NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 7359 3555

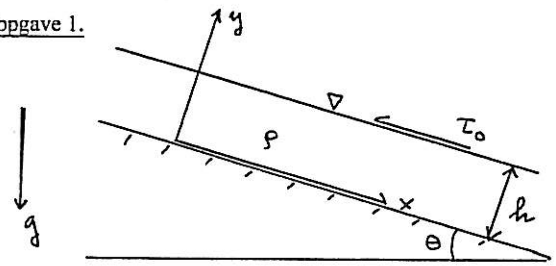
KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK
FOR FAKULTET F

(Linje Fysikk og matematikk)

Dato: 4. august 1998
Tid: kl.0900 –1300

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1.



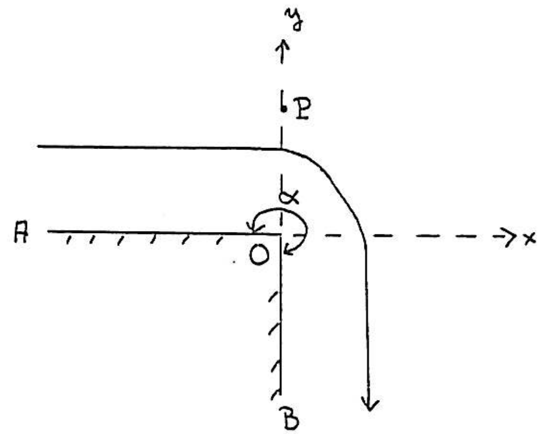
Gitt et væskesjikt av konstant tykkelse h, som glir nedover et skråplan. Helningsvinkelen er θ. Væskens tetthet er ρ, og dens dynamiske viskositet er μ. Tyngdens akselerasjon er g. Anta stasjonære forhold. Legg koordinatsystemet som på figuren.

a) Vis at væskens hastighet u(y) langs planet er

$$u(y) = \frac{gh}{\nu}\, y\left(1 - \frac{y}{2h}\right) \sin\theta \qquad (\nu = \mu/\rho)$$

b) Systemet blir så utsatt for en kraftig luftstrøm i negativ x-retning, parallelt med sjiktets overflate. Lufta forårsaker at det oppstår en konstant skjærspenning τ_0 i overflaten, rettet imot sjiktets opprinnelige bevegelse (se fig.). Hvor stor må τ_0 være for at den totale væsketransport langs skråplanet skal bli lik null?

Oppg. 2



Gitt en potensialstrømning rundt et hjørne AOB med utvendig vinkel $\alpha = 3\pi/2$.

a) Vis at strømfunksjonen

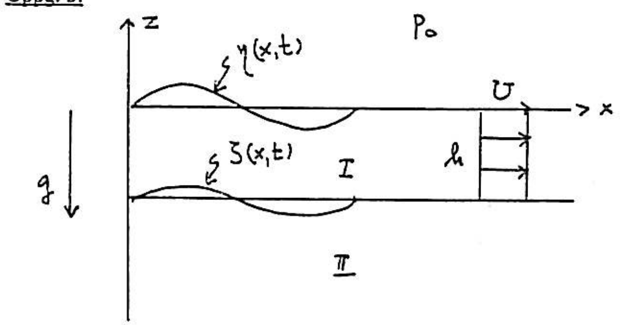
$$\psi = A r^{2/3} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

hvor A er en positiv konstant, tilfredsstiller feltligningen samt grensebetingelsene på flatene AO og OB. (Her er r og θ vanlige plane polarkoordinater; $\theta = -\pi/2$ langs OB.)

b) Finn trykket p(r) i væsken som funksjon av r, når trykket i avstanden r = R fra origo er kjent, $p(R) = p_0$. Væskens tetthet er ρ. Se bort fra tyngden.

c) Punktet P på figuren ligger i posisjonen $\theta = \pi/2$, r = R. Hvor stor er volumgjennomstrømningen Q, per lengdeenhet inn i planet, mellom punktene O og P?

Oppg. 3.



Monokromatiske vannbølger propagerer fra venstre mot høyre på et strømsjikt (område I). Strømsjiktet er opprinnelig uniformt, med konstant dybde h, og med konstant horisontal hastighet U for $-h \leq z \leq 0$. Det opprinnelige strømprofilet er vist til høyre på figuren. Når bølgene beveger seg inn i sjiktet, får vi et vekselvirkende bølgestrøm-system som skal antas å være rent periodisk i x-retningen. Nedenfor sjiktet (område II) er det dypt vann. Vannets tetthet ρ er den samme overalt. Atmosfæretrykket er p_0.
Bølgeprofilene har formen

$\eta = a \sin(\omega t - kx)$, fri overflate

$\zeta = b \sin(\omega t - kx)$, grenseflate I/II,

hvor a og b er amplitudene. Hastighetspotensialet i område I oppgis å ha formen

$$\Phi_I = Ux + \frac{a\omega}{k}(Ae^{kz} + Be^{-kz})\cos(\omega t - kx),$$

hvor A og B er konstanter. Lineær bølgeteori forutsettes.

a) Skriv ned uttrykkene for hastighetskomponentene (u_I, w_I) i område I.
I Bernoullis ligning

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C \qquad (1)$$

er konstanten $C = C_I$ den samme overalt i område I. Hvorfor? Sett inn uttrykkene for (u_I, w_I) i ligning (1) ved den frie overflate $z = \eta$, og finn verdien av C_I ved å midle over en bølgeperiode. Vis at med de gjenværende ledd reduseres ligningen til

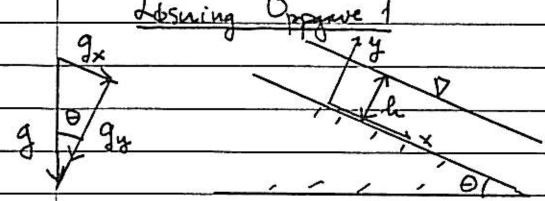
$\omega(\omega - kU)(A + B) = gk.$

b) Sett opp den kinematiske grensebetingelse for område I, både ved fri overflate $z = \eta$, og ved nedre grenseflate $z = -h + \zeta$. Vis at disse betingelsene reduserer seg til ligningene

$\omega - kU = \omega(A - B)$

$b(\omega - kU) = a\omega(Ae^{-kh} - Be^{kh}).$

Løsning Oppgave 1



$v = 0$,

$u = u(y)$,

$\Rightarrow \; \nabla^2 u = d^2u/dy^2$.

a) Navier-Stokes: $\frac{\partial \vec V}{\partial t} + (\vec V\cdot\nabla)\vec V = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec g + \nu\nabla^2\vec V$

Stasjonære forhold gir $0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec g + \nu\nabla^2\vec V$.

Av figuren er $g_x = g\sin\theta$, $g_y = -g\cos\theta$

N-S i x-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \nu\frac{d^2u}{dy^2}$ (1)

N-S i y-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\theta$ (2)

Skriver (2) slik: $\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma\cos\theta$, dvs.

$$p = -\gamma y\cos\theta + f(x), \text{ hvor } f(x) \text{ er vilkårlig.}$$

Deriverer m.h.p. x: $\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x)$, uavhengig av y.

Skriver (1) slik:

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta}_{\text{Avhenger bare av } x} = \underbrace{\mu\frac{d^2u(y)}{dy^2}}_{\text{Avhenger bare av } y}$$

Da må $\tilde p \equiv \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ være uavhengig av x og y.

Ordinær 2. ordens diff. lign. for hastighetsprofilet:

$$\frac{d^2u(y)}{dy^2} = \frac{\tilde p}{\mu}.$$

Dette gir $\frac{du}{dy} = \frac{\tilde p}{\mu}y + C_1$, $u(y) = \frac{1}{2}\frac{\tilde p}{\mu}y^2 + C_1 y + C_2$

Trenger to grensebetingelser:

1. Heft ved veggen, $u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.
2. Ingen skjærspenning ved overflaten, $\tau(h) = \mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=h} = 0$.

Det gir $0 = \frac{\tilde p}{\mu}h + C_1$, $C_1 = -\frac{\tilde p}{\mu}h$

Løsning $u(y) = \frac{1}{2}\frac{\tilde p}{\mu}y^2 - \frac{\tilde p}{\mu}h\cdot y$

$$u(y) = -\frac{\tilde p}{\mu}hy\left(1 - \frac{y}{2h}\right).$$

Trenger å bestemme $\tilde p$: Da $\tilde p = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ er uavhengig av posisjonen, kan den evalueres i fri overflate hvor $\partial p/\partial x = 0$. Dvs. $\tilde p = -\gamma\sin\theta$

Innsetting gir $\underline{u(y) = \frac{gh}{\nu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right)\sin\theta}$, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

b) Med skjærspenning τ_0 produsert av luftstrømmen:

$C_2 = 0$ som før, slik at $u(y) = \frac{1}{2}\frac{\tilde p}{\mu}y^2 + C_1 y$,

$\frac{du}{dy} = \frac{\tilde p}{\mu}y + C_1$. Nå er $\tau(h) = \mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=h} = -\tau_0$

$\Rightarrow \mu\left(\frac{\tilde p}{\mu}h + C_1\right) = -\tau_0$. Da $\tilde p = -\gamma\sin\theta$ som før fås

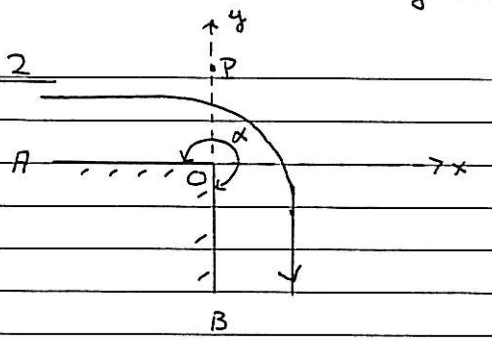
$$C_1 = \frac{\gamma h\sin\theta}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu}, \text{ og dermed}$$

$$u(y) = -\frac{gy^2}{2\nu}\sin\theta + \left(\frac{\gamma h\sin\theta}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu}\right)y$$

$$u(y) = \frac{gh}{\nu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right)\sin\theta - \frac{\tau_0 y}{\rho\nu}$$

$Q = \int_0^h u(y)\,dy = 0$ gir $\underline{\tau_0 = \frac{2}{3}\gamma h\sin\theta}$

Løsning Oppgave 2



$$\Psi = A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

a) Feltligningen er $\nabla^2 \Psi = 0$.

Fra formelark: $\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{2}{3} A r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = \frac{4}{9} A r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -\frac{4}{9} A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla^2 \Psi} = \frac{4}{9} A r^{-\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{4}{9} A r^{-\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{0}$$, som den skal.

Grensebetingelser: Ψ = konstant på faste flater.

Flaten AO $(\theta = \pi)$: $\Psi = A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{0}$

Flaten OB $(\theta = -\frac{\pi}{2})$: $\Psi = A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{0}$.

Grensebetingelsene dermed oppfylt.

b) Potensialstrømning gir at $p + \frac{1}{2}\rho V^2$ = konstant over hele fluidet.

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{2}{3} A r^{-\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{2}{3} A r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = \frac{4}{9} A^2 r^{-\frac{2}{3}}$$, uavhengig av θ.

Oppgave 2b, forts.

Da trykket for $r = R$ er kjent, lik p_0, fås av Bernoulli

$$p(r) + \frac{1}{2}\rho V^2(r) = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2(R)$$

$$p(r) + \frac{2}{9}\rho A^2 r^{-\frac{2}{3}} = p_0 + \frac{2}{9}\rho A^2 R^{-\frac{2}{3}}$$

$$\underline{p(r) = p_0 + \frac{2}{9}\rho A^2 \left(R^{-\frac{2}{3}} - r^{-\frac{2}{3}}\right)}$$

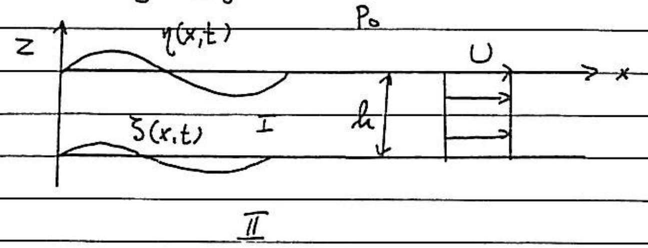
c) Q er lik differansen mellom strømfunksjonene:

$$Q = \Psi(P) - \Psi(0) = \Psi(P).$$

Setter inn $r = R$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ i Ψ:

$$\underline{Q} = A R^{\frac{2}{3}} \sin\frac{2\pi}{3} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot A R^{\frac{2}{3}}}$$

Løsning Oppgave 3



$\theta = \omega t - kx$

a) $$\Phi_I = Ux + \frac{a\omega}{k}\left(Ae^{kz} + Be^{-kz}\right)\cos(\omega t - kx)$$

gir

$$u_I = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} = U + a\omega\left(Ae^{kz} + Be^{-kz}\right)\sin\theta$$

$$w_I = \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} = a\omega\left(Ae^{kz} - Be^{-kz}\right)\cos\theta$$

I Bernoullis ligning $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C$

er $C = C_I$ den samme overalt i område I pga. potensialstrømning.

$z = \eta$: $$\left.\frac{\partial \Phi_I}{\partial t}\right|_{z=\eta} + \left.\frac{1}{2}\left(u_I^2 + w_I^2\right)\right|_{z=\eta} + \frac{p_0}{\rho} + g\eta = C_I$$

I lineær teori erstatter $z=\eta$ med $z=0$ i 1. og 2. ledd:

$$-\frac{a\omega^2}{k}(A+B)\sin\theta + \frac{1}{2}\left[U + a\omega(A+B)\sin\theta\right]^2 + \frac{1}{2}a^2\omega^2(A-B)^2\cos^2\theta + \frac{p_0}{\rho} + ga\sin\theta = C_I$$

Neglisjerer $O(a^2)$:

$$-\frac{a\omega^2}{k}(A+B)\sin\theta + \frac{1}{2}U^2 + Ua\omega(A+B)\sin\theta + \frac{p_0}{\rho} + ga\sin\theta = C_I$$

Midler over en periode: $C_I = \frac{1}{2}U^2 + \frac{p_0}{\rho}$

Resten gir $\omega(\omega - kU)(A+B) = gk$

Oppgave 3 b

Kinematisk betingelse ved $z = \eta$:

$$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} + u_I(\eta,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} = w_I(\eta,t)$$

Lineær teori: $z = \eta$ erstattes av $z = 0$:

$$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} + u_I(0,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} = w_I(0,t)$$

Med $\eta = a\sin\theta$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -ka\cos\theta$ får

$$a\omega\cos\theta + \Big[U + \underbrace{a\omega(A+B)\sin\theta}_{\text{negl.}}\Big](-ka)\cos\theta = a\omega(A-B)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \omega - kU = \omega(A-B)$$

Ved nedre grenseflate $z = -h + \zeta$:

$$\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial t} + u_I(-h+\zeta,t)\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial x} = w_I(-h+\zeta,t)$$

Lineær teori gir som ovenfor

$$\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial t} + u_I(-h,t)\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial x} = w_I(-h,t)$$

Med $\zeta = b\sin\theta$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -kb\cos\theta$:

$$b\omega\cos\theta + \Big[U + \underbrace{a\omega\left(Ae^{-kh} + Be^{kh}\right)\sin\theta}_{\text{negl.}}\Big](-kb)\cos\theta = a\omega\left(Ae^{-kh} - Be^{kh}\right)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad b(\omega - kU) = a\omega\left(Ae^{-kh} - Be^{kh}\right)$$