

**FY1001/TFY4109/TFY4145. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.**  
**Løsningsforslag til øving 7.**

**Svingninger**

a) Vi antar at Hookes lov,  $F = -kx$ , gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

med  $\omega_0^2 = k/m$ . Ligningen har løsning  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ , som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens  $\omega = \sqrt{k/m}$ , og dermed med periode  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Riktig svar: C.

b) og c) Amplituden  $A$  og fasekonstanten  $\phi$  fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene  $x(0) = x_0$  og  $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ . Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A \cos \phi$$

og

$$v_0 = -\omega_0 A \sin \phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan \frac{v_0}{x_0 \omega_0}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos \arctan v_0/x_0 \omega_0}.$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$1 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \frac{v_0^2}{\omega_0^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos \frac{x_0}{A} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}.$$

Altså er både A og B riktige svar på oppgavene b) og c), dvs C er riktig svar.

d) Siden vi ikke har noe damping i systemet, er den totale energien  $E$  bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der  $x = x_{\max} = A$  og  $v = 0$ :

$$E = E_p^{\max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k(x_0^2 + mv_0^2/k) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Dette gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved  $t = 0$ ,  $E_{p0} + E_{k0}$ , hvilket jo også må tilsvare den totale energien. Riktig svar: C.

e) Skriver vi løsningen på formen  $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$ , har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 B \sin \omega_0 t + \omega_0 C \cos \omega_0 t$$

og dermed, ved hjelp av  $x(0) = x_0$  og  $\dot{x}(0) = v_0$ ,

$$B = x_0 \quad \text{og} \quad C = v_0/\omega_0$$

Riktig svar: B.

f) Maksimalt utsving:

$$x_{\max} = A = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0 \sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\max} = \omega_0 A = \sqrt{\frac{k}{m} (x_0^2 + mv_0^2/k)} = v_0 \sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0 \sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$E_{p0} = 0.5 \cdot 10 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{2000} \quad , \quad E_{k0} = 0.5 \cdot 0.100 \cdot 0.10^2 = \frac{1}{2000}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI-enheter underveis. Følgelig er  $x_{\max} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$  cm og  $v_{\max} = \sqrt{2}v_0 \simeq 14$  cm/s. Riktig svar: A.

g) Bevegelsesligning for klossen:

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

Her har vi valgt positiv  $y$ -retning nedover. Uten tyngdefelt til stede ( $g = 0$ ) er klossens likevektsposisjon  $y = 0$ . I tyngdefeltet bestemmes den nye likevektsposisjonen  $\Delta y$  ved å sette total kraft lik null, følgelig

$$\begin{aligned} -k\Delta y + mg &= 0 \\ \Delta y &= mg/k \end{aligned}$$

Med ny posisjonsvariabel

$$z = y - \Delta y$$

får vi bevegelsesligningen

$$m\ddot{z} = -k(z + \Delta y) + mg = -kz$$

som betyr at klossen vil svinge harmonisk med vinkelfrekvens  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  omkring likevektsposisjonen  $z = 0$ , dvs  $y = \Delta y = mg/k$ . (Med tallverdiene fra oppgave 1 har vi  $\Delta x = 0.100 \cdot 9.8/10 = 9.8$  cm.) Riktig svar: A.

h) Fra figuren ser vi f.eks. at  $x(0) = 1$  og  $x(5T) = 0.5$ , der  $T$  er svingningens periode. Dermed:

$$\begin{aligned} e^{-5T/\tau} &= e^{-5 \cdot 2\pi/\omega\tau} = 0.5 \\ \Rightarrow \frac{10\pi}{\omega\tau} &= \ln 2 \\ \Rightarrow \omega\tau &= 45 \end{aligned}$$

Riktig svar: D.

i) Med utsving  $x$  fra likevektsstilling er kraften på massen  $m$  de to fjærkreftene  $-k_1x$  og  $-k_2x$ . N2 gir svingeligningen

$$-k_1x - k_2x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right)x = 0.$$

Sammenligning med "standardligningen"  $\ddot{x} + \omega^2x = 0$  gir at svingefrekvensen  $\omega$  er gitt av

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \text{alts} \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Sammenligning med  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$  viser også at effektiv fjærstivhet for parallellkoblede fjærer er  $k = k_1 + k_2$ . Riktig svar: C.

j) Når  $m$  forskyves  $x$  mot høyre, strekkes fjærene  $x_1$  og  $x_2$ , og slik at  $x_1$  og  $x_2$  er forskjellige dersom  $k_1 \neq k_2$ . Kraften  $F$  på massen  $m$  forplanter seg gjennom begge fjærene med samme strekk (N3 og masseløse fjærer). Dermed er  $F = -k_1x_1 = -k_2x_2$ , som gir  $x = x_1 + x_2 = -(1/k_1 + 1/k_2)F$ . Dermed er kraften som virker på klossen lik

$$F = -\frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}x = -\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x$$

og N2 gir

$$-\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}x = 0.$$

Sammenligning med  $\ddot{x} + \omega^2x = 0$  gir at svingefrekvensen  $\omega$  er gitt av

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{(k_1 + k_2)m}{k_1k_2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}, \quad \text{alts} \quad \omega = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}.$$

Sammenligning med  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$  viser også at effektiv fjærstivhet for seriekoblede fjærer er  $k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$ . Riktig svar: B.

k) Med utsving  $x$  fra likevektsstilling vil høyre fjær  $k_2$  presses sammen  $x$  og gi en kraft  $-k_2x$  mot venstre på massen. Venstre fjær vil strekkes  $x$  og gi en kraft  $-k_1x$  mot venstre. Kreftene er altså de samme som i a), og  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ . Riktig svar: C.