 TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

Øving 4, løsningsskisse.
Elektrisk potensial og Gauss' lov.

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver.

a) **C** $\Delta V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ dersom $d\vec{l} \perp \vec{E}$.

b) **B** På samme måte som et legeme med null starthastighet faller i gravitasjonsfeltet fra f.eks. jorda, dvs. beveger seg i retning lavere potensiell energi, vil en ladet partikkel med null starthastighet bevege seg i retning lavere potensiell energi i et elektrisk felt.

Matematisk: ($\vec{F}$ = kraft, q = ladning ($q<0$), U = potensiell energi, V = potensial)

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{E} = -|q|\vec{E}\\ \vec{E} &= -\nabla V\\ U &= qV = -|q|V\\ \vec{F} &= -\nabla U = -q\nabla V = |q|\nabla V\end{aligned}$$

Mulige rette svar er altså: Beveger seg 1) i retning lavere potensiell energi U, 2) i retning høyere potensial V, 3) i motsatt retning av $\vec{E}$ eller 4) i samme retning som kraft $\vec{F}$, hvorav bare 1) var gitt som et mulig flervalg.

c) **D** $U = e\cdot V = e\cdot k\dfrac{e}{r} = e\cdot 8,988\cdot 10^9\,\mathrm{Vm/C}\cdot\dfrac{1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{0,10\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = e\cdot 14,4\,\mathrm{V} = 14,4\,\mathrm{eV}.$

d) **D** Energibevarelse gir $\frac{1}{2}mv^2 = qV$.
Dvs.: Akselerasjon av en partikkel med ladning q og masse m over en potensialforskjell V resulterer i at reduksjon i potensiell energi, qV, gir økning i kinetisk energi, $\frac{1}{2}mv^2$. Like stor hastighet for de to partiklene betyr da at

$$\frac{q_\alpha V_\alpha}{m_\alpha} = \frac{q_{\mathrm{Be}}V_{\mathrm{Be}}}{m_{\mathrm{Be}}}$$

med andre ord

$$\frac{V_{\mathrm{Be}}}{V_\alpha} = \frac{q_\alpha m_{\mathrm{Be}}}{q_{\mathrm{Be}}m_\alpha} = \frac{2\cdot 9}{4\cdot 4} = \frac{9}{8}.$$

Oppgave 2. Potensial rundt elektrisk dipol.

a) Med vårt valg av polarvinkel θ ser vi fra figuren at

$$\begin{aligned}x &= r\sin\theta\\ z &= r\cos\theta\\ r &= \sqrt{x^2+z^2}\end{aligned}$$

b) Vi bruker superposisjonsprinsippet for å bestemme potensialet fra de to punktladningene. Med punktet (x,z) i en avstand r_1 fra q og en avstand r_2 fra $-q$ får vi

$$\begin{aligned}V(x,z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}\\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(z+a/2)^2}}\right)\end{aligned}$$

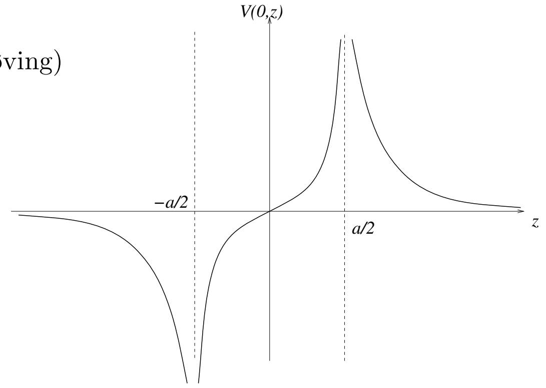
Avstandene r_1 og r_2 uttrykt ved x og z ser vi direkte fra figuren.

c) Potensialet på x-aksen blir

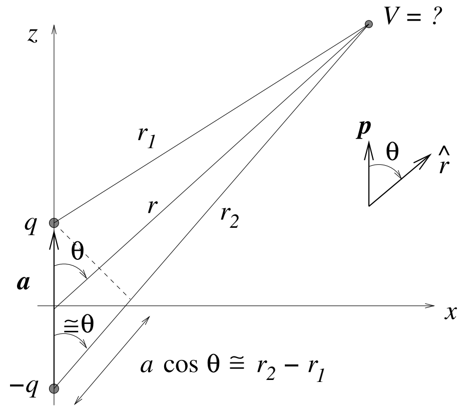
$$V(x,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2/4}}\right) = 0$$

Potensialet på z-aksen blir
$$V(0,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|}\right)$$
Legg merke til at vi her må bruke absoluttverditegn hvis vi vil ha *ett* uttrykk som gjelder på *hele* z-aksen. Med $z > a/2$:
$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = \frac{1}{z-a/2} - \frac{1}{z+a/2} = \frac{a}{z^2-a^2/4}$$
Med $z < -a/2$:
$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = -\frac{1}{z-a/2} + \frac{1}{z+a/2} = -\frac{a}{z^2-a^2/4}$$
Med $-a/2 < z < a/2$:
$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = -\frac{1}{z-a/2} - \frac{1}{z+a/2} = -\frac{2z}{z^2-a^2/4} = \frac{2z}{a^2/4-z^2}$$

Skisse av $V(0,z)$:
(mer detaljert i seinere øving)



d) Vi bruker tipset gitt i oppgaveteksten, samt betraktning av følgende figur, og får:

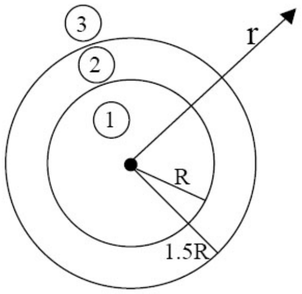


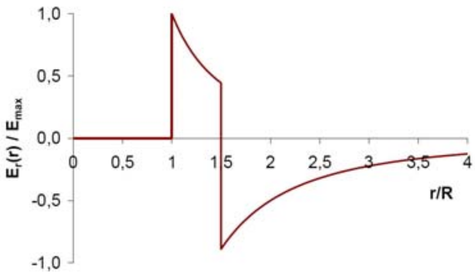
$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{r_2-r_1}{r_1r_2} \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{a\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{pr\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \underline{\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}}\,. \end{aligned}$$

Vi kan alternativt gå litt saktere fram: Fra figuren ser vi at
$$r_1 \simeq r - \frac{a}{2}\cos\theta \tag{1}$$
$$r_2 \simeq r + \frac{a}{2}\cos\theta \tag{2}$$
Når $r \gg a$ kan vi rekkeutvikle både $1/r_1$ og $1/r_2$ omkring $1/r$ og får:
$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r-\frac{a}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r+\frac{a}{2}\cos\theta} \tag{3}$$
$$= \frac{1}{r}\left[\left(1-\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1} - \left(1+\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1}\right] \tag{4}$$
$$\simeq \frac{1}{r}\left[1+\frac{a\cos\theta}{2r} - 1 + \frac{a\cos\theta}{2r}\right] \tag{5}$$
$$= \frac{a\cos\theta}{r^2} \tag{6}$$
Er det så *rimelig* at potensialet fra en elektrisk dipol faller av raskere enn potensialet fra en punktladning (dvs. en elektrisk "monopol")? Ja. Fordi dipolens negative og positive ladning bidrar med motsatt fortegn til det totale potensialet. Dermed vil bidragene til potensialet fra de to punktladningene delvis oppheve hverandre, og potensialet vil falle mye fortere enn fra en enkeltladning. På x-aksen vil de to bidragene *eksakt* oppheve hverandre.

Oppgave 3. To kuleskall.

For å finne E-feltet deler vi rommet opp i tre områder: 1,2 og 3 og bruker Gauss' lov i hver av dem.





1: $r < R$ Innenfor det indre skallet er det ingen ladning $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

2: $R < r < \frac{3}{2}R$. Gaussflate = kuleflate som omslutter indre skall. Ladningen innenfor Gaussflata blir $Q_{\text{encl}} = q$ og Gauss' lov lyder

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}\,.$$

P.g.a. symmetri må $\vec{E}$ være konstant og radiell over kuleflata: $\vec{E} = E(r)\,\hat{\mathbf{r}}$, slik at

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E(r) = \underline{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}\,. \tag{7}$$

3: $\frac{3}{2}R < r$. Gaussflate = kuleflate som omslutter ytre skall. Ladningen innenfor Gaussflata blir $Q_{\text{encl}} = q - 3q = -2q$.

$$E(r) = \underline{\frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}\,. \tag{8}$$

Til venstre ei skisse av $E(r)$.

b) Vi kan finne potensialet på to måter, enten bruke E-felt fra oppgave a, eller bruke at potensialet fra et kuleskall er kjent ($V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$), og addere bidraget fra de to kuleskall. Vi presenterer her den første metoden:

$$\Delta V \;=\; V_{\frac{3}{2}R} - V_R = -\int_R^{\frac{3}{2}R} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_R^{\frac{3}{2}R} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}r\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}R} - \frac{1}{R}\right] = \underline{-\frac{q}{12\pi\epsilon_0 R}}\,. \tag{9}$$

c) Når skallene blir forbundet, blir potensialforskjellen mellom dem null. Systemet kan betraktes som én leder, som ikke har noen ladning inni. All ladning går da til det ytterste skallet, som får ladning $q - 3q = -2q$.

Oppgave 4. Kule med gitt $Q(r)$.

Oppgaveteksten virker kanskje litt "tricky", siden det er ladningen som er gitt og ikke ladningstettheten. Men ganske likt oppgaver vi har sett tidligere er dette ei kule med en ladningstetthet som er avhengig av r innenfor, og ingen ladningstetthet utenfor. Det blir faktisk enklere å anvende Gauss' lov da her ladning innenfor et visst kuleskall er gitt.

a) Vi bruker Gauss' lov, med Gaussflate lik ei kule konsentrisk til ladningsfordelinga. For $r \geq R$ er det elektriske feltet som rundt en punktladning ved $r = 0$ og med ladning Q_0. Dette har vi beregnet flere ganger tidligere:

$$\underline{E(r \geq R) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0}\frac{R^2}{r^2}}\,, \tag{10}$$

der det ved siste likhetstegn er satt $Q_0 = \frac{4\pi\rho_0}{3}R^3$ og vi her og videre uttrykker størrelsene ved r/R.

For $r \leq R$ er $Q_{\text{encl}} = Q(r) =$ som gitt i oppgaven. Da $\vec{E} = E(r)\,\hat{\mathbf{r}}$ er konstant over ei kuleflate blir:

$$r \leq R: \qquad \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{R}r^4\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{E(r \leq R) = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0}\left(4\frac{r}{R} - 3\frac{r^2}{R^2}\right)}. \tag{11}$$

b) Det elektriske potensialet for $r \geq R$, relativt uendelig, er gitt ved:

$$V(r \geq R) = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_\infty^r \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r = -\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_\infty^r = \underline{\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}\frac{R}{r}}\,. \tag{12}$$

Det elektriske potensialet for $r \leq R$ kan skrives

$$V(r) = [V(r) - V(R)] + V(R)\,,$$

hvor $V(r) - V(R)$ bestemmes ved å integrere (11):

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_R^r \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(4r - \frac{3}{R}r^2\right) \cdot \mathrm{d}r = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left[2r^2 - \frac{r^3}{R}\right]_R^r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left[R^2 - 2r^2 + \frac{r^3}{R}\right]$$

og $V(R)$ finnes ved innsetting i likning (12):

$$V(R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2\,.$$

Dermed er

$$V(r \le R) = [V(r) - V(R)] + V(R) = \underline{\frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}\left[2 - 2\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{R^3}\right]} \tag{13}$$

c) Kontinuitet sjekkes ved å sette inn i de to uttrykkene for $V(r)$:

$$r \ge R, \qquad \text{likning (12):} \qquad V(R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2$$

$$r \le R, \qquad \text{likning (13):} \qquad V(R) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}[2 - 2 + 1] = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2$$

dvs. at potensialet er kontinuerlig ved $r = R$, som det må være.

d) Romladningstettheten er definert $\rho(r) = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}$. Med kulesymmetri bruker vi volumelement $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$, slik at vi med oppgitt $Q(r)$ får

$$\rho(r) = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi r^2 \mathrm{d}r} = \frac{4\pi\rho_0}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{R}r^4\right)}{\mathrm{d}r} = \frac{\rho_0}{r^2}\left(4r^2 - \frac{4}{R}r^3\right) = \underline{4\rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)}. \tag{14}$$

Kan også beregne ρ fra Gauss' lov på differensialform. Da må vi passe på å bruke rett utrykk for divergens i kulekoordinater (fra formelark) og $E(r)$ fra likn. (11):

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^2 E(r)\right\} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(4r^3 - \frac{3}{R}r^4\right)\right\} = \frac{\rho_0}{3}\frac{1}{r^2}\left\{12r^2 - \frac{12}{R}r^3\right\} = 4\rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

e) Ved bruk av dataplott er det gunstig å bruke dimensjonsløse størrelser. Isf. r plottes s.f.a. r/R osv. Videre er gode dimensjonsløse variable gitt ved:

For $r/R < 1$:

$$\frac{\rho(r)}{4\rho_0} \stackrel{(14)}{=} 1 - \frac{r}{R}$$

$$\frac{Q(r)}{\frac{4\pi\rho_0}{3}R^3} \stackrel{\text{(oppgitt)}}{=} 4\left(\frac{r}{R}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{R}\right)^4$$

$$\frac{E(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R} \stackrel{(11)}{=} 4\left(\frac{r}{R}\right) - 3\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$\frac{V(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2} \stackrel{(13)}{=} 2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

For $r/R \ge 1$:

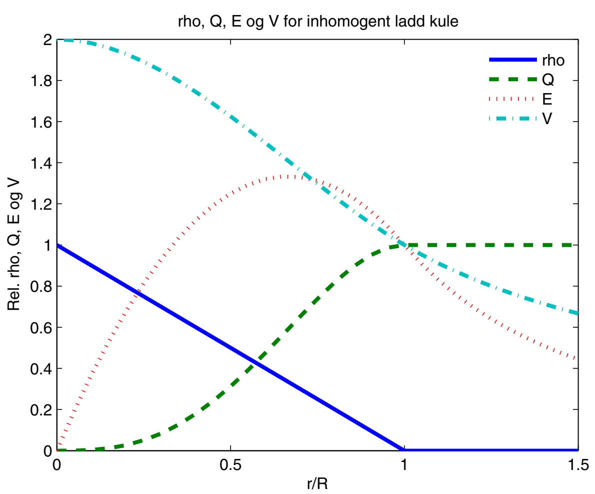
$$\frac{\rho(r)}{4\rho_0} \stackrel{\text{(oppgitt)}}{=} 0$$

$$\frac{Q(r)}{\frac{4\pi\rho_0}{3}R^3} \stackrel{\text{(oppgitt)}}{=} 1$$

$$\frac{E(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R} \stackrel{(10)}{=} \left(\frac{r}{R}\right)^{-2}$$

$$\frac{V(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2} \stackrel{(12)}{=} \left(\frac{r}{R}\right)^{-1}$$

Og grafene for $r/R < \frac{3}{2}$ generert med Matlab:




```
% Matlabkode:
x = [0 : 1/20 : 1.5];  % Verdier for x =r/R
sizex = size(x); %dimensjon til x, (#row, #col)
for ii = 1:sizex(2)
  if x(ii)<1.0
    rho(ii) = 1 - x(ii);
    Q(ii) = 4*x(ii)^3 - 3*x(ii)^4;
    E(ii) = 4*x(ii) - 3*x(ii)^2;
    V(ii) = 2 - 2*x(ii)^2 + x(ii)^3;
  else
    rho(ii) = 0;
    Q(ii) = 1;
    E(ii) = x(ii)^(-2);
    V(ii) = x(ii)^(-1);
  end;
end
plot(x,rho,'-', x,Q, '--', x,E,':', x,V,'-.', 'LineWidth',2.5);
title('rho, Q, E og V for inhomogent ladd kule')
xlabel('r/R'); % Tekst på aksene
ylabel('Rel. rho, Q, E og V');
handle=legend('rho', 'Q', 'E', 'V','location','northeast');
set(handle, 'Box', 'off'); % Ikke boks rundt legend
```

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 23. jan. 12.