Løsningsforslag auditorieøving 6

Oppgave 1

- Bernoulli fra stillestående vannoverflate til utløpet av det innadrettede røret gir hastigheten v.
- Bernoulli fra vannoverflaten til en vilkårlig høyde z inne i røret gir trykket
- $v = \sqrt{2g(h-l)}$
- $p(z) = p_0 + \rho g(l-z)$

Oppgave 2

Avstanden h mellom en plate og senteret av systemet er gitt ved: $h = h(t) = h_0 - v_0 t$, der h_0 er startavstanden og v_0 er hastigheten som platen går med.

Kontinuitetsligningen gir oss så hastigheten i y-retning, v:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

$$\Rightarrow -\tfrac{v_0}{h} + \tfrac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow v = \tfrac{v_0}{h} y$$

Bruker deretter Eulerligningen (som er ekvivalent til Navier-Stokes hvis $\mu = 0$) for å bestemme trykkgradienten. I x-retningen så har vi:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{du}{dt} = \rho(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}) = 0 \\ &\Rightarrow p = p(y) \end{aligned} \tag{1}$$

Tilsvarende for y-retningen:

$$\begin{aligned} &-\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{dv}{dt} = \rho(v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}) = 2\rho \frac{v_0^2 y}{h^2} \\ &\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial y} = 2\rho \frac{v_0^2 y}{h^2} + \rho g \end{aligned} \tag{2}$$

Integrerer:

$$\begin{aligned} &-\int_p^{p_0} dp = \int_y^L (2\rho \frac{v_0^2 y}{h^2} + \rho g) dy \\ &\Rightarrow p(y) = p_0 + \rho \frac{v_0^2 L^2}{h^2} + \rho g L - \rho \frac{v_0^2 y^2}{h^2} - \rho g y \end{aligned} \tag{3}$$

Kraften som virker på én plate skyldes (som vanlig) et eventuelt overtrykk. Leddet p_0 faller med andre ord bort da dette virker på hver side av platen. Total kraft pr. lengde b inn i planet er da gitt ved:

$$\frac{F}{b} = \int_0^L (p(y) - p_0) dy = \frac{1}{2}\rho g L^2 + \frac{2}{3}\frac{\rho v_0^2 L^3}{h^2} \tag{4}$$

Oppgave 3

a)

- Grensebetingelse for trykk: $p = p_0$ for $y = h$: OK
- Grensebetingelse for hastighet: $u = 0$ for $y = 0$: OK
- Grensebetingelse ved $y = h$: Ingen friksjonskraft $\tau_{yx}|_{y=h} = 0$: OK

b)

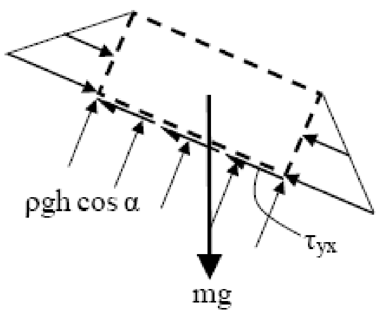
Kontrollvolumet er utsatt for trykk-, friksjons- og tyngdekraft.

x-retning:

- Trykk-kreftene i x-retning $\frac{\rho g h^2 B}{2} \cos\alpha$ er like store, men motsatt rettet. Ingen netto trykk-kraft.
- Friksjonskraft $\tau_{yx} = -\rho g h L B \sin\alpha$ virker i negativ x-retning.
- Tyngdekraften $mg \sin\alpha = \rho L B h g \sin\alpha$ virker i positiv x-retning og balanserer friksjonskraften.
- Merk at vi kunne sett dette fra impulsbevarelse da $(\rho Q u)_{inn} = (\rho Q u)_{ut} \Rightarrow$ summen av kreftene er lik null!

y-retning:

- Trykk-kraft: $\rho g h L B \cos\alpha$ i positiv y-retning
- Tyngdekraft: $mg \cos\alpha = \rho g h L B \cos\alpha$
- Balanse mellom trykk- og tyngdekrefter



Figur 1: Skisse over krefter som virker på kontrollvolumet

Oppgave 4

- $AD = \frac{\partial \eta}{\partial t} dt$: Lokal endring av elevasjonen η i løpet av tiden dt
- $DE = EB \tan \alpha = udt \tan \alpha$
- $\tan \alpha = \frac{\partial \eta}{\partial x}$ (vinkelkoeffisienten til elevasjonen η)
- $\Rightarrow DE = u \frac{\partial \eta}{\partial x} dt$
- Fra figuren har vi at $AD + DE = CB = wdt$: Vertikal forflytning av fluidpartikkel A
- $\Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} dt + u \frac{\partial \eta}{\partial x} dt = wdt$
- $\Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$. Dette er den kinematiske overflatebetingelsen som vi var ute etter.