Chapter 15.1

$\boxed{\text{15.1:16}}$ Er rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(20+30i)^n}{n!}$$

konvergent eller divergent?

Løsning:
La $z_n := \frac{(20+30i)^n}{n!}$. Da er

$$\begin{aligned}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| &= \frac{|20+30i|^{n+1}n!}{|20+30i|^n(n+1)!} \\ &= \frac{|20+30i|}{n+1} \to 0 < 1\end{aligned}$$

når $n \to \infty$. Så rekken konvergerer (absolutt) ved forholdstesten (ratio test).

$\boxed{\text{15.1:17}}$ Er rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\ln n}$$

konvergent eller divergent?

Løsning:
Ettersom $(-i)^{2n} = (-1)^n$ og $(-i)^{2n-1} = i(-1)^n$, vil annenhvert ledd i rekken være reelt og imaginært. Realdelen og imaginærdelen har skiftende fortegn og vil dermed konvergere ved alternerende rekketesten. Dvs. Rekken konvergerer (betinget) ved teorem 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln 2n} + i\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n-1)}.$$

$\boxed{\text{15.1:18}}$ Er rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{i}{4}\right)^n$$

konvergent eller divergent?

Løsning:
La $z_n := n^2\left(\frac{i}{4}\right)^n$. Da er $|z_n| = \frac{n^2}{4^n}$ og rekken konvergerer ved forholdstesten fordi

$$\begin{aligned}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| &= \frac{(n+1)^2 4^n}{n^2 4^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2} \to \frac{1}{4} < 1.\end{aligned}$$

Chapter 15.2

Cauchy-Hadamard: Potensrekken $\sum a_n(z-z_0)^n$ har konvergensradius R gitt ved

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

såfremt grensen eksisterer.

$\boxed{\text{15.2:5}}$ Vis at hvis $\sum a_n z^n$ har konvergensradius $R < \infty$, så har rekken $\sum a_n z^{2n}$ konvergensradius $\sqrt{R}$.

Løsning:
Vi bruker teorem (1):

Rekken $\sum a_n z^n$ konvergerer for alle $|z| < R$. La $|z| < \sqrt{R}$. Da vil $\sum a_n z^{2n} = \sum a_n (z^2)^n$ konvergere fordi $|z|^2 < R$.

Rekken $\sum a_n z^n$ divergerer for alle $|z| > R$. La $|z| > \sqrt{R}$. Da vil $\sum a_n z^{2n} = \sum a_n (z^2)^n$ divergere fordi $|z|^2 > R$.

Altså har rekken $\sum a_n z^{2n}$ konvergensradius $\sqrt{R}$.

$\boxed{\text{15.2:13}}$ Finn sentrum, z_0, og radius, R, for konvergensdisken til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} 16^n (z+i)^{4n}.$$

Løsning:
Vi ser at sentrum til disken ligger i $z_0 = -i$. Videre er

$$\begin{gathered}\left|\frac{16^{n+1}(z+i)^{4(n+1)}}{16^n(z+i)^{4n}}\right| = 16|z+i|^4 \\ < 1 \\ \iff \\ |z+i| < \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}\end{gathered}$$

og konvergensradiusen er $R = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{15.2:15}}$ Finn sentrum, z_0, og radius, R, for konvergensdisken til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} (z-2i)^n.$$

Løsning:
Vi ser at sentrum til disken ligger i $z_0 = 2i$. Videre er

$$\begin{aligned}\left| \frac{(2n+2)!4^n(n!)^2}{(2n)!4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{(z-2i)^{n+1}}{(z-2i)^n} \right| &= |z-2i| \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} \\ &\to |z-2i|\end{aligned}$$

når $n \to \infty$ og dermed er $R = 1$.

Chapter 15.3

La potensrekken $\sum a_n z^n$ ha konvergensradius R.

Teorem 3: Den leddvis *deriverte* rekken $\sum n a_n z^{n-1}$ har konvergensradius R.

Teorem 4: Den leddvis *integrerte* rekken $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ har konvergensradius R.

$\boxed{\text{15.3:5}}$ Finn konvergensradiusen til potensrekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^n} (z-2i)^n$$

på to måter:

a) ved Cauchy-Hadamard, og

b) fra en rekke med enklere ledd ved å bruke Teorem 3 eller Teorem 4.

Løsning: a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n4^n}{4^{n+1}n(n-1)} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Dvs. $R = 4$. **Løsning: b)**
Vi ser at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^n}(z-2i)^n = (z-2i)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^n}(z-2i)^{n-2}$$

der rekken er den andrederiverte av $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{4^n}$ med konvergensradius 4.

$\boxed{15.3{:}8}$ Finn konvergensradiusen til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^n$$

på to måter:

a) ved Cauchy-Hadamard, og

b) fra en rekke med enklere ledd ved å bruke Teorem 3 eller Teorem 4.

Løsning: a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n(n+1)}{(n+1)(n+2)3^n} \\
&= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Dvs. $R = \frac{1}{3}$.

Løsning: b)
Vi ser at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)(n+2)} z^{n+1}$$

som er integralet av

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n+2} z^n = \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} z^{n+1}$$

der rekken igjen er integralet av $\sum 3^n z^n$ med konvergensradius 1/3.

$\boxed{15.3{:}10}$ Finn konvergensradiusen til potensrekken

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

på to måter:

a) ved Cauchy-Hadamard, og

b) fra en rekke med enklere ledd ved å bruke Teorem 3 eller Teorem 4.

Løsning: a)
Vi har at binomialkoeffisientene er gitt ved $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, så

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n+1}{k}2^n}{\binom{n}{k}2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n-k)!k!}{(n+1-k)!k!n!} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+1-k} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dvs. $R = 2$.

Løsning: b)
Den geometriske rekken $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ har konvergensradius 2. Vi ser at

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{2}\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^{n-1}, \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{z}{2}\right)^n &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2^n}z^{n-2}, \\
&\vdots \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left(\frac{z}{2}\right)^n &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{2^n}z^{n-k}.
\end{aligned}$$

Binomialkoeffisientene kan også skrives som $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Dermed vil også potensrekken

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{z}{2}\right)^n &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{z^n}{2^n} \\
&= \frac{z^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{2^n}z^{n-k} \\
&= \frac{z^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left(\frac{z}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

ha konvergensradius lik 2.

Chapter 15.4

Taylor-rekker:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

$\boxed{\text{15.4:3}}$ Finn Maclaurin-rekken og dens konvergensradius til funksjonen

$$f(z) = \sin\frac{z^2}{2}.$$

Løsning:
Vi vet at

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

så

$$\begin{aligned}
\sin\frac{z^2}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{z^2}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{15.4:5}}$ Finn Maclaurin-rekken og dens konvergensradius til funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{8+z^4}.$$

Løsning:
Vi vet at

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1,$$

så

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8+z^4} &= \frac{1}{8}\frac{1}{1-\left(-\frac{z^4}{8}\right)} \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z^4}{8}\right)^n \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}z^{4n}.
\end{aligned}$$

Rekken konvergerer for $\left|-\frac{z^4}{8}\right| < 1$. Dvs. for $|z| < 8^{1/4}$.

$\boxed{\text{15.4:8}}$ Finn Maclaurin-rekken og dens konvergensradius til funksjonen

$$f(z) = \sin^2 z.$$

Løsning:
Vi har at

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

så

$$\begin{aligned}
\sin^2 z &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2z\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$