NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4120 Matematikk 4K
Høsten 2014

Løsningsforslag - Øving 7

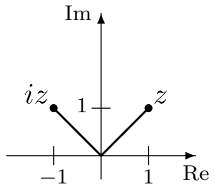
Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.1

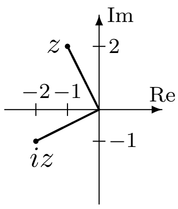
2 Vi skisserer z og iz og regner ut skalarproduktet av vektorene for ulike verdier av z for å vise at iz tilsvarer en $\pi/2$ radianers rotasjon av z i det komplekse plan.

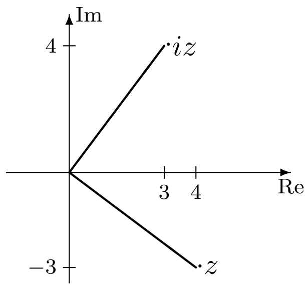
1)
$$z = 1 + i$$
$$iz = -1 + i$$
$$[1,1] \cdot [-1,1] = 0$$

2)
$$z = -1 + 2i$$
$$iz = -2 - i$$
$$[-1,2] \cdot [-2,-1] = 0$$

3)
$$z = 4 - 3i$$
$$iz = 3 + 4i$$
$$[4,-3] \cdot [3,4] = 0$$







5 Tallet $z = x + iy$ er rent imaginært hvis og bare hvis $\Re z = 0$. Men $\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, så z er rent imaginært hvis og bare hvis $\bar{z} = -z$.

6 Vi skal vise at hvis produktet $z_1 z_2 = 0$, så må vi enten ha at $z_1 = 0$ eller at $z_2 = 0$.

Hvis $z_1 \neq 0$, kan vi multiplisere $z_1 z_2 = 0$ på begge sider med z_1^{-1} og få $z_2 = 0$. Tilsvarende får vi at $z_1 = 0$ hvis $z_2 \neq 0$.

Alternativt: Vi antar at $z_1 \neq 0$ og at $z_1 z_2 = 0$. Da vil

$$|z_2| = \frac{|z_1||z_2|}{|z_1|} = \frac{|z_1 z_2|}{|z_1|} = \frac{0}{|z_1|} = 0$$

Når absoluttverdien $|z_2| = 0$ er også $z_2 = 0$. Tilsvarende hvis $z_2 \neq 0$.

9

$$z_1^2 = (-2+5i)^2 = (-2)^2 + 2(-2)5i + (5i)^2 = 4 - 25 - 20i$$
$$\mathrm{Re}(z_1^2) = -21$$
$$(\mathrm{Re}\, z_1)^2 = (-2)^2 = 4$$

14

$$\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}} = \frac{-2-5i}{3+i}\frac{3-i}{3-i} = \frac{1}{10}(-11-13i)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+5i}{3-i}\frac{3+i}{3+i} = \frac{1}{10}(-11+13i) \to$$
$$\overline{z_1/z_2} = \frac{1}{10}(-11-13i)$$

$\boxed{16}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\
\implies \operatorname{Im}\frac{1}{z} &= \frac{-y}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^2 &= (x+iy)^2 = x^2+2ixy+i^2y^2 = (x^2-y^2)+i2xy \\
\frac{1}{z^2} &= \frac{\overline{z^2}}{z^2(\overline{z^2})} = \frac{(x^2-y^2)-i2xy}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} \\
\implies \operatorname{Im}\frac{1}{z^2} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

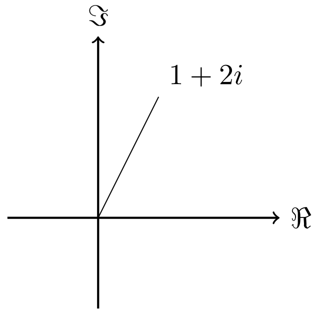
Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.2

$\boxed{8}$

$$\frac{7+4i}{3-2i} = \frac{7+4i}{3-2i}\frac{3+2i}{3+2i} = 1+2i$$

$r = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ og $\theta = \arctan(2)$ så vi får

$$\sqrt{5}(\cos(\arctan(2)) + i\sin(\arctan(2)))$$



$\boxed{16}$

$$\begin{aligned}
6e^{i\frac{\pi}{3}} &= 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\
&= 3 + 3\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

$\boxed{21}$

$$\begin{aligned}
|1-i| &= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(1-i) = \arctan\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4} \\
\implies 1-i &= \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi\right)}, \quad n\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

La $w = \sqrt[3]{1-i} = Re^{i\phi}$

$$\begin{aligned} w^3 &= 1-i \\ \iff R^3 e^{i3\phi} &= \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi\right)} \\ \implies R^3 &= \sqrt{2}, \quad 3\phi = -\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi \\ \implies w &= 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+n\cdot\frac{2}{3}\pi\right)}, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dermed finnes det tre ulike røtter. F.eks med $n = 0, 1, 2$:

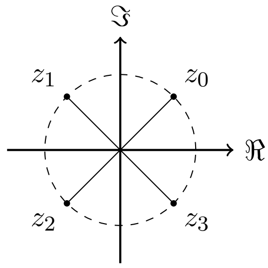
$$\sqrt[3]{1-i} = \{2^{\frac{1}{6}} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{15\pi}{12}}\}$$

24 Polarformen av -4 er $4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4e^{i\pi}$, så vi bruker formelen øverst på side 611 med $r = 4, \theta = \pi$ og $n = 4$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi(1+2k)}{4} + i\sin\frac{\pi(1+2k)}{4}\right)$$

for $n = 0, 1, 2, 3$. Det gir oss røttene

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+i \\ z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1+i \\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1-i \\ z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1-i \end{aligned}$$



28 Skriv som fullstendig kvadrat:

$$z^2 - (6-2i)z = \left(z - \frac{6-2i}{2}\right)^2 - \left(\frac{6-2i}{2}\right)^2$$

Siden $(3-i)^2 = 8-6i$, er

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - (6-2i)z + 17 - 6i \\ &= (z-3+i)^2 + 9 \end{aligned}$$

La

$$w = z - 3 + i = Re^{i\phi}$$

Da er

$$\begin{aligned} & w^2 = -9 \\ \implies & R^2 e^{2i\phi} = 9e^{-i(\pi+n\cdot 2\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \implies & R^2 = 9, \quad 2\phi = \pi + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \implies & R = 3, \quad \phi = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Det vil si at w har to distinkte løsninger (f.eks $n = 0$ og $n = 1$)

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i \\
w_2 &= 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = -3i
\end{aligned}
$$

og dermed har vi to løsninger for z

$$
\begin{aligned}
z_1 &= w_1 + 3 - i = 3 + 2i \\
z_2 &= w_2 + 3 - i = 3 - 4i
\end{aligned}
$$

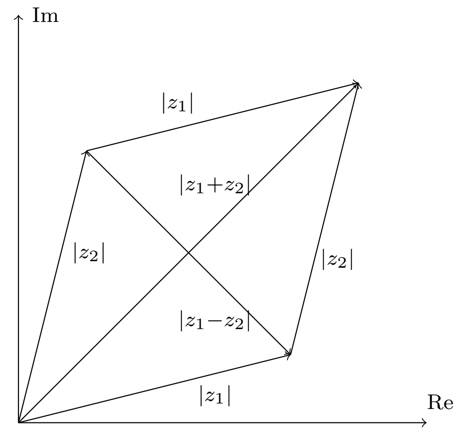
34 Vi skal vise at $|\Re z| \leq |z|$ og $|\Im z| \leq |z|$. Vi skriver z på formen $z = x + iy$, da $\Re z = x$, $\Im z = y$ og $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vi får

$$
|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{og} \quad |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.
$$

35 Vi skal vise *parallellogramlikheten* $|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.
Vi har at

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} \\
&= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.
\end{aligned}
$$

For å forklare navnet på likheten ser vi for oss et parallellogram utspent av vektorene z_1 og z_2. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ representerer summen av kvadratene av lengdene av den korte diagonalen $|z_1 - z_2|$ og den lange diagonalen $|z_1 + z_2|$. Summen av kvadratene av sidene i parallellogrammet er $2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Vi har vist at disse uttrykkene er like store. Derav navnet *parallellogramlikheten*.



Alternativt: Vi kunne også ha vist *parallellogramlikheten* slik

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 \\
&\quad\; + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 \\
&= 2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) \\
2(|z_1|^2 + |z_2|^2) &= 2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2).
\end{aligned}
$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.3

6 Siden

$$
\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}
$$

er

$$1 > \mathrm{Re}\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

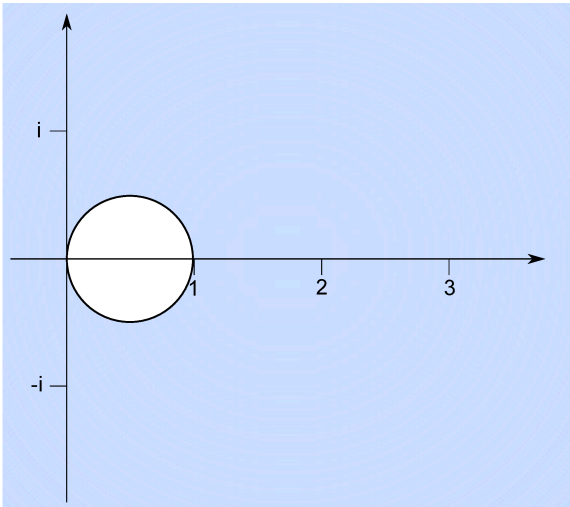
eller ekvivalent

$$x^2 + y^2 - x > 0$$

Fullfører kvadratene og får

$$(x - 1/2)^2 + y^2 > (1/2)^2$$

Dvs. $\mathrm{Re}(1/z) < 1$ er komplementet til en lukket sirkeldisk med sentrum $1/2 + 0i$ og radius $1/2$.



14

$$f(z) = \frac{\mathrm{Re}\, z^2}{|z|} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z \neq 0; \quad f(0) = 0$$

$$|f(z) - f(0)| = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

For alle $\epsilon > 0$, la $\delta = \epsilon$. Det følger at

$$|z - 0| < \delta = \epsilon \implies |f(z) - f(0)| < \epsilon$$

Dvs.

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0)$$

og f er kontinuerlig i $z = 0$.

16

$$f(z) = \frac{\mathrm{Im}(z^2)}{|z|^2} \quad z \neq 0, \qquad f(0) = 0$$

For at $f(z)$ skal være kontinuerlig i punktet $z = 0$ må

$$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0)$$

Skriver om $f(z)$ med $z = x + yi$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\mathrm{Im}(x^2 + 2xyi + y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$=> \quad \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right)$$

For at denne grensen skal eksistrere må den ha samme verdi for alle mulige kurver gjennom origo. Ser at langs kurvene $x = 0$ og $y = 0$ blir grenseverdien 0, men for eksempel langs kurven $x = y$ blir grenseverdien:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2xx}{x^2 + x^2} \right) = 1$$

Dermed eksisterer ikke grensen, og $f(z)$ er ikke kontinuerlig i $z = 0$.

Alternativ metode med (r, θ):

$$z = r\mathrm{e}^{\theta i}$$

$$\begin{aligned} => \quad f(z) &= \frac{\mathrm{Im}(r^2 \mathrm{e}^{2\theta i})}{r^2} \\ &= \frac{\mathrm{Im}(r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))}{r^2} \\ &= \sin(2\theta) \end{aligned}$$

Som gir

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{r\to 0}(\sin(2\theta)) \\ &= \sin(2\theta) \end{aligned}$$

Denne grensen varierer med θ, som betyr at grenseverdien ikke eksisterer og dermed at $f(z)$ ikke er kontinuerlig i $z = 0$.

18

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

Deriverer på vanlig måte:

$$f'(z) = \frac{1 \cdot (z+i) - (z-i) \cdot 1}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

$$=> \quad f'(i) = \frac{2i}{(2i)^2} = \underline{\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i}$$

Alternativ metode: Kan bruke definisjonen av den deriverte:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(i + \Delta z - i)/(i + \Delta z + i) - 0}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2i + \Delta z} \\ &= \underline{\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i} \end{aligned}$$