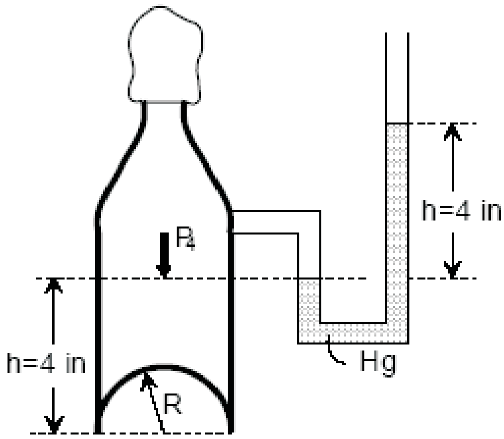
Løsningsforslag til Øving 4
Høst 2014

Oppgave 2.087

Finn netto kraft på den halvkuleformede flaskebunnen.



Ut fra avlesningen på kvikksølv-manometeret kan vi beregne trykket i flasken i f.eks. høyden $h_4 = 4$ tommer over bunnen (atmosfæretrykket virker på begge sider av flaskebunnen og kanselleres):

$$p_4 = \gamma_{Hg} \cdot h_4 \tag{1}$$

der $h_4 = 4$ tommer.

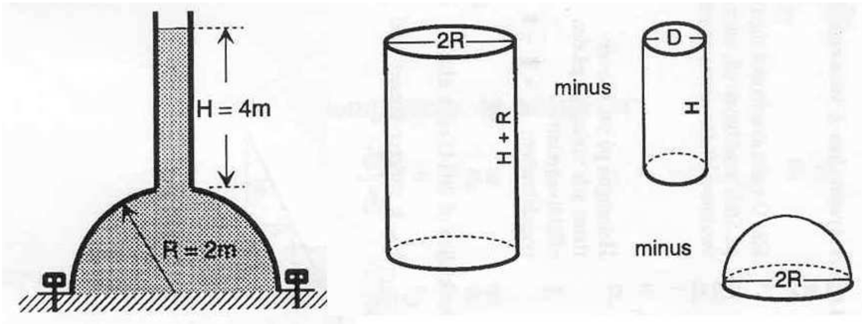
Kraften på flaskebunnen blir dermed lik trykket p_4 ganget med tverrsnittet pluss vekten av champagnen mellom nivået til p_4 og flaskebunnen:

$$\begin{aligned} F &= p_4 \pi R^2 + \gamma_{ch}(\pi R^2 h_4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3) \\ &= \pi R^2 [\gamma_{Hg} h_4 + \gamma_{ch}(h_4 - \frac{2}{3}R)] \end{aligned} \tag{2}$$

Tallverdi: $h_4 = 0.1016$ m, $\gamma_{vann} = 9790$ N/m^3, $\gamma_{ch} = \text{SG}\cdot\gamma_{vann} = 9398.4$ N/m^3, $\gamma_{Hg} = 133100$ N/m^3
$\Rightarrow \underline{F = 114.8}$ N

Oppgave 2.091

En halvkuleformet kuppel med radius $R = 2$m er påmontert et tynt vertikalt rør med høyde $H = 4$m og diameter $D = 0,03$m. Kuppelen holdes fast i bakken med seks bolter, og kuppel pluss rør veier $W = 30$kN. Finn kraften på hver bolt.



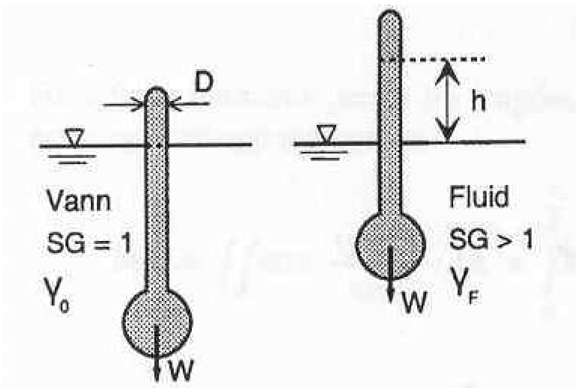
Oppdriftskraften som virker på konstruksjonen tilsvarer vekten av "fortrengt" væskemengde i forhold til et sylindrisk rør med radius R og samme vannhøyde. Problemet blir geometrisk som vist i figuren. Vi får

$$F_{\text{bolt}} = \frac{1}{6}\left\{\gamma_{\text{vann}}\left[\pi R^2(H+R) - \pi(D/2)^2 H - \frac{2}{3}\pi R^3\right] - W\right\}. \tag{3}$$

Tallverdi (med $\gamma_{\text{vann}} = 9790\text{N/m}^3$) er $F_{\text{bolt}} = 90.7\text{kN}$.

Oppgave 2.109

Vi skal finne høyden $h = h(W, D, SG, \gamma_0)$ for *hydrometeret*.



Uansett hvilken væske hydrometeret flyter i så må tyngden W oppveies av oppdriftskraften. I vann kaller vi neddykket volum V_0. Neddykket volum i annet fluid:

$$V = V_0 - h\pi(D/2)^2. \tag{4}$$

Oppdriftskraften er

$$F_b = W = \gamma_0 V_0 = \gamma_F(V_0 - \frac{\pi h D^2}{4}), \tag{5}$$

som gir

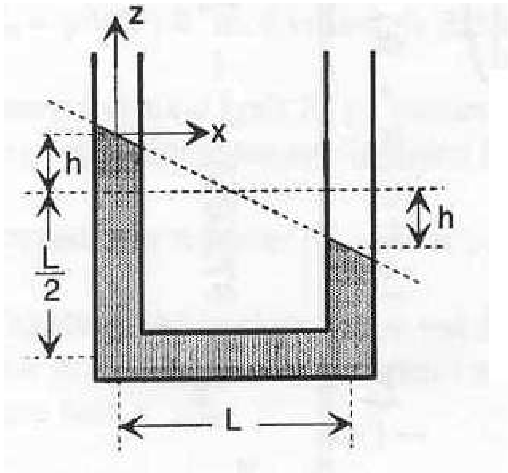
$$h = \frac{\gamma_F V_0 - \gamma_0 V_0}{\gamma_F \pi D^2/4} = \frac{4V_0}{\pi D^2}\left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_F}\right) = \frac{4W}{\gamma_0 \pi D^2}\left(1 - \frac{1}{SG}\right). \tag{6}$$

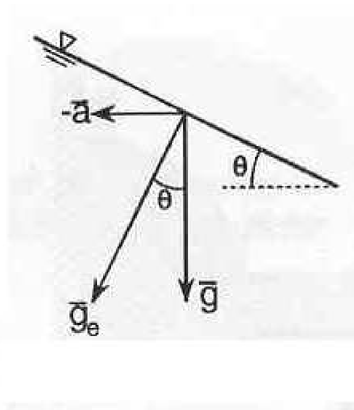
Oppgave 2.150

Vi skal finne høyden h for *akselerometeret*. Utgangspunktet er Newtons andre lov (pr. volumenhet), skrevet for et akselerert system som ikke har noen relativ bevegelse, dvs. kvasistatikk:

$$0 = -\nabla p + \rho(\vec{g} - \vec{a}). \tag{7}$$

For å oppnå statiske forhold i et relativt system kan $\vec{a}$ være enten rettlinjet eller en sentripetalakselerasjon. Når U-røret akselereres med en konstant akselerasjon på 6m/s mot høyre vil, etter at likevekt er oppnådd, væskeoverflaten danne en rett linje.





Helningen på væskeoverflaten står vinkelrett på den effektive (relative) tyngdekraften:

$$\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{a}. \tag{8}$$

Helningen blir da -$|\vec{a}|/|\vec{g}| = -a/g$ og nivåforskjellen på $2h$ i røret blir

$$\frac{2h}{L} = \frac{a}{g} \Longrightarrow \underline{h = \frac{aL}{2g}}. \tag{9}$$

h varierer altså lineært med a.

Alternativt kunne oppgaven først løses ved å finne trykket $p(x,z)$ i væsken:

$$\nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{a}); \qquad \vec{g} = (0,0,-g); \qquad \vec{a} = (a,0,0); \qquad \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}). \tag{10}$$

Løser for hver enkelt komponent:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \Rightarrow p = -\rho a x + F(z),$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g z + G(x),$$

som sammen gir

$$p(x,z) = -\rho(ax + gz) + C. \tag{11}$$

Om vi legger origo i vannoverflaten blir integrasjonskonstanten C lik atmosfæretrykket, så vi får

$$p(x,z) = -\rho(ax + gz) + p_a. \tag{12}$$

Vi forlanger nå trykket konstant lik p_a og får på den måten ligningen for væskeoverflaten:

$$p(x,z) = p_a = p_a - \rho(ax + gz) \Longrightarrow \underline{z = -xa/g} \text{ som over.} \tag{13}$$

Tallsvar: $h = 5,5$cm

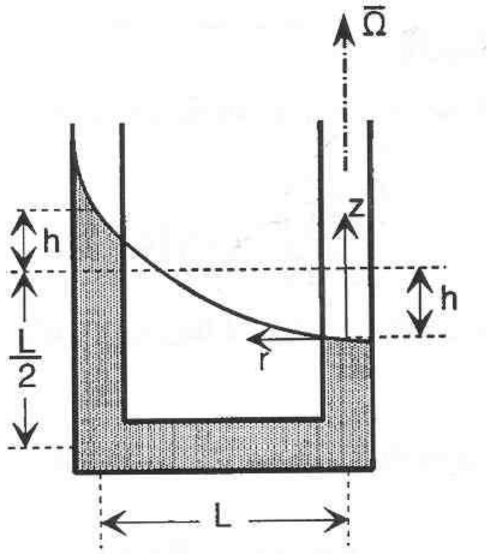
Oppgave 2.153

Vi skal finne høyden h for U-røret i oppgave 2.150 når det roteres om den høyre greina. Utgangspunktet er ligningen

$$0 = -\nabla p + \rho(\vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})). \tag{14}$$

Når r-aksen står vinkelrett på rotasjonsaksen blir sentripetalakselerasjonen $-\Omega^2 r$ i radiell retning. Vi finner da trykket i væsken:

$$\nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{a}), \qquad \text{der} \qquad \vec{a} = (-\Omega^2 r, 0, 0). \tag{15}$$



Vi dekomponerer og integrerer komponentvis:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\Omega^2 r \Longrightarrow p = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + F(z). \tag{16}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Longrightarrow p = -\rho g z + G(r), \tag{17}$$

som ved sammenligning gir

$$p(r, z) = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 - \rho g z + C. \tag{18}$$

Med origo som i det viste aksekorset (ved laveste væskenivå) blir integrasjonskonstanten C lik atmosfæretrykket p_a, så

$$p(r, z) = p_a + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 - \rho g z. \tag{19}$$

Vi forlanger nå at trykket skal være lik atmosfæretrykket og finner på denne måten ligningen for væskeoverflaten:

$$p(r, z) = p_a = p_a + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 - \rho g z \Longrightarrow \underline{z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}}. \tag{20}$$

Høydeforskjellen på $2h$ kan nå uttrykkes ved:

$$2h = z(L) = \frac{\Omega^2 L^2}{2G} \Longrightarrow h = \frac{\Omega^2 L^2}{4g}. \tag{21}$$

Totalt blir høyden ytterst på den venstre geina

$$\underline{H_v = \frac{L}{2} + \frac{\Omega^2 L^2}{4g}}. \tag{22}$$

Med tallverdiene $\Omega = 95 \frac{\text{runder}}{\text{min}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}} \cdot \frac{2\pi\text{rad}}{\text{runde}} = 9.948$ rad/s, $L = .18$m, $g = 9,81\text{m/s}^2$ gir $\underline{H_v = 0,172\text{m}}$.