NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

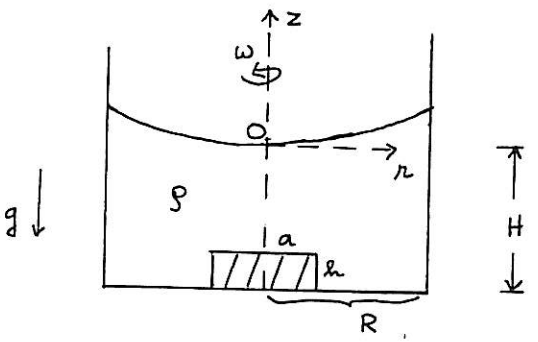
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. F (Linje Fysikk og matematikk)
11. august 2000
Tid: 0900 – 1400

Sensuren faller i uke 35.

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



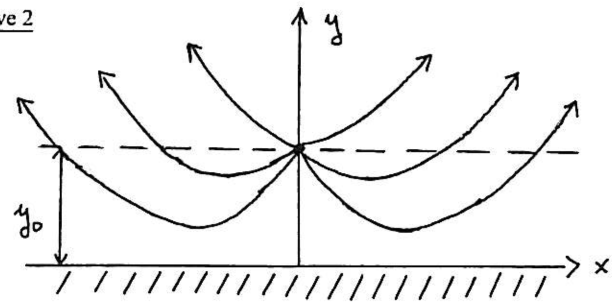
Et sylindrisk kar med grunnflateradius R roterer omkring den vertikale z-aksen med konstant vinkelhastighet ω. I karet er det en inkompressibel væske med tetthet ρ. Anta stasjonære forhold. Tyngdens akselerasjon er g. Se bort fra atmosfæretrykket. Legg origo som vist på figuren. Avstanden mellom origo og karets bunn er en gitt størrelse, lik H.

a) Finn trykket $p(r,z)$ i væsken.

b) På karets bunn er festet en kloss med sylindrisk tverrsnitt (se figuren). Klossens grunnflate har radius a; klossens høyde er h. Klossen er festet konsentrisk med karet. Finn den vertikale kraft F som væsken utøver mot klossen.

c) Finn volumet V av væsken i karet, uttrykt ved H samt de andre gitte størrelser.

Oppgave 2



Hastighetspotensialet for en linjekilde av styrke λ anbragt i avstanden y_0 fra en plan vegg er gitt ved

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\ell n\sqrt{x^2+(y-y_0)^2} + \ell n\sqrt{x^2+(y+y_0)^2}\right],$$

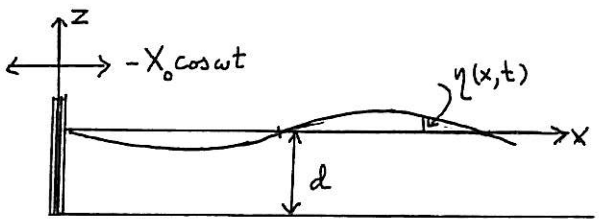
hvor x og y er kartesiske koordinater som vist på figuren. Fluidet er friksjonsfritt.

a) Finn hastighetskomponentene u og v i x- og y-retning, og vis at grensebetingelsen ved veggen er oppfylt.

b) Finn trykket $p_w = p_w(x)$ ved veggen når fluidets tetthet er ρ og trykket langt borte fra veggen er p_∞.

c) Bestem kildestyrken λ slik at minimumsverdien av $p_w(x)$ blir lik null, og angi den tilhørende verdi av x.

Oppgave 3



En monokromatisk bølge med liten amplitude (ka << 1) forplanter seg på grunt vann (kd << 1). Her er k bølgetallet, a amplituden, og d stillevannsdybden. Tyngdens akselerasjon er g, vannets tetthet er ρ. Se bort fra atmosfæretrykket. For gruntvannsbølger gjelder tilnærmet

$$u = u(x,t), \qquad w \approx 0,$$

hvor u er den horisontale og w den vertikale hastighetskomponent.

a) Skriv ned x- og z- komponentene av den lineariserte Eulerligningen, og vis herav at

$$p = \gamma(\eta - z), \qquad \partial u / \partial t = -g\, \partial \eta / \partial x ,$$

hvor $\gamma = \rho g$ og η er overflatens elevasjon.

b) Det oppgis at for gruntvannsbølger kan kontinuitetsligningen tilnærmet skrives slik:

$$\partial \eta / \partial t + d\, \partial u / \partial x = 0.$$

Bruk ligningene ovenfor til å utlede bølgeligningen for η, og bestem fasehastigheten c.

c) Det oppgis at horisontalhastigheten for gruntvannsbølger er

$$u = \frac{\omega a}{kd} \sin(\omega t - kx).$$

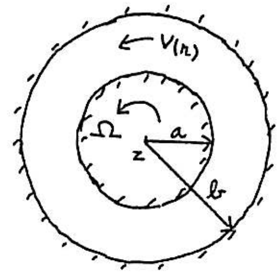
Finn herav hvordan den horisontale posisjon x til en fluidpartikkel varierer med t. (Kall middelposisjonen x_0.)

Anta at bølgene settes opp i en lang horisontal bølgerenne ved at den venstre endeveggen utfører harmoniske svingninger i x-retningen (se figuren) etter loven

$$X = -X_0 \cos \omega t .$$

Her er X_0 en gitt konstant. Finn den genererte bølgens amplitude a, uttrykt ved X_0, k og d.

Oppgave 4. (halv vekt)



Figuren viser geometrien i den såkalte Couette-strømningen: En viskøs væske befinner seg imellom to koaksiale sylinderflater med radier henholdsvis a og b. Indre sylinder (radius a) roterer med konstant vinkelhastighet Ω, mens ytre sylinder (radius b) er i ro. Anta uniforme forhold langs rotasjonsaksen (z-aksen), og anta at den asimutale strømningen er stasjonær. Benytt plane polarkoordinater r, θ, z. På grunn av symmetrien må vi ha

$$V_z = V_r = 0 , \quad V_\theta = V(r).$$

Det opplyses (dette skal ikke utledes) at Navier-Stokes' ligning gir følgende ligning for V:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} = 0.$$

Denne ligningen har løsninger av formen r^n, hvor n er et helt tall. Hvilke verdier kan n ha? Benytt dette, samt grensebetingelsene ved r = a og r = b, til å vise at

$$V = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(r - \frac{b^2}{r}\right).$$

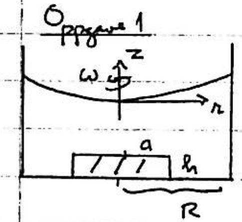
Hvor stort dreiemoment M utøver væsken på indre sylinder, per lengdeenhet i z-retning?

Oppgitt: Skjærspenning $\tau = \mu\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right)$.

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK

Kontinuasjonseksamen 11. august 2000

Oppgave 1



a) Eulerligning i roterende system

$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}$, med $\vec{g} = (0,0,-g)$,

gir $\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0$, altså

$p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z + C$, hvor $\gamma = \rho g$.

Da $p = 0$ for $r = z = 0$ blir $C = 0$, så

$\underline{p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z}$

b) På klossens overflate er $z = -H + h$, altså

$p = p(r) = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + \gamma(H-h)$.

Trykkraft på klossens overflate

$$F = \int_0^a p(r)\cdot 2\pi r\, dr = 2\pi\int_0^a \left[\frac{1}{2}\rho r^3\omega^2 + \gamma(H-h)r\right]dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{8}\rho a^4\omega^2 + \frac{1}{2}\gamma(H-h)a^2\right]$$

$$\underline{F = \pi\rho a^2\left[\frac{1}{4}a^2\omega^2 + g(H-h)\right]}$$

c) Ligningen for fri overflate $(p = 0)$ er $z = \frac{r^2\omega^2}{2g}$.

Volum av vannet dersom også klossens volum var fylt med vann:

$$\int_0^R 2\pi r\,dr\left(H + \frac{r^2\omega^2}{2g}\right) = 2\pi\int_0^R \left(Hr + \frac{\omega^2}{2g}r^3\right)dr$$

$$= \pi R^2\left(H + \frac{\omega^2R^2}{4g}\right).$$

Trekker ifra volumet $\pi a^2 h$ av klossen:

$$\underline{V = \pi R^2\left(H + \frac{\omega^2R^2}{4g}\right) - \pi a^2 h}$$

Løsning Oppgave 2

$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\ln\sqrt{x^2+(y-y_0)^2} + \ln\sqrt{x^2+(y+y_0)^2}\right]$ er hastighetspotensialet fra to linjekilder i uendelig stort rom, den ene kilden i $(0, y_0)$, den andre i $(0, -y_0)$.

a)

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\lambda}{2\cancel{4}\pi}\left[\frac{x}{x^2+(y-y_0)^2} + \frac{x}{x^2+(y+y_0)^2}\right]$$

$$\underline{v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\lambda}{2\cancel{4}\pi}\left[\frac{y-y_0}{x^2+(y-y_0)^2} + \frac{y+y_0}{x^2+(y+y_0)^2}\right]}$$

Grensebetingelse ved veggen er $v(x,0) = 0$

Direkte utregning:

$$\underline{v(x,0)} = \frac{\lambda}{2\cancel{4}\pi}\left[\frac{-y_0}{x^2+y_0^2} + \frac{y_0}{x^2+y_0^2}\right] = \underline{0}, \text{ som stemmer.}$$

b)

Langs veggen er $u = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{x}{x^2+y_0^2}$

Bernoulli: $\frac{1}{2}u^2(x,0) + \frac{p_w}{\rho} = 0 + \frac{p_\infty}{\rho}$

så: $\underline{p_w} = p_\infty - \frac{1}{2}\rho u^2(x,0) = \underline{p_\infty - \frac{\rho\lambda^2}{2\cancel{8}\pi^2}\frac{x^2}{(x^2+y_0^2)^2}}$

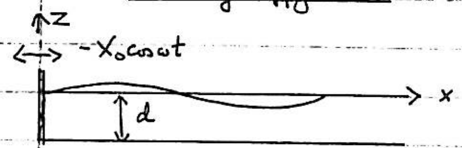
c) $p_w = p_{w\,min}$ når $|x| = y_0$. Skal ha $p_{w\,min} = 0$,

altså

$$0 = p_\infty - \frac{\rho\lambda^2}{2\cancel{8}\pi^2}\frac{1}{4y_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\lambda = 2\cancel{4}\pi y_0\sqrt{\frac{2p_\infty}{\rho}}}$$

Løsning Oppgave 3



a) Linearisert Eulerligning $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$

x-retning: $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ ①

Vilkårlig

z-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \Rightarrow p = -\gamma z + f(x,t)$ ②

f bestemmes ved at $p = 0$ i overflaten $z = \eta$:

$0 = -\gamma\eta + f \quad \therefore \quad f = \gamma\eta.$

Altså $\underline{p = \gamma(\eta - z)}$ ③

Deriverer ③:

$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma \frac{\partial \eta}{\partial x}$, som innsatt i ① gir

$$\underline{\frac{\partial u}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho}\cdot\gamma\frac{\partial \eta}{\partial x} = \underline{-g\frac{\partial \eta}{\partial x}} \quad ④$$

b) Deriverer kontinuitetsligningen $\frac{\partial \eta}{\partial t} + d\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ mhp t:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + d\frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{-g\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\text{fra ④}}\Big) = 0$$

Altså $\underline{\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gd\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0}$. Bølgeligningen.

Fasehastighet: På formen $\eta \propto \sin(\omega t - kx)$ fås ved innsetting i bølgeligningen

$-\omega^2 + gdk^2 = 0$

$\therefore \quad \underline{c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gd}}$

Løsning Oppgave 3, forts.

c) På $u = \frac{\omega a}{kd}\sin(\omega t - kx)$ fås tilnærmet, for små utslag,

$u = \frac{\omega a}{kd}\sin(\omega t - kx_0)$, hvor x_0 er middelposisjonen.

Integrerer over t:

$$\underline{x} = \int u\,dt = \underline{-\frac{a}{kd}\cos(\omega t - kx_0) + x_0},$$

ettersom integrasjonskonstanten må være lik middelverdien.

Setter $x_0 = 0$: $x = -\frac{a}{kd}\cos\omega t$

Sammenligner med utsvinget $X = -X_0\cos\omega t$ av venstre endevegg.

Altså $\frac{a}{kd} = X_0$,

eller $\underline{a = X_0 \cdot kd}$

Fluidmekanikk 11. august 2000

Løsning Oppgave 4

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} = 0$$ har løsninger på formen

$V = c r^n$, hvor c er en konstant og n et helt tall.

Da $dV/dr = c n r^{n-1}$, $d^2V/dr^2 = c n(n-1) r^{n-2}$, får

$c n(n-1) r^{n-2} + c n r^{n-2} - c r^{n-2} = 0$, eller $n(n-1) + n - 1 = 0$

Altså $n^2 = 1$, som gir $\underline{n = \pm 1}$

Løsning på formen $V = \alpha r + \beta r^{-1}$, hvor α, β er konstanter.

Heftbetingelse ved $r = a$: $a\Omega = \alpha \cdot a + \beta \cdot a^{-1}$

— " — $r = b$: $0 = \alpha \cdot b + \beta \cdot b^{-1} \Rightarrow \beta = -\alpha b^2$

Altså $a\Omega = \alpha \cdot a - \alpha b^2/a$, slik at

$$\alpha = \frac{a^2\Omega}{a^2 - b^2}, \qquad \beta = \frac{a^2 b^2 \Omega}{b^2 - a} \quad ⸪$$

$$\underline{V = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(r - \frac{b^2}{r}\right)}$$

Dreiemoment M = kraft × arm = $(\tau(a) \cdot 2\pi a) \cdot a$, hvor $\tau(a)$ er skjærspenningen ved $r = a$.

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \rightarrow -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \text{ når } r = a.$$

$$\frac{V}{r} = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \rightarrow \Omega \text{ når } r = a.$$

Dermed $\tau(a) = \mu\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right)_{r=a} = \mu\Omega\frac{-2b^2}{b^2 - a^2}$

$$\Rightarrow \quad \underline{M = -4\pi\mu\Omega\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}}$$