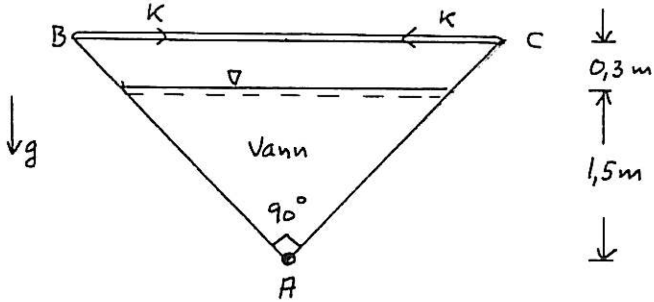
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F (Bokmål)
(Linje for Fysikk og matematikk)
Mandag 6. desember 1999
Tid: 0900 – 1400
Sensuren faller i uke 52.

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Mellom to plane lemmer AB og AC, vinkelrett på hverandre og hengslet i A, er innelukket en vannmengde opp til høyden 1,5 m. Lemmene, som betraktes som vektløse, er 3,5 m lange. Lemmene holdes på plass av en horisontal stang BC, beliggende 0,3 m over vannspeilet. Hvor stor er kraften K i stanga? Sett $g = 10\ m/s^2$.

Vi så ovenfor bort fra atmosfæretrykket p_0. Vil det forandre resultatet om en tar hensyn til p_0?

Oppgitt: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment omkring en horisontal akse gjennom centroiden lik

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12} .$$

Oppgave 2.

Den effektive løftkoeffisienten $C_L(\alpha)$ for et subsonisk fly antas å variere lineært med angrepsvinkelen α etter følgende formel:

$$C_L(\alpha) = 0{,}6 + 0{,}08\alpha \; ; \quad \alpha \text{ i grader.}$$

Formelen gjelder opp til $\alpha = \alpha_{max} = 15°$, hvoretter steiling (stall) inntrer og løftet ødelegges. Flyets masse er $m = 6300$ kg; det effektive vingearealet er $S = 15$ m^2. Anta standardatmosfære. Sett $g = 10$ m/s^2.

a) Flyet beveger seg med hastighet $V = 95$ m/s i jevn horisontal flukt i troposfæren. Pitotrøret viser et dynamisk trykk på $\frac{1}{2}\rho(z)V^2 = 3320$ Pa, der $\rho(z)$ er luftas tetthet i flyets høyde z. Finn z.

b) Hvilken angrepsvinkel α svarer dette til?

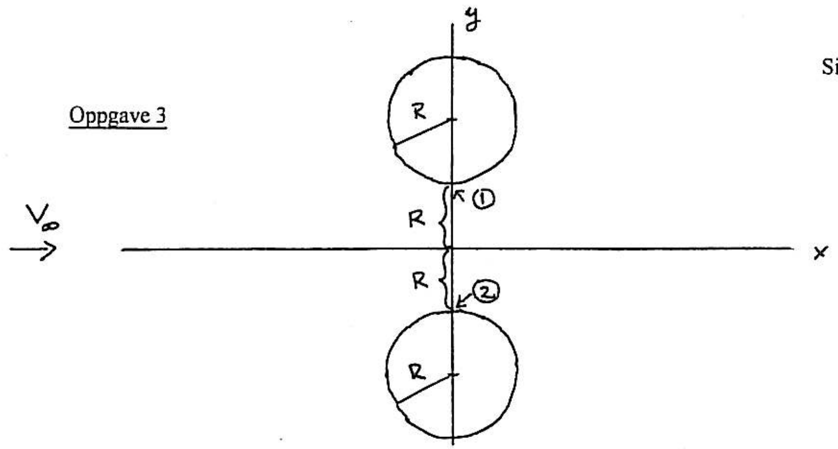
c) Anta så at angrepsvinkelen økes, opp til $\alpha = \alpha_{max}$, og holdes deretter konstant på denne verdi. Hastigheten $V = 95$ m/s holdes også konstant. Flyet vil stige, til det flater ut i en høyde $z = z_{max}$. Finn $\rho(z_{max})$ og z_{max}.

Oppgitt: For standardatmosfæren er

$$T(z) = T_o - 0{,}0065z \; , \; T_o = 288\,\text{K},$$

$$\frac{\rho(z)}{\rho_o} = \left(\frac{T(z)}{T_o}\right)^{4,26} , \quad \rho_o = 1{,}23\,\text{kg/m}^3$$

Oppgave 3



To like sylindere med radius R er plassert med sine sentra på y-aksen, i posisjonene (0, 2R) og (0, -2R). Det komplekse potensial w(z) for en potensialstrømning omkring sylinderne oppgis å være

$$w(z) = V_\infty\left(z + \frac{R^2}{z-2iR} + \frac{R^2}{z+2iR}\right), \tag{1}$$

hvor V_∞ er hastigheten av den innkommende strømning parallell med x-aksen.

a) Sett $z = x + iy$; finn av ligning (1) hastighetspotensialet $\Phi(x,y)$ og strømfunksjonen $\Psi(x,y)$.

b) Du finner at

$$\Psi(x,y) = V_\infty\left[y - R^2\frac{y-2R}{x^2+(y-2R)^2} - R^2\frac{y+2R}{x^2+(y+2R)^2}\right] .$$

Finn herav volumgjennomstrømningen Q mellom sylinderne, dvs. mellom punktene ① og ② på figuren.

c) To linjevirvler legges inn i sylindernes sentra, slik at øvre sylinder får sirkulasjon $-\Gamma_o$ og nedre sylinder får sirkulasjon $+\Gamma_o$ $(\Gamma_o > 0)$. Det komplekse potensial blir nå

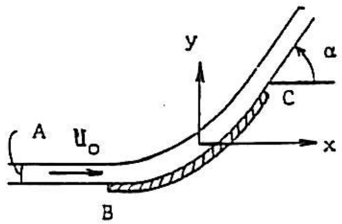
$$w(z) = V_\infty\left(z + \frac{R^2}{z-2iR} + \frac{R^2}{z+2iR}\right) + \frac{i\Gamma_o}{2\pi}\ell n\,\frac{z-2iR}{z+2iR} .$$

Vis at stagnasjonspunktenes posisjon er gitt som løsninger av ligningen

$$1 - 2R^2 \frac{z^2 - 4R^2}{\left(z^2 + 4R^2\right)^2} - \frac{2\Gamma_0 R}{\pi V_\infty} \frac{1}{z^2 + 4R^2} = 0$$

Hvor stor må Γ_0 være for at to av stagnasjonspunktene skal falle sammen med punktene ① og ② på figuren?

Oppgave 4 (halv vekt)

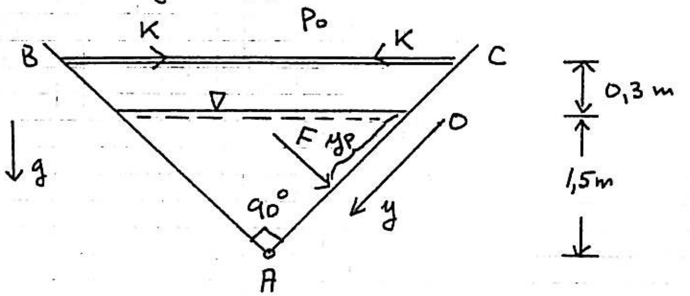


En væskestråle med tverrsnittsareal A og hastighet U_0 er opprinnelig rettet parallelt x-aksen i det viste aksekors. Væskestrålen avbøyes av en skovl. Tangentene til skovleflaten ved innløpet B og avløpet C danner vinkelen α med hverandre. Det forutsettes rette, parallelle strømlinjer både ved B og C. Væskens tetthet er ρ. Friksjon og tyngde neglisjeres.

a) Bestem kraften $\vec{F}_{skovl}$ fra væsken på skovlen når skovlen står i ro.

b) Bestem kraften $\vec{F}_{skovl}(U)$ fra væsken på skovlen når skovlen beveger seg i negativ x-retning med konstant hastighet U(>0).

Løsning. Oppgave 1



Legger y-aksen langs planet AC, med origo i vannspeilet O. Lengden AO er $1,5\sqrt{2} = 2,12$ m.

Dybden fra vannspeilet til centroiden for AO er

$h_c = \frac{1}{2} \cdot 1,5 = 0,75$ m; $\quad y_c = \frac{1}{2} \cdot 2,12 = 1,06$ m

Areal $A = 3,5 \cdot 2,12 = 7,42$ m^2.

Hydrostatisk kraft

$F = \gamma h_c A = 10^4 \cdot 0,75 \cdot 7,42 = 5,56 \cdot 10^4$ N

Angrepspunktets y-verdi y_P er gitt ved

$$y_P = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A} = 1,06 + \frac{\frac{1}{12} \cdot 3,5 \cdot 2,12^3}{1,06 \cdot 7,42} = 1,06 + 0,35 = 1,41 \text{ m}$$

Avstand fra A til trykksenter:

arm $= AO - y_P = 2,12 - 1,41 = 0,71$ m

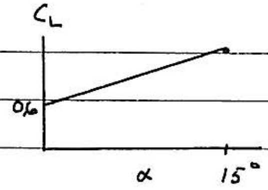
Momentbalanse om A gir

$K \cdot 1,8 = F \cdot \text{arm} = 5,56 \cdot 10^4 \cdot 0,71 = 3,95 \cdot 10^4$

$\underline{K = 2,19 \cdot 10^4 \text{ N}}$

Atmosfæretrykket gir opphav til en uniform overflatekrafttetthet p_0 overalt, og vil ikke innvirke på K.

Løsning. Oppgave 2



$C_L(\alpha) = 0{,}6 + 0{,}08\alpha, \quad \alpha \le 15^\circ$

$C_{L\max} = 0{,}6 + 0{,}08 \cdot 15 = 1{,}8$

(a) $q \equiv \frac{1}{2}\rho(z)V^2 = 3320\ \text{Pa}, \quad V = 95\ \text{m/s}$

$\rho(z) = \dfrac{2 \cdot 3320}{95^2} = 0{,}736\ \text{kg/m}^3; \quad \dfrac{\rho(z)}{\rho_0} = \dfrac{0{,}736}{1{,}23} = 0{,}598$

Av $\dfrac{\rho(z)}{\rho_0} = \left(\dfrac{T(z)}{T_0}\right)^{4,26}$ fås $\dfrac{T(z)}{T_0} = \left(\dfrac{\rho(z)}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{4,26}} = 0{,}598^{\frac{1}{4,26}} = 0{,}886$

$T(z) = 288 \cdot 0{,}886 = 255\text{K}.$

Da $T(z) = 288 - 0{,}0065z$ fås $\underline{z} = \dfrac{288-255}{0{,}0065} = \underline{5077\ \text{m}}$

(b) Ved horisontal flukt må løftet bære flyets tyngde:

$C_L(\alpha) \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho(z)V^2}_{q} \cdot S = mg$

$C_L(\alpha) = \dfrac{63000}{3320 \cdot 15} = 1{,}27$

Av $1{,}27 = 0{,}6 + 0{,}08\alpha$ fås $\underline{\alpha = 8{,}3^\circ}$

(c) $\alpha = \alpha_{\max} = 15^\circ; \quad C_L = C_{L\max} = 1{,}8$ gir

$1{,}8 \cdot \frac{1}{2}\rho(z_{\max})V^2 \cdot S = mg$

Fra før er $1{,}27 \cdot \frac{1}{2}\rho(z)V^2 \cdot S = mg$

Divisjon av ligningene gir

$\dfrac{1{,}8 \cdot \rho(z_{\max})}{1{,}27 \cdot \rho(z)} = 1.$ Med $\rho(z) = 0{,}736\ \text{kg/m}^3$ fås

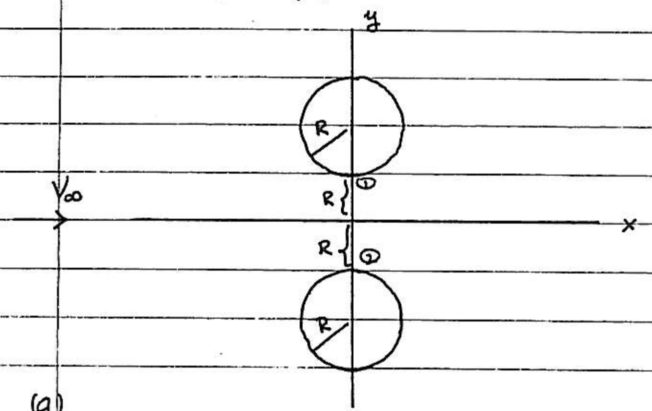
$\rho(z_{\max}) = 0{,}519\ \text{kg/m}^3.$ Av $\dfrac{T(z_{\max})}{T_0} = \left(\dfrac{\rho(z_{\max})}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{4,26}}$ fås

$\dfrac{T(z_{\max})}{T_0} = \left(\dfrac{0{,}519}{1{,}23}\right)^{\frac{1}{4,26}} = 0{,}422^{\frac{1}{4,26}} = 0{,}817$

$T(z_{\max}) = 288 \cdot 0{,}817 = 235\ \text{K} = 288 - 0{,}0065 \cdot z$

$\Rightarrow \quad \underline{z = 8154\ \text{m}}$

Løsning. Oppgave 3



(a)

$w(z) = V_\infty\left(z + \dfrac{R^2}{z - 2iR} + \dfrac{R^2}{z + 2iR}\right), \qquad z = x + iy$

Spalter opp

$\dfrac{1}{z-2iR} = \dfrac{1}{x+i(y-2R)} \cdot \dfrac{x-i(y-2R)}{x-i(y-2R)} = \dfrac{x-i(y-2R)}{x^2+(y-2R)^2}$

$\dfrac{1}{z+2iR} = \dfrac{1}{x+i(y+2R)} \cdot \dfrac{x-i(y+2R)}{x-i(y+2R)} = \dfrac{x-i(y+2R)}{x^2+(y+2R)^2}$

Dermed spaltes $w(z)$ slik:

$$w(z) = V_\infty\left(x + \frac{R^2x}{x^2+(y-2R)^2} + \frac{R^2x}{x^2+(y+2R)^2}\right) +$$

$$+ iV_\infty\left(y - \frac{R^2(y-2R)}{x^2+(y-2R)^2} - \frac{R^2(y+2R)}{x^2+(y+2R)^2}\right) = \Phi + i\Psi.$$

Herav

$$\Phi = V_\infty x\left(1 + \frac{R^2}{x^2+(y-2R)^2} + \frac{R^2}{x^2+(y+2R)^2}\right),$$

$$\Psi = V_\infty\left(y - \frac{R^2(y-2R)}{x^2+(y-2R)^2} - \frac{R^2(y+2R)}{x^2+(y+2R)^2}\right).$$

Oppgave 3, forts.

(b) En har $Q = \Psi_1 - \Psi_2$, hvor $\Psi_1 = \Psi(0,R)$, $\Psi_2 = \Psi(0,-R)$.

Når $x = 0$ er $\Psi(0,y) = V_\infty\left(y - \frac{R^2}{y-2R} - \frac{R^2}{y+2R}\right)$.

Altså gir øvre punkt $y = R$ at

$$\Psi_1 = V_\infty\left(R + R - \frac{R}{3}\right) = \frac{5}{3}V_\infty R,$$

mens nedre punkt $y = -R$ gir

$$\Psi_2 = V_\infty\left(-R + \frac{R}{3} - R\right) = -\frac{5}{3}V_\infty R.$$

Da blir

$$\underline{Q} = \frac{5}{3}V_\infty R + \frac{5}{3}V_\infty R = \underline{\frac{10}{3}V_\infty R}$$

(c) Stagnasjonspunktene bestemt ved $w'(z) = 0$:

$$V_\infty\left(1 - \frac{R^2}{(z-2iR)^2} - \frac{R^2}{(z+2iR)^2}\right) + \frac{i\Gamma_0}{2\pi}\left(\frac{1}{z-2iR} - \frac{1}{z+2iR}\right) = 0.$$

Omrydding gir

$$1 - R^2\frac{(z+2iR)^2}{(z^2+4R^2)^2} - R^2\frac{(z-2iR)^2}{(z+4R^2)^2} + \frac{i\Gamma_0}{2\pi V_\infty}\frac{4iR}{z^2+4R^2} = 0$$

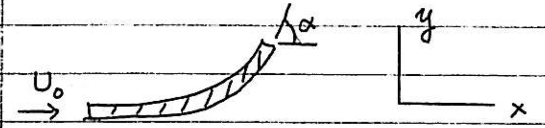
$$\underline{1 - 2R^2\frac{z^2-4R^2}{(z^2+4R^2)^2} - \frac{2\Gamma_0 R}{\pi V_\infty}\frac{1}{z^2+4R^2} = 0}$$

To stagnasjonspunkter i $z = \pm iR$, dvs. $z^2 = -R^2$, gir

$$1 + \frac{10}{9} - \frac{\Gamma_0}{\pi V_\infty R}\cdot\frac{2}{3} = 0$$

$$ɔ: \quad \underline{\Gamma_0 = \frac{19\pi}{6}V_\infty R}$$

Løsning. Oppgave 4



(a) Lar kontrollvolumet omslutte skovlen. Kraften $\vec F$ på vannet i kontrollvolumet er $\vec F = \dot{\vec M}_{UT} - \dot{\vec M}_{INN}$, hvor

$$\dot{\vec M}_{UT} = \int_{UT}\rho\vec V(\vec V\cdot\vec n)\,dA, \quad \dot{\vec M}_{INN} = -\int_{INN}\rho\vec V(\vec V\cdot\vec n)\,dA.$$

Her er $(\dot M_x)_{UT} = \rho U_0^2 A\cos\alpha$, $(\dot M_y)_{UT} = \rho U_0^2 A\sin\alpha$

$(\dot M_x)_{INN} = \rho U_0^2 A$, $(\dot M_y)_{INN} = 0$.

Altså $F_x = \rho U_0^2 A(\cos\alpha - 1)$, $F_y = \rho U_0^2 A\sin\alpha$

Kraften $\vec F_{skovl} = -\vec F$, altså

$$\underline{(F_{skovl})_x = \rho U_0^2 A(1-\cos\alpha), \quad (F_{skovl})_y = -\rho U_0^2 A\sin\alpha}$$

(b) Skovlen beveger seg til venstre med konstant hastighet U: Transformerer til det koordinatsystem hvor skovlen er i ro. Da er innkommende vannhastighet lik $(U_0 + U)$. Altså

$$[F_{skovl}(U)]_x = \rho(U_0+U)^2A(1-\cos\alpha),$$

$$\underline{[F_{skovl}(U)]_y = -\rho(U_0+U)^2A\sin\alpha.}$$