NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

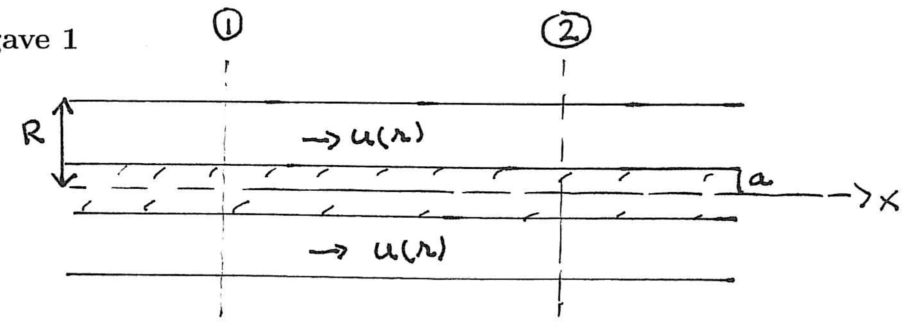
Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

Onsdag 3. desember 2008
Tid: 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller innen 5. januar 2009

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Det annulære området $a \leq r \leq R$ mellom en kompakt indre sylinder $r = a$ og en ytre sylinderflate $r = R$ er fylt med en inkompressibel viskøs væske med tetthet ρ og dynamisk viskositet $\mu = \rho\nu$. Strømningen er stasjonær. Trykkforskjellen over en lengde $\Delta L = x_2 - x_1$ av røret er $\Delta p = p_2 - p_1$. Symmetrien gjør at bare den horisontale hastighetskomponenten $u = u(r)$ er forskjellig fra null. Se først bort fra tyngden.

Strømningen oppfyller den vanlige heftbetingelsen (no-slip condition) ved ytre grenseflate $r = R$. Indre grenseflate antas å være perfekt glatt, slik at skjærspenningen $\tau = 0$ for $r = a$.

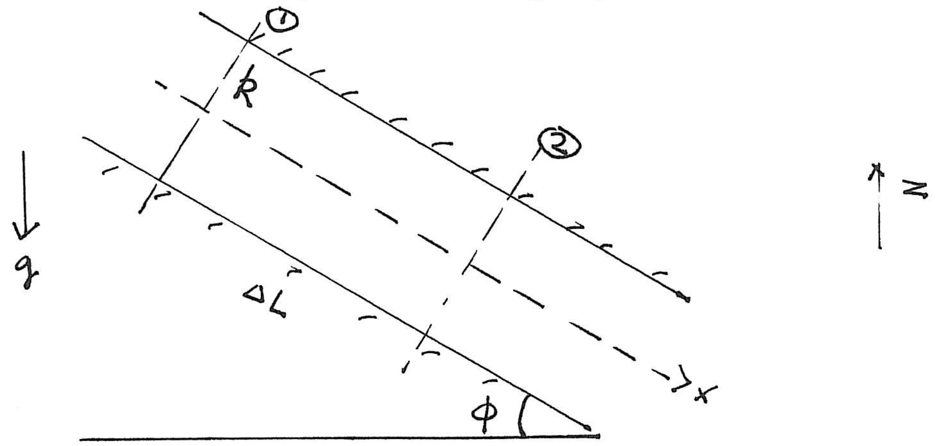
a) Navier-Stokes' ligninger i $x-$ og $r-$retning forenkler seg til

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right),$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

Vis at $\partial p/\partial x =$ konstant, lik $\Delta p/\Delta L$.

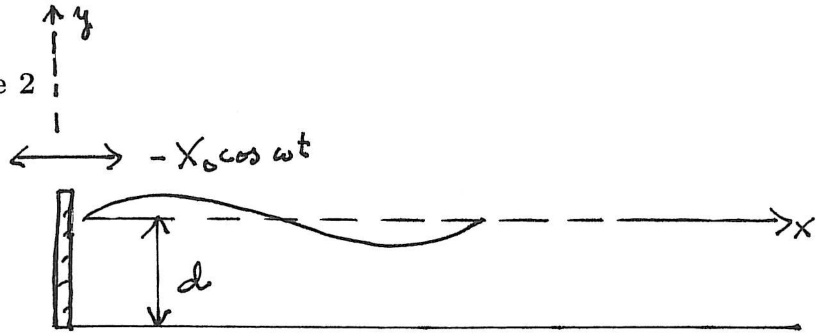
b) Finn hastighetsprofilet $u(r)$, uttrykt ved r og de gitte konstanter.



c) Ta nå hensyn til tyngden, og anta at den indre kjernen i røret er fjernet. Røret med radius R legges slik at det heller vinkelen ϕ med horisontalen. Skjærspenningen ved veggen er τ_w. Væsken strømmer med konstant middelhastighet V. Betrakt en lengde $\Delta L = x_2 - x_1$ av røret som før.

Benytt energiligningen og impulsligningen til å vise hvordan friksjonshøyden h_f kan uttrykkes ved $\tau_w, \Delta L, \gamma = \rho g$, og R.

Oppgave 2



a) For en monokromatisk bølge med amplitude a og bølgetall k er det komplekse potensial

$$w(z) = \frac{ga}{\omega \cosh kd} \cos[\omega t - k(z + id)],$$

hvor d er stillevannsdybden og $z = x + iy$. Finn herav hastighetspotensialet $\phi(x, y, t)$ og strømfunksjonen $\psi(x, y, t)$.

Oppgitt: For reelle størrelser A og B er

$$\cos(A - iB) = \cos A \cosh B + i \sin A \sinh B.$$

b) Vis at for gruntvannsbølge er horisontal hastighetskomponent u tilnærmet lik

$$u = \frac{\omega a}{kd} \sin(\omega t - kx).$$

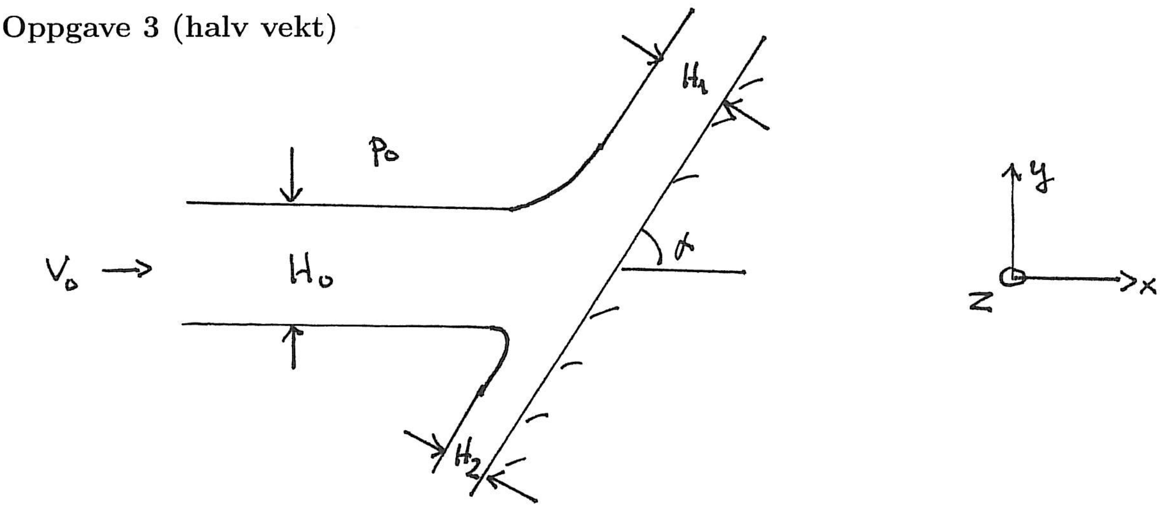
Finn hvordan den horisontale posisjonen x varierer med t i dette tilfelle. Kall middelposisjonen x_0.

c) Bølgen genereres ved at venstre endevegg i en lang bølgerenne oscillerer harmonisk i $x-$retningen med vinkelfrekvens ω og amplitude X_0:

$$X = -X_0 \cos \omega t.$$

Finn bølgeamplituden a, uttrykt ved X_0, k og d. Hva er omtrentlig den maksimale verdi av forholdet a/X_0, forutsatt gruntvannsbølge?

Oppgave 3 (halv vekt)



Gitt en horisontal vannstråle med bredde H_0, hvor hastigheten V_0 er konstant over strålens tverrsnitt. Strålen er plan, dvs. dens utstrekning antas uendelig inn i papirplanet ($z-$retningen). Vannets tetthet er ρ. Se bort fra tyngdekraft og viskositet. Atmosfæretrykket er p_0. Strålen treffer en plate som danner vinkelen α med $x-$aksen, og deler seg i to grenstrømmer, parallelt med platen. Breddene av grenstrømmene er H_1 og H_2.

a) Hvor stort er trykket p inne i strålen? Hvorfor er $H_0 = H_1 + H_2$?

b) Finn $x-$ og $y-$komponentene av den kraft $\mathbf{F}_{plate}$ (per enhet i $z-$retningen) som vannet utøver mot platen.

Oppgave 4 (halv vekt)

a) Et subsonisk fly er i jevn horisontal flukt ved havoverflaten $z = 0$. Et Pitotrør montert i flyet viser et dynamisk trykk på $q = \frac{1}{2}\rho_0 V^2 = 4250$ Pa. Anta standardatmosfære, med $\rho_0 = 1,23$ kg/m^3. Finn motorens effekt P_0, når det samlede vingeareal er $A = 25\,\mathrm{m}^2$ og dragkoeffisienten er $C_D = 0,20$. Anta at halvparten av flyets luftmotstand skyldes vingen.

b) I troposfæren $0 < z < 11$ km er temperaturfallet som kjent lineært,

$$T(z) = T_0 - Bz, \quad B = 0,0065\,\mathrm{K/m},$$

med $T_0 = 288$ K, mens trykket varierer slik:

$$\frac{p(z)}{p_0} = \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{5,26}.$$

Over tropopausen som ligger i høyden $z = z_c = 11$ km, ligger stratosfæren som strekker seg opp til omtrent $z = 20$ km. Stratosfærens temperatur er konstant, lik T_c =216,5 K (-56,5^0 C).

Anta nå at flyet stiger til høyden $z = 14$ km, og fortsetter deretter i jevn horisontal flukt i denne høyde med samme hastighet V som det hadde ved havoverflaten. Motoren yter nå effekten P. Finn forholdet P/P_0, idet du antar samme dragkoeffisient C_D som før.

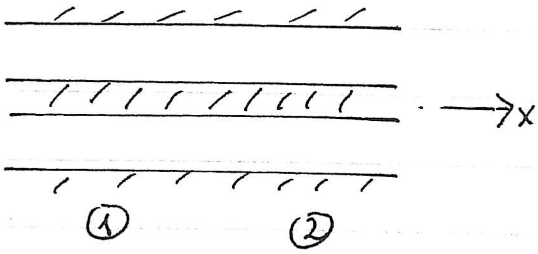
Oppgitt: Tilstandsligningen er $p = \rho RT$. Numerisk, i tropopausen, er $g/(RT_c) = 0,000158\,\mathrm{m}^{-1}$.

[Hint: For $z > z_c$ er det hensiktsmessig å skrive tetthetsforholdet $\rho(z)/\rho_0$ som et produkt av to faktorer,

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{\rho_c}{\rho_0} \cdot \frac{\rho(z)}{\rho_c}.]$$

TEP4105 FLUIDMEKANIKK, eksamen 3. des. 2008

Løsning Oppgave 1



a) Deriverer $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du(r)}{dr}\right)$ og får $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0$.

Da også $\partial p/\partial x$ er uavhengig av r på grunn av symmetri, er $\partial p/\partial x$ uavhengig av både x og r, altså konstant.

Dermed $\partial p/\partial x = \Delta p/\Delta L$ = konstant (<0).

b) Av Navier-Stokes, $\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{\Delta p}{\Delta L}$

Integrasjon: $r\frac{du}{dr} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\Delta p}{\Delta L}\cdot\frac{1}{2}r^2 + C_1$.

Betingelse $\tau = \mu\frac{du}{dr} = 0$ ved $r = a$ gir

$$0 = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\Delta p}{\Delta L}\cdot\frac{a^2}{2} + C_1, \qquad C_1 = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\Delta p}{\Delta L}\cdot\frac{1}{2}a^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{du}{dr} = \frac{\Delta p/\Delta L}{2\mu}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

Integrerer igjen: $u = \frac{\Delta p/\Delta L}{2\mu}\left(\frac{1}{2}r^2 - a^2\ln r\right) + C_2$

Heftbetingelse ved $r = R$:

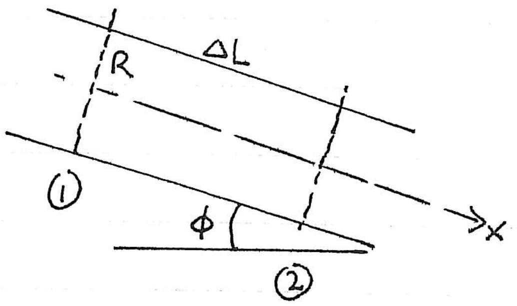
$$0 = \frac{\Delta p/\Delta L}{2\mu}\left(\frac{1}{2}R^2 - a^2\ln R\right) + C_2$$

$$C_2 = -\frac{\Delta p/\Delta L}{2\mu}\left(\frac{1}{2}R^2 - a^2\ln R\right)$$

$$\underline{u(r) = -\frac{\Delta p/\Delta L}{2\mu}\left[\frac{1}{2}(R^2 - r^2) - a^2\ln\frac{R}{r}\right]}$$

TEP4105 Fluidmekanikk, 3. desember 2008.

Oppgave 1c



Da $V_1 = V_2 = V$ gir energiligningen mellom 1 og 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + g z_1 = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + g z_2\right) + \underbrace{w_s}_{=0} + g h_f$$

$\Rightarrow$

$$h_f = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma}, \quad \Delta z = z_1 - z_2 > 0$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 > 0$$

Impulsbalansen: $\sum F_x = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN} = 0$

$\Rightarrow$

$$\Delta p \cdot \pi R^2 + \gamma \cdot (\underbrace{\pi R^2 \Delta L}_{\text{VOLUM}}) \cdot \sin\phi - \tau_w \cdot (\underbrace{2\pi R \cdot \Delta L}_{\text{OVERFLATE}}) = 0$$

Kan skrives slik: $\Delta p \cdot \pi R^2 + \gamma \pi R^2 \cdot \Delta z - \tau_w \cdot (2\pi R \Delta L) = 0$

Setter inn $\Delta z = h_f - \Delta p/\gamma$ fra ovenfor:

$$\gamma \pi R^2 \cdot h_f = 2\pi R \tau_w \cdot \Delta L$$

$$\underline{h_f = \frac{2\tau_w}{\gamma} \cdot \frac{\Delta L}{R}, \quad \gamma = \rho g.}$$

TEP4105 Fluidmekanikk, 3. desember 2008

<u>Oppgave 2</u>

a) Gitt $w(z) = \dfrac{ga}{\omega \cosh kd} \cos[\omega t - k(z + id)]$, $z = x + iy$

Spalter opp: $\cos[\omega t - k(z+id)] = \cos[\overbrace{(\omega t - kx)}^{A} - \overbrace{ik(y+d)}^{iB}] =$

$= \cos(\omega t - kx) \cdot \cosh k(y+d) + i \sin(\omega t - kx) \cdot \sinh k(y+d)$

$\Rightarrow$

$$w = \frac{ga \cosh k(y+d)}{\omega \cosh kd} \cdot \cos(\omega t - kx) + i \frac{ga \sinh k(y+d)}{\omega \cosh kd} \cdot \sin(\omega t - kx)$$

Sammenligner med $w = \phi + i\psi$:

$$\phi = \frac{ga \cosh k(y+d)}{\omega \cosh kd} \cdot \cos(\omega t - kx), \quad \psi = \frac{ga \sinh k(y+d)}{\omega \cosh kd} \cdot \sin(\omega t - kx)$$

---

b) Grunt vann, $L \gtrsim 20d$, $\cosh k(y+d) \simeq 1$, $\cosh kd \simeq 1$, gir

$\phi = \frac{ga}{\omega} \cos(\omega t - kx)$, $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{gak}{\omega} \sin(\omega t - kx)$

Da $\omega = k\sqrt{gd}$ er $\dfrac{gak}{\omega} = \dfrac{gak\omega}{\omega^2} = \dfrac{gak\omega}{k^2 gd} = \dfrac{\omega a}{kd}$

Altså $u = \dfrac{\omega a}{kd} \cdot \sin(\omega t - kx)$

Tilnærmet kan x erstattes av x_0, slik at

$$u = \frac{\omega a}{kd} \sin(\omega t - kx_0).$$

Integrerer:

$$x = \int u\,dt = -\frac{a}{kd} \cdot \cos(\omega t - kx_0) + x_0$$

c) Med $x_0 = 0$ fås $x = -\dfrac{a}{kd} \cdot \cos\omega t$.

Sammenligner med veggens posisjon $X = -X_0 \cos\omega t$:

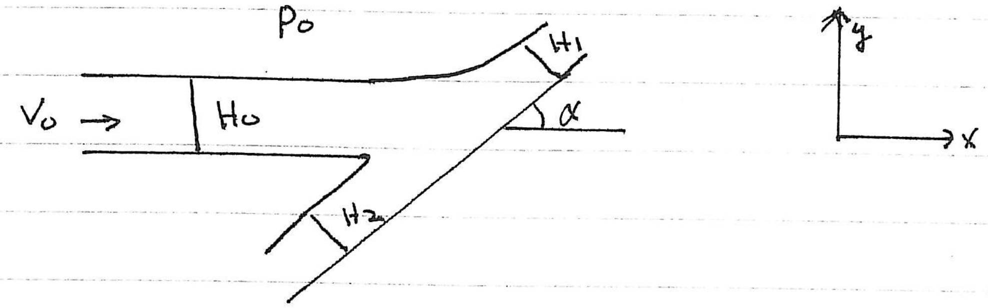
$\dfrac{a}{kd} = X_0$, $\quad \underline{a = X_0 \cdot kd}$

$$\frac{a}{X_0} = kd \Rightarrow \left(\frac{a}{X_0}\right)_{max} \simeq 0{,}3.$$

Dette fordi $kd = \dfrac{2\pi d}{L}$ og $L \gtrsim 20d$.

TEP 4105 Fluidmekanikk, 3. desember 2008

Oppgave 3



a) Trykket inne i strålen er lik p_0. Hvis det ikke var tilfelle, ville strålen enten utvide seg eller trekke seg sammen.

Kontinuitetsligning $V_0 H_0 = V_0 H_1 + V_0 H_2$ fordi hastighetene i hver gren er V_0 (følger av Bernoulli).

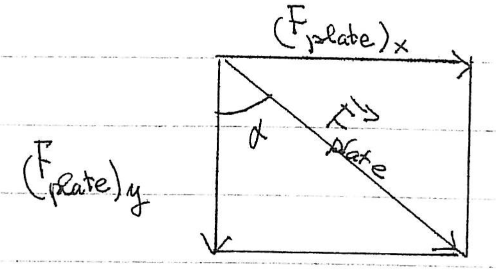
Det gir at $\underline{H_0 = H_1 + H_2}$.

b) Null viskositet gir null skjærkraft parallelt med platen. Eneste kraft er normalkraften på platen.

Innfallende impulsfluks er $\rho V_0^2 H_0$. Dens komponent normalt på platen er $\rho V_0^2 H_0 \cdot \sin\alpha$.

Altså $F_{plate} = \rho V_0^2 H_0 \sin\alpha$.

Komponenter: $\underline{(F_{plate})_x = \rho V_0^2 H_0 \sin^2\alpha, \ (F_{plate})_y = -\rho V_0^2 H_0 \sin\alpha \cos\alpha}$



TEP4105 Fluidmekanikk, 3. desember 2008

Oppgave 4

a) $$\underline{V} = \sqrt{\frac{2q}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4250}{1,23}} = \underline{83,1 \text{ m/s}}$$

Effekt $P_0 = 2 \cdot D \cdot V$, hvor $D = C_D \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 A$ er vingemotstand.

$$\underline{P_0} = C_D \cdot \rho_0 V^3 A = 0,20 \cdot 1,23 \cdot 83,1^3 \cdot 25 = \underline{3,53 \text{ MW}}$$

b) Da $P = C_D \cdot \rho(z) V^3 A$ i høyde $z = 14$ km, er

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{\rho_c}{\rho_0} \cdot \frac{\rho(z)}{\rho_c}$$, ρ_c refererer til tropopausen.

Troposfære: $$\frac{p}{\rho T} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{4,26}$$

Altså $$\frac{\rho_c}{\rho_0} = \left(\frac{T_c}{T_0}\right)^{4,26}.$$

Stratosfære: $$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{pg}{RT}$$ gir

$$\int_{p_c}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_c}\int_{z_c}^{z} dz = -\frac{g}{RT_c}(z - z_c)$$

$$\therefore \quad \frac{p(z)}{p_c} = \exp\left\{-\frac{g}{RT_c}(z - z_c)\right\}.$$

Altså $$\underline{\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T_c}{T_0}\right)^{4,26} \cdot \exp\left[-\frac{g}{RT_c}(z - z_c)\right]}$$

Numerisk:

$$\underline{\frac{P}{P_0}} = \left(\frac{216,5}{288}\right)^{4,26} \cdot \exp\left[-0,000158 \cdot 3000\right] = 0,296 \cdot 0,6225 = \underline{0,184}$$