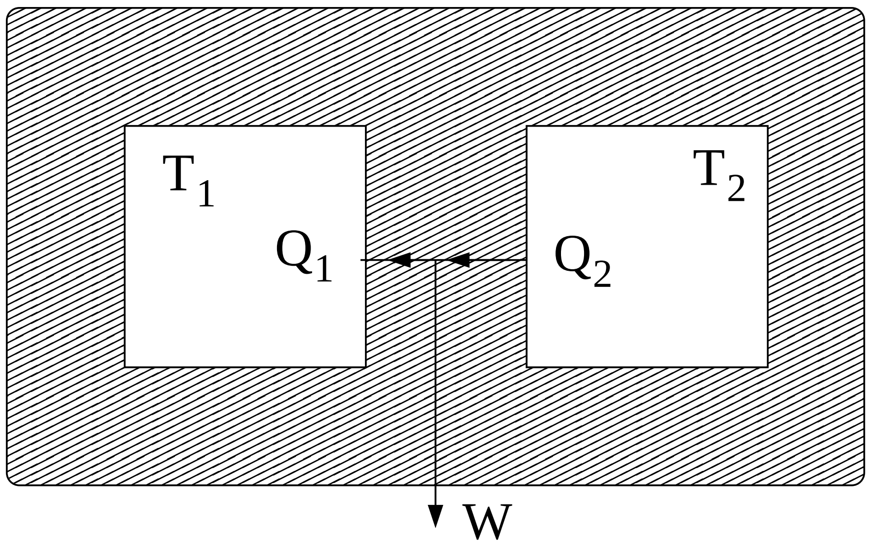
FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2015.
Veiledning: 17. og 18. februar. Innleveringsfrist: Fredag 20. februar kl 16.

Øving 6

Oppgave 1

To like store metallklosser har (hver for seg) varmekapasitet C, som antas å være konstant, uavhengig av temperaturen. Klossenes volumutvidelseskoeffisient er praktisk talt lik null. Temperaturen til de to klossene er i utgangspunktet T_1 og $T_2 > T_1$, og klossene er termisk isolert fra omgivelsene:



Dersom vi lar klossene utveksle varme med hverandre irreversibelt, og uten at vi tar ut noe nyttig arbeid, vil den totale entropien til systemet øke, felles slutt-temperatur blir $T_0 = (T_1 + T_2)/2$, og like mye varme $|Q_2|$ forlater den varmeste klossen som det som tilføres den kaldeste klossen (Q_1), $Q_1 = -Q_2 = C(T_0 - T_1) = C(T_2 - T_1)/2$. (Se forelesningene, om irreversible prosesser.)

Alternativt kan vi tenke oss at vi lar de to klossene drive en varmekraftmaskin, slik at vi kan ta ut et nyttig arbeid W, som antydet i figuren. Vis at det maksimale arbeidet (eksergien) som kan tas ut i en tenkt reversibel prosess er

$$W_{\max} = C\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)^2,$$

og at likevektstemperaturen i dette tilfellet blir

$$T_0 = \sqrt{T_1 T_2}.$$

Vis at denne likevektstemperaturen alltid er mindre enn for den irreversible temperaturutjevningen (der vi ikke tar ut nyttig arbeid).

Tips: Bestem T_0 ved å se på entropiendringen til hver av klossene, samt at du utnytter at $\Delta S = 0$ for reversible prosesser i et termisk isolert system. Videre er $W_{\max} = -\Delta G = -\Delta(U + p_0 V - T_0 S)$.

Oppgave 2

a) En ideell gass kjøles fra temperaturen T til T_0. Omgivelsenes temperatur er hele tiden T_0. Start- og slutt-tilstanden har samme volum ($\Delta V = 0$). Vis at det maksimale arbeid som er mulig å få ut av gassen er

$$W_{\rm max} = C_V(T - T_0) - C_V T_0 \ln \frac{T}{T_0}.$$

Tips: Entropi for ideell gass er $S = C_V \ln T + nR \ln V + \text{konst.}$

b) Hvor mye varme avgis, og hva er det maksimale arbeidet når gassen er ett mol toatomig gass, og avkjølingen er fra 100°C til 20°C? (Svar: $W_{\rm max} = 193$ J.)

c) En måte å ta ut det maksimale arbeidet på er å la en Carnot-maskin virke mellom den øvre avtagende temperaturen og den faste T_0. Vis at dette gir det samme arbeidet $W_{\rm max}$.

Tips: La den ideelle gassen representere høytemperaturreservoaret, med varierende (avtagende) temperatur, fra T til T_0. Virkningsgraden til Carnot-maskinen vil dermed også variere (avta), fra verdien $1 - T_0/T$ til verdien $1 - T_0/T_0 = 0$.

d) En annen måte å ta ut det maksimale arbeidet på er først å ekspandere gassen adiabatisk slik at temperaturen synker til T_0. Deretter komprimeres den isotermt tilbake til opprinnelig volum. Vis at dette også gir samme arbeid $W_{\rm max}$.

Tips: For adiabat med ideell gass gjelder $pV^\gamma =$ konstant og $TV^{\gamma-1} =$ konstant (med $\gamma = C_p/C_V$).

Oppgave 3

a) Bruk uttrykket for entalpien $H = U + pV$, sammen med termodynamisk identitet, $TdS = dU + pdV$, til

å vise at

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Hint: Bruk samme metode som vi brukte i forelesninger til utlede ligningen

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .$$

b) Fra forelesningen kjenner vi de to klassene med termodynamiske potensialer

$$\begin{aligned} U &= U(S,V), \\ F &= U - TS = F(T,V), \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} H &= U + pV = H(S,p) \\ G &= F + pV = H - TS = G(T,p). \end{aligned}$$

De tilhørende differensialene er, med bruk av termodynamisk identiet $TdS = dU + pdV$ gitt ved

$$\begin{aligned} dU &= T\ dS - p\ dV, \\ dH &= T\ dS + V\ dp, \\ dF &= -S\ dT - p\ dV, \\ dG &= -S\ dT + V\ dp. \end{aligned}$$

Bruk disse til utlede relasjonene (de såkalte Maxwell-relasjonene)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p , \\ \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S &= -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V , \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V , \\ \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p . \end{aligned}$$

(Hint: Bruk samme metode som i oppgave 3 a) over).