NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

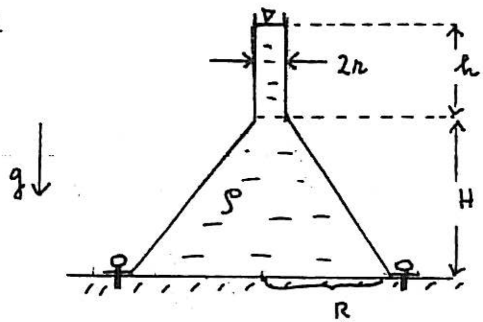
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. F1
(Linje for Fysikk og matematikk)
Fredag 3. desember 2004
Tid: 0900 – 1300
Studiepoeng: 7,5

Sensuren faller i uke 53.

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

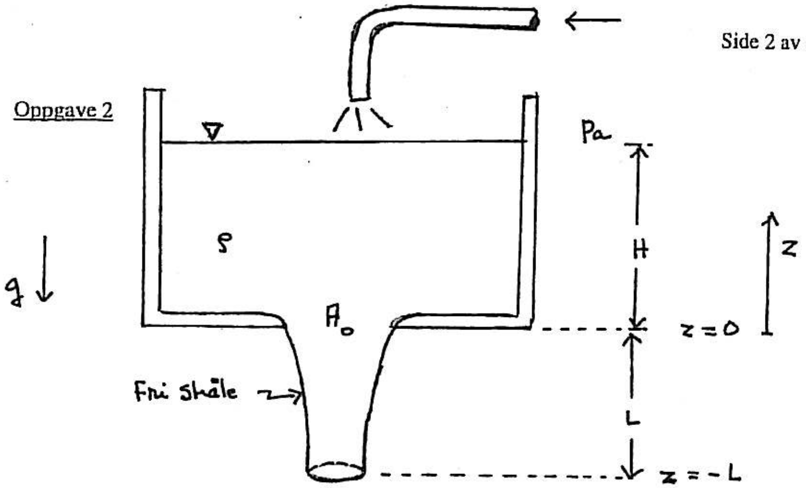


En sirkulær metallisk kjegle med radius R = 1m og høyde H = 2m er påmontert et tynt vertikalt rør med radius r = 0,10m, som vist på figuren. Systemet er fylt med vann, opp til høyden h = 3m i røret. Tyngden av det metalliske systemet (kjegle pluss rør) er W = 25kN. Systemet holdes fast til bakken av seks bolter. Vannets tetthet er ρ. Sett $\gamma = \rho g = 10^4\,\mathrm{Pa/m}$.

Finn boltekraften F_{bolt}, når du ser bort fra atmosfæretrykket. Vil svaret endres dersom du tar hensyn til atmosfæretrykket?

Oppgitt: Volumet av den avkortede kjeglen på figuren er $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

Oppgave 2



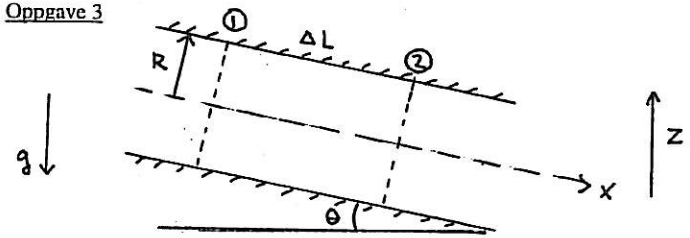
En vanntank har en åpning med tverrsnitt A_o i bunnen ($z = 0$). Vannets høyde H i tanken blir holdt konstant ved at vann fylles på kontinuerlig ovenfra, slik at strømningen blir stasjonær. Nedenfor utløpet, for $z < 0$, danner vannet en fri stråle med tverrsnitt $A = A(z)$ som er en funksjon av z. Tyngdens akselerasjon er g, atmosfæretrykket er p_a.

a) Forklar hvorfor trykket inne i den frie stråle må være lik atmosfæretrykket, og finn hastigheten V(z) av den frie stråle.

b) Finn tverrsnittet A(z) av den frie stråle uttrykt ved A_o, H og z.

c) Hvor lang tid T trenger en fluidpartikkel på å tilbakelegge en strekning L av den frie stråle, fra $z = 0$ til $z = -L$?

Oppgave 3

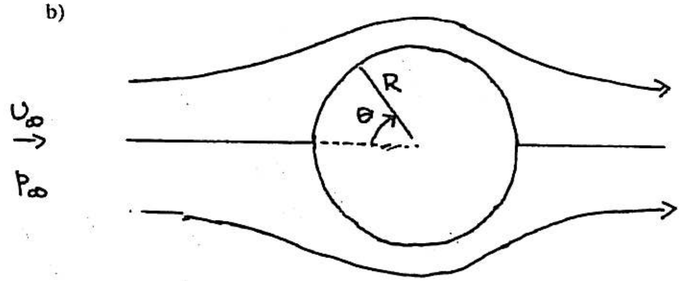


a) Gitt en stasjonær viskøs inkompressibel strømning gjennom et sirkulært rør. Radius i røret er R. Rørets helningsvinkel er θ, tyngdens akselerasjon er g. Betrakt en lengde Δ L av røret, beliggende mellom snittene ① og ② på figuren. Benytt energiligningen mellom ① og ② til å finne friksjonshøyden h_f uttrykt ved Δ z, Δ p og γ, hvor

$$\Delta z = z_1 - z_2 \quad , \quad \Delta p = p_1 - p_2 \quad , \quad \gamma = \rho g .$$

Uttrykk deretter h_f som funksjon av skjærspenningen τ_w ved veggen, samt ΔL, R og γ.

b)



En stillestående sirkulær sylinder med radius R står på tvers i en uniform luftstrøm. Luftas opprinnelige hastighet er U_∞. Anta først at strømningen er ideell (ikke-viskøs). Strømfunksjonen for $r \geq R$ er

$$\psi = U_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin\theta .$$

Finn trykket $p(R,\theta)$ på sylinderens overflate som funksjon av θ.

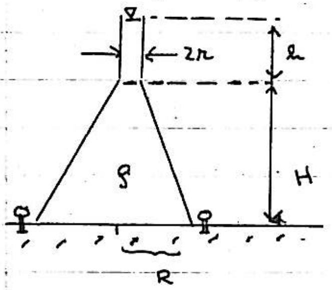
c) Tegn opp trykkmotstandskoeffisienten C_p, definert ved

$$C_p = \frac{p(R,\theta) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} ,$$

for ideell strømning som funksjon av θ. (La $\theta = 0$ tilsvare stagnasjonspunktet på sylinderens forside.) Tegn i samme figur hvordan C_p varierer dersom en antar realistiske forhold, enten med (i) laminært grensesjikt, eller (ii) turbulent grensesjikt. Kommentér kurvene.

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. EKSAMEN 3. DESEMBER 2004

Løsning Oppgave 1



Hele systemet tenkes innelukket i en sirkulær sylinder med radius R og høyde H + h. Da vil den totale kraft på metallet være null. Den totale oppdriftskraft F_B er følgelig lik tyngden av vannet på utsiden av metallet:

$$F_B = \gamma\left[\pi R^2 (H+h) - \frac{1}{3}\pi H (R^2 + Rr + r^2) - \pi r^2 h\right] \qquad (\gamma = \rho g)$$

$$F_B = \pi\gamma\left[R^2\left(\frac{2}{3}H + h\right) - r^2\left(\frac{1}{3}H + h\right) - \frac{1}{3}HRr\right]$$

Boltekreftene $6F_{bolt}$ og tyngden W av metallet virker nedover. Dette må balansere F_B som virker oppover:

$$6F_{bolt} + W = F_B . \quad \text{Det gir}$$

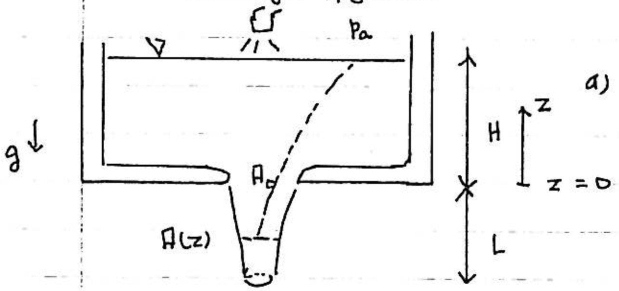
$$\underline{F_{bolt} = \frac{1}{6}\pi\gamma\left[R^2\left(\frac{2}{3}H + h\right) - r^2\left(\frac{1}{3}H + h\right) - \frac{1}{3}HRr\right] - \frac{1}{6}W}$$

Numerisk:

$$\underline{F_{bolt}} = \frac{1}{6}\pi \cdot 10^4 \left[\left(\frac{4}{3} + 3\right) - 10^{-2}\left(\frac{2}{3} + 3\right) - \frac{1}{3}\cdot 2 \cdot 0{,}1\right] - \frac{1}{6}\cdot 25 \cdot 10^3 = \underline{18{,}0 \text{ kN}}$$

Å ta hensyn til atmosfæretrykket vil si at en får et uniformt ekstra trykk fra alle sider. Svaret endres ikke

Løsning Oppgave 2



a) Trykket inne i strålen lik p_a, ellers ville strålen ekspandere eller trekke seg sammen på tvers.

Ser på strømlinje som starter i fri overflate ($z = H$) og ender i posisjon z i den frie stråle:

$$\frac{p_a}{\rho} + gH = \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}V^2(z) + gz, \qquad \underline{V(z) = -\sqrt{2g(H-z)}, \quad z \leq 0}$$

b) Kontinuitet: $A_0 V_0 = A(z)V(z)$, hvor $V_0 = -\sqrt{2gH}$ er hastigheten ved $z = 0$. Innsetting av $V(z)$ gir

$$\underline{A(z) = A_0\sqrt{\frac{H}{H-z}}}$$

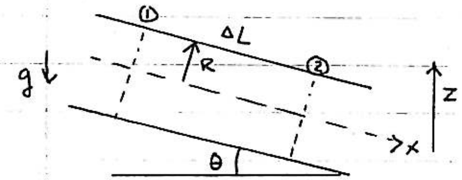
c) Av $V(z) = \frac{dz}{dt} = -\sqrt{2g(H-z)}$ følger

$$\int_0^T dt = -\int_0^{-L}\frac{dz}{\sqrt{2g(H-z)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_H^{H+L}\frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\Big|_H^{H+L}\sqrt{u}, \qquad u = H-z.$$

Altså

$$\underline{T = \sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{H+L} - \sqrt{H}\right]}$$

Løsning Oppgave 3



a) Energiligningen mellom 1 og 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 + \underbrace{w_s}_{0} + gh_f .$$

Da $V_1 = V_2$:

$$\underline{h_f} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \underline{\Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma}} \qquad (1)$$

Impulsbalansen: $\sum F_x = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN} = 0$ fordi $V_1 = V_2$.

$$\underbrace{\Delta p\cdot\pi R^2}_{\text{Trykkraft}} + \underbrace{\gamma\cdot(\pi R^2\Delta L)\cdot\sin\theta}_{\text{Tyngdekraft}} - \underbrace{\tau_w\cdot(2\pi R)\Delta L}_{\text{Skjærkraft}} = 0$$

$$\Delta p\cdot\pi R^2 + \gamma\pi R^2\cdot\Delta z - \tau_w\cdot 2\pi R\cdot\Delta L = 0$$

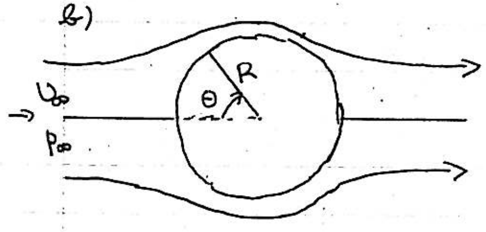
Da $\Delta z = h_f - \Delta p/\gamma$ fra ligning (1):

$$\cancel{\Delta p\cdot\pi R^2} + \gamma\pi R^2\left(h_f - \cancel{\Delta p/\gamma}\right) - \tau_w\cdot 2\pi R\cdot\Delta L = 0$$

$$\gamma\pi R^2\cdot h_f = 2\pi R\,\tau_w\cdot\Delta L$$

$$\underline{h_f = \frac{2\tau_w}{\gamma}\cdot\frac{\Delta L}{R}} \qquad (2)$$

b)



$$\psi = U_\infty\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta$$

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

Oppgave 3, forts.

På sylinderens overflate: $V_r(R,\theta) = 0, \quad V_\theta(R,\theta) = -2U_\infty \sin\theta.$

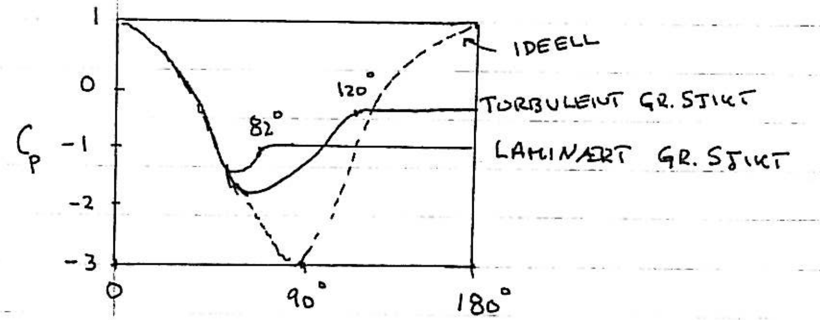
Bernoulli:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}U_\infty^2 = \frac{1}{\rho}p(R,\theta) + \frac{1}{2}\left(2U_\infty \sin\theta\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{p(R,\theta) = p_\infty + \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 - 2\rho U_\infty^2 \sin^2\theta} \quad (3)$$

c) Generell $C_p = \dfrac{p(R,\theta) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$.

For ideell strømning finnes av ligning (3): $\underline{C_p = 1 - 4\sin^2\theta}$



For ideell strømning: Figuren er symmetrisk om $\theta = 90°$.
For viskøs strømning: Etter avløsningspunktet er trykket konstant.
Laminært grensesjikt: Avløsningspunktet omkring $\theta = 82°$.
Turbulent —"— : —"— —— $\theta = 120°$.
Turbulent grensesjikt har større kinetisk energi enn laminært, og har derfor større klebende evne. Avløsningspunktet kommer senere.