TMA4120 Matematikk 4K
Høst 2015

Løsningsforslag — Øving 6

Chapter 12.4

$\boxed{12.4{:}19}$ Vis at løsningen til problemet

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad x \in [0, L],\ t \geq 0, \tag{0.1}$$
$$u(x, 0) = f(x), \tag{0.2}$$
$$u_t(x, 0) = 0, \tag{0.3}$$
$$u(0, t) = 0, \qquad u_x(L, t) = 0 \tag{0.4}$$

er

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin p_n x \cos p_n ct$$

der

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin p_n x \, dx, \qquad p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}.$$

Løsning:
Vi antar at vi kan skrive $u(x, t) = F(x)G(t)$ – der F og G ikke er identisk lik 0 – og finner som vanlig ODE'ene

$$\frac{F''}{F} = -\mu^2 = \frac{G''}{c^2 G}. \tag{0.5}$$

Den generlelle formen til F er

$$F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x.$$

Grensebetingelsene (0.4) gir

$$\begin{aligned}
0 &= u(0, t) \\
&= F(0)G(t) \\
&\Rightarrow \\
0 &= F(0) = A. \qquad \text{Og} \\
0 &= u_x(L, t) \\
&= F'(L)G(t) \\
&\Rightarrow \\
0 &= F'(L) \\
&= \Big|_{x=L} - \mu A \sin\mu x + \mu B\cos\mu x \\
&= \mu B \cos\mu L \\
&\Rightarrow \\
\mu L &= \pi/2 + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Altså, alle F på formen

$$F_n(x) = B \sin p_n x, \qquad p_n := \mu = \frac{\pi/2 + n\pi}{L} = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

vil løse ODE'en for F i (0.5) og tilfredsstille grensebetingelsene gitt av (0.4).

Den generelle formen til G er nå

$$G(t) = C \cos cp_n t + D \sin cp_n t$$

og initsialbetingelsen (0.3) gir

$$\begin{aligned}
0 &= u_t(x, 0) \\
&= F(x)G'(0) \\
&\Rightarrow \\
0 &= G'(0) \\
&= \Big|_{t=0} - cp_n C \sin cp_n t + cp_n D \cos cp_n t \\
&= cp_n D.
\end{aligned}$$

Dvs. $D = 0$.

Vi har nå at alle u på formen

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin p_n x \cdot C_n \cos cp_n t =: A_n \sin p_n x \cdot \cos cp_n t$$

– der A_n er vilkårlige konstanter – vil tilfredsstille (0.1), (0.3) og (0.4). En uniformt konvergerende rekke vil tilfredsstille det samme fordi

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)_{xx} - c^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)_{tt} &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_n)_{xx} - c^2 \sum_{n=0}^{\infty} (u_n)_{tt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left((u_n)_{xx} - c^2 (u_n)_{tt}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0,
\end{aligned}$$

og fordi

$$\Big|_{t=0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,0) = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(0,t) = 0$$

og

$$\Big|_{x=L} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u_n(L,t) = 0.$$

Det gjenstår derfor å finne A_n'ene slik at initsialbetingelsen (0.2) holder:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x. \tag{0.6}$$

Vi ser av dette at f's utvidelse til $\mathbb{R}$ er odde og har periode $4L$ (!): Dette er fordi fundamentalperioden, p, til f er lik fundamentalperioden til det første leddet $n = 0$, så

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{2L}x &= \sin\frac{\pi}{2L}(x+p) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2L}x + \frac{\pi}{2L}p\right), \\
&\iff \\
\frac{\pi}{2L}p &= 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\
&\iff \\
p &= 4Lk
\end{aligned}$$

og det minste positive tallet på denne formen er $4L$.

Definér koeffisientene $b_{2n+1} := A_n$, $b_{2n} := 0$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi ser da at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{2L}x$$

er Fourer-sinus-rekken til f. De odde koeffisientene er dermed

$$\begin{aligned}
A_n = b_{2n+1} &= \frac{2}{2L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Dette er bare nesten det vi vil vise. Vi er i mål hvis integranden er symmetrisk om $x = L$. Vi viser først at funksjonene

$$x \mapsto \sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}(x+L)$$

er jevne:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}(\pm x + L) &= \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}(\pm x) + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}(\pm x)\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \\
&\quad + \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}(\pm x)\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \\
&= 0 + \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}(\pm x)\right)\cdot(-1)^n
\end{aligned}$$

som er uavhengig av fortegnet til x. Ok.

Fra rekkerepresentasjonen til f ser vi at dette medfører at også $f(x+L)$ er jevn. Dermed er den følgende integranden symmetrisk om L, og

$$\begin{aligned}
A_n = b_{2n+1} &= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{SUB: } x = y + L \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y+L)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}(y+L)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{L}\int_{-L}^{0} f(y+L)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}(y+L)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{SUB: } x = y + L \\
&= \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

som er det vi skulle vise.

Chapter 12.6

$\boxed{\text{12.6:11}}$ Vis at løsningen til problemet

$$u_t = c^2 u_{xx}, \tag{0.7}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(L,t) = 0, \tag{0.8}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{0.9}$$

er

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

der

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x.$$

Løsning:
Dette er eksempel 4 s. 563 i boken.

$\boxed{\text{12.6:12}}$ Finn løsningen i oppgave 11 når $L = \pi$, $c = 1$ og $f(x) = x$.

Løsning:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\Big|_0^\pi x\frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\Big|_0^\pi \cos nx\right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ odde,} \\ 0, & n \text{ jevn.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dette gir løsningen

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)e^{-n^2 t}.
\end{aligned}
$$

12.6:13 Finn løsningen i oppgave 11 når $L = \pi$, $c = 1$ og $f(x) = 1$.

Løsning:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x = 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\Big|_0^\pi \frac{\sin nx}{n} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Dette gir løsningen

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{12.6:14}}$ Finn løsningen i oppgave 11 når $L = \pi$, $c = 1$ og $f(x) = \cos 2x$.

Løsning:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\Big|_0^\pi \frac{\sin 2x}{2} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos 2x\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \cos 2x\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

for $n \neq 2$ (se side 479 i boken).

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}x + \Big|_0^\pi \frac{\sin 4x}{4}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dette gir løsningen

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_0 + \sum_{n=1}^\infty A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \\ &= e^{-4t}\cos 2x. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.6:16}}$ Løs problemet

$$u_t = c^2 u_{xx} + H, \qquad H > 0 \text{ konst.}$$

på $x \in [0, \pi]$.

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Hint: Definér funksjonen $v := u + \frac{H}{2c^2}x(x-\pi)$.

Løsning:
Vi finner at $v_t = u_t$ og at $v_{xx} = u_{xx} + \frac{H}{c^2}$. Dermed løser v varmeligningen fordi

$$v_t = u_t = c^2 u_{xx} + H = c^2 v_{xx}.$$

Vi ser at grensebetingelsene er de samme:

$$v(0,t) = u(0,t) + 0 = 0.$$

På samme måte er $v(\pi, t) = 0$.

Hvis initsialbetingelsen er $u(x,0) = f(x)$, får vi

$$v(x,0) = f(x) + \frac{H}{2c^2} x(x-\pi) =: \tilde{f}(x).$$

Løsnignen for v er da som gitt i (9) på side 560 i boken:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) e^{-(cn)^2 t} \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x) + \frac{H}{2c^2} x(x-\pi) \right) \sin nx \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Løsningen for u er nå

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) - \frac{H}{2c^2} x(x-\pi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) e^{-(cn)^2 t} - \frac{H}{2c^2} x(x-\pi). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.6:21}}$ Løs problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (x,y) \in \Omega$$

der Ω er kvadratet

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < a\} \subseteq \mathbb{R}^2, \qquad a = 24.$$

Grensebetingelsene er

$$u(x,a) = 25,\ u(x,0) = u(a,y) = u(0,y) = 0.$$

Løsning:
Merk at vi ikke har kontinuitet i de øvre hjørnene: Er u lik 0 eller lik 25 i $(0,a)$ og (a,a)?

Vi antar at vi kan skrive $u(x, y) = F(x)G(y)$ og at u er C^2 og ikke lik 0 i *det indre* av kvadratet. Dette gir $F''G = -FG''$. Å dele på $FG \neq 0$ gir

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} =: k, \qquad \text{konstant.}$$

Vi forsøker først å finne en C^2 løsning u på området Ω som i tillegg er kontinuerlig ut til den venstre, høyre og nedre siden. Hvis $k = 0$ er $F(x) = Ax + B$ som gir $u \equiv 0$ fordi $0 = u(0, y) = bG(y)$ og $0 = u(a, y) = AaG(y)$.

Hvis $k = \mu^2 > 0$ er $F(x) = A \sinh \mu y + B \cosh \mu y$ som gir $u \equiv 0$ fordi $0 = u(0, y) = BG(y)$ og $0 = u(a, y) = A \sinh \mu a \cdot G(y)$.

Altså må $k = -\mu^2 < 0$ og vi får $F(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x$. Den venstre grensebetingelsen gir $B = 0$ og den høyre gir

$$0 = u(a, y) = A \sin \mu a \cdot G(y)$$

og vi må ha $\mu a = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Dvs

$$\mu = \mu_n = \frac{n\pi}{a}.$$

ODE'en for $G(y)$ er nå $G'' = \mu^2 G$ med generell løsning $G(y) = A \sinh \mu y + B \cosh \mu y$. (Dette er på samme form som $A^* e^{\mu y} + B^* e^{-\mu y}$). Den nedre grensebetingelsen gir $B = 0$ og dermed vil alle funksjoner på formen

$$u_n(x, y) := F_n(x)G_n(y) = A_n \sin \mu_n x \cdot \sinh \mu_n y = A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

være løsninger av problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \; u(x, 0) = u(a, y) = u(0, y) = 0. \tag{0.10}$$

Ettersom ligningen er lineær og grensebetingelsene er 0, vil også en sum av slike funksjoner tilfredsstille (0.10). Vi forsøker derfor og finne koeffisienter A_n slik at

$$u(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

tilfredsstiller den siste grensebetingelsen $u(x, a) = 25$. Dvs.

$$25 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh n\pi$$

Vi ser at $A_n^* := A_n \sinh n\pi$ er sinus-Fourier-koeffisientene til den konstante funksjonen $f(x) = 25$. Da er

$$\begin{aligned}
A_n^* &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{a} \int_0^a 25 \sin \frac{n\pi x}{a} \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{50}{n\pi} \bigg|_0^a \cos \frac{n\pi x}{a} \\
&= -\frac{50}{n\pi} ((-1)^n - 1) \\
&= \begin{cases} \frac{100}{n\pi}, & n \text{ odd}, \\ 0, & n \text{ jevn}, \end{cases}
\end{aligned}$$

og løsningen er gitt ved

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^*}{\sinh\frac{25n\pi}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n-1}^*}{\sinh(2n-1)\pi} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{a}\sinh\frac{(2n-1)\pi y}{a} \\
&= \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sinh(2n-1)\pi} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{a}\sinh\frac{(2n-1)\pi y}{a}
\end{aligned}
$$

der $a = 24$.

$\boxed{\text{12.6:22}}$ Løs problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (x,y) \in \Omega$$

der Ω er kvadratet

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < a\} \subseteq \mathbb{R}^2, \qquad a = 24.$$

Grensebetingelsene er

$$u_y(x,a) = 0,\ u_y(x,0) = 0,\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = f(y).$$

Løsning:
På samme måte som i forrige oppgave, forsøker vi først å finne funksjoner $u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y)$ som løser problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ u_y(x,a) = 0,\ u_y(x,0) = 0,\ u(0,y) = 0. \tag{0.11}$$

ODE'en for G i

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} =: k, \qquad \text{konstant.}$$

vil gi ikke-trivielle løsninger hvis og bare hvis $k = \mu^2 > 0$. Dvs.

$$G(y) = A\sin\mu y + B\cos\mu y.$$

Den nedre og øvre grensebetingelsen vil gi løsninger for G på formen

$$G_n(y) = B_n\cos\mu_n y, \qquad \mu_n = \frac{n\pi}{a}.$$

ODE'en for F og den venstre grensebetingelsen vil gi løsninger på formen

$$F_n(x) = A_n\sinh\mu_n x$$

og dermed er funksjonene

$$u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = A_n\sinh\mu_n x\cos\mu_n y, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

og alle lineærkombinasjoner av disse, løsninger av (0.11).

Sett $u = \sum u_n$ og den siste grensebetingelsen gir

$$f(y) = u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh n\pi \cos \mu_n y.$$

Dermed er $A_n^* := A_n \sinh n\pi$ cosinus-Fourier-koeffisientene til f. Dvs.

$$A_n^* = \frac{2}{a} \int_0^a f(y) \cos \frac{n\pi y}{a} \, \mathrm{d}y.$$

Løsningen er altså

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{a} y$$

der

$$A_n = \frac{A_n^*}{\sinh n\pi} = \frac{2}{a \sinh n\pi} \int_0^a f(y) \cos \frac{n\pi y}{a} \, \mathrm{d}y.$$