Løsningsforslag til Øving 6
Høst 2015

Oppgave 3.169

Skal finne utløpshastigheten fra røret i eksempel 3.22 når vi tar hensyn til friksjon

Hvis vi antar at røret er 2m langt er friksjonen gitt som:

$$h_f = 5.4\frac{V_{\text{tube}}^2}{2g}. \tag{1}$$

Bruker Bernoulli fra punkt 1 til 2 i figuren:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f \tag{2}$$

hvor h_f er friksjonshøyden. Antar atmosfæretrykk ved utløpet, dvs. $p_1 = p_2 = p_a$.

$V_1 \approx 0$ siden væskeoverflaten er mye større enn tverrsnittsarealet til røret. Bernoulli gir da:

$$z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + 5.4\frac{V_{\text{tube}}^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + 5.4\frac{V_2^2}{2g} \tag{3}$$

$$\rightarrow 2g(z_1 - z_2) = V_2^2(1 + 5.4) \qquad \rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{6.4}} = 1.61\text{m/s}$$

Volumstrømmen Q er gitt ved:

$$Q = VA = V_2\frac{\pi}{4}d^2 = 126.4\text{cm}^3/\text{s} \tag{4}$$

Oppgave 3.176

Vi skal finne (a) V_2 og (b) kraft pr. lengdeenhet på demningen.

a)Vi kan bruke hydrostatikk i tverrsnittene 1 og 2, som vil si at trykket her varierer lineært som funksjon av vanndybden. Massebevarelse gir oss at $A_1V_1 = A_2V_2$, dvs.

$$V_1 = V_2\frac{h}{H}. \tag{5}$$

Bernoulli langs en strømlinje fra tverrsnitt 1 til 2 (vi er smarte og legger strømlinjen langs overflaten der trykket er lik atmosfæretrykket):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_a}{\rho} + gH &= \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_a}{\rho} + gh \\
\Rightarrow \frac{1}{2}V_2^2\frac{h^2}{H} + gH &= \frac{1}{2}V_2^2 + gh \\
\Rightarrow V_2 &= \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1 - h^2/H^2}} = \underline{9,276\text{m/s}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

b) Vi legger nå et kontrollvolum rundt demningen som vist på figuren. På dette kontrollvolumet virker det en ukjent kraft i x-retning. Impulssatsen gir oss (vi husker fra tidligere kapitler at horisontalkomponenten av trykket mot en vertikal flate er lik trykket i sentroiden av flaten multiplisert med flatearealet. Sentroidetrykket mot tverrsnittene 1 og 2 er dermed henholdsvis $\rho g H/2$ og $\rho g h/2$). Fra massebevarelsen husker vi også at $V_1 = V_2 h/H$, så

$$\begin{aligned}\sum F_x = F + p_{\mathrm{CG},1} H - p_{\mathrm{CG},2} h &= \rho V_1(-V_1)H + \rho V_2(V_2)h \\ \Rightarrow F + \frac{1}{2}\rho g H^2 - \frac{1}{2}\rho g h^2 &= -\rho V_2^2 \frac{h^2}{H} + \rho V_2^2 h \\ \Rightarrow F &= \underline{\frac{1}{2}\rho g(-H^2 + h^2) + \rho(-V_2^2\frac{h^2}{H} + V_2^2 h)}\end{aligned} \tag{7}$$

Hastighetene i parentes i første linje ovenfor er strømningens hastighetsvektor skalarmultiplisert med normalvektoren pekende ut av kontrollvolumet. Setter vi inn tallverdier for V_2 og $\rho g = 9790\mathrm{kg/m^3}$, fås $\underline{F = -68300\mathrm{N/m}}$. Dette er kraften fra omgivelsene (bunnen) på kontrollvolumet. Dette er så langt vi kommer med regning med kontrollvolum, og vi må nå betrakte hva som foregår inne i kontrollvolumet. Kraften på kontrollvolumet, F, som vi har funnet over virker på demningen fra sjøbunnen. Vi vet imidlertid at demningen er i ro, slik at summen av kreftene på denne må være null. Dermed vet vi at kraften vannet virker på demningen med (det er denne det spørres etter) må være like stor, men motsatt rettet av kraften vi har funnet, altså lik $\underline{68300\mathrm{N/m}}$ i størrelse og pekende langs positiv x-retning.

Oppgave 4.005

a) Vi skal førstvise at akselerasjonen er radielt rettet. Har gitt at

$$u = U_0\frac{x}{L} \qquad \text{og} \qquad v = -U_0\frac{y}{L}. \tag{8}$$

Akselerasjonen finnes fra den substansielt deriverte:

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 + U_0\frac{x}{L}\frac{U_0}{L} + 0 \\ a_y &= \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 0 + (-U_0\frac{y}{L})\cdot(-\frac{U_0}{L}) \\ \Rightarrow \vec{a} &= \frac{U_0^2}{L^2}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = \frac{U_0^2}{L^2}\vec{r}.\end{aligned} \tag{9}$$

Akselerasjonen har altså radiell retning.

b) Skal finne hastigheten i punktet ($x = 1$m, $y = 1$m) gitt at akselerasjonen der er $a_0 = 25\mathrm{m/s^2}$. Akselerasjonen uttrykkes

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \frac{U_0^2}{L^2}|\vec{r}| = \frac{U_0^2}{L^2}\sqrt{x^2+y^2} = a_0 \\ U_0 &= L\sqrt{\frac{a_0}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \underline{6.3\mathrm{m/s}}\end{aligned} \tag{10}$$

Oppgave 4.006

Vi skal finne (a) akselerasjonen ved $x = L$ og (b) tiden for en partikkel å bevege seg fra $x = 0$ til $x = L$.

a) Hastighetsfeltet er gitt ved $u = V_0(1 + 2x/L), v = w = 0$. Akselerasjonen (her kun i x-retning):

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = u\frac{du}{dx} = V_0(1 + 2\frac{x}{L})\frac{2V_0}{L}. \tag{11}$$

ved $x = L$ får vi

$$a_x|_{x=L} = 6\frac{V_0^2}{L}. \tag{12}$$

b) La nå x være posisjonen ved tiden t til en partikkel som følger strømmen. Vi kjenner partikkelens hastighet $u = \dot{x}$ og kan sette opp og løse differensialligningen vi får (1. ordens lineær) som vi kan fra matematikken

$$\begin{aligned} u = \frac{dx}{dt} &= V_0(1 + 2\frac{x}{L}) \\ \Rightarrow V_0 \cdot dt &= \frac{dx}{(1 + 2\frac{x}{L})} \\ \Rightarrow V_0 t &= \int \frac{dx}{(1 + 2\frac{x}{L})} = \frac{L}{2}\ln(1 + 2\frac{x}{L}) + C. \end{aligned} \tag{13}$$

Velger $t = 0$ når $x = 0$ som gir oss at $C = 0$, og finner tiden når $x = L$:

$$t_{\text{tot}} = t(x = L) = \frac{L}{2V_0}\ln 3. \tag{14}$$

Navier-Stokes oppgave

Navier-Stokes ligning er en *vektorligning* og har følgelig like mange komponenter som problemet har romlige dimensjoner. Navier-Stokes ligning for en generell inkompressibel væske skrives som

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{V} + \rho\vec{g} \tag{15}$$

a

Vi arbeider her med to romlige dimensjoner og ligning 15 resulterer følgelig i to komponenter. Hastigheten skrives som $\vec{V} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath}$. Tyngdekraften $\vec{g}$ virker ikke parallellt til aksene i systemet (x- og y-aksene) og må dermed dekomponeres. De resterende vektorene skrives på standard komponentform.

x-retning

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho g\sin\theta \tag{16}$$

y-retning

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 v - \rho g\cos\theta, \tag{17}$$

hvor i begge tilfeller

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{18}$$

b

Navier-Stokes ligning uttrykker en differensiell impulsbevarelse, altså Newtons 2. lov. Ser på det generelle utrykket og identifiserer

$$\underbrace{\underbrace{\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}_{I} + \underbrace{\rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}}_{II}}_{A} = \underbrace{\underbrace{-\nabla p}_{III} + \underbrace{\mu\nabla^2\vec{V}}_{IV} + \underbrace{\rho\vec{g}}_{V}}_{B} \tag{19}$$

Venstre side (A) representerer, som i Newtons 2. lov, endringen i impuls. I Newtons 2. lov utrykkes dette vanligvis som

$$m\vec{a} \left(= m\frac{d\vec{V}}{dt} \right) \tag{20}$$

Navier-Stokes ligning gir imidlertid bevarelse av *impulstetthet*, altså

$$\frac{m\vec{a}}{\mathcal{V}} = \rho\frac{d\vec{V}}{dt} \tag{21}$$

hvor $\mathcal{V}$ er et volum. Den (total)deriverte av hastigheten ($d\vec{V}/dt$) består for et kontinuum av to ledd (I og II) som henholdsvis representerer tidsavhengig (transient) akselerasjon og konvektiv (geometrisk) akselerasjon.

Analogt til Newtons 2. lov representerer høyre side (B) summen av kreftene som virker på systemet. Da venstre side er impulstetthet så må høyre side være den tilsvarende *kraft-tettheten*, altså

$$\frac{1}{\mathcal{V}}\sum\vec{F} = \sum\vec{f}. \tag{22}$$

Kreftene som virker på en væske er (vanligvis) trykk-kraft (III), viskøse (friksjons) krefter (IV) og tyngdekraften (V).

Som en ekstra øvelse kan du gjerne sjekke hvert ledd i ligning 19 og vise at dimensjonen er krafttetthet, altså N/m^3.

c

Det er oppgitt at veggene i kanalen er faste, hvilket har konsekvenser for hastighetsfeltet. For hastighetskomponenten som er parallell til veggen gjelder heftbetingelsen (no slip condidtion):

$$u|_{\text{vegg}} = 0. \tag{23}$$

En fast vegg tillater ingen gjennomstrømning. Dette innebærer at også normalkomponenten av hastigheten må være null:

$$v|_{\text{vegg}} = 0. \tag{24}$$

Totalt sett har vi derfor

$$\vec{V}\Big|_{\text{vegg}} = \vec{0}. \tag{25}$$