Løsningsforslag til øving 2

Oppgave 1

a) Vi bruker ganske enkelt definisjonene av α_V og κ_T og deriverer som angitt i oppgaven:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \alpha_V}{\partial p}\right)_T &= \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial T} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial T} \\ -\left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_p &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial p} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial p}\end{aligned}$$

Følgelig er

$$\left(\frac{\partial \alpha_V}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_p .$$

b) Analogt volumutvidelseskoeffisienten, er den lineære utvidelseskoeffisienten gitt ved

$$\alpha_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right).$$

Diameteren øker ved oppvarming fra minus ti til ca pluss tjue grader, og den lineære utvidelseskoeffisienten avgjør med hvor mye:

$$d(20) = d(-10)\cdot(1 + 0.000013\cdot 30) = 10.004\,\text{cm}.$$

Ikke all verden ..

Oppgave 2

a) For ideell gass er $p(T,V) = nRT/V$ og $T(p,V) = pV/nR$, slik at $\partial p/\partial T = nR/V$ og $(\partial T/\partial p)^{-1} = (V/nR)^{-1} = nR/V$.

b) Hvis $p = p(T,V)$, er differensialet dp gitt som

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV.$$

Hvis nå p holdes konstant, er $dp = 0$, og divisjon av ligningen med dT gir

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{dV}{dT}\right)_p .$$

Hvis $V = V(T,p)$, er det ingen forskjell på $(dV/dT)_p$ og $(\partial V/\partial T)_p$, og hvis vi i tillegg benytter sammenhengen fra *a*) og ordner litt, har vi det ønskede resultatet

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1.$$

c) Endring av trykket, Δp, ved en liten endring i temperaturen, ΔT, er ved konstant volum gitt ved

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T.$$

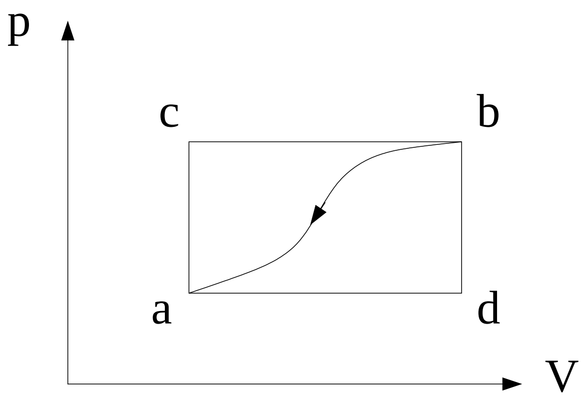
For å bestemme den deriverte benyttes relasjonen fra *b*),

$$-1 = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V (-V\kappa_T)\left(\frac{1}{V\alpha_V}\right),$$

der $\kappa_T = -(\partial V/\partial p)_T/V$ og $\alpha_V = (\partial V/\partial T)_p/V = (\partial T/\partial V)_p^{-1}/V$. For hver grad temperaturstigning blir dermed

$$\Delta p = \frac{\alpha_V}{\kappa_T}\Delta T = \frac{48.5\cdot 10^{-6}}{7.7\cdot 10^{-12}}\cdot 1\ \text{Pa} = 6.3\ \text{MPa} \simeq 62\ \text{atm}.$$

Oppgave 3



Den indre energien U til et system er bestemt av tilstanden. Dette er ikke tilfelle med tilført varme Q og utført arbeid W, men energibevarelse (1. hovedsetning) er oppfylt. Mottatt varme langs veien acb er

$$Q_{acb} = U_b - U_a + W_{acb},$$

slik at endringen i indre energi blir

$$\Delta U_{ab} = U_b - U_a = Q_{acb} - W_{acb} = (80 - 30)\ \mathrm{J} = 50\ \mathrm{J}.$$

a) Varmemengden som systemet opptar langs veien adb blir derfor

$$Q_{adb} = \Delta U_{ab} + W_{adb} = 50 + 10 = 60\ \mathrm{J}.$$

b) Mottatt arbeid 20 J betyr utført arbeid $W_{ba} = -20$ J. Mottatt varme under prosessen $b \to a$ er følgelig

$$Q_{ba} = \Delta U_{ba} + W_{ba} = -\Delta U_{ab} + W_{ba} = -50 - 20 = -70\ \mathrm{J}.$$

Dette betyr at systemet avgir varmemengden 70 J under prosessen fra b til a.

c) Ved prosessen db utføres det ikke noe arbeid da volumet er konstant, dvs $W_{db} = 0$, og $W_{ad} = W_{adb} = 10$ J. Mottatt varmemengde under prosessen ad blir følgelig

$$Q_{ad} = U_d - U_a + W_{ad} = 40 - 0 + 10 = 50\ \mathrm{J}.$$

Ved prosessen db blir så den mottatte varmemengden

$$Q_{db} = Q_{adb} - Q_{ad} = 60 - 50 = 10\ \mathrm{J}.$$

Oppgave 4

Tilstandsligning for n mol ideell gass:

$$pV = nRT.$$

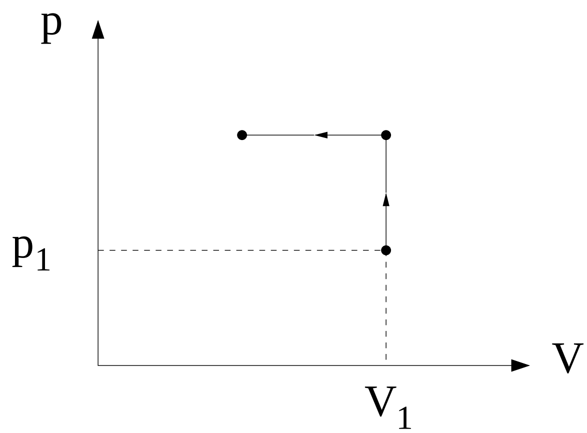
Utført arbeid:

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= nRT\ \ln\frac{V_2}{V_1} = 2 \cdot 8.314 \cdot 300 \cdot \ln 2 = 3458\,\mathrm{J} \simeq 3.46\ \mathrm{kJ}. \end{aligned}$$

For ideell gass er indre energi U en funksjon av temperaturen alene. Siden T er uendret langs en isoterm, vil U være uendret, dvs $\Delta U = 0$. Tilført varme er følgelig

$$Q = \Delta U + W = W = 3.46\ \mathrm{kJ}.$$

Oppgave 5



Tilstandsligning: $pV = nRT$. En dobling av temperaturen, $T_1 \to T_2 = 2T_1$, ved konstant volum, $V_2 = V_1$, gir trykket

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{2nRT_1}{V_1} = 2p_1.$$

Avkjøling tilbake til T_1, uten å endre trykket, gir volumet

$$V_2 = \frac{nRT_1}{p_2} = \frac{nRT_1}{2p_1} = \frac{1}{2}V_1.$$

Utført arbeid (dvs på omgivelsene):

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} p_2\,dV = (V_2 - V_1)p_2 = -p_1V_1.$$

Arbeid gjort på gassen:

$$-W = p_1V_1.$$