FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.
Veiledning: 5. og 8. oktober. Innleveringsfrist: Fredag 9. oktober kl 16.

Øving 7

Oppgave 1

a) Vis, ved å ta utgangspunkt i fundamentalrelasjonen $TdS = dH - Vdp$, at

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Dette er entalpi-analogen til ligning 4.18 i PCH. Ligning 4.18 var svært nyttig når en skulle finne et uttrykk for entropi-endringen i en generell reversibel prosess i et gass-system, der en kontrollerer temperatur og volum. Entalpi-motstykket til ligning 4.18 i PCH er en nyttig relasjon for systemer med spesifisert trykk. Den er også svært nyttig for å finne tilsvarende uttrykk i magnetiske systemer. Dette skyldes at det finnes en analogi mellom gass- og magnetsystemer der en assosierer trykk med ytre magnetfelt, og volum med magnetisering. I et magnetisk system er det ytre påtrykt magnetfelt som en vanligvis kontrollerer, mens magnetiseringen er en respons på ytre felt. Derfor er en analogi til systemer med spesifisert trykk, istedet for spesifisert volum, det mest hensiktsmessige. Ligningen over er nyttig for å finne uttrykk for å beregne entropi-endringen i en generell reversibel prosess i et gass-system, der en kan kontrollere trykk og temperatur. Magnet-analogen til ligningen over er svært nyttig når en skal beregne entropi-endringen til i en generell reversibel prosess i et magnetsystem, der en kontrollerer temperatur og ytre magnetfelt.

b) En kobberblokk har volumet $V = 1\ \mathrm{cm}^3$ ved temperaturen $T = 100$ K og trykket $p_1 = 1.1 \cdot 10^5$ Pa. Blokken blir så komprimert reversibelt og isotermt til trykket $p_2 = 1.3 \cdot 10^8$ Pa. For Cu er isoterm kompressibilitet og kubisk utvidelseskoeffisient henholdsvis

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0.721 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Pa}^{-1} \quad \text{og} \quad \alpha_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 50.4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}.$$

Beregn arbeidet W som utføres på Cu-blokken ved denne kompresjonen. (Anta at κ_T og α_V er konstante og at endringen i V er liten ved denne kompresjonen.)

c) Hva blir endringen i entropi ΔS for Cu-blokken ved denne isoterme kompresjonen, og hvor stor blir endringen i indre energi ΔU? [Hint: Benytt resultatet fra punkt a) til å bestemme ΔS.] (Svar: $\Delta S = -6.55 \cdot 10^{-3}$ J/K.)

Oppgave 2

a) En ideell gass kjøles fra temperaturen T til T_0. Omgivelsenes temperatur er hele tiden T_0. Start- og slutt-tilstanden har samme volum ($\Delta V = 0$). Vis at det maksimale arbeid som er mulig å få ut av gassen er

$$W_{\max} = C_V(T - T_0) - C_V T_0 \ln\frac{T}{T_0}.$$

b) Hvor mye varme avgis, og hva er det maksimale arbeidet når gassen er ett mol toatomig gass, og avkjølingen er fra 100°C til 20°C? (Svar: $W_{\max} = 193$ J.)

c) En måte å ta ut det maksimale arbeidet på er å la en Carnot-maskin virke mellom den øvre avtagende temperaturen og den faste T_0. Vis at dette gir det samme arbeidet W_{max}.

d) En annen måte å ta ut det maksimale arbeidet på er først å ekspandere gassen adiabatisk slik at temperaturen synker til T_0. Deretter komprimeres den isotermt tilbake til opprinnelig volum. Vis at dette også gir samme arbeid W_{max}.

Oppgave 3

I denne oppgaven ser vi på en ideell paramagnet med N ikke-vekselvirkende små atomære nagetiske moment (spinn) i et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}$. Hvert spinn kunne peke "opp" eller "ned" relativt det ytre feltet, slik at partisjonsfunksjonen (pr spinn) ble $z = 2\cosh(\mu_B B/kT)$, og magnetiseringen (magnetisk moment pr volumenhet) ble $M = (N\mu_B/V)\tanh(\mu_B B/kT)$. Hvis feltet er svakt, dvs $\mu_B B \ll kT$, gir dette lineær respons, $M \sim B/T$, dvs Curie's lov.

I denne oppgaven skal vi studere entropien til en slik ideell paramagnet. Siktemålet er deretter å kunne beskrive såkalt *adiabatisk demagnetisering.*

Nå lar vi m angi midlere magnetisk moment pr spinn (eller pr partikkel, om du vil), men skalert med faktoren μ_B slik at et gitt magnetisk moment har verdien $+1$ eller -1, og m blir en dimensjonsløs størrelse. Videre lar vi $h = \mu_B B$ representere det ytre magnetfeltet, dvs h blir en størrelse med enhet som energi. Dermed har vi

$$m = \tanh \beta h \quad , \quad z = 2\cosh \beta h \quad (\beta \equiv 1/kT),$$

og arbeidet utført av spinnsystemet, pr spinn, når midlere magnetisk moment, pr spinn, endres fra m til $m + dm$ blir $đw = -h\, dm$.

a) Vis at entropien σ kan bestemmes fra tilstandssumen z,

$$\sigma = k\frac{\partial}{\partial T}(T \ln z)\,.$$

Oppgitt: $f = -kT\ln z$, $f = u - T\sigma$, $Td\sigma = du + p\,dv$ (med $f, z, u, \sigma, v =$ hhv Helmholtz fri energi, partisjonsfunksjon, indre energi, entropi og volum, alle størrelser pr spinn).
Tips: Utnytt analogien $p\,dv \to -h\,dm$.

b) Med kjent partisjonsfunksjon z kan dermed entropien σ bestemmes. Regn ut σ, i første omgang som funksjon av h og β. Du observerer nå at σ kun avhenger av *produktet* βh, og siden midlere magnetiske moment m også er en funksjon av produktet βh, innser du at entropien må kunne skrives som en funksjon av m alene, $\sigma = \sigma(m)$. Eliminer βh fra $\sigma(\beta h)$ ved å invertere $m = \tanh(\beta h)$. Vis at dette gir $\beta h = \frac{1}{2}\ln[(1+m)/(1-m)]$. Vis deretter at entropien blir

$$\sigma(m) = k\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right].$$

c) Alternativt kan entropien bestemmes direkte fra Boltzmanns prinsipp, $S = N\sigma = k\ln W$. Anta at et antall N_+ og N_- spinn peker henholdsvis med og mot magnetfeltet. Totalt magnetisk moment blir dermed $Nm = N_+ - N_-$. Samtidig har vi selvsagt $N = N_+ + N_-$. Beregn antall mikrotilstander W som er forenlig med et gitt magnetisk moment Nm (dvs med $Nm = N_+ - N_-$ fast) og vis med det at entropien blir som i punkt *b*.
Oppgitt: $\ln N! = N\ln N - N$ når $N \to \infty$.

d) Et spinnsystem som dette kan benyttes til å oppnå svært lave temperaturer ved å bruke adiabatisk demagnetisering. Et kraftig magnetfelt h_2 settes på isotermt ved en (forholdsvis lav) starttemperatur T_2. Deretter fjernes den termiske koblingen til omgivelsene (varmereservoaret med temperatur T_2), og magnetfeltet slås av adiabatisk. I praksis, på grunn av en svak kobling mellom spinnene, ender en opp med et effektivt magnetfelt $h_1 > 0$ (og ikke $h_1 = 0$). Hva blir resulterende temperatur T_1? [Vi antar at andre bidrag til entropien kan neglisjeres. For lave temperaturer T er spesifikk varme fra kvantiserte gittervibrasjoner $C \propto T^3$, slik at bidraget til entropien herfra, $\int (C/T)\,dT$ kan neglisjeres.]