NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- og PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555
Antall sider: 4, pluss 4 sider formelliste

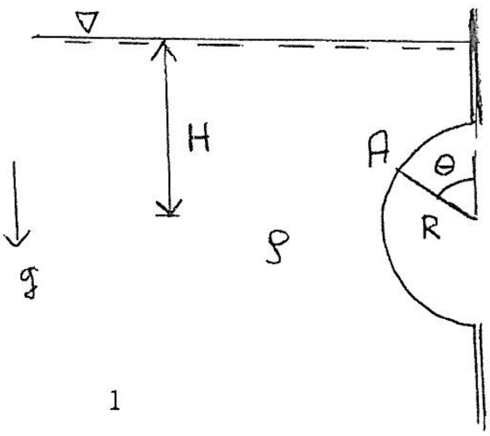
KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

8. august 2012
Tid: 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller innen 29.08.

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

a)



Et glassvindu i en vertikal vegg er formet som en halvsylinder vendt innover (se figuren). Vinduets radius er R, og bredden inn i planet er b. Vinduet er plassert slik at sylinderens akse er horisontal og beliggende i avstand H under vannoverflaten. Vannets tetthet er ρ, og tyngdens akselerasjon er g. Se bort fra atmosfæretrykket.

a) Finn størrelsen F_H av den horisontale kraft $\mathbf{F}_H$ på vinduet.

b) Betrakt et vilkårlig punkt A på overflaten, tilsvarende vinkelen θ på figuren. Skriv opp uttrykket for trykket p_A i A, som funksjon av $\gamma = \rho g$, H, R og θ. Finn herav, ved å integrere over θ, størrelsen F_V av den vertikale kraft $\mathbf{F}_V$ på vinduet. Er vektoren $\mathbf{F}_V$ rettet oppover eller nedover?
Kunne du ha innsett svaret for F_V direkte, uten å integrere?

c) Finn dybden h_{CP} av trykksenteret for $\mathbf{F}_H$.

Oppgitt:

For et rektangel med bredde b og lengde L er arealets treghetsmoment omkring horisontal x−akse (inn i planet) gjennom centroiden lik

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}.$$

Oppgave 2

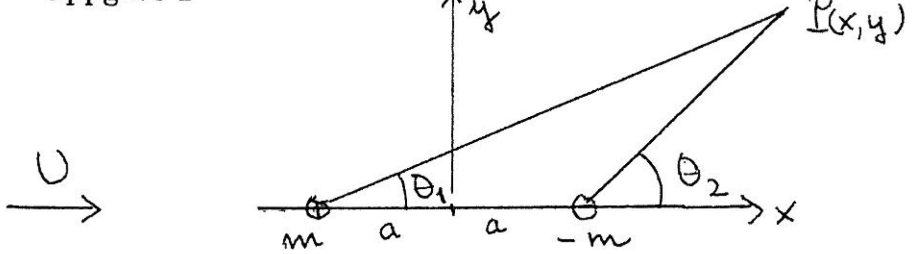


FIG. 1

Gitt en todimensjonal potensialstrømning sammensatt av tre komponenter:
en uniform strøm U i x-retning;
en linjekilde av styrke m i punktet $(-a, 0)$;
et linjesluk av styrke $-m$ i punktet $(a, 0)$.
Betrakt i det følgende én lengdeenhet inn i planet, og se bort fra tyngden.

a) Strømfunksjonen ψ i et vilkårlig punkt P kan skrives slik (se figur 1):

$$\psi = Uy + m\theta_1 - m\theta_2 + C,$$

hvor C er en konstant. Bestem C slik at $\psi = 0$ på x- aksen mellom singularitetene $(-a < x < +a)$.

Strømningen vil være adskilt i to områder, et ytre og et indre, som illustrert på figur 2. Den inntegnede ovalen som skiller de to områdene fra hverandre, kalles Rankines oval. Ovalens halvakser betegnes med L og h. Ovalen tenkes erstattet med en fast flate, med konstant strømfunksjon $\psi = \psi_A$.

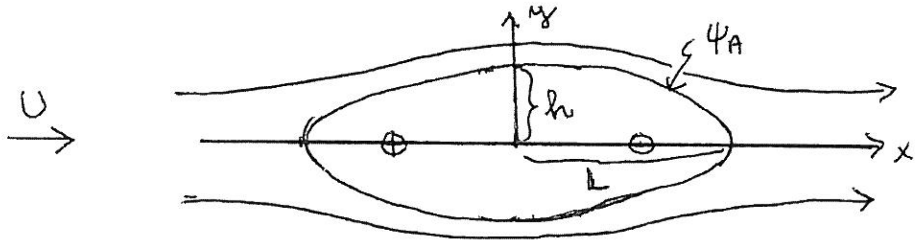


FIG. 2

Forklar med ord hvilken betingelse hastigheten må oppfylle på ovalen. Finn ψ_A, uttrykt ved m. (Hint: Gjør bruk av at $2\pi m$ er den totale volumfluks ut fra linjekilden.)

b) Benytt

$$\theta_1 = \arctan \frac{y}{x+a}, \quad \theta_2 = \arctan \frac{y}{x-a}$$

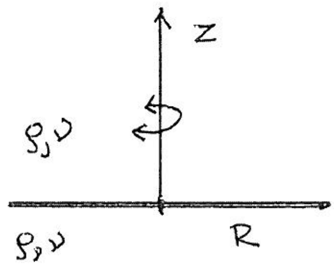
til å skrive ψ som en funksjon av x og y, og finn herav horisontal hastighetskomponent $u(x, y)$ i et vilkårlig punkt på utsiden av ovalen.

c) Benytt uttrykket for $\psi(x, y)$ i punktet $x = 0, y = h$ til å finne en ligning som bestemmer halvaksen h som funksjon av U, a og m. Ligningen er transcendent, og skal ikke løses.

Oppgitt:

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Oppgave 3



En plan horisontal skive med stor radius R er helt neddykket i en inkompressibel væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν. Skiven oscillerer omkring z-aksen med vinkelutslag

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t,$$

hvor amplituden θ_0 og vinkelfrekvensen ω er gitte konstanter. Se bort fra tyngden.

innsvingte

a) Ved stasjonære forhold er det bare asimutalkomponenten V_θ av væskehastigheten som blir forskjellig fra null. En kan sette $V_\theta(r, z, t) = r\Omega(z, t)$, hvor $\Omega(z, t)$ er væskens vinkelhastighet som funksjon av z og t. Det oppgis at Navier-Stokes' ligning reduserer seg i dette tilfelle til

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}, \tag{1}$$

og at løsningen kan skrives på formen

$$\Omega = \Omega_0 e^{-\beta z} \sin(\omega t - \beta z), \tag{2}$$

hvor $z = 0$ er skivens plan (her forutsatt $z \geq 0$).
Benytt heftbetingelsen ved $z = 0$, samt (1) og (2), til å finne konstantene Ω_0 og β uttrykt ved de kjente størrelsene θ_0, ω og ν.

b) Skjærspenningen i væsken er

$$\tau = \mu \frac{\partial V_\theta}{\partial z},$$

hvor $\mu = \rho\nu$. Benytt dette til å finne hvordan skjærspenningen på skiven, τ_w, varierer som funksjon av r og t. For en fiksert verdi av r, skissér hvordan τ_w varierer med tiden for én periode, $0 \leq \omega t < 2\pi$.

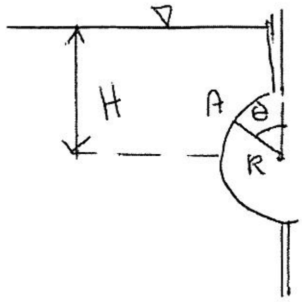
c) Du finner i pkt. b) at τ_w har formen

$$\tau_w = Cr \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}),$$

hvor C er en konstant. Finn kraftmomentet M fra friksjonskreftene på skiven. Oppgitt: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$.

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. KONTINUASJONSEKS. 8. AUGUST 2012

Løsning Oppgave 1



a) $F_H = \gamma h_{CG} A_x$, hvor $A_x = 2Rb$ er det horisontalt projiserte areal. Da $h_{CG} = H$, er

$$\underline{F_H = 2\gamma HRb}$$

b) $\underline{p_A = \gamma(H - R\cos\theta)}$ fra figuren.

På flateelementet $dA = b \cdot Rd\theta$ virker det en trykkraft $-p_A \cos\theta \cdot dA$ nedover. Altså blir

$$\underline{F_V} = -b\int_0^{\pi} p_A \cos\theta \cdot Rd\theta = -b\gamma R\int_0^{\pi}(H - R\cos\theta)\cos\theta\, d\theta$$

$$= -b\gamma RH\underbrace{\Big|_0^{\pi}\sin\theta}_{0} + b\gamma R^2\underbrace{\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta}_{\frac{1}{2}\cdot\pi} = \underline{\tfrac{1}{2}\pi b\gamma R^2}$$

$\underline{\vec{F}_V \text{ er rettet oppover}}$, fordi trykket er størst på nedre halvpart.

Direkte betraktning: F_V må kompensere for det manglende vann i halvsirkelen. Tyngden av vannet er $\gamma \cdot \mathcal{V}$, hvor $\mathcal{V} = \frac{1}{2}\pi R^2 b$ er volumet. Altså $\underline{F_V = \frac{1}{2}\pi b\gamma R^2}$, som før.

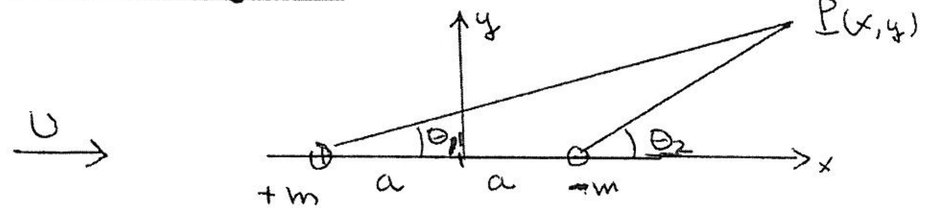
c) Fra formelarket $h_{CP} = h_{CG} + \dfrac{I_{xx}}{h_{CG} \cdot A_x}$

Da $h_{CG} = H$, $I_{xx} = \frac{1}{12} b \cdot (2R)^3$, $A_x = 2Rb$ følger

$$\underline{h_{CP} = H + \frac{1}{3}\frac{R^2}{H}}$$

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. KONTINUASJONSEKS. 8. AUGUST 2012

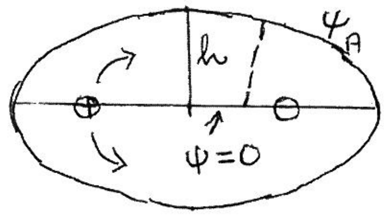
Løsning Oppgave 2



a) $$\psi = Uy + m\theta_1 - m\theta_2 + C$$

I området $-a < x < a$ er $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $y = 0$ $\Rightarrow$

$$0 = -m\cdot\pi + C, \qquad \underline{C = m\cdot\pi}$$



Overflatebetingelse: Hastighetskomponenten u_n vinkelrett på overflaten er null.
$\Rightarrow$ ψ = konstant på ovalen.

Total volumfluks $Q = 2\pi m$ ut fra kilden i $(-a,0)$ betyr at $\frac{1}{2}Q$ går ut på oversiden $(y>0)$ og $\frac{1}{2}Q$ på undersiden $(y<0)$.
Generelt er $\Delta\psi$ lik volumfluks mellom to strømlinjer.
Altså: Gjennom den stiplede linje på figuren går volumfluksen $\frac{1}{2}Q = \pi\cdot m$. Da $\psi = 0$ på x-aksen mellom singularitetene vil $\underline{\psi_A = \pi\cdot m}$

b) $$\underline{\psi = U\cdot y + m\cdot\arctan\frac{y}{x+a} - m\cdot\arctan\frac{y}{x-a} + \pi\cdot m}$$

$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$. Da $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ blir

$$u = U + \frac{m}{1+\frac{y^2}{(x+a)^2}}\,\frac{1}{x+a} - \frac{m}{1+\frac{y^2}{(x-a)^2}}\,\frac{1}{x-a}$$

$$\underline{u = m\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} - m\cdot\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} + U}$$

Oppgave 2c

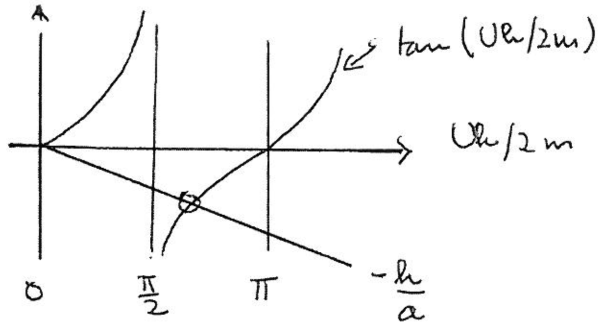
Setter inn $\psi = \psi_A = \pi\cdot m$ i uttrykket for $\psi(x,y)$, og velger punktet $x=0$, $y=h$:

$$\pi\cdot\cancel{m} = U\cdot h + m\cdot\arctan\frac{h}{a} - m\cdot\arctan\left(\frac{h}{-a}\right) + \pi\cdot\cancel{m}.$$

Da $\arctan\left(\frac{h}{-a}\right) = -\arctan\frac{h}{a}$ fås $0 = U\cdot h + 2m\arctan\frac{h}{a}$

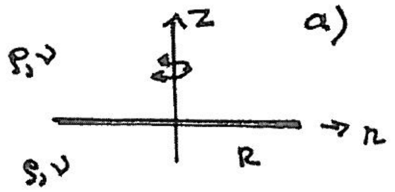
$$\Rightarrow\ \underline{\arctan\frac{h}{a} = -\frac{Uh}{2m}}, \text{ eller } \underline{\frac{h}{a} = -\tan\frac{Uh}{2m}}.$$

[Ligningen kan f.eks. skrives som $\tan\frac{Uh}{2m} = -\frac{h}{a}$ og løses grafisk:



]

Løsning Oppgave 3



a) $\Theta = \Theta_0 \cos\omega t$. Platens hastighet er

$$r\dot{\Theta} = -r\Theta_0 \omega \sin\omega t .$$

Væskens hastighet i $z = 0$ er

$$r\Omega(0,t) = r\Omega_0 \sin\omega t .$$

Heftbetingelse : $-r\Theta_0\omega\sin\omega t = r\Omega_0 \sin\omega t$, dvs. $\underline{\Omega_0 = -\omega \cdot \Theta_0}$

Bestemmelse av konstantene Ω_0 og β :

For vilkårlig z (for $z \geq 0$) er $\Omega = -\omega\Theta_0 e^{-\beta z}\sin(\omega t - \beta z)$,

$$\partial\Omega/\partial t = -\omega^2\Theta_0 e^{-\beta z}\cos(\omega t - \beta z),$$

$$\partial\Omega/\partial z = \omega\Theta_0\beta e^{-\beta z}\left[\sin(\omega t - \beta z) + \cos(\omega t - \beta z)\right]$$

$$\partial^2\Omega/\partial z^2 = -2\omega\Theta_0\beta^2 e^{-\beta z}\cos(\omega t - \beta z)$$

Innsetting i (1) gir

$$-\omega^2\Theta_0 e^{-\beta z}\cos(\omega t - \beta z) = -2\nu\omega\Theta_0\beta^2 e^{-\beta z}\cos(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}$$

b) Skjærspenning i væsken $\tau = \mu \dfrac{\partial V_\theta}{\partial z} = \mu r \dfrac{\partial \Omega}{\partial z}$

$$\tau = \mu r \cdot \omega\Theta_0\beta e^{-\beta z}\left[\sin(\omega t - \beta z) + \cos(\omega t - \beta z)\right]$$

Setter $z = 0$ og får skjærspenning på skiven :

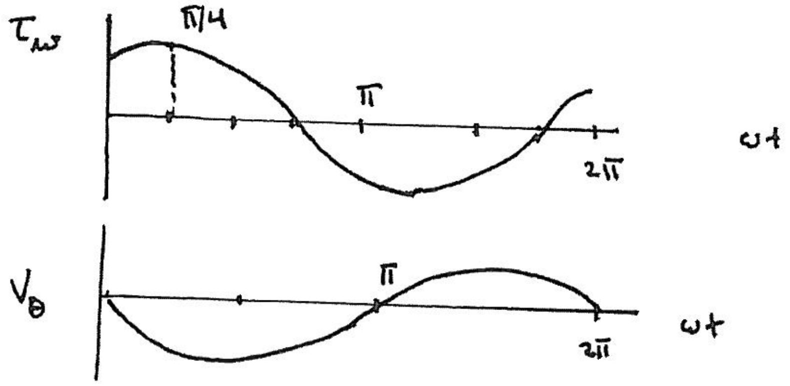
$$\underline{\tau_w} = \mu r\omega\Theta_0\beta\,(\underbrace{\sin\omega t + \cos\omega t}_{\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})}) = \underline{\sqrt{2}\cdot\mu r\omega\Theta_0\beta\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{4})}$$

Platens hastighet $\underline{V_\theta} = r\Omega(0,t) = \underline{-r\omega\Theta_0\sin\omega t}$

$$\underline{\tau_w = C \cdot r\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{4})},$$

$$\underline{C = \sqrt{2}\mu\omega\Theta_0\beta .}$$

Løsning Oppgave 3 b, forts.



τ_w ligger $\frac{3\pi}{4}$ foran V_θ i fase.

c) På flateelement dA virker det en kraft $\tau_w \cdot dA$.

Tilsvarende kraftmoment $r\tau_w \cdot dA$.

Da platen har 2 sider, og $dA = 2\pi r\,dr$, får

$$M = 2\int_0^R r\tau_w \cdot 2\pi r\,dr = 4\pi \int_0^R r^2 \tau_w\,dr$$

Setter inn $\tau_w = \sqrt{2}\,\mu r \omega \Theta_0 \beta \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$:

$$M = 4\pi \cdot \sqrt{2}\,\mu \omega \Theta_0 \beta \sin(\omega t + \tfrac{\pi}{4}) \underbrace{\int_0^R r^3\,dr}_{\frac{1}{4}R^4}$$

$$\underline{M = \sqrt{2}\,\pi\,\mu\omega\Theta_0\beta R^4 \cdot \sin(\omega t + \tfrac{\pi}{4})}$$