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-2i)^2} &= \frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{(z-2i)^2}\\ &\iff \\ 1 &= A(z-2i)^2+Bz^2+Cz\\ &= (A+B)z^2+(C-4iA)z-4A\\ &\iff \\ A=-\frac{1}{4},\ B&=\frac{1}{4},\ C=-i.\end{aligned}$$

Klipp en spalte mellom de to sirklene. F.eks. fra $-2i$ til $-i$. Integralet kan da evalueres ved å integrere langs én lukket kurve, C^*, der bare den ene polen, $z=2i$ ligger innenfor. Definér den analytiske funksjonen f som

$$f(z)=e^{4z}\left(\frac{z}{4}-i\right).$$

Da er $f'(z)=e^{4z}(z+1/4-4i)$ og

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{4z}}{z(z-2i)^2}\,\mathrm{d}z &= \oint_{C^*}\frac{e^{4z}}{z(z-2i)^2}\,\mathrm{d}z\\ &= -\frac{1}{4}\oint_{C^*}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\oint_{C^*}\frac{f(z)}{(z-2i)^2}\,\mathrm{d}z\\ &= \oint_{C^*}\frac{f(z)}{(z-2i)^2}\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{2\pi i}{1!}f'(2i)\\ &= 2\pi i e^{8i}\left(\frac{1}{4}-2i\right)\\ &= \pi e^{8i}\left(4+\frac{i}{2}\right).\end{aligned}$$