NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F1
(Linje Fysikk og matematikk)
5. august 2002
Tid: 0900 – 1400
Vekttall: 2,5

Sensuren faller i uke 34.

Hjelpemidler: C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1.

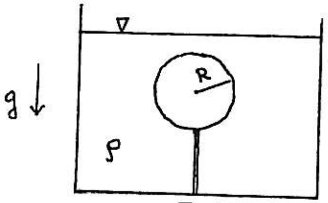


Fig.1

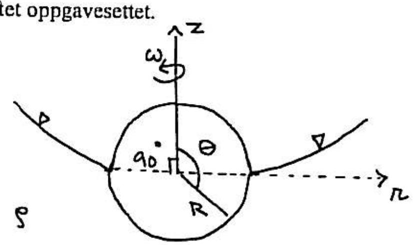


Fig.2

En kompakt kule med masse m og radius R er festet til en stang og holdt på plass i et kar fylt med væske med konstant tetthet ρ (Fig.1). Tyngdens akselerasjon er g.

a) Kula er helt neddykket i væsken. Finn stangkraften når du ser bort fra stangas masse og diameter.

b) Karet med innhold dreies så om sin symmetriakse (z-aksen) med konstant vinkelhastighet ω. Anta at når likevekt i væsken er inntrådt, er øvre halvpart av kuleoverflaten fri mot atmosfæren. Se bort fra atmosfæretrykket. Legg origo i kulas sentrum, som vist på Fig. 2, og vis at trykket i væsken blir

$$p = -\gamma z - \frac{1}{2}\rho\left(R^2 - r^2\right)\omega^2, \quad \gamma = \rho g .$$

c) Finn hvor stor stangkraften blir nå. [Hint: Innfør polarvinkelen θ vist i Fig. 2, sett $z = R\cos\theta$, $r = R\sin\theta$, og integrér trykkraftens vertikalkomponent over nedre halvpart av kuleoverflaten.] Vil det ha noe å si for stangkraften om vi tar hensyn til atmosfæretrykket?

Oppgave 2.

a) Vis at for en todimensjonal stasjonær potensialstrømning vil differansen i strømfunksjonen ψ mellom to strømlinjer være lik volumstrømningen Q mellom strømlinjene.

Hva er den fysiske interpretasjon av ligningen $\nabla^2\psi = 0$ for potensialstrømning?

b) Ved en todimensjonal, stasjonær og inkompressibel strømning er

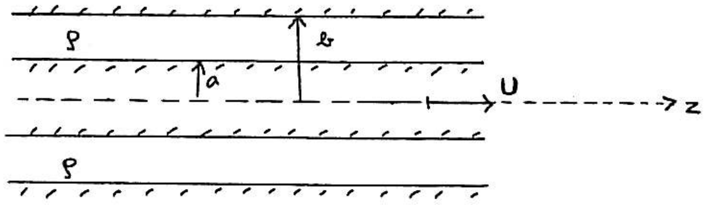
$$u(x,y) = a\left(x^2 - y^2\right) ,$$

hvor a er en gitt positiv konstant.

Finn den andre hastighetskomponenten v(x,y), når det er oppgitt at v(x,0) = 0.

c) Finn differensialligningen for strømlinjene, og skissér på grunnlag av denne det omtrentlige forløp til den strømlinjen som går gjennom punktet (2,2).

Oppgave 3.



Det ringformede område $a \le r \le b$ mellom en kompakt indre sylinder $r = a$ og en ytre sylinderflate $r = b$ er fylt av en inkompressibel væske med tetthet ρ og dynamisk viskositet $\mu = \rho\nu$; se figuren. Den indre sylinderen trekkes med konstant fart U langs symmetriaksen (z-aksen), mens ytre sylinderflate er i ro. Sylinderne antas uendelig lange. Se bort fra tyngdekraften.

På grunn av symmetrien kan væskens hastighetsvektor skrives på formen $\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z)$, hvor $V_z = V_z(r)$. Komponentene av Navier-Stokes ligning gir da i r-retning

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

og i z-retning

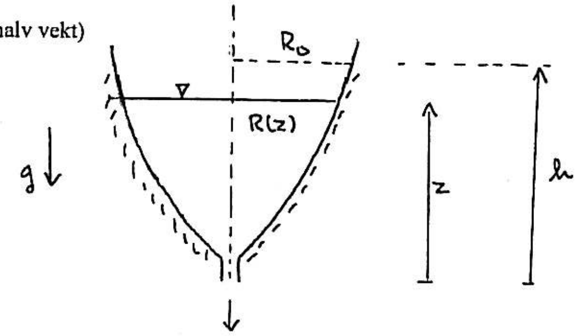
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{d^2 V_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_z}{dr}\right).$$

a) Symmetrien gjør at en kan sette også $\partial p / \partial z = 0$. Utled på grunnlag av dette formelen

$$V_z(r) = U \frac{\ell n\, b/r}{\ell n\, b/a}.$$

b) Finn friksjonskraften på indre sylinder per lengdeenhet i z-retningen.

Oppgave 4 (halv vekt)



Figuren viser en gammeldags vannklokke. Tiden måles ved fall av vannstanden i et stort glasskar. Vannet renner langsomt ut gjennom et lite hull i bunnen av karet. Finn et tilnærmet uttrykk for radius R(z) av karet (sylindersymmetri antas) når vannspeilet skal falle med 5 cm pr time, og når diameteren av utløpsåpningen er 2 mm. Sett $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Initialradius ved $t = 0$ er R_0.

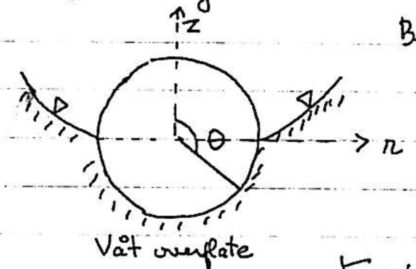
Hvilken høyde h må klokka ha dersom den skal kunne gå i 24 timer uten etterfylling? Og hvilken verdi av R_0 tilsvarer dette?

SIO1009 FLUIDMEKANIKK. Kontinuasjonseksamen 5. aug. 2002.

Løsning Oppgave 1

a) Kar i ro. Stangkraft = oppdrift − tyngde = $\gamma\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 - mg$

b) Rotasjon.



Bevegelsesligning i det roterende system:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2\vec{e}_r + \vec{g}.$$

Antar inkompressibel væske:

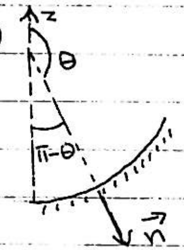
$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0 \quad , \Rightarrow$$

$$p = -\gamma z + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + C.$$

Konstanten C bestemmes ved at $p = 0$ i punktet $r = R$, $z = 0$: $0 = \frac{1}{2}\rho R^2\omega^2 + C$, $C = -\frac{1}{2}\rho R^2\omega^2$

$\therefore$ $p = -\gamma z - \frac{1}{2}\rho(R^2 - r^2)\omega^2$

c)



Våt overflate for $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Trykkraft på flateelement dA er $d\vec{F} = -p\vec{n}\,dA$, hvor $\vec{n}$ er normalen rettet ut fra kuleflaten.

I z-retning: $dF_z = -p n_z\,dA = -p\cos\theta\cdot dA$

(Stemmer med at $dF_z > 0$, ettersom $\cos\theta < 0$).

Trykkraft i z-retning:

$$F_z = \int dF_z = -\int_{\substack{\text{Våt}\\\text{overflate}}} p\cos\theta\cdot dA.$$

Pga. symmetri er $dA = 2\pi R^2\sin\theta\,d\theta$

$$F_z = -2\pi R^2\int_{\pi/2}^{\pi} p\cos\theta\sin\theta\,d\theta = 2\pi R^2\int_{\pi/2}^{\pi}\left[\gamma z + \frac{1}{2}\rho(R^2 - r^2)\omega^2\right]\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta.$$

Da $z = R\cos\theta$, $r = R\sin\theta$, får

Oppg. 1c, forts.

$$F_z = 2\pi R^2\int_{\pi/2}^{\pi}\left[\gamma R\cos\theta + \frac{1}{2}\rho(\underbrace{R^2 - R^2\sin^2\theta}_{R^2\cos^2\theta})\omega^2\right]\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi R^3\left[\gamma\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + \frac{1}{2}\rho R\omega^2\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\right].$$

Regner ut integralene:

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \overset{u=\cos\theta}{=} -\int_0^{-1}u^2\,du = -\frac{1}{3}\Big|_0^{-1}u^3 = \frac{1}{3},$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta \overset{u=\cos\theta}{=} -\int_0^{-1}u^3\,du = -\frac{1}{4}\Big|_0^{-1}u^4 = -\frac{1}{4}.$$

Det gir $F_z = \underbrace{\gamma\cdot\frac{2\pi}{3}R^3}_{\substack{\text{Statisk}\\\text{bidrag}}} - \frac{1}{4}\pi\rho\omega^2R^4$. Virker oppover.

Kraft nedover: $F_{stang} + mg$.

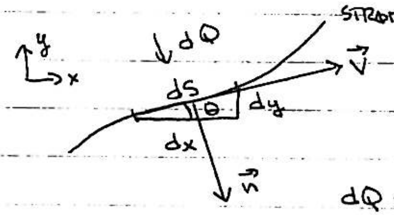
Kraftbalanse: $F_{stang} + mg = \gamma\cdot\frac{2\pi}{3}R^3 - \frac{1}{4}\pi\rho\omega^2R^4$

$$F_{stang} = \gamma\cdot\frac{2\pi}{3}R^3 - mg - \frac{1}{4}\pi\rho\omega^2R^4$$

Atmosfæretrykket bidrar med motsatt rettede krefter på kulas overside og underside, og har ingen effekt.

Løsning Oppgave 2

a) (Følger White (1999), side 240.)



$\vec V = u\vec i + v\vec j$

Normalvektor $\vec n = \sin\theta\,\vec i - \cos\theta\,\vec j$

Volumstrømning gjennom element ds:

$$dQ = (\vec V\cdot\vec n)\,ds$$

$$= (u\vec i + v\vec j)\cdot(\sin\theta\,\vec i - \cos\theta\,\vec j)\,ds = (u\sin\theta - v\cos\theta)\,ds$$

Da $\sin\theta = dy/ds$ og $\cos\theta = dx/ds$ blir

$$dQ = u\,\frac{dy}{ds}\,ds - v\,\frac{dx}{ds}\,ds = u\,dy - v\,dx = \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = d\psi$$

Ved integrasjon:

$$\underline{Q} = \int_1^2 dQ = \int_1^2 d\psi = \underline{\psi_2 - \psi_1}$$

Da $\nabla^2\psi = -\zeta_z$ hvor $\vec\zeta \equiv \nabla\times\vec V$ er virvlingen (forutsatt plane polarkoordinater eller kartesiske koordinater), vil $\nabla^2\psi = 0$ uttrykke virvlingsfrihet.

b) $u = a(x^2 - y^2)$. Inkompressibilitet $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ gir

$$v = -\int\frac{\partial u}{\partial x}\,dy + F(x) = -2ax\int dy + F(x) = -2axy + F(x),$$

hvor $F(x)$ er vilkårlig. Av $v(x,0) = 0$ følger $F(x) = 0$.

Altså $\underline{v(x,y) = -2axy}$

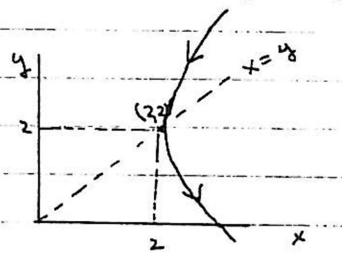
c) Strømlinjer $dy/dx = v/u$ gir ved innsetting

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

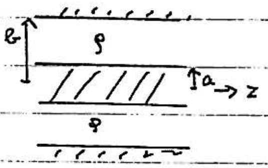
Når $y = x$ er strømlinjen vertikal.

$y > x$ gir $\frac{dy}{dx} > 0$, $y < x$ gir $\frac{dy}{dx} < 0$.

Pilretningen finnes f.eks. ved å se at $v = -2axy < 0$ i 1. kvadrant.



Løsning Oppgave 3



Av $\partial p/\partial r = 0$ (Navier-Stokes) og $\partial p/\partial z = 0$ (symmetri) følger p = konstant, uavhengig av r og z.

Navier-Stokes i z-retning gir, med $V_z' \equiv \frac{dV_z}{dr}$,

$$V_z'' + \frac{1}{r}V_z' = 0.$$

Da $(rV_z')' = V_z' + rV_z'' = r\left(V_z'' + \frac{1}{r}V_z'\right)$, får $(rV_z')' = 0$

Altså $rV_z' = C_1$, $V_z' = C_1/r$. Integrasjon gir

$$V_z = C_1\ln r + C_2.$$

Grensebetingelsene gir $V_z(a) = U$, $V_z(b) = 0$, dvs.

$$\left.\begin{aligned} U &= C_1\ln a + C_2 \\ 0 &= C_1\ln b + C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = \frac{-U}{\ln\frac{b}{a}}, \quad C_2 = \frac{U\ln b}{\ln\frac{b}{a}}$$

Altså

$$\underline{V_z} = \frac{-U\ln r}{\ln b/a} + \frac{U\ln b}{\ln b/a} = \underline{\frac{U\ln b/r}{\ln b/a}}$$

b) Ved $r = a$ er $V_z' = \frac{C_1}{a} = \frac{-U}{a\ln b/a}$, $\tau = \mu V_z' = \frac{-\mu U}{a\ln b/a}$

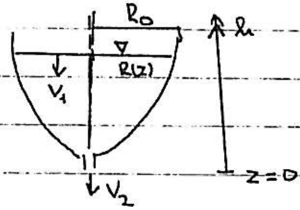
Friksjonskraft per lengdeenhet dermed

$$\underline{F_f} = \tau\cdot 2\pi a = \underline{-\frac{2\pi\mu U}{\ln b/a}}$$

F_f er negativ, fordi friksjonskraften virker imot bevegelsen.

5. august 2002

Løsning Oppgave 4



Bernoulli mellom vaskespeilet og utløpet:

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz = \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 . \quad ①$$

Her er utløpshastigheten V_2 ukjent.

Benytter kontinuitetsligningen:

$\pi R^2(z) \cdot V_1 = \pi R_0^2 \cdot V_2$, hvor R_0 er radius i utløpet. Altså $V_2 = \frac{R^2(z)}{R_0^2} \cdot V_1$. ②

Innsetting av ② i ① gir $\underline{R(z) = R_0\left(1 + \frac{2gz}{V_1^2}\right)^{1/4}}$

Tallverdier $V_1 = 5$ cm/hr, $2R_0 = 2$ mm gir

$$R(z) = \left[1 + \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot z}{\left(\frac{0{,}05}{3600}\right)^2}\right]^{1/4} \text{mm} = \left(1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dominerer}}}{1{,}02 \cdot 10^{11} z}\right)^{1/4} \text{mm}$$

$$\underline{R(z)} \simeq (1{,}02 \cdot 10^{11} z)^{1/4} \cdot 10^{-3}\ \text{m} = \underline{0{,}565\, z^{1/4}\ \text{m}}$$

Hvis klokka skal gå i 24 timer må høyden h minst være

$\underline{h} = V_1 \cdot T = 5 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \cdot 24\ \text{hr} = \underline{120\ \text{cm}} = \underline{1{,}20\text{m}}$

Det gir initialradius $\underline{R_0} = 0{,}565 \cdot 1{,}20^{1/4} = \underline{0{,}59\ \text{m}}$