NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

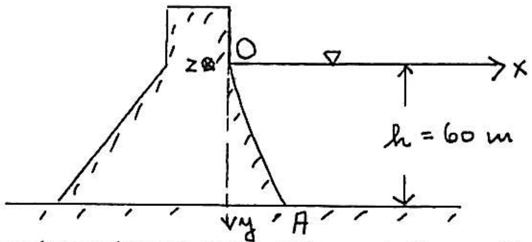
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. F (Linje Fysikk og matematikk)
6. august 2001
Tid: 0900 – 1400

Sensuren faller i uke 35.

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Figuren viser en betong-dam som skal innelukke vann i et basseng. Vannhøyden er h = 60 m. Betrakt i det følgende bare én lengdeenhet av dammen inn i planet (i z-retning). Legg koordinatsystemet som på figuren. Den delen av dammen som har betydning for oppgaven er stykket OA mellom origo O og bunnpunktet A, hvor den analytiske formen

$$x = \frac{1}{4} y^{3/4}$$

av betongens overflate er kjent. Sett $g = 10$ m/s^2.

a) Finn den horisontale hydrostatiske kraft F_x på dammen, samt avstanden $y_p (= h_p)$ fra origo til denne kraftens angrepslinje.

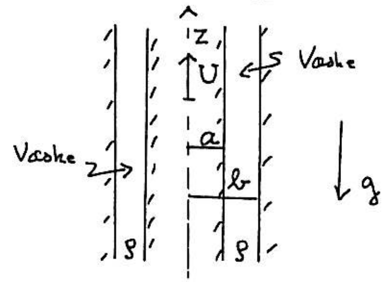
b) Finn ved integrasjon den tilsvarende vertikale kraft F_y, samt avstanden x_p til angrepslinjen.

Oppgitt: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment omkring en horisontal akse (her z-aksen) gjennom grunnlinjen lik

$$I_z = \frac{bh^3}{3}.$$

(Hvis aksen går gjennom centroiden, er $I_{zc} = \frac{bh^3}{12}$.)

Oppgave 2



Området $a \le r \le b$ mellom en kompakt indre sylinder $r = a$ og en ytre sylinderflate $r = b$ er fylt av en inkompressibel væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν. Figuren viser et vertikalsnitt gjennom z-aksen. Den indre sylinderen trekkes vertikalt oppover med konstant fart U, mens den ytre sylinderflaten er i ro. Sylinderne er uendelig lange. Tyngdens akselerasjon er g. Anta stasjonære forhold. På grunn av symmetrien kan væskens hastighets-vektor skrives slik: $\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z)$, hvor $V_z = V_z(r)$.

a) Med den gitte symmetrien vil Navier-Stokes' ligninger bli forenklet. De lyder i r- og z-retning:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \quad ,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\left(\frac{d^2 V_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_z}{dr}\right).$$

Vis ut ifra disse ligningene at størrelsen $\tilde{p}$, definert ved

$$\tilde{p} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \quad ,$$

er en konstant, uavhengig av r og z.

b) Hva blir grensebetingelsene ved r = a og r = b? Vis ved integrasjon at hastighetsprofilet $V_z(r)$ blir

$$V_z(r) = -\frac{\tilde{p}}{4\mu}\left(b^2 - r^2\right) + \left[U + \frac{\tilde{p}}{4\mu}\left(b^2 - a^2\right)\right]\frac{\ell n\, b/r}{\ell n\, b/a} \qquad (1)$$

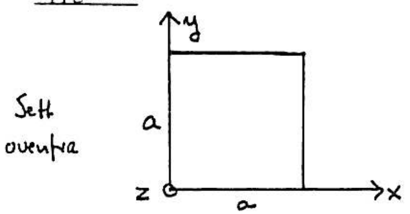
$(\mu = \rho\nu)$, idet du gjør bruk av at $rV_z'' + V_z' = \left(rV_z'\right)'$.

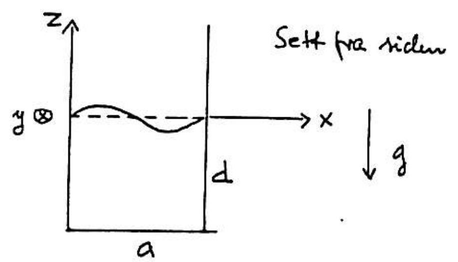
c) Anta i det følgende at mellomrommet (b-a) mellom sylinderflatene er lite i forhold til radiene: $\Delta \equiv 1 - a/b << 1$. Da vil ligning (1) tilnærmet kunne skrives

$$V_z(r) = \frac{U}{\Delta}\left(1 - \frac{r}{b}\right)$$

(dette skal ikke utledes). Finn herav volumgjennomstrømningen Q gjennom et tverrsnitt z = konstant.

Oppgave 3.





En tank med kvadratisk grunnflate (sidekant a) er fylt med vann opp til høyden d. Horisontale akser er x og y. Vertikal z-akse peker oppover, slik at planet z = 0 faller sammen med vannspeilet når vannet er i ro.

Oppgaven er i det følgende å analysere de stasjonære svingemodene til den frie overflaten. Den frie overflatebetingelse i lineær teori oppgis å være

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad , \quad z = 0.$$

a) Hastighetspotensialet oppgis å ha formen

$$\Phi = f(x, y)\cosh k(z + d)\cos\omega t\,.$$

Finn dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$.

b) Bruk inkompressibilitetsbetingelsen til å finne hvilken differensialligning funksjonen f(x,y) må oppfylle. Anta at f(x,y) er av formen

$$f(x, y) = \cos px \cos qy \quad ,$$

hvor p og q er konstanter. Bruk de kinematiske grensebetingelsene ved tankens sidevegger $(x = 0, a \text{ og } y = 0, a)$ til å vise at p og q er proporsjonale med hele tall. Kall disse tallene for m og n.

c) Finn de tillatte bølgetall k, uttrykt ved a, m og n.

d) Anta at hele tanken gis en konstant akselerasjon α oppover, i positiv z-retning. Hva vil dispersjonsrelasjonen være da?

Oppgave 4 (halv vekt)

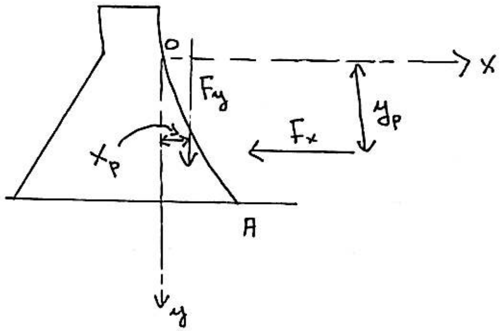
a) En kompakt sylinder står på tvers i en uniform luftstrøm. Tegn en figur som viser hvordan motstandskoeffisienten C_D varierer med Reynolds tall.

b) Hva er den fysiske betydning av motstandskrisen (drag crisis)?

c) Forklar, ved hjelp av en figur, hvordan gage-trykket varierer som funksjon av vinkelen θ på sylinderoverflaten når luftstrømmen er ideell, laminær, eller turbulent.

Løsning Oppgave 1

6. august 2001

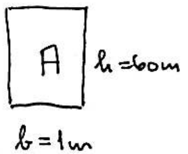


(a) Horisontal kraft $F_x = \gamma h_{cx} A_x$ ifølge formelark (Betrakter platens horisontale projeksjon). $\gamma = 10^4$ Pa/m.

Dybden h_{cx} til centroiden er $h_{cx} = \frac{1}{2}h = 30$ m.

Arealet av den horisontale projeksjon: $A_x = 1 \cdot h = 60\ \mathrm{m}^2$

∴ $\underline{F_x} = 10^4 \cdot 30 \cdot 60 = \underline{1{,}8 \cdot 10^7\ \mathrm{N}}$



Avstand $y_p = \dfrac{I_z}{y_c \cdot A}$.

Omkring en akse som går enten gjennom topplinje eller grunnlinje er $I_z = \frac{1}{3} b h^3 = \frac{1}{3} h^3$.

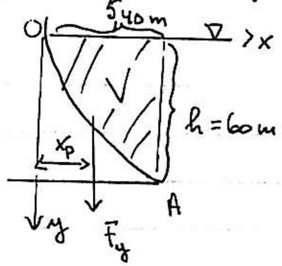
Da $y_c = \frac{1}{2}h$ og $A = h$ altså

$$\underline{y_p} = \frac{\frac{1}{3}h^3}{\frac{1}{2}h \cdot h} = \frac{2h}{3} = \underline{40\ \mathrm{m}}$$

[Alternativt kan en finne y_p som

$$\underline{y_p} = y_c + \frac{I_{zx}}{y_c \cdot A} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{1}{12}h^3}{\frac{1}{2}h \cdot h^2} = \underline{\frac{2h}{3}}.\ ]$$

(b) Vertikal kraft $F_y = \gamma V$, hvor V er det skraverte areal (volum).



Må integrere:

$V = \int y\,dx$

Differensierer $x = \frac{1}{4} y^{3/4}$:

$dx = \frac{3}{16} y^{-1/4} dy \implies$

$$\underline{V} = \frac{3}{16}\int_0^h y^{3/4} dy = \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{7} \Big|_0^h y^{7/4} = \frac{3}{28} h^{7/4} = \underline{138{,}6\ \mathrm{m}^2}$$

∴ $\underline{F_y} = 10^4 \cdot 138{,}6\ \mathrm{N} = \underline{1{,}39 \cdot 10^6\ \mathrm{N}}$

Avstand til kraftlinjen $x_p = x_c$ = avstand til flatesenteret for V.

Momentbalanse omkring O:

$F_y \cdot x_p = \gamma \int xy\,dx$.

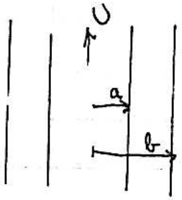
Da $F_y = \gamma V$ altså $x_p = \dfrac{\int xy\,dx}{V}$

Her er $\int xy\,dx = \int_0^h \frac{1}{4} y^{3/4} \cdot y \cdot \frac{3}{16} y^{-1/4} dy = \frac{3}{64}\int_0^h y^{3/2} dy = \frac{3}{160} h^{5/2}$

$\implies$

$$\underline{x_p} = \frac{\frac{3}{160}h^{5/2}}{\frac{3}{28}h^{7/4}} = \frac{7}{40} h^{3/4} = \underline{3{,}77\ \mathrm{m}}$$

Løsning Oppgave 2



$$p = p(r,z), \quad V_z = V_z(r)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad ①$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\left(V_z''(r) + \frac{1}{r}V_z'(r)\right) \qquad ②$$

a) Deriverer ① mhp. z: $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0$

Deriverer ② mhp z: $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} =$ konstant, uavhengig av r og z.

Altså er også $\underline{\tilde{p} \equiv \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \text{ en konstant}}$

b) Grensebetingelser: $\underline{V_z(a) = U, \quad V_z(b) = 0}$

Av ② følger

$$\frac{\tilde{p}}{\mu} = V_z'' + \frac{1}{r}V_z' = \frac{1}{r}(rV_z')'$$

Integrerer: $rV_z' = \frac{\tilde{p}}{2\mu}r^2 + C_1, \quad V_z = \frac{\tilde{p}}{4\mu}r^2 + C_1 \ln r + C_2$

Grensebetingelsene gir:

$$U = \frac{\tilde{p}}{4\mu}a^2 + C_1 \ln a + C_2$$

$$0 = \frac{\tilde{p}}{4\mu}b^2 + C_1 \ln b + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = -\left[U + \frac{\tilde{p}}{4\mu}(b^2 - a^2)\right]\frac{1}{\ln b/a}$$

$$C_2 = \frac{U \ln b}{\ln b/a} + \frac{\tilde{p}}{4\mu}\left[\frac{\ln b}{\ln b/a}(b^2 - a^2) - b^2\right]$$

Innsetting gir

$$\underline{V_z(r) = -\frac{\tilde{p}}{4\mu}(b^2 - r^2) + \left[U + \frac{\tilde{p}}{4\mu}(b^2 - a^2)\right]\frac{\ln b/r}{\ln b/a}}$$

Løsning Oppgave 2c

Smal spalt: $V_z(r) = \frac{U}{\Delta}\left(1 - \frac{r}{b}\right), \quad \Delta = 1 - \frac{a}{b}$

$$Q = \int V_z \cdot dA = \int_a^b V_z \cdot 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{2\pi U}{\Delta}\int_a^b \left(1 - \frac{r}{b}\right) r\, dr = \frac{2\pi U}{\Delta}\Big|_a^b \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{r^3}{3b}\right)$$

$$= \frac{\pi U}{\Delta}\left[b^2 - a^2 - \frac{2}{3b}(b^3 - a^3)\right]$$

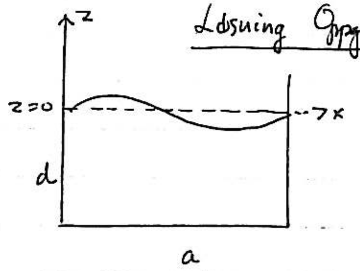
$$= \frac{\pi U}{\Delta}(b-a)\left[b + a - \frac{2}{3b}(b^2 + ab + a^2)\right]$$

$$= \frac{\pi U}{3}\left[3b(b+a) - 2(b^2 + ab + a^2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi U(b^2 + ab - 2a^2), \quad \text{eller}$$

$$\underline{Q = \frac{1}{3}\pi U(2a + b)(b - a)}$$

Løsning Oppgave 3



Oppgitt

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \qquad z = 0. \qquad (1)$$

a) $\Phi = f(x,y)\cosh k(z+d)\cos\omega t$ innsatt i (1) gir, ettersom

$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\omega^2\Phi$ og $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = k f(x,y)\sinh k(z+d)\cos\omega t$, at

$-\omega^2 f(x,y)\cosh kd\cos\omega t + gk f(x,y)\sinh kd\cos\omega t = 0$, altså

(2) $\underline{\omega^2 = gk\tanh kd}$. Samme dispersjonsrelasjon som for propagerende bølger.

b) Inkompressibilitetsbetingelsen $\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + k^2 f(x,y) = 0 \qquad (3)$$

Innsetting av $f = \cos px\cos qy$ gir

$\Phi = \cos px\cos qy\cosh k(z+d)\cos\omega t$.

Kinematiske grensebetingelser ved sideflatene:

Må ha $u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$ ved $x = 0, a$

og $v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$ ved $y = 0, a$.

Da $u = -p\sin px\cos qy\cosh k(z+d)\cos\omega t$

og $v = -q\cos px\sin qy\cosh k(z+d)\cos\omega t$,

altså $\sin pa = 0$, $\sin qa = 0$, som gir

$\underline{p = m\pi/a, \quad q = n\pi/a}$,

m og n hele tall.

c) Av (3) følger $k^2 = p^2 + q^2$. Innsetting for p og q gir

$$k^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(m^2+n^2), \qquad \underline{k = \frac{\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}}$$

d) Hvis hele tanken akselereres oppover med konstant akselerasjon α, vil den effektive tyngdeakselerasjonen være $(g+\alpha)$.

Dispersjonsrelasjonen altså

$$\underline{\omega^2 = (g+\alpha)k\tanh kd}$$