Løsning Øving 11

Opg. 1 Linearisert Eulerlign.: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$

a)

x-komp: $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ ①

Vilkårlig.

z-komp: $(w=0)$ $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g, \Rightarrow p = -\gamma z + f(x,t)$ ②

f bestemmes ved at $p = p_0$ i overflaten: $p_0 = -\gamma\eta + f$

Altså $\underline{p = p_0 + \gamma(\eta - z)}$ ③

Deriverer ③: $\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma\frac{\partial \eta}{\partial x}$, som innsatt i ① gir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\cdot\gamma\frac{\partial \eta}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad ④$$

b) Betrakt vannvolumet mellom to vertikale plan i posisjon x og $x+dx$. Nettostrøm ut av volumet er $(hu)_{x+dx} - (hu)_x = \frac{\partial}{\partial x}(hu)dx$. Ettersom vannet er inkompressibel må volumendringen $\Rightarrow$ endring av vannets høyde:

$$\frac{\partial h}{\partial t}\cdot dx = \underbrace{-\frac{\partial(hu)}{\partial x}\cdot dx}_{\text{volumstrøm inn.}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad ⑤ \quad \text{Kontinuitetsligningen.}$$

h er den instantane vannhøyden.

Løsning Ov. 11, forts.

1 c) Da $h = d + \eta$ kan 5 skrives slik:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(d + \underbrace{\eta) u}\right] = 0$$

(ηu) er ~~av~~ orden (a^2); neglisjeres.

Altså $\frac{\partial \eta}{\partial t} + d\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Deriverer denne m.h.p. t og benytter 4:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + d\frac{\partial}{\partial x}(-g)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

6 $$\underline{\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gd\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0}.$$ Bølgeligningen.

Setter inn monokromatisk bølge i $+x$ retning:

$\eta \propto \sin(\omega t - kx)$, som gir

$-\omega^2 + gdk^2 = 0$. Fasehastighet $\underline{c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gd}}$

Generelt gjelder for små-amplitude bølger
$\omega^2 = gk \tanh kd$. For $kd \ll 1$ vil $\tanh kd \simeq kd$,

slik at $\omega^2 = gd \cdot k^2$, $\underline{\frac{\omega}{k} = \sqrt{gd}}$ som før.

Bølgen er ikke-dispersiv; fasehastighet og gruppehastighet $c_g = d\omega/dk$ er like.

Løsn. Øv. 11, forts.

Oppgave 2 $T = 12\,s$ gir $\omega = \frac{2\pi}{T} = 0{,}524\,s^{-1}$

For å få et anslag over størrelsene benyttes dypvannsteori (indeks 0):

$$\omega^2 = gk_0 \Rightarrow \underline{L_0} = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi g}{\omega^2} = \frac{2\pi g}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{g}{2\pi}T^2 = \underline{1{,}56\,T^2}.$$

Det gir $L_0 = 1{,}56 \cdot 12^2 = 224{,}6\,m \simeq 225\,m$

Dermed er $\frac{d}{L_0} = \frac{50}{225} = 0{,}22$. Generell tilfelle.

[For $0{,}05 \lesssim \frac{d}{L} \lesssim 0{,}5$ må generell teori benyttes.]

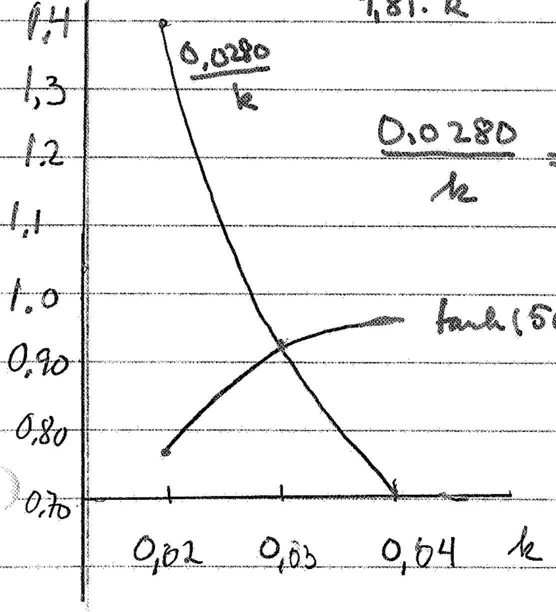
Må altså finne k, og dermed L, av $\omega^2 = gk \tanh kd$

$\frac{\omega^2}{gk} = \tanh kd$, som gir

$$\frac{0{,}524^2}{9{,}81 \cdot k} = \tanh(50k)$$

$$\frac{0{,}0280}{k} = \tanh(50k)$$

k	$\frac{0{,}0280}{k}$	$\tanh(50k)$
0,02	1,40	0,762
0,03	0,93	0,905
0,04	0,70	0,964



Skjæring for $k = 0{,}031\,m^{-1}$

$\Rightarrow \underline{L} = 2\pi/k = \underline{203\,m}$,

altså $< L_0$.