NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- og PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555
Antall sider: 4, pluss 4 sider formelliste

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

Bokmål

15. august 2011
Tid: 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller innen 5. september 2011

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

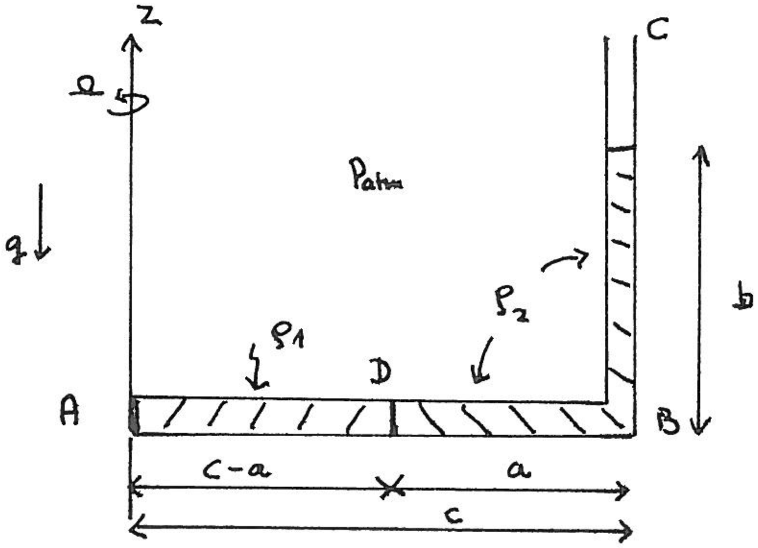
Oppgave 1

a) Gi en kort utledning av uttrykket for trykket $p = p(r, z)$ i et kar som roterer med konstant vinkelhastighet Ω omkring z-aksen:

$$p = C - \gamma z + \frac{1}{2}\rho r^2 \Omega^2.$$

Her er g tyngdens akselerasjon, $\gamma = \rho g$ hvor ρ er tettheten, og C er en konstant.

b)

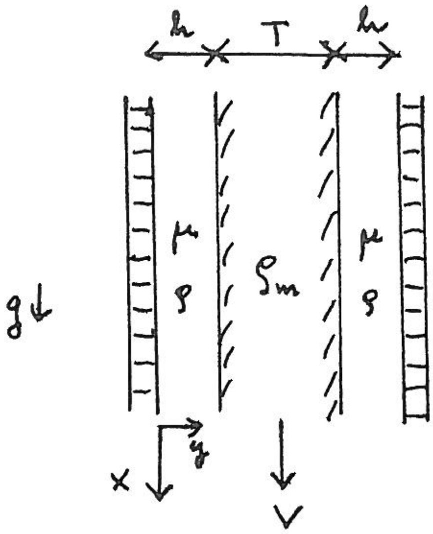


Et tynt sirkulært rør ABC bøyd i rett vinkel er lukket i nedre venstre ende A og åpent mot atmosfæren i øvre ende C; se figuren. Røret roterer i tyngdefeltet med konstant vinkelhastighet Ω omkring z-aksen. Avstanden AB er lik c. Røret inneholder to inkompressible væsker, den ene med tetthet ρ_1, den andre med tetthet ρ_2. Væskesøylenes lengder er henholdsvis $(c - a)$ og $(a + b)$, hvor c, a og b er gitte størrelser.

Hvor stort er trykket p_B i punkt B? Hvorfor må trykket være kontinuerlig over grenseflaten (punkt D) mellom væskene 1 og 2?

c) Finn trykket p_A i punkt A. [Hint: Finn trykket i punkt D uttrykt ved størrelser i væske 1, og trykket i samme punkt uttrykt ved tilsvarende størrelser i væske 2. Sett så trykkene lik hverandre.]

Oppgave 2



En plan plate med tykkelse T er laget av et materiale med tetthet ρ_m. Platen er plassert midt i en vertikal spalte med bredde $T + 2h$, og i mellomrommet på hver side av platen er det et inkompressibelt smøremiddel med tetthet ρ og viskositet μ. Platen faller i tyngdefeltet, men på grunn av friksjonen mot væsken faller platen med en konstant hastighet V. Platens lengde L og bredde B i henholdsvis x- og z-retning er mye større enn åpningen av spalten slik at strømningen overalt vil være parallell med den viste x-aksen. Trykket er overalt lik atmosfæretrykket p_{atm}.

a) Vis ved hjelp av kontinuitetsligningen at smøremiddelets hastighet u i x-retningen er uavhengig av x.

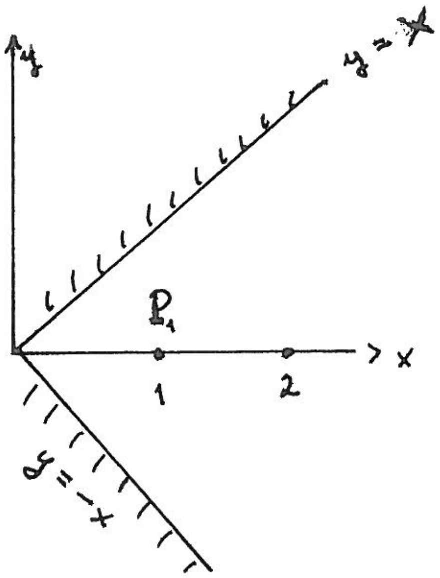
b) Fallhastigheten V betraktes som en kjent konstant. Vis at hastighetsprofilet i smøremiddelet blir

$$u(y) = \frac{\rho g h^2}{2\mu}\left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] + V\frac{y}{h}$$

i koordinatsystemet vist på figuren.

c) Finn skjærspenningen i smøremiddelet ved $y = h$, og finn fallhastigheten V uttrykt ved ρ, ρ_m, T, g, h og μ.

Oppgave 3



Gitt en stasjonær potensialstrømning i xy-planet, i det indre område av en rektangulær kile begrenset av flatene $y = +x$ og $y = -x$. Hastighetsvektoren i kartesiske koordinater er $\mathbf{V} = (u, v)$. Dens komponenter er oppgitt til å være

$$u = \alpha y, \quad v = \alpha x, \quad (x \geq 0),$$

hvor $\alpha > 0$ er en gitt konstant.

a) Har strømningen stagnasjonspunkt? Angi eventuelt posisjonen. Finn den enkleste form for strømfunksjonen $\psi(x, y)$ og hastighetspotensialet $\phi(x, y)$. Finn det komplekse potensial $w(z)$ som funksjon av den komplekse variable $z = x + iy$.

b) Skissér den strømlinje som går gjennom punktet P_1 med koordinater $x_1 = 1, y_1 = 0$. Vis at ligningen for strømlinjen blir $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$.

c) Betrakt en fluidpartikkel som passerer P_1 ved tiden $t = 0$ og beveger seg langs den nevnte strømlinje til punktet P_2 i løpet av tiden Δt. Finn Δt, når det oppgis at x-koordinaten for P_2 er lik $x_2 = 2$.

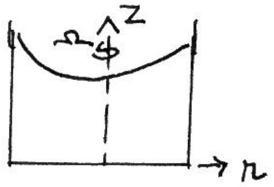
[Hint: Finn først hastighetskvadratet V^2 som en funksjon av x. Benytt så at linjeelementet for banen er $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.]

Oppgitt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

TEP4105 FLUIDMEKANIKK , KONT- EKSAMEN AUGUST 2011

Løsning Oppgave 1



a) I det roterende system er bevegelsesligningen

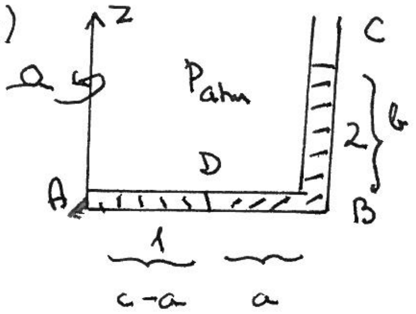
$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + r\Omega^2\vec{e}_r .$$

Her er $\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$, $\vec{g} = -g\vec{k} = -g\nabla z$, og da $\nabla r^2 = 2r\nabla r = 2r\vec{e}_r$ blir $r\Omega^2\vec{e}_r = \nabla\left(\frac{1}{2}r^2\Omega^2\right)$. Altså

$$0 = \nabla\left(-\frac{p}{\rho} - gz + \frac{1}{2}r^2\Omega^2\right),$$ som gir

$$\underline{p = C - \gamma z + \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2, \quad \gamma = \rho g}$$

b)



Trykk i B er det statiske trykk:

$$\underline{p_B = p_{atm} + \rho_2 g b}$$

Trykket i D er kontinuerlig, ellers ville grenseflaten akselerere i det roterende system.

c) Sett fra væske 1 er trykket i grenseflaten

$$p_D = p_A + \frac{1}{2}\rho_1(c-a)^2\Omega^2$$

Sett fra væske 2:

$$p_D + \left[\frac{1}{2}\rho_2 c^2 - \frac{1}{2}\rho_2(c-a)^2\right]\Omega^2 = p_B = p_{atm} + \rho_2 g b$$

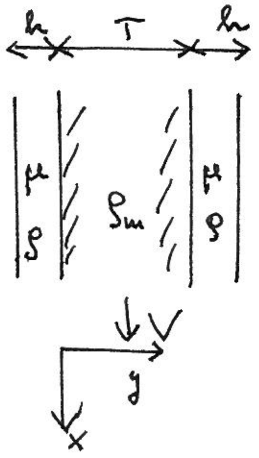
Setter uttrykkene for p_D like:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho_1(c-a)^2\Omega^2 = p_{atm} + \rho_2 g b - \left[\frac{1}{2}\rho_2 c^2 - \frac{1}{2}\rho_2(c-a)^2\right]\Omega^2$$

Altså

$$\underline{p_A = p_{atm} + \rho_2 g b - \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)(c-a)^2\Omega^2 - \frac{1}{2}\rho_2 c^2\Omega^2}$$

Oppgave 2



a) Kontinuitetsligningen $\nabla \cdot \vec{V} = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \overset{=0}{\frac{\partial v}{\partial y}} + \overset{=0}{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \Rightarrow \underline{\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$

Altså u uavhengig av x.

b) Navier-Stokes i x-retning:

$$\rho\left[\underset{=0}{\frac{\partial u}{\partial t}} + \underset{=0}{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \underset{=0}{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \underset{=0}{w\frac{\partial u}{\partial z}}\right] = -\underset{=0}{\frac{\partial p}{\partial x}} + \mu\nabla^2 u + \rho g$$

$$\mu\nabla^2 u = \mu\left(\underset{=0}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underset{=0}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right) = -\rho g$$

ɔ: $\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g}{\mu}$. Integrasjon gir

$u(y) = -\frac{\rho g}{2\mu}y^2 + C_0 y + C_1$. Grensebetingelser $u(0)=0$, $u(h)=V$.

$$\Rightarrow \underline{u(y) = \frac{\rho g h^2}{2\mu}\left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] + V\frac{y}{h}}$$

c) Skjærspenning $\tau = \mu\frac{du}{dy}$.

Ved $y=h$: $\underline{\tau(y=h)} = \mu\frac{du}{dy}\bigg|_{y=h} = \underline{-\frac{1}{2}\rho g h + \mu\frac{V}{h}}$

Friksjonskraften på platen (2 sider)

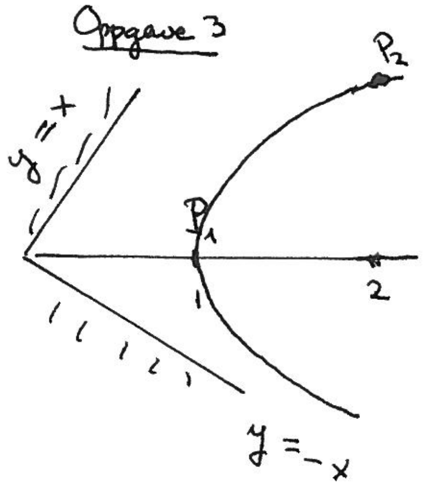
$$F_{plate} = 2\tau(y=h)\cdot LB = \left[-\rho g h + 2\mu\frac{V}{h}\right]LB$$

må balansere tyngdekraften $\rho_m g \cdot TLB$:

$$\left[-\rho g h + 2\mu\frac{V}{h}\right]LB = \rho_m g TLB$$

$$\Rightarrow \underline{V = \frac{hg}{2\mu}(\rho_m T + \rho h)}$$

Oppgave 3



$$u = \alpha y,\ v = \alpha x \quad , \quad \alpha > 0,\ x \geq 0$$

a) Stagnasjonspunkt $u = v = 0$ ved $\underline{x = y = 0}$

Strømfunksjon:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \alpha y \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}\alpha y^2 + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha x \Rightarrow \psi = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + g(y)$$

Enkleste løsning $\underline{\psi = \frac{1}{2}\alpha(y^2 - x^2)}$

Hastighetspotensial:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha y \Rightarrow \quad \phi = \alpha x y + f_1(y)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \alpha x \Rightarrow \quad \phi = \alpha x y + g_1(x)$$

Enkleste løsning $\underline{\phi = \alpha x y}$

Komplekst potensial $w = \phi + i\psi = \alpha x y + \frac{i}{2}\alpha(y^2 - x^2)$

Dette skal være en funksjon bare av $z = x + iy$.

Danner $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\Rightarrow$

$$\underline{w} = -\frac{i}{2}\alpha\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) = \underline{-\frac{i}{2}\alpha z^2}$$

b) Skisse av strømlinjen ovenfor. Da punktet P_1 $(1,0)$ skal passe i strømfunksjonen $\psi = \frac{1}{2}\alpha(y^2-x^2)$, må $\psi = -\frac{1}{2}\alpha$ for denne strømlinjen. Altså $-1 = y^2-x^2$, $y^2 = x^2-1$, slik at $\underline{y = \pm\sqrt{x^2-1}}$ blir ligningen for strømlinjen gjennom P_1.

c) Fluidpartikkel 1 → 2 i løpet av tiden Δt:

Tidselement $dt = \frac{ds}{V}$, hvor $V^2 = u^2+v^2 = \alpha^2(y^2+x^2)$, ɔ:

$V^2 = \alpha^2(2x^2-1)$, $V = \alpha\sqrt{2x^2-1}$.

$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$. Av $y^2 = x^2-1$ følger $y\,dy = x\,dx$, dvs.

$y' = \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Det gir $ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2-1}}\cdot dx = \sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2-1}}\,dx$.

Setter inn:

$$dt = \frac{ds}{V} = \frac{\sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2-1}}\,dx}{\alpha\sqrt{2x^2-1}} = \frac{1}{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Integrerer:

$$\Delta t = \int_1^2 dt = \frac{1}{\alpha}\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\alpha}\Big|_1^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\underline{\Delta t = \frac{1}{\alpha}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$$