Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4245 Statistikk
Vår 2015

Øving nummer 4, blokk I
Løsningsskisse

Oppgave 1

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=-2}^{2} x f(x) = -2 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = \underline{\underline{0.1}}$$

$$P(X \geq 0) = f(0) + f(1) + f(2) = \underline{\underline{0.8}}$$

$$P(X \geq 0 | X \leq 1) = \frac{P(X \geq 0 \cap X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{f(0) + f(1)}{f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)} = \underline{\underline{0.78}}$$

Oppgave 2

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

For at $f(x)$ skal være en sannsynlighetstetthet, må $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = k[x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = k(1 - \tfrac{1}{3} - (-1 + \tfrac{1}{3})) = k\tfrac{4}{3} = 1$$

Det gir $\underline{\underline{k = \frac{3}{4}.}}$

$$P(X \leq 0.5) = \int_{-1}^{0.5} \tfrac{3}{4}(1-x^2)dx = \tfrac{3}{4}[x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-1}^{0.5} = \tfrac{3}{4}(-0.5 - 0.04167 - (-1 + 0.3333)) = \underline{\underline{0.8438}}$$

$$P(X \leq 0.8 | X > 0.5) = \frac{P(X \leq 0.8 \cap X > 0.5)}{P(X > 0.5)} = \frac{P(0.5 < X \leq 0.8)}{P(X > 0.5)}$$

$$P(0.5 < X \leq 0.8) = \int_{0.5}^{0.8} \tfrac{3}{4}(1 - x^2)dx = \tfrac{3}{4}[x - \tfrac{1}{3}x^3]_{0.5}^{0.8} = \tfrac{3}{4}(0.629 - 0.458) = 0.128$$

Det gir $P(X \leq 0.8|X > 0.5) = \frac{0.128}{1-0.8438} = \underline{\underline{0.821}}$

Oppgave 3

Simultanfordelingen, $f(x,y)$, til de to diskrete stokastiske variablene X og Y er gitt i følgende tabell:

	y=0	y=1	y=2	f(x)
x=-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
x=0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
x=1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
f(y)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Marginalfordelingen til X og til Y sees i tabellen.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } x = -1, 0, 1 \\ 0 & \quad ellers. \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } y = 0, 1, 2 \\ 0 & \quad ellers. \end{cases}$$

Forvening og varians til X:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \underline{\underline{0}} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{3}\cdot(-1-0)^2 + \frac{1}{3}\cdot(0-0)^2 + \frac{1}{3}\cdot(1-0)^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Forvening og varians til Y:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 = \underline{\underline{1}} \\ \mathrm{Var}(Y) &= \frac{1}{3}\cdot(0-1)^2 + \frac{1}{3}\cdot(1-1)^2 + \frac{1}{3}\cdot(2-1)^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Kovarians:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X \cdot Y) &= \frac{1}{6}\cdot(-1)\cdot 0 + \frac{1}{12}\cdot(-1)\cdot 1 + \frac{1}{12}\cdot(-1)\cdot 2 \\
&+ \frac{1}{12}\cdot 0\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 0\cdot 1 + \frac{1}{12}\cdot 0\cdot 2 \\
&+ \frac{1}{12}\cdot 1\cdot 0 + \frac{1}{12}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 \\
&= \frac{1}{6} \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{6} - 0\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}
\end{aligned}
$$

Siden kovariansen mellom X og Y ikke er null så kan ikke X og Y være uavhengige. Vi ser også at simultanfordelingen til X og Y ikke er lik produktet av de to marginalfordelingene, noe som ville vært tilfellet hvis X og Y hadde vært uavhengige.

Oppgave 4

X: mengde mørtel en murer bruker pr. dag.

$$
f(x) = \begin{cases} 1/3 & 4 < x \leq 7 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}
$$

a) $P(X > 6) = \int_6^\infty f(x)dx = \int_6^7 \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}$

La α være mengden han må kjøpe inn:

$P(X > \alpha) = 0.05 \;\Leftrightarrow\; \int_\alpha^\infty f(x)dx = 0.05 \;\Leftrightarrow\; \int_\alpha^7 \frac{1}{3}dx = 0.05 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 6.85$

b) Fra **a)** vet vi at $P(X > 6) = \frac{1}{3}$. La nå Z være antall dager han får for lite mørtel om han kjøper inn 6 hl.

$$
P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \{P(X < 6)\}^4 = 1 - \left\{\frac{2}{3}\right\}^4 = 0.8
$$

c) Mureren taper 20 kr pr. hl for mye mørtel og 50 kr pr. hl for lite mørtel. Forventet tap ved kjøp av 6hl blir :

$$
\begin{aligned}
E(\text{tap}) &= 20\cdot E(\text{antall hl for mye}) + 50\cdot E(\text{antall hl for lite}) \\
&= 20\int_4^6 (6-x)f(x)dx + 50\int_6^7 (x-6)f(x)dx \\
&= \frac{20}{3}\int_4^6 (6-x)dx + \frac{50}{3}\int_6^7 (x-6)dx \\
&= 21.7
\end{aligned}
$$

La t være mengden mørtel som skal kjøpes inn for å minimere forventet tap.

$$
\begin{aligned}
E(\text{tap}) &= 20\int_4^t (t-x)f(x)dx + 50\int_t^7 (x-t)f(x)dx \\
&= \frac{20}{3}[tx - \frac{1}{2}x^2]_4^t + \frac{50}{3}[\frac{1}{2}x^2 - tx]_t^7 \\
&= g(t)
\end{aligned}
$$

Denne funksjonen har minimum for $g'(t) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; t = \frac{430}{70} = 6.14$

Oppgave 5

a) Trekker en boks fra vareparti B

$$P(F_1) = \frac{5}{100} = \underline{\underline{0.05}}$$

Trekker to bokser fra vareparti B

$$P(\text{En med kun } F_1 \text{ og en med kun } F_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{9}{1}}{\binom{100}{2}} = \underline{\underline{0.00727}}$$

b) Trekker tre bokser, alle fra vareparti A eller alle fra vareparti B. La **A** være å trekke fra A, **B** være å trekke fra B og **C** være å trekke en boks med kun F_1-feil og to feilfrie bokser.

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\binom{4}{1}\binom{86}{2}}{\binom{100}{3}}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{0.1690}}$$

$$
\begin{aligned}
P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} &= \frac{\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\binom{4}{1}\binom{86}{2}}{\binom{100}{3}}\cdot\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{10}{1}\binom{90}{2} + \binom{4}{1}\binom{86}{2}} = \underline{\underline{0.7326}}
\end{aligned}
$$

Merk: I 'Fasit' er det brukt færre desimaler.

c) Forventet inntekt ved å

1. selge alle de resterende boksene

Type	Antall	Gevinst pr. boks	Totalt
feilfri	$90 + 86 - 2 = 174$	10	1740
F_1	$14 - 1 = 13$	$10 - 10 = 0$	0
F_2	9	$10 - 10 - 150 = -150$	-1350
$F_1 \cap F_2$	1	$10 - 10 - 150 = -150$	-150

gir $1740 + 0 - 1350 - 150 = \underline{\underline{240}}$.

2. selge de resterende boksene fra den stabelen boksene kom fra

Parti	Type	Antall	Gevinst pr. boks	Totalt
A	feilfri	$90-2=88$	10	880
	F_1	$10-1=9$	$10-10=0$	0
B	feilfri	$86-2=84$	10	840
	F_1	$4-1=3$	$10-10=0$	0
	F_2	9	$10-10-150=-150$	-1350
	$F_1 \cap F_2$	1	$10-10-150=-150$	-150

gir

$$880 \cdot P(A|C) + (840 - 1350 - 150) \cdot P(B|C) = 880 \cdot 0.7337 - 660 \cdot 0.2663 = \underline{\underline{470}}.$$

3. selge boksene fra den andre stabelen enn det boksene fra

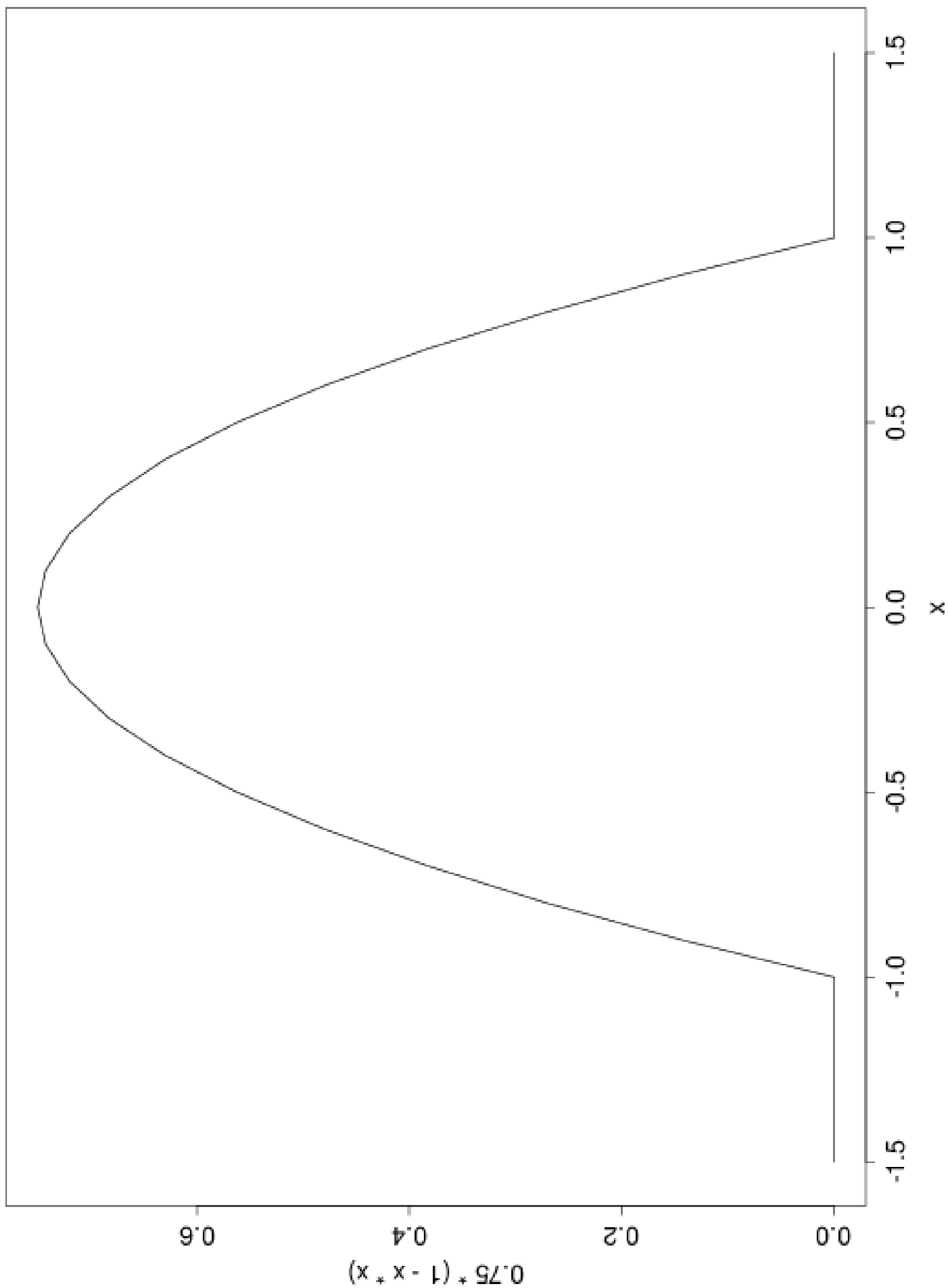
Parti	Type	Antall	Gevinst pr. boks	Totalt
A	feilfri	90	10	900
	F_1	10	$10-10=0$	0
B	feilfri	86	10	860
	F_1	4	$10-10=0$	0
	F_2	9	$10-10-150=-150$	-1350
	$F_1 \cap F_2$	1	$10-10-150=-150$	-150

gir

$$900 \cdot P(B|C) + (860 - 1350 - 150) \cdot P(A|C) = 900 \cdot 0.2663 - 640 \cdot 0.7337 = \underline{\underline{-230}}.$$

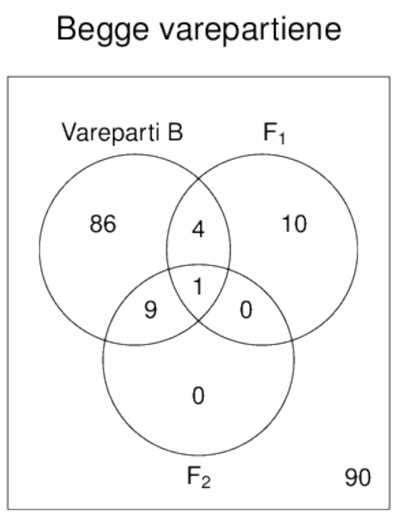
4. ikke selge noen bokser gir $\underline{\underline{0}}$.

Den beste beslutningen er nummer $\underline{\underline{2}}$.



Figur 1: Skisse av $f(x)$.

Figur 2: Venn-diagram for hver av de to varepartiene A og B



Figur 3: Venn-diagram for de to varepartiene A og B sammen