TMA4245 Statistikk
Vår 2015

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving nummer 8, blokk II

Oppgave 1

Betrakt et parallellsystem av 2 uavhengige komponenter. Levetiden til hver komponent er eksponensialfordelt med parameter λ, dvs

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

La V være levetiden til systemet. Finn fordelingen til V, samt $\mathrm{E}(V)$.

Oppgave 2

Betrakt et seriesystem sammensatt av n komponenter. Levetiden til hver komponent følger en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjonen

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $\lambda > 0$ og $\alpha > 0$. Dette kalles en Weibull-fordeling med skalaparameter λ og formparameter α. (Parametriseringen er litt anderledes enn i læreboka.)

Finn den kumulative fordelingsfunksjonen for levetiden til systemet. Hva kalles denne sannsynlighetsfordelingen?

Oppgave 3

Anta vi har data $x_1, \ldots, x_n$ fra en normalfordeling med forventningsverdi μ og varians σ^2. Da vil gjennomsnittet $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ være en forventningsrett estimator av μ. I denne oppgaven skal vi simulere syntetiske normalfordelte data i Matlab og se om teorien holder.

1. Kjør koden *run_ confds.m* i Matlab. Dette scriptet bruker funksjonen *confds.m*, som er en funksjon som beregner et 95% konfidensinterval for forventningsverdien μ i en normalfordeling. Begge Matlabfilene er tilgjengelige fra emnets hjemmeside.
2. Tolk hva koden gjør og det resulterende plottet som blir laget når du kjører koden. Prøv å kjøre koden for andre datastørrelser n, og tolk resultatet.

*Tips: Den innebygde Matlabfunksjonen 'hist()' plotter et histogram av dataene. For hjelp med f.eks. denne funksjonen, skriv 'help hist' i kommandovinduet, eller gå til **Help** → **Product help** og søk etter funksjonen.*

Oppgave 4

a) Levetiden T i timer til et bestemt merke for radiobatterier ($1.5V$) kan antas å være $N(117.2,\ 10^2)$. I fru Jenssens radio er det 8 slike batterier. Hun vet at radioen virker dersom minst 4 av batteriene virker.

Hva er sannsynligheten for at fru Jenssens radio virker ved starten av herrestafetten på Lillehammer, hvis det da er 130 timer siden hun skiftet alle batteriene, og levetiden til disse antas uavhengige? Begrunn ditt valg av modell (fordeling).

b) Når $X \sim \text{bin}(n,p)$, utled den momentgenererende funksjon til X og bruk denne til å finne uttrykket for $E(X)$. Du kan bruke at $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} = (a+b)^n$.

Oppgave 5

Vi betrakter en skålvekt for veiing av prøver. Prøven med vekt μ plasseres på en av skålene og lodd plasseres på den andre skålen til vektens arm er tilnærmet horisontal. Den kjente vekten av loddene er da tilnærmet prøvens vekt. Vi antar at den målte vekt er normalfordelt med forventningsverdi μ og varians σ^2 og at to forskjellige målinger er uavhengige.

a) Anta i dette punktet at $\mu = 10$ gram og $\sigma^2 = 0.2^2$ gram^2.

Hva er sannsynligheten for at målt vekt skal være mer enn 10.2 gram? Hva er sannsynligheten for at målt vekt skal avvike fra μ med mer enn 0.2 gram? Hva er sannsynligheten for at gjennomsnittet av to uavhengige målinger skal avvike fra μ med mer enn 0.2 gram?

Det er kommet inn to prøver som begge skal veies, prøve A og prøve B. La μ_A og μ_B betegne sann vekt av prøvene. Det er foreslått å estimere vekten av prøve A og B på to forskjellige måter:

1. Vei først prøve A og la X_1 betegne resultatet. Vei deretter prøve B og la X_2 betegne resultatet. Bruk følgende estimatorer for μ_A og μ_B,

$$\hat{\mu}_A = X_1, \qquad \text{og} \qquad \hat{\mu}_B = X_2. \tag{5.1}$$

2. Vei først summen av prøvene $A + B$ ved å plassere begge prøvene på samme vektskål og la Y_1 betegne resultatet. Vei deretter differansen av prøvene $A - B$ ved å plassere prøvene på hver sin vektskål og Y_2 betegne resultatet. Bruk følgende estimatorer for μ_A og μ_B,

$$\tilde{\mu}_A = (Y_1 + Y_2)/2, \qquad \text{og} \qquad \tilde{\mu}_B = (Y_1 - Y_2)/2. \tag{5.2}$$

b) Finn forventningsverdi og varians til $\hat{\mu}_A$, $\hat{\mu}_B$, $\tilde{\mu}_A$ og $\tilde{\mu}_B$. Hvilken fremgangsmåte vil du foretrekke til å estimere vekten av prøve A og B, og hvorfor?

c) Vis at $\tilde{\mu}_A$ og $\tilde{\mu}_B$ (faktisk) er uavhengige. (Hint: manipuler med simultantettheten til Y_1 og Y_2.)

Fasit

4. **a**) 0.005

5. **a**) 0.159, 0.318, 0.158 **b**) $\mathrm{E}(\widehat{\mu}_A) = \mu_A$, $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_A) = \sigma^2$, $\mathrm{E}(\widehat{\mu}_B) = \mu_B$, $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_B) = \sigma^2$, $\mathrm{E}(\widetilde{\mu}_A) = \mu_A$, $\mathrm{Var}(\widetilde{\mu}_A) = \sigma^2/2$, $\mathrm{E}(\widetilde{\mu}_B) = \mu_B$, $\mathrm{Var}(\widetilde{\mu}_B) = \sigma^2/2$