

Øving 12:
Høst 2014

Oppgave 1:

Det komplekse potensialet

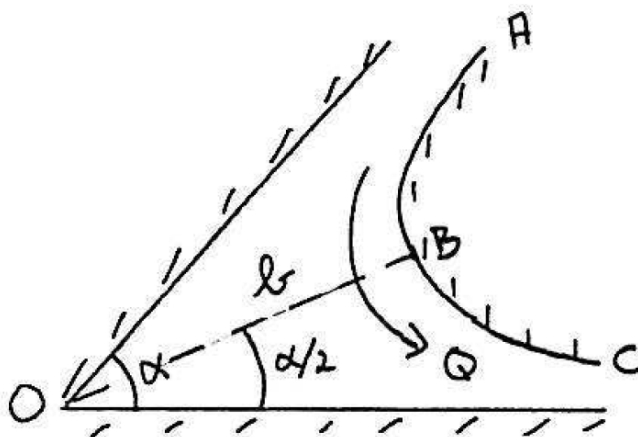
$$w(z) = Uz^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (1)$$

er gitt, hvor $U(> 0)$ er en konstant. α er en gitt vinkel i området $0 < \alpha < \pi/2$. Potensialet beskriver en todimensjonal ideell strømning inne i en kile med åpningsvinkel α .

a

Sett $z = r \exp(i\theta)$ og finn hastighetspotensialet Φ og strømfunksjonen Ψ , samt hastighetskomponentene v_r og v_θ ; alle som funksjoner av r og θ . Skisser strømbildet.

b



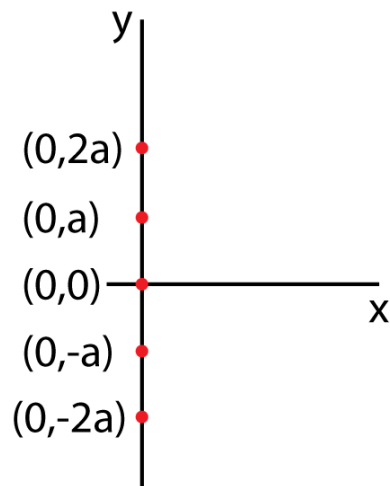
Anta så at én av strømlinjene (ABC på figuren ovenfor) erstattes av en fast flate. Avstanden mellom kilens toppunkt O og det nærmeste punkt B på flaten (tilsvarende $\theta = \alpha/2$) er gitt lik b . Finn volumgjennomstrømningen Q i kanalen, uttrykt ved U , b og α .

c

Finn trykket p i væsken, når trykket i O er kjent, lik p_0 . Væskens tetthet er antatt kjent, lik ρ , og tyngden neglisjeres. Er svaret realistisk for store verdier av r ?

Oppgave 2:

En rekke kilder er plassert i posisjonene $(0, 0), (0, \pm a), (0, \pm 2a), \dots$, som vist i figuren under.



Sett opp uttrykket for det komplekse potensial $w(z)$ i form av en rekke, og vis ved hjelp av formelen

$$\sinh\left(\frac{\pi z}{a}\right) = \frac{\pi z}{a} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^2 + n^2 a^2}{n^2 a^2}\right), \quad (2)$$

at $w(z)$ kan skrives som

$$w(z) = \mathcal{C} \ln \sinh \frac{\pi z}{a}, \quad (3)$$

hvor \mathcal{C} er en reell konstant. Hva blir Φ og Ψ ?

Oppgitt:

$$\sinh z = \sqrt{\left(\frac{1}{2} (\cosh 2x - \cos 2y)\right)} \exp \left[i \arctan \frac{\tan y}{\tanh x} \right], \quad (4)$$

hvor $z = x + iy$.