NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Fagleg kontakt under eksamen:
Namn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK (Nynorsk)
FOR FAK. NT (Fysikk og matematikk)
OG FAK. IME (Teknisk kybernetikk)
Måndag 12. desember 2005
Tid: 0900 – 1300
Studiepoeng: 7,5

Sensuren fell i veke 2, 2006.

Hjelpemedel C: Typegodkjend kalkulator, i samsvar med NTNU's reglar.
Trykte hjelpemedel:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, hefta ved oppgåvesettet.

Oppgåve 1

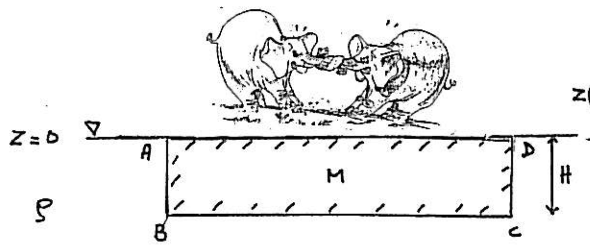


FIG. 1

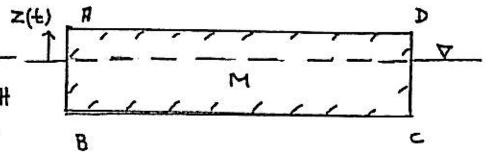


FIG. 2

To elefantar er i dragkamp om bord på ein flåte ABCD ute i sjøen. Flåten er ein homogen lekam med konstant tverrsnitt, og med høgd H. Massen til kvar elefant er m, medan massen til flåten er M. Gå ut frå at heile systemet er til å byrja med i (tilnærma) statisk likevekt, og at flåtens øvre kant er i flukt med vasspeilet, dvs. $z_0 = 0$. Tyngdas akselerasjon er g.

a) Ved tidspunktet t = 0 glipp festet mellom snablane, og begge elefantane fell i sjøen. Flåten kjem dermed i vertikale svingninger, som er udempa så lenge som vatnets viskositet vert neglisjert. Initialvilkåra for flåten ved t = 0 er $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$. Finn differensiallikninga for den tidsavhengige posisjon z(t) til flåtens øvre kant, kor bare størrelsene m, M, H og g inngår. (Sjå figur 2.) Finn svingningenes vinkelfrekvens ω.

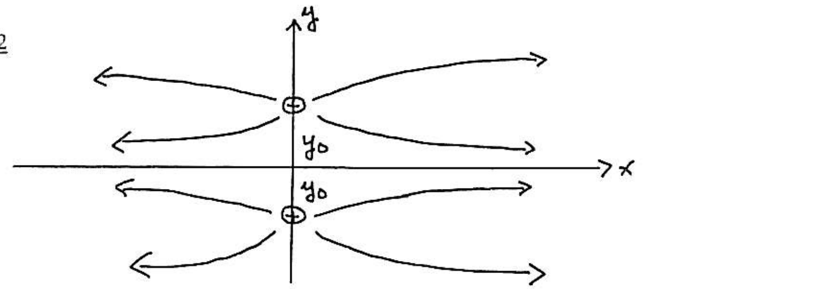
b) Det vert oppgjeve at løysinga til differensiallikninga kan skrivast på forma

$$z(t) = \frac{2mH}{2m+M} + \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t .$$

Finn verdiane av konstantane α og β.

c) Ta så omsyn til vatnets viskositet. Flåten kjem etter ei stund til ro. Den vert festa med eit tau til ein av elefantane (som nå er komen på land), og elefanten skal dra flåten inn mot land med konstant fart V_0. Gå ut frå at drag-koeffisienten for flåten er $C_D = 2{,}2$, at det effektive frontarealet er $A_{front} = 4{,}5\ m^2$, og at vannets tettleik er $\rho = 10^3 kg/m^3$. Elefanten yter effekten P = 0,80 kW. Kor stor blir V_0?

Oppgåve 2



a) To linjekjelder av samme styrke m (>0) er plassert i punktene $(0, y_0)$ og $(0, -y_0)$. Vis at straumfunksjonen for systemet kan skrivast som

$$\psi(x,y) = m\left[\arctan\frac{y-y_0}{x} + \arctan\frac{y+y_0}{x}\right]$$

Finn fartskomponentene u(x,y) og v(x,y). Kvifor kan planet y = 0 verta erstatta med ein fast vegg? Sjå i det fylgjande berre på området $y \geq 0$.

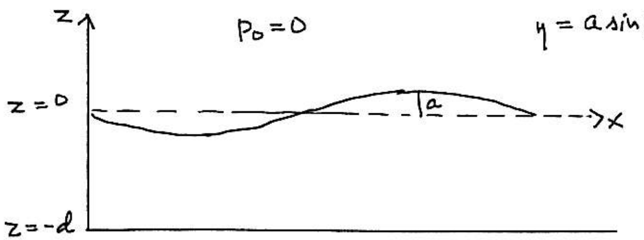
b) Finn trykket $p_w(x)$ ved veggen når fluidets tettleik er ρ og trykket langt borte frå veggen er p_∞. For kva for posisjoner x er $p_w(x)$ minst?

c) Finn volumgjennomstrøyminga Q (per lengdeeining inn i planet) gjennom eit vertikalt snitt, idet du integrerer u(x,y) over y frå y = 0 til y = ∞. Kunne du ha funne dette resultatet direkte, uten å rekna?

Oppgitt: $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{dt}{x^2+t^2} = \frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}$$

Oppgåve 3



Ei monokromatisk bylgje med liten amplitude ($ka \ll 1$) forplanter seg på grunt vatn ($kd \ll 1$). Her er k bylgjetallet, a amplituden, og d stillevasshøgda.

a) Finn dei tilnærma uttrykka for fartskomponentene u og w, og for det dynamiske trykket $p_d = -\rho\partial\phi/\partial t$. Sett heretter w = 0.

b) Finn den midlere energi E per eining grunnflate.

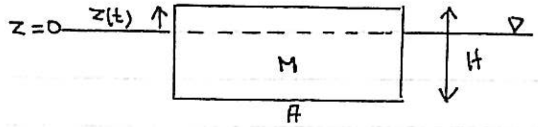
c) Vis at middelverdien $\overline{P(t)}$ av energifluksen P(t) gjennom eit vertikalt tverrsnitt kan skrivast slik:

$$\overline{P(t)} = E\cdot c,$$

hvor c er fasefarta (sett atmosfæretrykket $p_0 = 0$). Kvifor er fasehastighet og gruppehastighet like, $c = c_g$?

TEP 4105 Fluidmekanikk. Eksamen 12. desember 2005

Løsning Oppgave 1



Ser først på statisk likevekt, når elefantene er ombord på flåten og flåtens øvre kant er i flukt

a) med vannspeilet: $(2m+M)g = \rho g V$, hvor $V = A\cdot H$ er flåtens volum (A er arealet av grunnflaten).

Altså $2m + M = \rho A\cdot H$, $\quad A = \dfrac{2m+M}{\rho H}$.

Svingende system: Oppdriftskraften er $\rho g A(H-z) = g\dfrac{2m+M}{H}(H-z)$.

Newtons 2. lov gir da

$$g\frac{2m+M}{H}(H-z) - Mg = M\cdot\ddot{z}, \qquad \underline{\ddot{z} + g\frac{2m+M}{M\cdot H}\cdot z = \frac{2mg}{M}}$$

Vinkelfrekvens $\underline{\omega = \sqrt{g\dfrac{2m+M}{M\cdot H}}}$

b) Løsning $z(t) = \dfrac{2mH}{2m+M} + \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t$.

Initialbetingelse $z_0 = 0$ gir $\dfrac{2mH}{2m+M} + \beta = 0$, $\beta = -\dfrac{2mH}{2m+M}$

$\dot{z}_0 = 0$ gir $\alpha = 0$. Altså $\underline{z(t) = \dfrac{2mH}{2m+M}(1-\cos\omega t)}$

c) Flåten dras mot land med konstant fart V_0.

Motstandsformel: $C_D\cdot\frac{1}{2}\rho V_0^2\cdot A_{front} = D$.

Effekt: $C_D\cdot\frac{1}{2}\rho V_0^3\cdot A_{front} = D\cdot V_0 = P$.

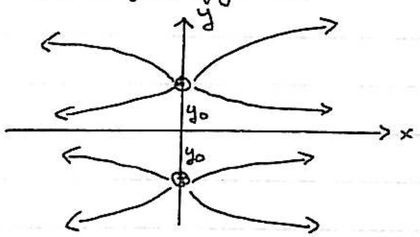
$$\underline{V_0} = \sqrt[3]{\frac{2P}{C_D\cdot\rho\cdot A_{front}}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 800}{2{,}2\cdot 10^3\cdot 4{,}5}} = \sqrt[3]{0{,}1616} = \underline{0{,}55\ \text{m/s}}$$

Løsning Opgave 2

Standardformel $\psi = m \cdot \theta$ for linjekilde i origo $\Longrightarrow$

$$\psi = m\left[\arctan\frac{y-y_0}{x} + \arctan\frac{y+y_0}{x}\right].$$

a)



Herav finnes hastighetene:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = m\left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{(y-y_0)^2}{x^2}} + \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{(y+y_0)^2}{x^2}}\right]$$

$$\underline{u = mx\left[\frac{1}{x^2+(y-y_0)^2} + \frac{1}{x^2+(y+y_0)^2}\right]}$$

Tilsvarende

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -m\left[\frac{-\frac{y-y_0}{x^2}}{1+\frac{(y-y_0)^2}{x^2}} + \frac{-\frac{y+y_0}{x^2}}{1+\frac{(y-y_0)^2}{x^2}}\right]$$

$$\underline{v = m\left[\frac{y-y_0}{x^2+(y-y_0)^2} + \frac{y+y_0}{x^2+(y+y_0)^2}\right]}$$

På planet $y = 0$ er

$$\underline{v(x,0)} = m\left[\frac{-y_0}{x^2+y_0^2} + \frac{y_0}{x^2+y_0^2}\right] = \underline{0}$$

Derfor kan planet erstattes av fast vegg.

b) For potensialstrømning er Bernoulli-konstanten den samme overalt. Benytter Bernoulli fra et punkt på veggen og ut til et punkt langt ute hvor $p = p_\infty$:

$$\tfrac{1}{2}\rho u^2(x,0) + p_w = 0 + p_\infty.$$

Fra ovenfor er $u(x,0) = \dfrac{2mx}{x^2+y_0^2}$.

$$\Rightarrow \underline{p_w(x)} = p_\infty - \tfrac{1}{2}\rho u^2(x,0) = \underline{p_\infty - \frac{2\rho m^2 x^2}{(x^2+y_0^2)^2}}$$

Løsning Opgave 2, forts.

$p_w(x)$ er minst når $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+y_0^2)^2}$ er størst.

Av $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x^2+y_0^2)^2 - x^2\cdot 2(x^2+y_0^2)\cdot 2x}{(x^2+y_0^2)^2} = 0$ finnes løsningen

$$x^2 = y_0^2, \quad \underline{x = \pm y_0}$$

c) $$Q = \int_0^\infty u\,dy = mx\left[\int_0^\infty \frac{dy}{x^2+(y-y_0)^2} + \int_0^\infty \frac{dy}{x^2+(y+y_0)^2}\right]$$

Ser på $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dy}{x^2+(y-y_0)^2} = \int_{-y_0}^\infty \frac{dt}{x^2+t^2}$ med $t = y - y_0$.

Med oppgitt formel: $I_1 = \dfrac{1}{x}\Big[\arctan\dfrac{t}{x}\Big]_{-y_0}^{\infty} = \dfrac{1}{x}\Big[\underbrace{\arctan\infty}_{\frac{\pi}{2}} + \arctan\dfrac{y_0}{x}\Big]$

Tilsvarende: $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dy}{x^2+(y+y_0)} = \frac{1}{x}\Big[\underbrace{\arctan\infty}_{\frac{\pi}{2}} - \arctan\frac{y_0}{x}\Big]$

(lar $y_0 \to -y_0$).

Altså $I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{x}$, som gir

$$\underline{Q} = mx\,(I_1 + I_2) = \underline{m\cdot\pi}$$

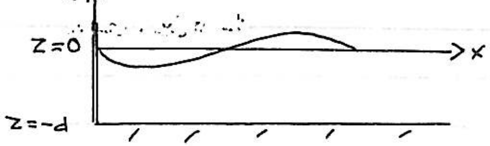
Kan ses direkte: En må ha $Q = \psi(x, y=\infty) - \psi(x, y=0)$.

Fra ovenfor er

$$\psi(x, y=\infty) = m\cdot\Big[\underbrace{\arctan\infty}_{\frac{\pi}{2}}\Big]\cdot 2 = m\cdot\pi,$$

$$\psi(x, y=0) = m\cdot\Big[\arctan\Big(-\frac{y_0}{x}\Big) + \arctan\frac{y_0}{x}\Big] = 0.$$

Altså $\underline{Q = m\cdot\pi}$, som før.



Generelt er hastighetspotensialet

$$\phi = \frac{a\omega}{k}\,\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\cdot\cos(\omega t - kx).$$

a) $$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \omega a\,\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\,\sin(\omega t - kx)$$

$$w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = \omega a\,\frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd}\,\cos(\omega t - kx)$$

$$p_d = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\rho a\omega^2}{k}\,\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\,\sin(\omega t - kx)$$

Når $kd \ll 1$, er tilnærmet $\cosh k(z+d) = 1$, $\sinh kd = kd$, og dispersjonsligningen $\omega^2 = gk\tanh kd \Rightarrow \omega = k\sqrt{gd}$.
Tilnærmet altså, når $\theta = \omega t - kx$ er fasen,

$$u = \frac{\omega a}{kd}\sin\theta, \quad w = \omega a\,\frac{z+d}{d}\cos\theta, \quad p_d = \rho g a \sin\theta$$

b) $w \simeq 0$. Potensiell energi per grunnflateenhet

$$PE = \int_{-d}^{\eta}\rho g z\,dz - \int_{-d}^{0}\rho g z\,dz = \int_{0}^{\eta}\rho g z\,dz = \tfrac{1}{2}\rho g \eta^2$$

Da $\eta = a\sin\theta$ altså $\overline{PE} = \tfrac{1}{4}\rho g a^2$.

Kinetisk energi $KE = \tfrac{1}{2}\rho\int_{-d}^{\eta}u^2\,dz \rightarrow \tfrac{1}{2}\rho\int_{-d}^{0}u^2\,dz$ fordi korreksjonen er av høyere orden. Setter inn $u = \frac{\omega a}{kd}\sin\theta$:

$$KE = \tfrac{1}{2}\rho\,\frac{\omega^2 a^2}{k^2 d^2}\sin^2\theta\,\underbrace{\int_{-d}^{0}dz}_{d} = \tfrac{1}{2}\rho g a^2\cdot\sin^2\theta, \text{ da } \omega = k\sqrt{gd}.$$

Middelverdi $\overline{KE} = \tfrac{1}{4}\rho g a^2$.

Total energi $\underline{E} = \overline{PE} + \overline{KE} = \underline{\tfrac{1}{2}\rho g a^2}$.

Løsning Oppgave 3, forts.

c) Energifluksen $\underline{P}(t)$ setter seg sammen av to bidrag: ett bidrag fra trykket som lokalt er $p\cdot u$, og ett bidrag fra energitettheten: $(\rho g z + \tfrac{1}{2}\rho u^2)\cdot u$ (da $w=0$).

Altså

$$\underline{P}(t) = \int_{-d}^{\eta}[\,p + \rho g z + \underbrace{\tfrac{1}{2}u^2}_{\text{NEGL.}}\,]\cdot u\,dz$$

Da $p_0 = 0$ er $(p + \rho g z)$ lik det dynamiske trykket p_d.

Altså til laveste orden $\underline{P}(t) = \int_{-d}^{\eta}p_d\cdot u\,dz \rightarrow \int_{-d}^{0}p_d\cdot u\,dz$.

Setter inn $p_d = \rho g a\sin\theta$, $u = \frac{\omega a}{kd}\sin\theta$:

$$\underline{P}(t) = \rho g a\sin^2\theta\cdot\frac{\omega a}{kd}\underbrace{\int_{-d}^{0}dz}_{d} = \rho g a^2\sqrt{gd}\cdot\sin^2\theta$$

Middelverdi: $\underline{\overline{P(t)}} = \tfrac{1}{2}\rho g a^2\sqrt{gd} = \underline{E\cdot c}$

Bølgene er ikke-dispersive; fasehastighet c og gruppehastighet c_g er like.