Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4120 Matematikk 4K
Høst 2015

Løsningsforslag — Øving 7

Chapter 12.7

Fourier-transformasjon

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}\{f\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,\mathrm{d}x.$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}\right\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx}\,\mathrm{d}w.$$

Under passende betingelser (thm 3 s. 526) er

$$\mathcal{F}\{f'\}(w) = iw\mathcal{F}\{f\}(w).$$

$\boxed{1}$ Vis at $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-iwa}\mathcal{F}\{f(x)\}$.

Løsning:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(x-a)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-iwx}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{SUB: } y = x-a \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iw(y+a)}\,\mathrm{d}y \\
&= e^{-iwa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iwy}\,\mathrm{d}y \\
&= e^{-iwa}\mathcal{F}\{f(x)\}.
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Løs initialverdiproblemet

$$2u_x + 3u_t = 0, \qquad u(x,0) = f(x),$$

der Fourier-transformasjonene av f og $x \mapsto u(x,t)$ eksisterer og der

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Løsning:
Betrakt t som en parameter, og transformér:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}\left\{2u_x + 3u_t\right\}(w) \\ &= 2iw\hat{u}(w,t) + 3\hat{u}_t(w,t) \\ &\Rightarrow \\ \hat{u}_t &= -\frac{2iw}{3}\hat{u}. \end{aligned}$$

Denne ODE'en i t har løsning

$$\hat{u}(w,t) = \hat{u}(w,0)e^{-\frac{2iw}{3}t}.$$

Transformér tilbake og få

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}(w,0)e^{-\frac{2iw}{3}t}\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-iw\frac{2t}{3}}\hat{u}(w,0)\right\} \\ &= u\left(x - \frac{2t}{3}, 0\right), \qquad \text{oppgave 1}, \\ &= f\left(x - \frac{2t}{3}\right). \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Løs initialverdiproblemet

$$2tu_x + 3u_t = 0, \qquad u(x,0) = f(x),$$

der Fourier-transformasjonene av f og $x \mapsto u(x,t)$ eksisterer og der

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Løsning:
Betrakt t som en parameter, og transformér:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}\left\{2tu_x + 3u_t\right\}(w) \\ &= 2tiw\hat{u}(w,t) + 3\hat{u}_t(w,t) \\ &\Rightarrow \\ \hat{u}_t &= -\frac{2iw}{3}t\hat{u}. \end{aligned}$$

Dette er en separabel differensialligning i t med løsning

$$\hat{u}(w,t) = \hat{u}(w,0)e^{-\frac{iw}{3}t^2}.$$

Transformér tilbake og få

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}(w,0)e^{-\frac{iw}{3}t^2}\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-iw\frac{t^2}{3}}\hat{u}(w,0)\right\} \\
&= u\left(x-\frac{t^2}{3},0\right), \qquad \text{oppgave 1}, \\
&= f\left(x-\frac{t^2}{3}\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Løs initialverdiproblemet

$$u_x + u_t + u = 0, \qquad u(x,0) = f(x),$$

der Fourier-transformasjonene av f og $x \mapsto u(x,t)$ eksisterer og der

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Løsning:
Betrakt t som en parameter, og transformér:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{F}\left\{u_x + u_t + u\right\}(w) \\
&= (iw+1)\hat{u}(w,t) + \hat{u}_t(w,t) \\
&\Rightarrow \\
\hat{u}_t &= -(iw+1)\hat{u}.
\end{aligned}$$

Denne ODE'en i t har løsning

$$\hat{u}(w,t) = \hat{u}(w,0)e^{-(iw+1)t}.$$

Transformér tilbake og få

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}(w,0)e^{-(iw+1)t}\right\} \\
&= e^{-t}\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-iwt}\hat{u}(w,0)\right\} \\
&= e^{-t}u\left(x-t,0\right), \qquad \text{oppgave 1}, \\
&= e^{-t}f\left(x-t\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Løs initialverdiproblemet

$$tu_{xx} = u_t, \qquad u(x,0) = f(x),\ t \geq 0,$$

der Fourier-transformasjonene av f og $x \mapsto u(x,t)$ eksisterer og der

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Vis at løsningen kan skrives på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - st) g(s) \, \mathrm{d}s$$

og finn g.

Løsning:
Betrakt t som en parameter, og transformér:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{F}\left\{ t u_{xx} - u_t \right\}(w) \\
&= iwt\hat{u_x}(w,t) + \hat{u}_t(w,t) \\
&= -w^2 t\hat{u}(w,t) + \hat{u}_t(w,t) \\
&\Rightarrow \\
\hat{u}_t &= -w^2 t \hat{u}.
\end{aligned}$$

Dette er en separabel differensialligning i t med løsning

$$\hat{u}(w,t) = \hat{u}(w,0) e^{-\frac{w^2}{2} t^2}.$$

Transformér tilbake og få

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{ \hat{u} \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{ \hat{u}(w,0) e^{-\frac{w^2}{2} t^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Vi har at $\mathcal{F}\left\{ e^{-\frac{x^2}{2t^2}} \right\} = t e^{-\frac{w^2}{2} t^2}$ ((5) s.534 med $a = \frac{1}{2t^2}$.), så

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{t} \mathcal{F}^{-1}\left\{ \hat{u}(w,0) \widehat{e^{-\frac{x^2}{2t^2}}} \right\} \\
&= \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(x,0) * e^{-\frac{x^2}{2t^2}} \\
&= \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) * e^{-\frac{x^2}{2t^2}} \\
&= \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p) e^{-\frac{p^2}{2t^2}} \, \mathrm{d}p, \qquad \text{SUB: } p = st \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - st) e^{-\frac{s^2}{2}} \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Dvs. $g(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$.

Chapter 13.1 Komplekse tall

$\boxed{\text{13.1:2}}$ Multiplikasjon av et kompleks tall $z = x + iy$ med i tilsvarer geometrisk å rotere punktet (x, y) med $90°$. Verifisér dette ved å tegne z og iz for

a) $z = 1 + i$.

b) $z = -1 + 2i$.

c) $z = 4 - 3i$.

Løsning: a)

$$iz = i(1 + i) = -1 + i.$$

Løsning: b)

$$iz = i(-1 + 2i) = -2 - i.$$

Løsning: c)

$$iz = i(4 - 3i) = 3 - 4i.$$

$\boxed{\text{13.1:3}}$ La

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$$

og la $z = x + iy$.

Vis at $z = z_1/z_2$ (som betyr $z_1 = zz_2$ per definisjon) hvis og bare hvis

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{0.1}$$

Løsning:

$$\begin{aligned} z_1 &= zz_2 \\ &\Longleftrightarrow \\ x_1 + iy_1 &= (x + iy)(x_2 + iy_2) \\ &= xx_2 - yy_2 + i(xy_2 + yx_2) \\ &\Longleftrightarrow \\ \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denne ligningen har en unik løsning fordi determinanten $x_2^2 + y_2^2 > 0$ pga. antagelsen $z_2 \neq 0$. Løsningen er

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1y_2 \\ x_2y_1 - x_1y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

F.eks. er

$$\begin{aligned}\frac{26-18i}{6-2i} &= \frac{26-18i}{6-2i}\cdot\frac{6+2i}{6+2i}\\ &= \frac{26\cdot 6+18\cdot 2+i(26\cdot 2-18\cdot 6)}{6^2+2^2+0}\\ &= \frac{192-56i}{40}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{13.1:14}}$ Den komplekskonjugerte:

$$\overline{z} = \overline{x+iy} := x - iy.$$

Finn $\overline{z_1}/\overline{z_2}$ og $\overline{(z_1/z_2)}$ når $z_1 = -2+5i$ og $z_2 = 3-i$.

Løsning:
For det første er $\overline{z_1}/\overline{z_2} = \overline{(z_1/z_2)}$, fordi hvis $z = x+iy$ og $w = u+iv$, så er

$$\overline{z}\,\overline{w} = (x-iy)(u-iv) = xu - yv - i(xv+yu) = \overline{zw}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2}, \qquad z_2 \neq 0,\\ &\Rightarrow\\ z_1 &= zz_2\\ &\Rightarrow\\ \overline{z_1} &= \overline{zz_2} = \overline{z}\,\overline{z_2}\\ &\Rightarrow\\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{z} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.\end{aligned}$$

Vi har

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\\ &= \frac{(-2+5i)(3+i)}{|z_2|^2}\\ &= \frac{-6-5+i(-2+15)}{10}\\ &= \frac{-11+13i}{10}.\end{aligned}$$

Dermed er

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{11+13i}{10}.$$

Chapter 13.2

Polar koordinater: La $z = x + iy$ og la $r = |z|$ og la θ være vinkelen mellom vektoren (x, y) og den positive x-aksen. Da er

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

og

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$\boxed{\text{13.2:1}}$ Finn polarkoordinatene til $z = 1 + i$.

Løsning:
Vi har $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ og $\theta = \pi/4$. Dette gir

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4).$$

$\boxed{\text{13.2:4}}$ Finn polarkoordinatene til $z = -4$.

Løsning:
Vi har $r = |z| = 4$ og $\theta = \pi$.

$\boxed{\text{13.2:8}}$ Finn polarkoordinatene til $z = \frac{7+4i}{3-2i}$.

Løsning:

$$\begin{aligned} z &= \frac{7+4i}{3-2i} \\ &= \frac{(7+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} \\ &= \frac{21 - 8 + i(14+12)}{3^2 + 2^2} \\ &= \frac{13 + 26i}{13} = 1 + 2i. \end{aligned}$$

Dette tallet ligger i første kvadrant, så

$$\theta = \arctan y/x = \arctan 2 \approx 1.11.$$

Modulusen er

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

$\boxed{\text{13.2:11}}$ Finn prinsipalverien av argumentet til tallene $z = \sqrt{3} \pm i$.

Løsning:
Tallet $\sqrt{3} + i$ ligger i første kvadrant, så

$$\operatorname{Arg}(\sqrt{3} + i) = \arctan 1/\sqrt{3} = \pi/6.$$

Ved symmetri er

$$\operatorname{Arg}(\sqrt{3} - i) = -\pi/6.$$

$\boxed{\text{13.2:21}}$ Finn alle verdiene til

$$\sqrt[3]{1 - i}.$$

Løsning:
På polarform er

$$z := 1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)).$$

Hvis $w = r(\cos\phi + i \sin\pi)$ er en rot, så er

$$r^3(\cos 3\phi + i \sin 3\pi) = w^3 = z = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)).$$

Dvs. $r = \sqrt[6]{2}$ og $3\phi = -\pi/4 + n2\pi$. De tre distinkte verdiene er gitt ved

$$\phi_n := \left(\frac{2}{3}n - \frac{1}{12}\right)\pi, \qquad n = 0, 1, 2.$$

$\boxed{\text{13.2:25}}$ Finn alle verdiene til

$$\sqrt[4]{i}.$$

Løsning:
På polarform er

$$z := i = 1 \cdot (\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)).$$

Hvis $w = r(\cos\phi + i \sin\pi)$ er en rot, så er

$$r^4(\cos 4\phi + i \sin 4\pi) = w^4 = z = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2).$$

Dvs. $r = 1$ og $4\phi = \pi/2 + n2\pi$. De fire distinkte verdiene er gitt ved

$$\phi_n := \left(\frac{1}{8} + \frac{n}{2}\right)\pi, \qquad n = 0, 1, 2, 3.$$