NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

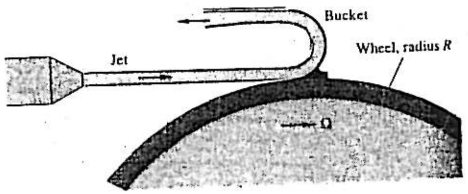
Fagleg kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK (Nynorsk)
FOR FAK. F1
(Linje for Fysikk og matematikk)
Tysdag 18. mai 2004
Tid: 0900 – 1400
Studiepoeng: 7,5

Sensuren fell i veke 24.

Hjelpemeddel C: Typegodkjend kalkulator, i samsvar med NTNU's reglar.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, hefta ved oppgåvesettet.

Oppgåve 1

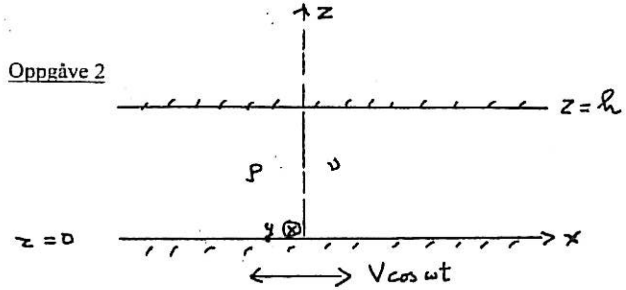


Ein vassjet med fart V_j og tverrsnittsareal A fell inn på ei skovl (engelsk "bucket") på eit turbinhjul og vert avbøyd 180^0. Turbinhjulet, som har radius R, roterer med konstant vinkelfart Ω. Tettleiken til vatnet er ρ.

a) Finn den krafta $\bar{F}_{skovl}$ som vert overført til skovlen, samt den tilhørende effekt P.

b) For kva for ein verdi av Ω vil P være størst, $P = P_{max}$? Finn verdien av P_{max}.

Oppgåve 2



Ei uendeleg stor plan flate oscillerar harmonisk i x-retningen med fart $V\cos\omega t$ i sitt eige plan z = 0. Området på oversida av flata, fra z = 0 til z = h, er fylt av ei viskøs inkompressibel væske med tettleik ρ og kinematisk viskositet ν. Det øverste planet z = h er i ro. Sjå bort frå tyngdekrafta. På grunn av symmetrien vil alle fysiske størrelser være uavhengig av horisontalkoordinatane x og y.

a) Vis at vertikalkomponenten w av fluidets fart er overalt lik null. Skriv ned komponentane av Navier-Stokes' ligning i x- og z-retning, og vis at trykket p er konstant.

b) Søk ei løysing av Navier-Stokes' ligning for den horisontale farten u(z,t) på fylgjande komplekse form:

$$u(z,t) = (A\sin kz + B\cos kz)e^{-i\omega t}, \qquad (1)$$

der A og B er konstantar. Vis fyrst at verdien av k vert kompleks og gjeve ved

$$k = \sqrt{i\omega/\nu}.$$

Bruk deretter heftvilkåra ved dei to flatene til å bestemme konstantane A og B i (1), og vis at horisontalfarten kan uttrykkast på kompleks form slik:

$$u(z,t) = V\frac{\sin k(h-z)}{\sin kh}e^{-i\omega t}. \qquad (2)$$

c) Finn skjærspenninga $\tau(0,t)$ ved nedre plan z = 0 på kompleks form, idet du gjer bruk av uttrykket (2).

Lat så $h \to \infty$, og finn korleis den fysiske skjærspenninga ved planet z = 0 varierer med t. Angi faseforskjellen i forhold til planets fart.

[Hint: $\cot kh \to -i$ når $h \to \infty$.]

Oppgåve 3

a) Straumfunksjonen for ei linjekjelde av styrke m plassert i origo er som kjend gjeve ved $\psi = m\theta$. Anta at ei positiv kjelde m er plassert i punktet (-a,0) og at eit tilsvarande sluk –m er plassert i (a,0). Når $m \to \infty$, $a \to 0$ slik at produktet $m \cdot a$ er konstant, får vi ein dipol (dublett). Dipolmomentet er definert som $\lambda = 2ma$. Vis at i store avstander r frå dipolen vert

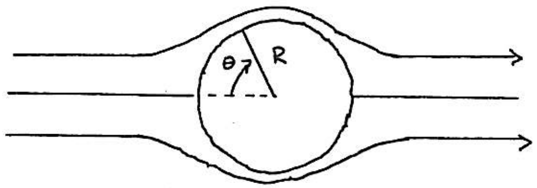
$$\psi = -\frac{\lambda}{r}\sin\theta \; .$$

b) Dipolstraumen ovanfor vert superponert med ein uniform straum U_∞ i x-retninga:

$$\psi = U_\infty\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta \; , \quad \left(U_\infty R^2 \equiv \lambda\right).$$

U_∞

P_∞



Denne ψ framstiller for $r \geq R$ potensialstraumen kring ein sylinder med radius R. Vis at straumen er virvelfri, og vis at grensevilkåret ved r = R er oppfylt.

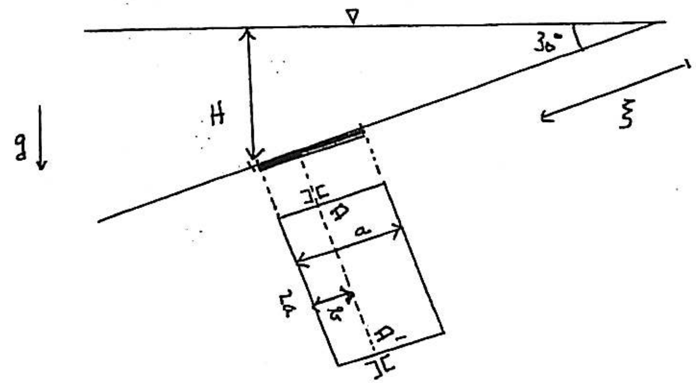
c) Finn trykket $p_s(\theta)$ som funksjon av vinkelen θ på sylinderens overflate, og lag ei skisse av trykkmotstandskoeffisienten C_p, definert som

$$C_p = \frac{p_s(\theta) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \; ,$$

som funksjon av θ når θ varierer frå 0 til 180°. (La stagnasjonspunktet på framsida tilsvara $\theta = 0$.)

d) Teikn inn i samme diagram dei verkelege kurvene for C_p ein får ved å ta omsyn til fluidets viskositet. Teikn inn dei omtrentlege avløsningspunktene når grensesjiktet er laminært, og når det er turbulent. Gjev ei kort forklåring.

Oppgåve 4 (halv vekt)

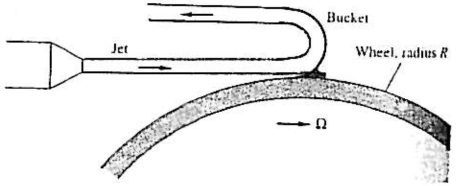


Ei rektangulær luke i ein dam har sidekantar 2a og a. Luka har mulighet for å svinge fritt om ei akse AA' i avstand b frå nedre kant. Vassdjupet ned til lukas nedre kant er H. Så lenge H er mindre enn ei kritisk grense H_{max} ligg trykksenteret nedanfor aksen AA' slik at luka er stengd, som vist på figuren. Men hvis vasssdjupet vert større enn H_{max}, vil trykksenteret koma på oversida av aksen og luka vil åpne seg automatisk.

Største tillatne vassdjup i dammen er H_{max}. Bestem avstanden b slik at luka opner seg når $H = H_{max}$. Svaret uttrykkast ved a og H_{max}.

Oppgjeve: Lukas treghetsmoment kring x-aksen gjennom centroiden er $I_{xx} = a^4/6$.

Løsning Oppgave 1



a) Går over til medfølgende koordinatsystem. Relativ vannhastighet $V_{rel} = V_j - R\Omega$.

I dette systemet er, når en regner i x-retning,

$$\dot M_{INN} = \int_{INN} \rho V_{rel}^2\, dA = \rho (V_j - R\Omega)^2 A$$

$$\dot M_{UT} = -\int_{UT} \rho V_{rel}^2\, dA = -\rho (V_j - R\Omega)^2 A$$

Kraft på vannet: $F = \dot M_{UT} - \dot M_{INN} = -2\rho A (V_j - R\Omega)^2$.

Kraft på skovlen: $F_{skovl} = -F = 2\rho A (V_j - R\Omega)^2$, mot høyre.

Effekt $P = F_{skovl} \cdot R\Omega = 2\rho A R\Omega (V_j - R\Omega)^2$

b) Ekstremalverdi for P når $dP/d\Omega = 0$, ⇒

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\Omega (V_j - R\Omega)^2\right] = 0$$

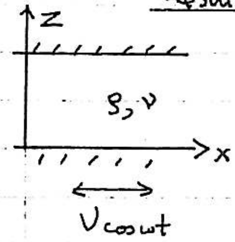
$$(V_j - R\Omega)^2 - 2R\Omega (V_j - R\Omega) = 0$$

$$(V_j - R\Omega)(V_j - 3R\Omega) = 0$$

Fysisk løsning $\Omega = \frac{1}{3}\frac{V_j}{R}$

Da er $P = P_{max} = \frac{8}{27}\rho A V_j^3$

Løsning Oppgave 2



a) Inkompressibilitet $\nabla \cdot \vec V = 0$ gir her $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, fordi det er ingen variasjon i x- og y-retningene. Altså er w uavhengig av z, og må være lik null fordi w = 0 ved platene.

Navier-Stokes: $\frac{\partial \vec V}{\partial t} + (\vec V \cdot \nabla)\vec V = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec V$

z-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$, altså er p konstant.

x-retning: $\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{(\vec V \cdot \nabla) u}_{0} = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{0} + \nu \nabla^2 u$

⇒: $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (1)

b) Innsetting av $u = (A\sin kz + B\cos kz)e^{-i\omega t}$ i (1) gir

$-i\omega u = -k^2 \nu u$, $k = \sqrt{i\omega/\nu}$.

Heftbetingelse ved $z = 0$: $V e^{-i\omega t} = B e^{-i\omega t}$ ⇒: $B = V$.

Heftbetingelse ved $z = h$: $0 = A\sin kh + B\cos kh$, altså $A = -B\cot kh = -V\cot kh$. Dermed

$$u = (-V\cot kh \sin kz + V\cos kz)e^{-i\omega t} = \frac{V}{\sin kh}\big(\underbrace{-\cos kh \sin kz + \sin kh \cos kz}_{\sin k(h-z)}\big)e^{-i\omega t}$$

$$u(z,t) = \frac{V}{\sin kh}\cdot \sin k(h-z)\, e^{-i\omega t}$$

c) $\tau(0,t) = \mu(\partial u/\partial z)_0 = -\mu (V e^{-i\omega t}) k \cot kh$, $k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)$.

$h \to \infty$: $\tau(0,t) = -\mu V(\cos\omega t - i\sin\omega t)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)\cdot(-i) =$

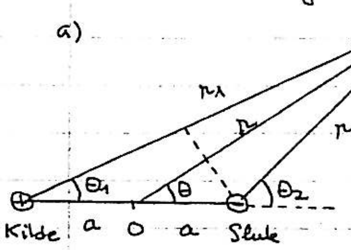
$= -\mu V \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(\cos\omega t - i\sin\omega t)(1-i) = -\mu V\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(\cos\omega t - \sin\omega t - i\sin\omega t - i\cos\omega t)$.

Realdel: $\tau(0,t) = -\mu V \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(\cos\omega t - \sin\omega t) = -\sqrt{\omega\mu\rho}\, V\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$.

Faseforskjell $3\pi/4$ i forhold til hastigheten.

Løsning Oppgave 3

a)



Strømfunksjoner:

Fra kilde i $(-a,0)$, $\psi_1 = m\theta_1$

Fra sluk i $(+a,0)$, $\psi_2 = -m\theta_2$

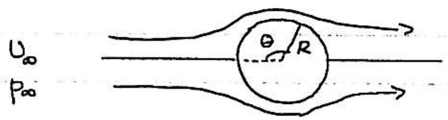
Superponerer: $\psi = m(\theta_1 - \theta_2) = -m\cdot\Delta\theta$,

hvor $\Delta\theta$ er toppvinkel ved feltpunktet P.

Av figuren: $\Delta\theta = \dfrac{2a\sin\theta}{r}$ i store avstander r.

Altså $\psi = -\dfrac{2ma}{r}\sin\theta = -\dfrac{\lambda}{r}\sin\theta.$

b)



$$\psi = U_\infty\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta, \qquad U_\infty R^2 = \lambda.$$

I plane koordinater gjelder $\nabla^2\psi = -\zeta_z$. Trenger dermed bare å sjekke om $\nabla^2\psi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$ er lik null.

Regner ut

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = U_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta, \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{U_\infty}{r}\frac{d}{dr}\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cdot\sin\theta = \frac{U_\infty}{r}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = -\frac{U_\infty}{r}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta. \quad \text{Altså } \nabla^2\psi = 0, \Rightarrow \zeta_z = 0$$

Hastighetskomponenter:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta.$$

Én grensebetingelse ved $r = R$: $V_r(R) = 0$, som stemmer.

Oppgave 3, forts.

c) Da $\zeta_z = 0$ kan Bernoulli benyttes mellom vilkårlige punkter:

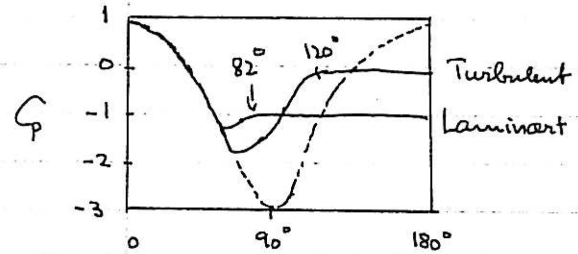
$$\tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 + p_\infty = \tfrac{1}{2}\rho V_s^2(\theta) + p_s(\theta)$$

Da $V_s^2(\theta) = \underset{0}{\underset{\parallel}{V_r^2}} + V_\theta^2 = 4U_\infty^2\sin^2\theta$, fås

$$p_s(\theta) = \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 + p_\infty - 2\rho U_\infty^2\sin^2\theta$$

$$C_p = \frac{p_s(\theta) - p_\infty}{\tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta.$$

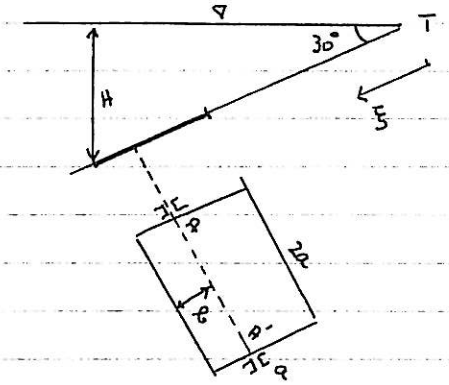
d)



Laminært grensesjikt: Avløsning ved $\theta \simeq 82°$. For høyere θ er trykket praktisk talt konstant.

Turbulent grensesjikt: Avløsning ved $\theta \simeq 120°$. Større kinetisk energi i grensesjiktet, og dermed større klebende evne til overflaten.

Løsning Oppgave 4



Avstand fra toppunktet T til centroiden langs planet er ξ_{CG}. Tilsvarende avstand til trykksenteret er ξ_{CP}.

$$\xi_{CP} - \xi_{CG} = \frac{I_{xx}}{\xi_{CG} \cdot A} \qquad ①$$

Kritisk punkt tilsvarende $H = H_{max}$ når trykksenteret faller sammen med aksen AA'. Da er

$$\xi_{CP} = \frac{H}{\sin 30°} - b = 2H - b.$$

Centroiden ligger midt på luka:

$$\xi_{CG} = 2H - \frac{a}{2}.$$

Altså $\xi_{CP} - \xi_{CG} = 2H - b - (2H - \frac{a}{2}) = \frac{a}{2} - b$, som en også ser direkte av figuren.

Setter inn i ①:

$$\frac{a}{2} - b = \frac{\frac{1}{6}a^4}{(2H - \frac{a}{2}) \cdot 2a^2} = \frac{a^2}{(4H - a)6}$$

$$\underline{b = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{6(4H_{max} - a)}}$$, når H erstattes med H_{max}.