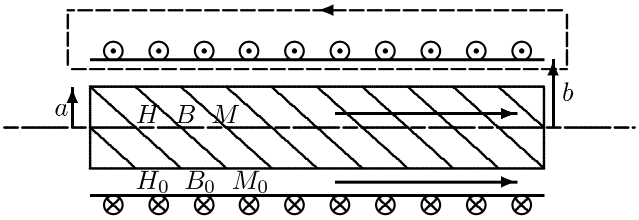
Øving 12, løsningsskisse.
Solenoide. Grensevilkår. Induksjon.

Oppgave 1.
Magnetfelt ved longitudinalt materialskille.



a+b) Figuren viser et sidesnitt av solenoiden som har en sylinderformet stav av jern inni seg. Strømmen I genererer feltstyrken H uavhengig av materialet på langs i solenoiden. Fra Ampères lov på integrasjonsvegen vist i figuren har vi i tidligere øving eller Ex. 28.10 i læreboka vist at $H = nI$.

Vi får derfor at feltstyrken inni solenoiden, både utenfor og inni jernet er

$$\underline{H_0 = H} = nI = 900\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 3,00\,\mathrm{A} = \underline{2700\,\mathrm{A/m}}.$$

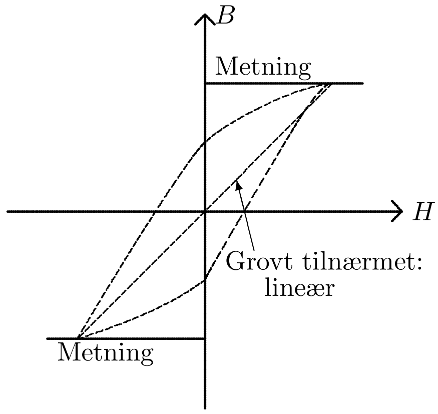
(Tangentkomponenten til $\vec{H}$ er alltid kontinuerlig over ei grenseflate.)

Vi har relasjonen $B = \mu_0(H + M) = \mu_\mathrm{r}\mu_0 H$, som bestemmer B-feltet:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \cdot \mu_0 H_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 2700\,\mathrm{A/m} = \underline{3,40\,\mathrm{mT}}, \\ B &= \mu_\mathrm{r} \cdot \mu_0 H = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 2700\,\mathrm{A/m} = \underline{6,80\,\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Og endelig er magnetiseringen $M = (\mu_\mathrm{r} - 1)H$, som gir

$$\begin{aligned} M_0 &= (1-1) \cdot H_0 = \underline{0\,\mathrm{A/m}}, \\ M &= (2000-1) \cdot H_0 = \underline{5,40 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}}. \end{aligned}$$

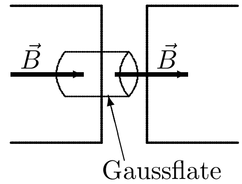


Denne verdien for magnetiseringen M vi har beregnet inni jernet er ikke mulig, da metning M_s inntrer ved en lavere verdi. Vi har i forrige øving vist at metningsmagnetiseringen i jern er ca. $M_\mathrm{s} = 1,6 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}$. Den lineære relasjonen $B = \mu_\mathrm{r}\mu_0 H$ er derfor bare rimelig for H-verdier opp til en viss grense. Dette kan en se utfra hysteresekurva til høyre. Med $M_\mathrm{s} = 1,6 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}$, blir flukstettheten inni jernet $B = \mu_0(H + M_\mathrm{s}) = \mu_0(0,002 + 1,6) \cdot 10^6\,\mathrm{A/m} = 2,0\,\mathrm{T}$, og ikke 6,80 T som beregnet verdi ovenfor.

Oppgave 2. Magnetfelt ved transversalt materialskille.

a) For en lang og smal toroide kan vi se bort fra krumningen og H-feltet kan beregnes som for en solenoide:

$$\begin{aligned} H &= In = I\frac{N}{2\pi R} = 0,59\,\mathrm{A} \cdot \frac{400}{2\pi \cdot 0,20\,\mathrm{m}} = \underline{159\,\mathrm{A/m}}. \\ B &= \mu_\mathrm{r}\mu_0 H = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 159\,\mathrm{A/m} = \underline{0,400\,\mathrm{T}}. \end{aligned}$$



b) I ei grenseflate er flukstettheten B kontinuerlig. Dette kan vises fra Gauss lov for B-feltet: $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$. Den lille figuren viser ei Gaussflate som en sylinder med en endeflate i jernet og andre i spalten. Kravet null B-fluks over sideflatene resulterer i at B-feltet må være likt i jernet og i luftspalten. Vi må da forutsette at gapet er så smalt at B ikke endres over gapet.

Så – i gapet er fremdeles $B_0 = B = 0{,}40$ T og følgelig får vi

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} = \frac{0,40\,\mathrm{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}} = \underline{3,18 \cdot 10^5\,\mathrm{A/m}}.$$

Det er klart at spalten må være svært smal for at dette skal holde. Hvis gapet blir breiere vil B-feltlinjer "lure seg ut" og dette igjen innvirker på H-feltet inne i jernet i nærheten av spalten, men på en slik måte at <u>normal</u>komponenten av B alltid er kontinuerlig over grenseflata.

Et slikt gap med sterkt H-felt brukes til magnetisering av f.eks. magnetbånd ("tape") og harddisker.

Oppgave 3. Bevegelsesindusert ems.

a) Magnetisk induksjon i sløyfa vil gi et magnetisk moment og et kraftmoment som virker mot bevegelsen (Lenz' lov/le Chateliers prinsipp), slik at den vil falle langsommere i et magnetiske felt.

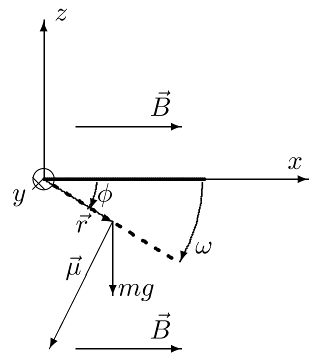
b) Med sløyfeareal $A = L^2$ er magnetisk fluks gjennom strømsløyfa

$$\Phi_B = L^2 B \sin\phi \,.$$

Når strømsløyfa faller og ϕ endres induseres en ems. $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ som gir en strøm i sløyfa med størrelse

$$I = \left|\frac{\mathcal{E}}{R}\right| = \frac{1}{R}\dot{\Phi}_B = \frac{1}{R}L^2 B\cos\phi\,\dot{\phi} = \underline{\frac{1}{R}L^2 B\omega\cos\phi} \,.$$

Strømmens retning ved Lenz' lov: Når sløyfa faller øker magnetisk fluks gjennom sløyfa i retning oppover, slik at det må induseres en strøm som gir magnetisk fluks nedover i sløyfa innvendig. Ifølge h.h.regelen må strømmen da ha retning med klokka sett ovenfra, dvs. magnetisk moment $\vec{\mu}$ har retning som vist i figuren under.



c) Tyngden mg virker i avstand $L/2$ fra omdreiningsaksen og har vinkel $\pi/2 - \phi$ med armen. Kraftmoment pga. tyngden er da

$$\vec{\tau}_g = \vec{r}\times m\vec{g} = \frac{L}{2}mg\sin(\pi/2-\phi)\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{L}{2}mg\cos\phi\,\hat{\mathbf{j}} \,.$$

Kraftmoment pga. strømmen i sløyfa er gitt ved magnetisk moment $\mu = IA = IL^2$, der arealnormalvektor $\vec{A}$ og $\vec{\mu}$ har vinkel $\pi/2 + \phi$ med $\vec{B}$.

$$\vec{\tau}_B = \vec{\mu}\times\vec{B} = IL^2\sin(\pi/2+\phi)\,B\cdot(-\hat{\mathbf{j}}\,) = -\frac{1}{R}\,\omega L^4 B^2\cos^2\phi\,\hat{\mathbf{j}}$$

der uttrykk for I satt inn ovenfra. Netto kraftmoment:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_g + \vec{\tau}_B = \underline{\left(\frac{L}{2}mg\cos\phi - \frac{1}{R}\,\omega L^4 B^2\cos^2\phi\right)\hat{\mathbf{j}}} \,.$$

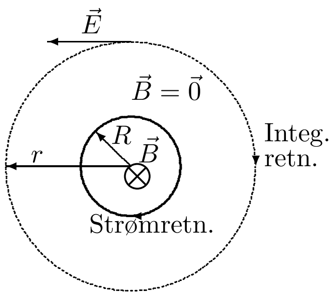
c) Newton 2 for rotasjon (spinnsatsen): $\tau = I_{\mathrm{t}}\alpha = \frac{5}{12}mL^2\alpha$ gir

$$\alpha = \frac{\tau}{I_{\mathrm{t}}} = \frac{\frac{L}{2}mg\cos\phi - \frac{1}{R}\,\omega L^4B^2\cos^2\phi}{\frac{5}{12}mL^2} = \underline{\frac{6g}{5L}\cos\phi - \frac{12L^2}{5mR}\,\omega B^2\cos^2\phi} .$$

Idet $\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ og $\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ er altså dette en andreordens differensiallikning for vinkelen $\phi(t)$ - som vi ikke skal løse. Det blir en dempet svingning.

d) Mekanisk energi er ikke bevart. Bremsingen av bevegelsen pga. strøm i sløyfa gir oppvarming (mekanisk energitap) i resistansen R.

Oppgave 4. E**-felt rundt en solenoide.**



Figuren viser et tverrsnitt gjennom solenoiden med radius R. En integrasjonssirkel rundt solenoiden med radius r er inntegna.

Magnetfelt fra en lang, rett solenoide er

$$\begin{aligned} B &= \mu H = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0\frac{N}{\ell}I, \quad \text{for } r < R, \\ B &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{for } r > R \,. \end{aligned}$$

[Med de oppgitte målene vil nok tilnærmelsen være grov, da solenoiden ikke er svært lang i forhold til diameteren, men som oppgitt antar vi å kunne bruke formelen.]

Magnetisk fluks innenfor radius r blir dermed lik fluksen innenfor radius R:

$$\Phi_B = \iint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = B\cdot\pi R^2 = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0\frac{N}{\ell}I\cdot\pi R^2 \,.$$

Faradays lov gir da at indusert ems (volt) langs sirkelen med radius r er lik

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -\mu_{\mathrm{r}}\mu_0\frac{N}{\ell}\cdot\pi R^2\dot{I} \,.$$

Emsen $\mathcal{E}$ er gitt ved integrasjon av $\vec{E}$ (volt/meter) over sirkelen:

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} \equiv \mathcal{E} \,.$$

Idet E er konstant i konstant avstand r fra sentrum og $\vec{E}$ går langs (eg. motsatt retta) $d\vec{s}$, vil vi få

$$E(r)2\pi r = \mathcal{E} = -\mu_{\mathrm{r}}\mu_0 \frac{N}{\ell}\cdot \pi R^2 \dot{I} \qquad \Rightarrow E(r) = -\mu_{\mathrm{r}}\mu_0 \frac{N}{\ell}\cdot\frac{R^2}{2r}\dot{I}\,.$$

Ved vekselstrøm har vi $I(t) = I_0\cos(\omega t)$ og $\dot{I} = -\omega I_0 \sin(\omega t)$, som gir

$$E(r) = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0 \frac{N}{\ell}\cdot\frac{R^2}{2r}\omega I_0 \sin(\omega t)\,.$$

Amliptyden til E blir, innsatt oppgitte verdier idet vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$:

$$E_0 = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0 \frac{N}{\ell}\cdot\frac{R^2}{2r}\omega I_0 = 2000\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}\cdot\frac{200}{0,10\,\mathrm{m}}\cdot\frac{1,00\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{2\cdot 0,050\,\mathrm{m}}\cdot 2\pi\cdot 50\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 2,0\,\mathrm{A} = \underline{3,2\,\mathrm{V/m}}\,.$$

Enhetsregning: $\frac{\mathrm{Hm^2A}}{\mathrm{m^3s}} = \frac{(\mathrm{Vs/A})\cdot\mathrm{A}}{\mathrm{m\cdot s}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

Oppgave 5. Varmeutvikling i solenoide.

a) Magnetfeltet inne i en lang, luftfylt spole: $B = \mu_0 In$. For å lage et felt $B = 1{,}00$ T med viklingstetthet $n = 1000\,\mathrm{m}^{-1}$, må vi derfor ha en strømstyrke på

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{1,00\,\mathrm{T}}{4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}\cdot 1000\,\mathrm{m}^{-1}} = 795,8\,\mathrm{A} = \underline{796\,\mathrm{A}}\,.$$

b) I et lederstykke med motstand R som fører en strøm I har vi et effekttap gitt ved

$$P = U\cdot I = R\cdot I^2, \quad \text{eller, per lengdeenhet:} \quad P' = U/\ell\cdot I = R'\cdot I^2\,,$$

der R' er motstand per lengdeenhet i en leder og gitt ved resistiviteten og tverrsnittet:

$$R' = \frac{1}{\ell}\cdot R = \frac{1}{\ell}\cdot\rho\frac{\ell}{A} = \frac{\rho}{A}\,.$$

For den gitte lederen er $A = \pi(d/2)^2 = \pi(0,50\cdot 10^{-3}\mathrm{m})^2 = 0,785\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$ slik at

$$R' = \frac{1,68\cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}}{0,79\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 21,4\,\mathrm{m}\Omega/\mathrm{m}\,.$$

Effekt utviklet per lengdeenhet blir dermed:

$$P' = R'\cdot I^2 = 21,4\,\mathrm{m}\Omega/\mathrm{m}\cdot(795,8\,\mathrm{A})^2 = 13,55\,\mathrm{kW/m} = \underline{14\,\mathrm{kW/m}\,.}$$

Kommentarer:
Dette er litt av en badstuovn. Det er altså praktisk umulig å lage sterke magnetfelt med luftfylt spole.

Men det hjelper ganske mye å fylle spolen med jern! Da kan vi oppnå et maksimalt magnetfelt $B_s = \mu_0 M_s$, der M_s er metningsmagnetiseringen i jern. Med $M_s = 1,6\cdot 10^6$ A/m får vi $B = \mu_0\cdot M_s \approx 2$ T, som beregnet i øving 10.

For å oppnå det ønskede magnetfeltet $B = 1{,}00$ T i jernet trengs det en strømstyrke

$$I = \frac{B}{\mu_{\mathrm{r}}\mu_0 n} = \frac{1,00\,\mathrm{T}}{2000\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}\cdot 1000\,\mathrm{m}^{-1}} = 0,398\,\mathrm{A}$$

i spoleledningene. Denne strømmen gir effekttap

$$P' = R'\cdot I^2 = 21,4\,\mathrm{m}\Omega/\mathrm{m}\cdot(0,398\,\mathrm{A})^2 = 3,39\,\mathrm{mW/m} = \underline{3,4\,\mathrm{mW/m}.}$$

En reduksjon med faktor $2000^2 = 4,0\cdot 10^6$!

Oppgave 6. Påskequiz: Noen frivillige flervalgsoppgaver.

a) B. Elektrisk felt og magnetisk moment er vektorstørrelser.

b) A. De positive ladningene gir som resultant en tiltrekkende kraft som virker 45° mellom 1 og 4. De negative ladningene gir som resultant en frastøtende kraft som virker 45° mellom 1 og 2. Disse to resultantene er lik i størrelse, og totalkrafta blir rett opp, retning 1.

c) E. For parallelkoplingen 3+4 er resistansen $\frac{1}{2}R$, mellom pkt A og B er $R_{\text{AB}} = R//(R + \frac{1}{2}R) = \frac{R \cdot 3R/2}{R + 3R/2} = \frac{3}{5}R$. For hele kretsen derfor $R_{\text{tot}} = R + R_{\text{AB}} = \frac{8}{5}R$.

d) D. Hastighetskomponenten $v_0\,\hat{\mathbf{k}}$ parallelt med $\vec{B}$ forblir uendra (Lorentzkrafta $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$) mens hastighetskomponenten $v_0\,\hat{\mathbf{j}}$ normalt på $\vec{B}$ gir en sirkelbevegelse med uendra banefart v_0. Ifølge Lorentzkrafta og sentripetalkraft: $qv_0B_0 = mv_0^2/r$, som gir $r = mv_0/eB_0$. Konstant stigning pluss sirkel er en heliksbevegelse.

e) D. Den horisontale biten bidrar ikke til B-felt, den vertikale biten gir et B-felt opp av papirplanet (høyrehåndsregel: asimutalt rundt ledningen med tommelen i strømretningen).

A.Mi. 13. mars 2015.