Fra Kreyszig (10th), avsnitt 11.1

2 $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, k, k, $\frac{k}{n}$, $\frac{k}{n}$

14 Bruker Euler-formlene

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{3} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \mathrm{d}x \\
&= 0 \\
&\text{(Odde funksjon)} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x^2 \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \mathrm{dx}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{2}{n^2}\left[x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n^2}\cdot\pi\cos n\pi + 0\right) \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \dots \qquad (\text{for } -\pi < x < \pi)$$

15 Her kan vi begynne med å transformere funksjonen slik at definisjonsintervallet ligger symmetrisk om origo. Grafen forskyves altså π enheter til venstre. Vi bruker igjen symmetriegenskaper for å spare oss for integraler som blir null. Da oppnås følgende koeffisienter (ved å bruke delvis integrasjon):

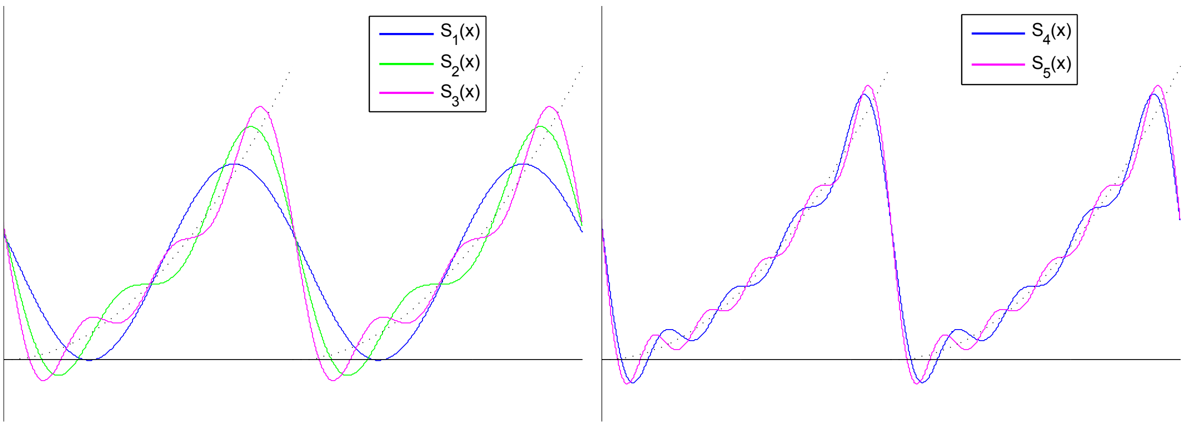
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{x^3}{3}+\pi x^2+\pi^2 x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \underline{\frac{4}{3}\pi^2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\cos nx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+2\pi x+\pi^2)\cos nx\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\ \mathrm{d}x = \Big[\frac{n^2x^2\sin nx - 2\sin nx + 2nx\cos nx}{\pi n^3}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \underline{4\frac{(-1)^n}{n^2}},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\sin nx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+2\pi x+\pi^2)\sin nx\ \mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\ \mathrm{d}x = 4\Big[\frac{\sin nx - nx\cos nx}{n^2}\Big]_{0}^{\pi} = \underline{4\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

Nå kan vi transformere tilbake og oppnå rekken for $f(x)$:

$$\underline{f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\cos n(x-\pi) + 4\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin n(x-\pi)}$$



Ved å skrive ut sinus- og cosinusleddene kan svaret også uttrykkes som:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx) \\ &= \underline{\frac{4}{3}\pi^2 + 4\left(\cos x + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + ...\right) - 4\pi\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + ...\right)} \end{aligned}$$

Vi ser fra grafen over at jo flere ledd som tas med, jo nærmere kommer man den opprinnelige funksjonen.

16

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Vi har at f er 2π-periodisk. Innsetting i Euler-formlene gir:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{Grunnet symmetri}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{Grunnet symmetri}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\cos(\frac{n\pi}{2}) + (-\frac{\pi}{2})\cos(-\frac{n\pi}{2})\right) + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{n}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2}{n^2\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) \\
&= \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n} & , n \text{ partall} \\ \frac{2\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & , n \text{ oddetall} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(-1)^{m+1}}{2m} & , n = 2m \quad m \in \mathbb{N} \\ \frac{2\cdot(-1)^{m}}{(2m+1)^2\pi} & , n = 2m-1 \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dermed har vi at uttrykket for f er

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\Big(\frac{2}{(2m-1)^2\pi}\sin(2m-1)x + \frac{1}{2m}\sin 2mx\Big)$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 11.2

2 Like, like, nei, odde, like.

6 f odde, g like, $h = f\cdot g$

$$\Longrightarrow\ h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$$

9 Funksjonen er odde og har periode $P = 2L = 4$. Dermed er $a_n = 0$ for $n = 0, 1, 2, \ldots.$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)
\end{aligned}$$

Her har vi brukt at $f\cdot\sin$ er like, og at $\cos n\pi = (-1)^n$). Dermed er

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right)$$

17 Funksjonen er like og har periode $P = 2L = 2$. Dermed er $b_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, ...$ Siden $f(x) = 1 - |x|$ for $x \in [-1, 1]$, er

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx \overset{\text{like}}{=} \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx \\
&\overset{\text{like}}{=} 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx \\
&= 2\int_0^1 (1-x)\cos n\pi x dx \\
&= 2\left[(1-x)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^1 - 2\int_0^1 (-1)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x dx \\
&= 0 + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{(n\pi)^2}(1-(-1)^n)
\end{aligned}$$

Dvs

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \frac{1}{5^2}\cos 5\pi x + ...\right)
\end{aligned}$$

25 Vi begynner med cosinusrekken:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi - x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \underline{\frac{1}{2}\pi}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin nx - \frac{nx\sin nx + \cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \underline{\frac{2(1+(-1)^{n+1})}{\pi n^2}},\ n \geq 1 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathrm{d}x = \underline{0},\ n \geq 1 \\
\Rightarrow f(x) &= \underline{\frac{1}{2}\pi + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x}
\end{aligned}$$

Så regner vi ut sinusrekken:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x \overset{\text{f odde}}{=} \underline{0}$$

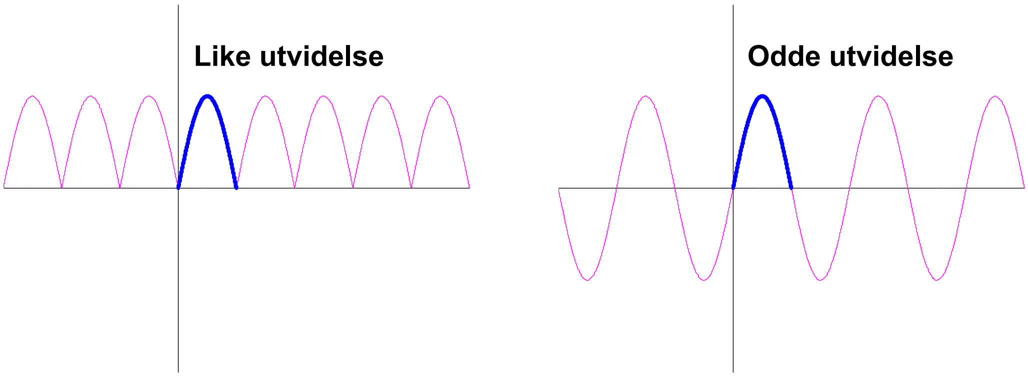
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x \overset{\text{f odde}}{=} \underline{0}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin nx\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\pi}{n}\cos nx + \frac{\sin nx + nx\cos nx}{n^2}\Big]_0^{\pi} = \underline{\frac{2}{n}},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx}$$

$\boxed{29}$

$$f(x) = \sin x, \qquad 0 < x < \pi$$



a)

Cosinusrekken til $f(x)$ finner vi ved å regne ut Fourier-rekken til den like utvidelsen av $f(x)$, som vil si at $f(-x) = f(x)$, se figuren til venstre ovenfor.

Regner ut gjennomsnittet a_0 til funksjonen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Finner a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Dette integralet kan løses med for eksempel delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\sin(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= (0-0) - \frac{1}{n}\left(\left[\cos(x)\frac{(-1)}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{n^2}((-1)\cos(n\pi)-1) + \frac{1}{n^2}I_n \end{aligned}$$

Løser for I_n:

$$\begin{aligned} I_n(1-\frac{1}{n^2}) &= \frac{-1}{n^2}(1+\cos(n\pi)) \\ I_n &= \frac{-1}{n^2-1}(1+(-1)^n), \qquad n = 2,3,4,... \end{aligned}$$

Merk at vi her må anta $n \neq 1$ for ikke å dele på null. Regner ut integralet for $n = 1$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Som betyr at $a_1 = 0$. Resten av koeffisientene blir:

$$a_n = \frac{2}{\pi}I_n = \frac{-2}{\pi(n^2-1)}(1+(-1)^n)$$

Cosinusrekken for $f(x)$ blir dermed:

$$\begin{aligned} f_c(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) \\ &= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2}{\pi(n^2-1)}(1+(-1)^n)\cos(nx) \\ &= \underline{\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos(2x) + \frac{1}{15}\cos(4x) + \frac{1}{35}\cos(6x) + ...\right)} \end{aligned}$$

NB: Fasiten i Kreyszig er litt feil på denne oppgaven.

b)
Her skal vi finne Fourier-rekken til den odde utvidelsen av $f(x)$. Det er selvsagt mulig å finne den ved å regne ut b_n, men hvis man har litt oversikt over hva half-range expansions går ut på ser man kanskje at løsningen rett og slett må være:

$$\underline{f_s(x) = \sin x,} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 11.3

$\boxed{10}$ Løser fra $-\pi$ til π. Dette er en periode på 2π og burde derfor gi samme svar som å løse likningen fra 0 til 2π. Den homogene likningen $y'' + \omega^2 y = 0$ har en løsning på formen

$$c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t).$$

$r(t)$ er en jamn funksjon og vi kan derfor uttrykke $r(t)$ som en Fourier cosinus-rekke. Vi finner koeffesientene:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4}|\sin t|dt = \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin t dt = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4}|\sin t| \cdot \cos(nt)dt = \frac{1}{4}\int_0^\pi \Big(\sin(1+n)t + \sin(1-n)t\Big)dt = -\frac{1}{n^2-1}$$

For $n = 2, 4, 6, ...$, for odde n er $a_n = 0$.

Fordi integralet går fra 0 til π, kan absoluttverditegnene fjernes.

Setter så inn uttrykket for Fourier-rekka, $A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)$, i $y'' + \omega^2 y$ for å finne koeffesientene A_n og B_n og får

$$y'' + \omega^2 y = A_n(\omega^2 - n^2)\cos(nt) + B_n(\omega^2 - n^2)\sin(nt).$$

Setter dette uttrykket lik Fourier-rekka til $r(t)$ og ser at B_n må være lik 0, og

$$A_0 = \frac{1}{2\omega^2}$$
$$A_n = -\frac{1}{(\omega^2 - n^2)(n^2 - 1)}.$$

Dermed blir løsningen på formen (summen av den homogene løsningen og den ikke-homogene løsningen med $r(t)$)

$$y(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega^2} - \frac{1}{3(\omega^2 - 4)}\cos(2t) - \frac{1}{15(\omega^2 - 16)}\cos(4t) - \dots$$