$\boxed{3.1.16}$ Funksjonen $m(x) = f(x-2)$ er en forskyvning av $f(x)$ to enheter mot høyre (se *Shifting a Graph* side 20 i boka). Det vil si at m er injektiv (*one-to-one*) ettersom f er det. Altså vet vi at den inverse til m eksisterer.

Vi lar $y = m^{-1}(x)$. Da er $m(y) = x$ slik at

$$f(y-2) = x.$$

Vi vet at f er inverterbar. Vi anvender derfor f^{-1} på begge sider og løser for y,

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(f(y-2)\right) &= f^{-1}(x) \\ y-2 &= f^{-1}(x) \\ y &= f^{-1}(x)+2. \end{aligned}$$

Altså har vi at

$$m^{-1}(x) = f^{-1}(x) + 2.$$

$\boxed{3.4.4}$ Vi evaluerer grensen ved først å skrive om teller og nevner til en form som er enklere å evaluere grensen i,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2\mathrm{e}^{-x}}{x+3\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x\mathrm{e}^{x}}}{1+\frac{3}{x\mathrm{e}^{x}}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x\mathrm{e}^{x}}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x\mathrm{e}^{x}}\right)} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Vi vet at $\mathrm{e}^x \to \infty$ når $x \to \infty$, slik at det er ingen tvil om at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\mathrm{e}^{x}} = 0.$$

$\boxed{3.4.22}$ La $y(t)$ være antall rotter etter t måneder. Vi vet at de vokser eksponentielt, altså er

$$y(t) = a\mathrm{e}^{bt},$$

der a og b er konstanter som vi bestemmer ut i fra de andre opplysningene i oppgaven. Vi vet at det er R rotter i starten og at antallet dobler seg på tre måneder. Dette kan vi skrive som

$$y(0) = R \quad \text{og} \quad y(3) = 2R.$$

Den første betingelsen gir

$$y(0) = a\mathrm{e}^{0} = a = R,$$

mens den andre betingelsen gir

$$\begin{aligned} y(3) = Re^{3b} &= 2R \\ e^{3b} &= 2 \\ e^{b} &= 2^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Vi har altså at

$$y(t) = R\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^t = R \cdot 2^{\frac{t}{3}} \quad \text{for } t \in [0{,}5).$$

Merk at dette uttrykket for $y(t)$ kun er gyldig i intervallet $[0{,}5)$, fordi vi ved $t = 5$ dreper 1000 av rottene.

Vi ser at i løpet av en periode på fem måneder har antallet rotter økt med en faktor $2^{\frac{5}{3}}$. Dette vil også gjelde for den neste fem måneders perioden siden de samme vekstvilkårene gjelder. For å ha en bærekraftig populasjon, må vi derfor sørge for at vi ved starten av hver periode har minst R rotter. Dersom det er færre vil det være færre rotter også ved slutten av perioden sammenlignet med forrige periode. Dette vil igjen føre til enda færre i perioden etter det igjen, og så videre. Dersom det er flere enn R rotter igjen etter å ha drept 1000, vil antallet rotter øke over tid. Dette betyr at

$$\begin{aligned} y(5) - 1000 &\geq R \\ R \cdot 2^{\frac{5}{3}} - 1000 &\geq R \\ R(2^{\frac{5}{3}} - 1) &\geq 1000 \\ R &\geq \frac{1000}{2^{\frac{5}{3}} - 1} \approx 459{,}8. \end{aligned}$$

Vi må altså kreve at minst 460 rotter blir plassert på øya i starten for å kunne ha en bærekraftig populasjon.

$\boxed{4.9.8}$ Lineariseringen av en funksjon f om et punkt a er gitt ved (Definisjon 8, side 267 i boka)

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

I vårt tilfelle er $f(x) = \cos(2x)$ og $a = \frac{\pi}{3}$. Dessuten har vi at

$$f'(x) = -2\sin(2x).$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} L(x) &= \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2} - \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

$\boxed{4.10.10}$ Vi starter med å regne ut de tre første deriverte til $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Vi bruker så definisjonen av et andreordens Taylor polynom for f rundt $x = a$ (side 273 i boka), og regner ut $P_2(x)$ med $a = 64$,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(64) + f'(64)(x-64) + \frac{f''(64)}{2}(x-64)^2 \\ &= \sqrt{64} + \frac{1}{2} \cdot 64^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-64) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 64^{-\frac{3}{2}} \cdot (x-64)^2 \\ &= 8 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(x-64) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{152}(x-64)^2 \\ &= 8 + \frac{x-64}{16} - \frac{(x-64)^2}{4096}. \end{aligned}$$

Vi finner så en approksimasjon til $\sqrt{61}$ ved sette inn $x = 61$,

$$\sqrt{61} \approx P_2(61) = 8 + \frac{-3}{16} - \frac{3}{4096} \approx 7{,}810302734.$$

Fra Taylors teorem (side 275 i boka), vet vi at feilen er gitt som $(n = 2)$

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3}(x-64)^3,$$

for en s mellom a og x. Vi ønsker å finne en øvre grense for feilen, det vil si at vi må finne den verdien av s som gjør $f'''(s)$ størst. Vi vet at $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ er synkende på intervallet $[61, 64]$, slik at

$$\max f'''(s) = f'''(61) = \frac{3}{8}61^{-\frac{5}{2}}.$$

Dette betyr at vi kan finne en øvre grense på feilen,

$$|E_2(x)| \leq \left|\frac{f'''(61)}{6}(x-64)^3\right| = \frac{f'''(61)}{6}|x-64|^3.$$

For $x = 61$ får vi at

$$|E_2(61)| \leq \frac{3}{8 \cdot 6}61^{-\frac{5}{2}}|61-64|^3 \approx 0{,}000058066.$$

Det minste intervallet som vi med sikkerhet kan si inneholder $\sqrt{61}$ er derfor

$$(P_2(61) - 0{,}000058066, P_2(61) + 0{,}000058066) = (7{,}810244668, 7{,}810360800).$$

Fra kalkulatoren vet vi selvsagt at

$$\sqrt{61} \approx 7{,}810249676$$

med ni desimalers nøyaktighet. Vi ser at dette er innenfor intervallet.

$\boxed{5.1.16}$ Vi er gitt summen

$$\sum_{k=-5}^{m} \frac{1}{k^2+1},$$

og ønsker å skrive den på formen

$$\sum_{i=1}^{n} f(i).$$

Startpunktene er henholdsvis $k = -5$ og $i = 1$. Vi ser derfor at vi har sammenhengen

$$i = k + 6 \quad \text{eller} \quad k = i - 6.$$

Det siste leddet i summen er når $k = m$, det vil si $i = m + 6$. Hvis vi setter inn for k i den opprinnelig summen får vi at

$$\sum_{k=-5}^{m} \frac{1}{k^2+1} = \sum_{i=1}^{m+6} \frac{1}{(i-6)^2+1}.$$

For å sjekke svaret kan man skrive ut de første og det siste leddene i begge summene og se om de er like,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-5}^{m} \frac{1}{k^2+1} &= \frac{1}{(-5)^2+1} + \frac{1}{(-4)^2+1} + \cdots + \frac{1}{m^2+1}, \\
\sum_{i=1}^{m+6} \frac{1}{(i-6)^2+1} &= \frac{1}{(1-6)^2+1} + \frac{1}{(2-6)^2+1} + \cdots \frac{1}{(m+6-6)^2+1} \\
&= \frac{1}{(-5)^2+1} + \frac{1}{(-4)^2+1} + \cdots + \frac{1}{m^2+1}.
\end{aligned}$$

$\boxed{5.2.18}$ Gitt en funksjon $f(x)$, vet vi at vi kan approksimere arealet, A, begrenset av $y = 0$, kurven $y = f(x)$, $x = a$ og $x = b$ som en sum av n rektangler med bredde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ og høyde $f(x_i)$, der $x_i = a + i\Delta x$ og $i = 1, \ldots, n$,

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i).$$

Se figurene side 297 i boka for en illustrasjon. Vi ønsker derfor å skrive om vår sum på en slik form,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+3i}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(2 + 3\frac{i}{n}\right).$$

Med $a = 0$ og $b = 1$ har vi $\Delta x = \frac{1}{n}$ og $x_i = \frac{i}{n}$, slik at

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x(2 + 3x_i).$$

Ved sammenligning med summen øverst i denne oppgaven, ser vi at vår sum er en approksimasjon til arealet begrenset av $y = 0$, $y = 2 + 3x$, $x = 0$ og $x = 1$. Siden

$y = 2 + 3x$ er en rett linje, er dette området et trapes med høyde 1 og sidekanter 2 og 5, og med areal,

$$A = \frac{2+5}{2} \cdot 1 = \frac{7}{2}.$$

Ved å la $n \to \infty$ vil summen S_n gå mot dette arealet. Altså er

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{7}{2}.$$