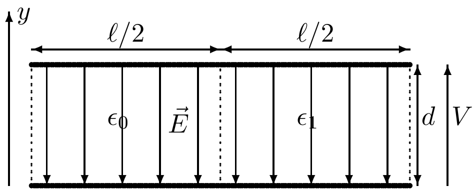
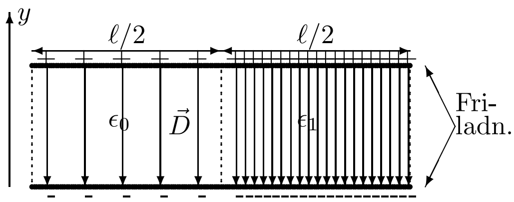
Øving 7, løsningsskisse.
Dielektrika.

Oppgave 1. Kondensator med luft og dielektrikum.



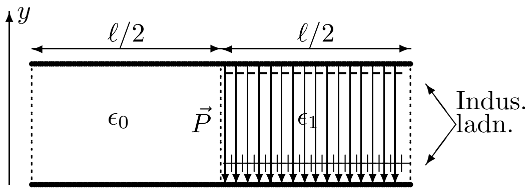
a) I og med at spenningsforskjellen V mellom platene er lik langs platene, må også feltstyrken $E = V/d$ være lik og uavhengig av mediet mellom. Med positiv plate øverst vil $\vec{E}$ peke nedover og vi skriver $\vec{E} = -E\hat{\jmath}$ med positiv E. Fra $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ får vi altså

$$E = \frac{V}{d} = \frac{100\,\mathrm{V}}{2{,}00\,\mathrm{mm}} = \underline{50{,}0\,\mathrm{kV/m}.}$$



b) Uttrykket for elektrisk flukstetthet $\vec{D} = \epsilon_{\mathrm{r}} \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ gir i luft
$D_0 = \epsilon_0 \cdot E = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot (50{,}0\,\mathrm{kV/m}) = \underline{0{,}443\,\mu\mathrm{C/m}^2}$,
og i dielektrikumet:

$$D_1 = \epsilon_{\mathrm{r1}} \cdot \epsilon_0 \cdot E = 5{,}00 \cdot D_0 = \underline{2{,}22\,\mu\mathrm{C/m}^2.}$$

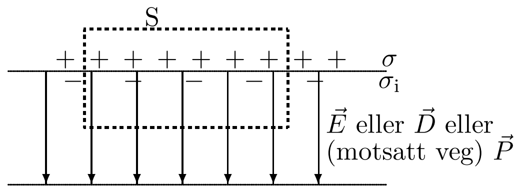


c) Fra $\vec{D} = \epsilon_{\mathrm{r}} \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$ finner vi uttrykk for elektrisk polarisering i luft

$$P_0 = (1-1) \cdot \epsilon_0 \cdot E = \underline{0\,\mu\mathrm{C/m}^2}$$

og i dielektrikumet:

$$P_1 = (5{,}00-1) \cdot \epsilon_0 \cdot E = 4{,}00 \cdot D_0 = \underline{1{,}77\,\mu\mathrm{C/m}^2}.$$



d) For å bestemme overflateladningstettheten kan vi legge inn en (Gauss)sylinder S med akse normalt på grenseflata, som vist stiplet i figuren til høyre. Sylinderens øvre endeflate ligger inni øvre lederplate, og her er alle felt lik null. Sylinderens nedre endeflate ligger i luft eller i dielektrikum. Sammenheng mellom flateladningstetthet og verdi for henholdsvis $\vec{D}$, $\epsilon_0\vec{E}$ og $\vec{P}$ bestemmes av Gauss' lov for henholdsvis i) frie ladninger ii) total ladning eller iii) indusert ladning:

i) $\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = D \cdot A = Q_{\mathrm{encl-fri}} = A\sigma$, som gir fri ladningstetthet $\underline{\sigma = D}$. Som beregnet i b) og vist i figuren der, er fri ladningstetthet størst ved dielektrikumet og mindre ved luft. (Tallverdier, se svar for D ovenfor.)

ii) $\oint \epsilon_0\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon_0 E \cdot A = Q_{\mathrm{encl-tot}} = A\sigma_{\mathrm{t}}$, som gir total (netto) ladningstetthet lik $\sigma_{\mathrm{t}} = \epsilon_0 E$. Verdien er lik ved dielektrikumet og luft. Tallverdier: $\underline{\sigma_{0\mathrm{t}} = \sigma_{1\mathrm{t}}} = \epsilon_0 E = |D_0| = \underline{0{,}443\,\mu\mathrm{C/m}^2}$.

iii) $\oint \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = P \cdot A = -Q_{\mathrm{encl-ind}} = -A\sigma_{\mathrm{i}}$, som gir indusert (bunden) ladningstetthet $\underline{\sigma_{\mathrm{i}} = |P|}$. Som beregnet i c) og vist i figuren der, er fri ladningstetthet null ved luft. (Tallverdier, se svar for P ovenfor.)

Merk at total overflateladningstetthet er $\sigma_{\mathrm{t}} = \sigma + \sigma_{\mathrm{i}}$, som har samme verdi både ved luft og ved dielektrikum.

Husk:
- Feltlinjer for $\vec{E}$ har kilde og sluk i total ladning.
- Feltlinjer for $\vec{D}$ har kilde og sluk i fri ladning.
- Feltlinjer for $\vec{P}$ har kilde og sluk i −(indusert ladning).
- Hvis ikke spesifisert, mener vi med "ladning" alltid fri ladning, dvs. ladninger som kan bevege seg fritt i ledere og andre medier.

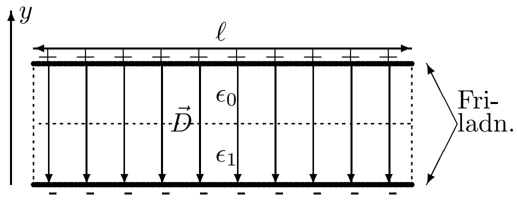
e) Kapasitans: Kondensatoren kan betraktes som parallellkopling av to kondensatorer hver med kapasitans

$$\begin{aligned}
C_0 &= \epsilon_0 \frac{A/2}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot \frac{5{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{2{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 2{,}214\,\mathrm{pF} \\
C_1 &= \epsilon_{\mathrm{r1}}\epsilon_0 \frac{A/2}{d} = 5{,}0 \cdot C_0 = 11{,}07\,\mathrm{pF} \\
\Rightarrow \quad C &= C_0 + C_1 = \underline{13{,}3\,\mathrm{pF}}.
\end{aligned}$$

Eller kan beregnes fra definisjonen ved å finne total ladning Q:

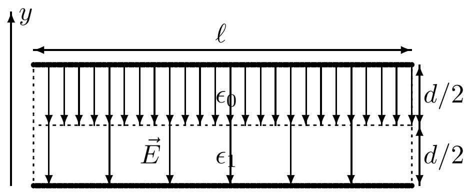
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A/2 \cdot \sigma_0 + A/2 \cdot \sigma_1}{V} = \frac{10,0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{100\,\mathrm{V}} \cdot \frac{0,443 + 2,22}{2}\,\mu\mathrm{C/m}^2 = \underline{13,3\,\mathrm{pF}}.$$

Oppgave 2. Kondensator med luft og dielektrikum.



b) Når det ikke er forskjell på høyre og venstre side vil fri ladning fordele seg jamnt over metallplatene, altså er σ (friladning) likt langs hele plata, og derfor må også flukstettheten $\vec{D} = D\hat{\jmath}$ være lik langs hele plata. I sentrum der materialet endres er det ingen fri ladning, og $\vec{D}$ endres ikke.
Vi vet ikke umiddelbart hva fri ladning σ på metallplatene er, men vi kjenner sammenhengen $D = \epsilon_0 E_0$ og $D = \epsilon_1 E_1$ i de to sjiktene (0 for øvre og 1 for nedre), og dessuten sammenhengen mellom E og V. Dette gir

$$\begin{aligned} V &= \frac{d}{2}E_0 + \frac{d}{2}E_1 = \frac{d}{2}\left(\frac{D}{\epsilon_0} + \frac{D}{\epsilon_1}\right) = \frac{Dd}{2\epsilon_0}\left(1 + \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{r}1}}\right) \\ \Rightarrow D &= \frac{2\epsilon_0 V}{d} \cdot \frac{\epsilon_{\mathrm{r}1}}{1+\epsilon_{\mathrm{r}1}} = \frac{2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot 100\,\mathrm{V}}{2,00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} \cdot \frac{5}{6} = 7,378 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C/m}^2 = \underline{0,738\,\mu\mathrm{C/m}^2}. \end{aligned}$$



a) Elektrisk felt oppe:

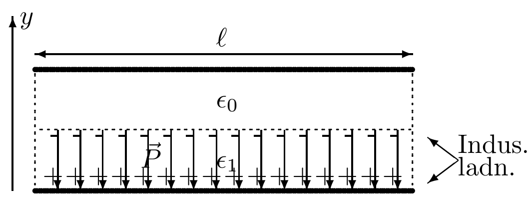
$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{2V}{d} \cdot \frac{\epsilon_{\mathrm{r}1}}{1+\epsilon_{\mathrm{r}1}} = \frac{200\,\mathrm{V}}{2,00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} \cdot \frac{5}{6} = \underline{83\,\mathrm{kV/m}}.$$

Elektrisk felt nede:

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{2V}{d} \cdot \frac{1}{1+\epsilon_{\mathrm{r}1}} = \frac{200\,\mathrm{V}}{2,00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{6} = \underline{16,7\,\mathrm{kV/m}}.$$

Kontroll:

$V_0 + V_1 = E_0 \cdot d/2 + E_1 \cdot d/2 = (83,3 + 16,7)\,\mathrm{kV/m} \cdot 1,00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 100\mathrm{V}$



c) Polarisering oppe og nede:

$$\begin{aligned} P_0 &= \chi_0 \epsilon_0 E_1 = 0 \cdot \epsilon_0 E_1 = 0, \\ P_1 &= \chi_1 \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_{\mathrm{r}1} - 1)\epsilon_0 E_1 \\ &= 4 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot 16,67\,\mathrm{kV/m} = \underline{0,590\,\mu\mathrm{C/m}^2}. \end{aligned}$$

d) Overflateladningstettheter beregnes som i forrige oppgave:

i) Friladningstetthet $\underline{\sigma = D = 0,738\,\mu\mathrm{C/m}^2}$.

ii) Total (netto) ladningstetthet lik $\underline{\sigma_{\mathrm{t}} = \epsilon_0 E = D = 0,738\,\mu\mathrm{C/m}^2}$.

iii) Indusert (bunden) ladningstetthet $\underline{\sigma_{\mathrm{i}} = |P| = 0,590\,\mu\mathrm{C/m}^2}$. Negativ i midtre grenseflate og positiv ved nedre kondensatorplate, som vist i figuren.

e) Kapasitans: Kondensatoren kan betraktes som seriekopling av to kondensatorer hver med kapasitans

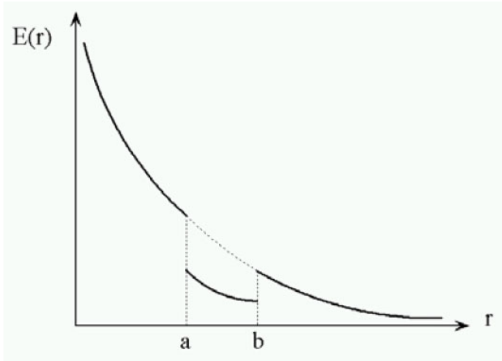
$$\begin{aligned} C_0 &= \epsilon_0 \frac{A}{d/2} = 8,854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m} \cdot \frac{10,0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{1,00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 8,854\,\mathrm{pF} \\ C_1 &= \epsilon_{\mathrm{r}1}\epsilon_0 \frac{A}{d/2} = 5,0 \cdot C_0 = 44,27\,\mathrm{pF} \\ \Rightarrow \quad C &= \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} = \frac{8,854 \cdot 44,27}{8,854 + 44,27}\,\mathrm{pF} = \underline{7,38\,\mathrm{pF}}. \end{aligned}$$

Eller kan beregnes fra definisjonen

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma \cdot A}{V} = \frac{0,738\,\mu\mathrm{C/m}^2 \cdot 10,0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{100\,\mathrm{V}} = \underline{7,38\,\mathrm{pF}}.$$

Oppgave 3. Dielektrikum som kuleskall.

På grunn av punktladningen i sentrum vil dielektrikumet polariseres. Med $q > 0$ blir resultatet en negativ indusert ladning på innsiden, dvs. ved $r = a$, og en positiv indusert ladning på utsiden, dvs. ved $r = b$. På grunn av symmetrien i problemet må dessuten disse induserte ladningene være jamt fordelt på kuleoverflatene, slik at det elektriske feltet kun blir avhengig av avstanden r fra sentrum. I områdene $r < a$ og $r > b$ kan vi selvsagt bruke Gauss' lov for E-feltet direkte, ettersom vi i begge tilfeller vet hva total nettoladning innenfor en kuleformet Gaussflate er, nemlig q. I området $a < r < b$ kjenner vi imidlertid i utgangspunktet ikke total nettoladning innenfor Gaussflata, ettersom vi ikke vet hvor stor den induserte overflateladningen ved $r = a$ er. Det vi derimot vet, for alle verdier av r, er hvor mye fri nettoladning vi har innenfor Gaussflata. La oss derfor bruke Gauss' lov for den elektriske flukstetthet $\vec{D} = D(r) \cdot \hat{\mathbf{r}}$, og til slutt bestemme $E(r)$ fra sammenhengen $D(r) = \epsilon(r)\, E(r)$, der $\epsilon(r) = \epsilon_0$ for $r < a$ og $r > b$, og $\epsilon(r) = 2\epsilon_0$ for $a < r < b$.



a) $\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = D(r) \cdot 4\pi r^2 = q \quad \Rightarrow \quad \underline{D(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2}}$ for alle r.

b) Dette gir det elektriske feltet

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{når } r < a,\ r > b \\ \dfrac{q}{8\pi\epsilon_0 r^2} & \text{når } a < r < b \end{cases}$$

På grunn av polariseringen inne i dielektrikumet reduseres altså det elektriske feltet der til halvparten av hva det ville ha vært med luft.

c) Indusert flateladning er lik polariseringen: $|\sigma_\mathrm{i}| = |P|$. $\vec{P}$ har retning utover og har absoluttverdi

$$|P| = D - \epsilon_0 E = \frac{q}{4\pi r^2} - \frac{q}{8\pi r^2} = \frac{q}{8\pi r^2}\,.$$

Da $\vec{P}$ løper fra negativ til positiv ladning må σ_i være negativ ved $r = a$ og positiv ved $r = b$:

$$\underline{\sigma_\mathrm{i}(a) \;=\; -|P(a)| \;=\; -\frac{q}{8\pi a^2}} \qquad \underline{\sigma_\mathrm{i}(b) \;=\; +|P(b)| \;=\; \frac{q}{8\pi b^2}}\,.$$

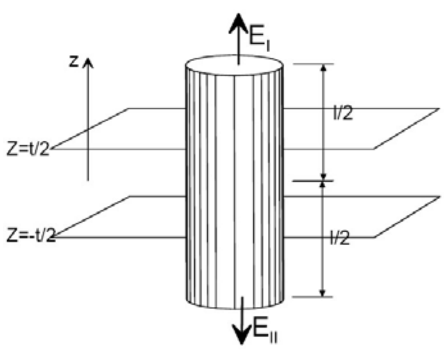
Alternativt kan man bruke Gauss' lov for E-feltet anvendt på ei Gausskule inne i dielektrikumet, som gir

$$\epsilon_0 E(r) \cdot 4\pi r^2 = q_\mathrm{tot} = q + q_\mathrm{i},$$

der q_i er indusert ladning på innsida ved $r = a$. Setter vi inn det vi fant for $E(a < r < b)$ under punkt b), blir v.side lik $q/2$, dermed $q_\mathrm{i} = -q/2$ og

$$\underline{\sigma(a) \;=\; \frac{q_\mathrm{i}}{4\pi a^2} \;=\; -\frac{q}{8\pi a^2}}\,. \qquad \underline{\sigma(b) \;=\; \frac{-q_\mathrm{i}}{4\pi b^2} \;=\; \frac{q}{8\pi b^2}}\,.$$

Oppgave 4. Dielektrisk plate.



a) Retningen på det elektriske feltet er langs z-aksen på grunn av symmetrien i problemet, med $\vec{E} = E \cdot \hat{\mathbf{k}}$ for $z > 0$ og $\vec{E} = E \cdot (-\hat{\mathbf{k}})$ for $z < 0$ (illustrert ved $E_\mathrm{I} = E_\mathrm{II} = E$ i figuren). Beregner først den elektriske feltstyrken $\vec{E}$ utenfor plata, $|z| > t/2$: Bruker Gauss' lov, med en lukket, sylindrisk Gaussflate med lengde l plassert symmetrisk om $z = 0$ (vist på figuren).

$$\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_\mathrm{encl}\,,$$

med ϵ_0 fordi en skal bruke den den permittivitet som ligger på Gaussflata. Ingen bidrag for sideflatene der feltet er parallell med flatene, men kun bidrag til fluksintegralet fra de to endeflatene, som har areal A:

$$\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 2\epsilon_0 E A\,, \tag{1}$$

Ladningen innesluttet av den valgte Gaussflata er

$$Q_\mathrm{encl} = \int_{-t/2}^{t/2} \rho(z) A \mathrm{d}z = A\rho_0 \int_{-t/2}^{t/2} \cos\left(\pi\frac{z}{t}\right) \mathrm{d}z = A\rho_0 \frac{t}{\pi}\left[\sin\left(\pi\frac{z}{t}\right)\right]_{-t/2}^{t/2} = 2A\rho_0\frac{t}{\pi}\,. \tag{2}$$

Fra kravet (1)=(2) får vi det elektriske feltet utenfor plata:

$$\underline{\vec{E} = \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{k}}} \qquad \text{for } z > t/2\,, \qquad\qquad \underline{\vec{E} = \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon_0}(-\hat{\mathbf{k}})} \qquad \text{for } z < -t/2\,. \tag{3}$$

Ved beregning av det elektriske feltet inne i plata, $|z| < t/2$, går vi fram på tilsvarende måte. Valg av Gaussflate blir som over, men den slutter innenfor plata og lengden er $2z$. Resulterende fluksintegral blir som over (konstant E i samme avstand fra $z = 0$) . Forskjellen ligger i ulik permittivitet og en annen verdi av ladningen innesluttet av den lukkede Gaussflata:

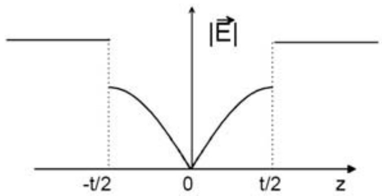
$$Q_{\rm encl} = \int_{-z}^{z} \rho(z) A \mathrm{d}z = A\rho_0 \frac{t}{\pi} \left[\sin\left(\pi\frac{z}{t}\right)\right]_{-z}^{z} = 2A\rho_0 \frac{t}{\pi} \cdot \sin\left(\pi\frac{z}{t}\right) \,,$$

og feltet blir

$$\underline{\vec{E} = \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon} \sin\left(\pi\frac{z}{t}\right) \hat{\mathbf{k}}} \qquad \text{for } |z| < t/2\,. \tag{4}$$

Formelen tar vare på fortegnet slik at feltet går i $\hat{\mathbf{k}}$-retning for $z > 0$ og i $-\hat{\mathbf{k}}$-retning for $z < 0$. For $z = \pm t/2$ er uttrykket (4) likt uttrykkene (3), men ulik ϵ.

b) Til høyre er vist skisse av absoluttverdien til det elektriske feltet. Diskontinuiteten til $|E|$ ved $|z| = t/2$ skyldes forskjell i permittivitet.



c) Med $z = 0$ som referanse er det elektriske potensialet for $0 < z < t/2$ gitt ved:

$$V(z) - V(z=0) = -\int_0^z E(z)\,\mathrm{d}z = -\int_0^z \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon} \sin\left(\pi\frac{z}{t}\right)\,\mathrm{d}z = \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon}\frac{t}{\pi}\left[\cos\left(\pi\frac{z}{t}\right)\right]_0^z = \underline{\frac{\rho_0 t^2}{\pi^2\epsilon}\left[\cos\left(\pi\frac{z}{t}\right) - 1\right]} \tag{5}$$

$V(z)$ er symmetrisk om $z = 0$, og formelen gjelder også for negativ z så lenge $|z| < t/2$.

Når $V(z)$ skal beregnes for $z > t/2$, kan vi bruke første uttrykket i (3), og får følgende.

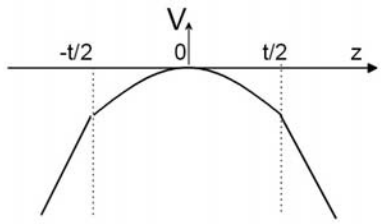
$$V(z) - V(z = t/2) = -\int_{t/2}^{z} E(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{t/2}^{z} \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon_0}\,\mathrm{d}z = \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon_0}\left(\frac{t}{2} - z\right)\,,$$

og fra (5) får vi $V(z = t/2) = -\dfrac{\rho_0 t^2}{\pi^2\epsilon}$, som gir

$$V(z) = \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon_0}\left(\frac{t}{2} - 1\right) - \frac{\rho_0 t^2}{\pi^2\epsilon} = \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon_0}\left(\frac{t}{2} - 1\right) - \frac{\rho_0 t^2}{\pi^2\epsilon} = \underline{\frac{\rho_0 t^2}{\pi}\left(\frac{1}{2\epsilon_0} - \frac{1}{\pi\epsilon}\right) - \frac{\rho_0 t}{\pi\epsilon_0} z}\,.$$

Siden $V(z)$ er symmetrisk om $z = 0$ blir uttrykket blir det samme for $z < -t/2$, men med z erstatta med $|z|$.

d) Figuren viser en skisse av det elektriske potensialet. Legg merke til at det er kontinuerlig, men den deriverte (som gir det elektriske feltet) ikke er kontinuerlig ved $|z| = t/2$.



$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 10. feb. 11.