NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- og PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

August 2008
Tid: 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller i uke

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

Et sylindrisk kar roterer med konstant vinkelhastighet Ω om den vertikale $z-$aksen. Karet inneholder en væske med konstant tetthet ρ. Tyngdens akselerasjon er g.
a) Gå ut fra Eulerligningen, og finn hvordan trykket $p(r, z)$ varierer som funksjon av r og z. Grensebetingelsene er så langt uspesifiserte.
b)

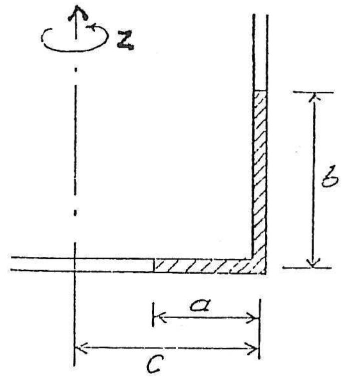


FIG. 1

Et tynt rør med konstant tverrsnitt er bøyd i rett vinkel som vist i fig. 1. Røret er åpent i begge ender. Det roterer i tyngdefeltet med $n = 80$ omdreininger per minutt om den vertikale akse i avstand $c = 50$ cm fra den vertikale gren. Røret inneholder en søyle av en inkompressibel væske ($\rho =$ konstant) med total lengde $l = 80$ cm langs røraksen. Beregn hvordan denne lengden fordeler seg med a på den horisontale og b på den vertikale gren ($a + b = l$). En kan se bort fra atmosfæretrykket. Sett $g = 9,81\, m/s^2$.

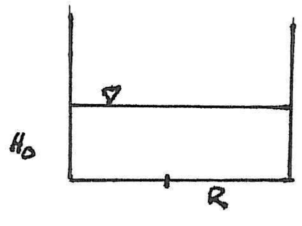


FIG. 2a

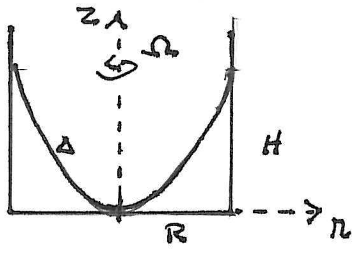
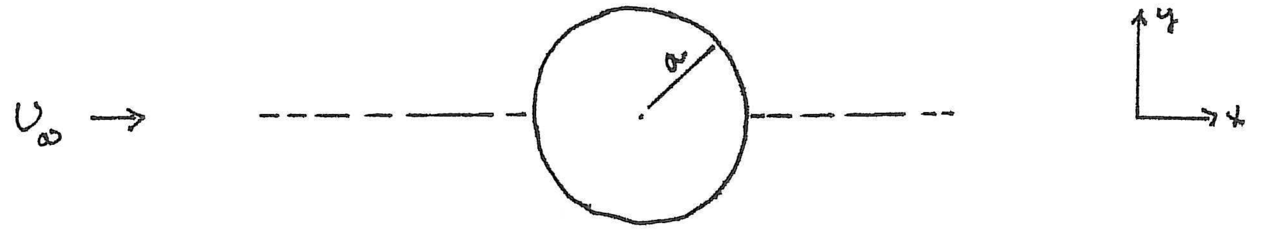


FIG. 2b

c) Se nå på et sylindrisk kar med radius R og stillevannsdybde H_0 (fig.2a). Det settes i rotasjon med konstant vinkelfrekvens Ω. Når likevektstilstanden er inntrådt, er nederste punkt av den frie overflate i berøring med bunnen (fig. 2b). Finn hvilken Ω dette svarer til, uttrykt ved R, g, og H_0.

Oppgave 2



Gitt en uniform potensialstrømning U_∞ i $x-$retning omkring en sylinder som har radius a og sentrum i origo. Sylinderen inneholder en dublett med styrke $U_\infty a^2$ og en virvel med styrke K (> 0), begge i origo. Strømfunksjonen for $r > a$ oppgis å være

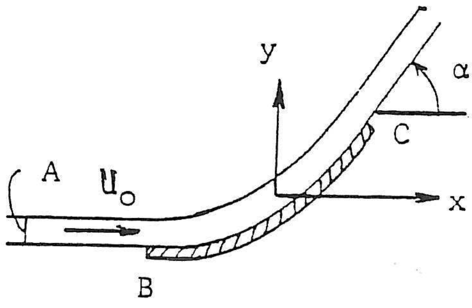
$$\psi = U_\infty \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin\theta - K \ln r.$$

a) Finn hastighetskomponentene V_r og V_θ. For moderate verdier av K vil det være to stagnasjonspunkter på sylinderens overflate. Finn de tilhørende stagnasjonsvinkler θ_s. Hva er betingelsen for at stagnasjonspunktene skal falle sammen?

b) Finn sirkulasjonen Γ ved å integrere V_θ over en sirkel i stor avstand R fra origo, $R \gg a$ (ta med bare de dominerende ledd i V_θ). En ville få det samme resultat for Γ ved å integrere over en sirkelbue med vilkårlig radius r. Hvorfor?

c) Finn trykket $p = p(r, \theta)$ i hele området $r \geq a$, idet du setter $p_\infty = 0$ for $r \longrightarrow \infty$. Finn størrelse og retning av løftet $\mathbf{L}$ på sylinderen, per lengdeenhet.

Oppgave 3



En vannjet med tverrsnitt A og hastighet U_0 er opprinnelig rettet parallelt med $x-$aksen. Jeten avbøyes av en skovl. Tangentene til skovleflaten ved innløpet B og utløpet C danner vinkelen α med hverandre. Anta rette, parallelle strømlinjer både ved B og C. Vannets tetthet er ρ. Neglisjer viskositet og tyngde.

a) Bestem kraften fra vannet på skovlen når skovlen står i ro.

b) Bestem kraften fra vannet på skovlen når skovlen beveger seg i $x-$retning med konstant hastighet $U < U_0$.

c) Ved hvilken konstant skovlhastighet U får effekten av kraften på skovlen maksimal verdi, og hvor stor er den maksimale effekt?

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008

Løsn. Oppgave 1

a) Eulerligningen gir i det ~~roterende~~ koordinatsystem, hvor akselerasjonen er null,

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\Omega^2\vec{e}_r + \vec{g}$$

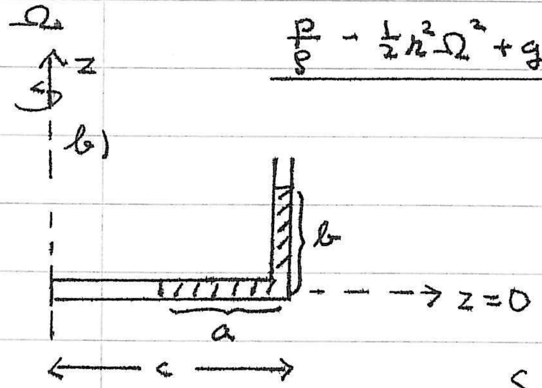
$\uparrow$ Sentrifugalkraft

Da $r\vec{e}_r = \nabla(\frac{1}{2}r^2)$, $\vec{g} = (0,0,-g)$ med $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, får

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + gz\right) = 0, \text{ altså}$$

$$\underline{\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + gz = C}.$$ Verdien av C avhenger av grensebetingelsene.

b)



Ganger ligningen ovenfor med ρ, og kaller den nye sekkekonstanten C:

$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \gamma z + C.$$

Ser bare på nivået $z = 0$:

$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 + C.$$

To grensebetingelser:

1. $p = 0$ i venstre grenseflate av søylen $(r = c-a)$:
$$0 = \frac{1}{2}\rho(c-a)^2\Omega^2 + C.$$

2. $p =$ hydrostatisk trykk γb ved $r = c$:
$$\gamma b = \frac{1}{2}\rho c^2\Omega^2 + C$$

Ved subtraksjon av ligningene faller C bort:

$$\gamma b = \frac{1}{2}\rho\left[c^2 - (c-a)^2\right]\Omega^2, \text{ eller } gb = a(c - \tfrac{1}{2}a)\Omega^2$$

Setter inn $b = l - a$, $g(l-a) = a(c - \frac{1}{2}a)\Omega^2 \Rightarrow$

$$\Omega^2 a^2 - 2(g + c\Omega^2)a + 2gl = 0, \qquad \Omega = \frac{80}{60}\cdot 2\pi = 8{,}38\ \mathrm{s^{-1}}.$$

$$a = \frac{(g + c\Omega^2) \pm \sqrt{(g+c\Omega^2)^2 - 2gl\Omega^2}}{\Omega^2}$$

$g + c\Omega^2 = 44{,}9\ \mathrm{m/s^2}$

$2gl\Omega^2 = 1160\ \mathrm{m^2/s^4}$

$$a = \begin{cases} 1{,}07\ \mathrm{m} \\ 0{,}21\ \mathrm{m} \end{cases}$$

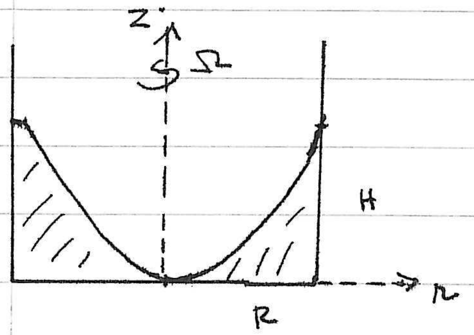
Brukbar løsning $\underline{a = 21\ \mathrm{cm}}$

$\underline{b = l - a = 59\ \mathrm{cm}}$.

TEP4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008.

Løsning Oppgave 1, forts.

c)



Som før er $p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \gamma z + C$.

Men $p = 0$ i $r = 0, z = 0 \Rightarrow C = 0$

så: $p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \gamma z$.

Fri overflate, $p = 0$, gir

$$\underline{z = \frac{r^2\Omega^2}{2g}}$$

Ved kanten $r = R$ er $z = H$: $\quad H = \frac{R^2\Omega^2}{2g}$.

Finner volumet V av vannet ved integrasjon:

$$V = 2\pi \int_{\text{VANN}} z\, r\, dr = 2\pi \cdot \frac{\Omega^2}{2g}\int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi R^4\Omega^2}{4g}$$

Innsetting av $H = \frac{R^2\Omega^2}{2g}$ gir $\underline{V = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot H}$

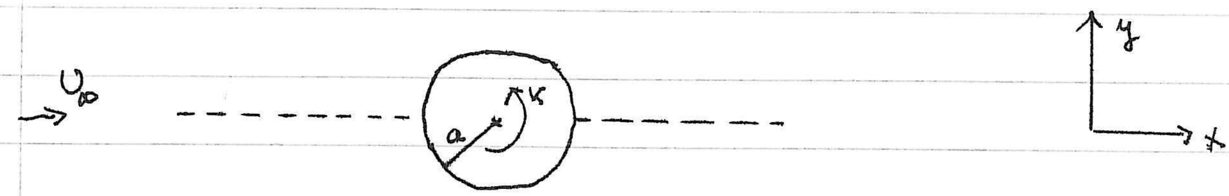
Samme volum ved stillevann: $V = \pi R^2 \cdot H_0$, dvs. $\underline{H = 2H_0}$

Av $2H_0 = \frac{R^2\Omega^2}{2g}$ følger $\left(R^2 = \frac{4gH_0}{\Omega^2}\right)$

$$\underline{\Omega = \frac{2}{R}\sqrt{gH_0}}$$

TEP 4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008

Løsning Oppgave 2



$$\psi = U_\infty\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta - K \cdot \ln r$$

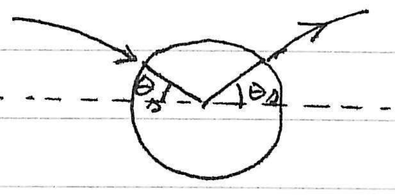
a) $$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$\underline{V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{K}{r}}$$

Stagnasjonspunkter der hvor $V_\theta = 0$ på overflaten $r = a$.

$\Rightarrow$: $0 = -2U_\infty \sin\theta_s + \frac{K}{a}$, $\quad \underline{\sin\theta_s = \frac{K}{2U_\infty a}}$

Her er K begrenset av at $\frac{K}{2U_\infty a} \leq 1$. De to løsningene for θ_s er supplementvinkler.



Sammenfallende stagnasjonspunkter når $\underline{\frac{K}{2U_\infty a} = 1}$

b) I stor avstand er tilnærmet $V_\theta = -U_\infty \sin\theta + \frac{K}{r}$

Sirkulasjon $\underline{\Gamma} = \oint \vec{V}\cdot d\vec{l} = R\int_0^{2\pi} V_\theta \, d\theta = R\int_0^{2\pi}\left(-U_\infty \sin\theta + \frac{K}{R}\right)d\theta$

$= K\int_0^{2\pi} d\theta = \underline{2\pi K}$

Stokes' sats: Differansen mellom $\oint \vec{V}\cdot d\vec{l}$ tatt over en stor sirkel R, og over en sirkel med vilkårlig radius r, er lik flateintegralet $\oint (\nabla \times \vec{V})\cdot \vec{n}\, dA$ over flaten mellom r og R. Da $\nabla \times \vec{V} = 0$ (potensialstrømning) er differansen lik null. Γ altså uavhengig av veien.

TEP4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008

<u>Løsning Oppgave 2, forts.</u>

c) Bernoulli $\frac{1}{2}\rho V^2 + p = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + \underbrace{p_\infty}_{=0}$

Regner ut

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = U_\infty^2\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^2\cos^2\theta + U_\infty^2\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{K}{U_\infty r}\right]^2$$

$$= U_\infty^2\left\{\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^2\cos^2\theta + \left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)^2\sin^2\theta - \frac{2K}{U_\infty r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{K^2}{U_\infty^2 r^2}\right\}$$

$$= U_\infty^2\left\{1 + \frac{a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta - \frac{2K}{U_\infty r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{K^2}{U_\infty^2 r^2}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{p} = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho V^2 = \underline{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left\{-\frac{a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta + \frac{2K}{U_\infty r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 r^2}\right\}}$$

Løft finnes enklest fra Kutta-Joukowsky:

$\underline{L} = -\rho U_\infty \Gamma = \underline{-\rho U_\infty \cdot 2\pi K}$. Virker i negativ y-retning $(K>0)$.

Alternativt kan en integrere y-komponenten av trykkraften over overflaten. På $r=a$ er

$$p = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left\{-1 + 2\cos 2\theta + \frac{4K}{U_\infty a}\sin\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 a^2}\right\}.$$

$$\Rightarrow L = -\int_0^{2\pi} p\sin\theta \cdot a\,d\theta = -\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 a\int_0^{2\pi}\left\{-1 + 2\cos\theta + \frac{4K}{U_\infty a}\sin\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 a^2}\right\}\sin\theta\,d\theta$$

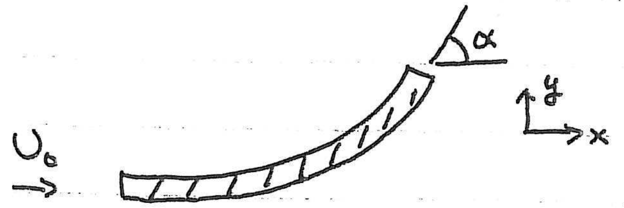
Her gir bare 3. ledd i {} bidrag:

$$\underline{L} = -\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 a \cdot \frac{4K}{U_\infty a}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta}_{\pi} = \underline{-\rho U_\infty \cdot 2\pi K},$$

som ovenfor.

TEP4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 11. august 2008.

Løsning Oppgave 3



a) Legger kontrollvolumet slik at det omslutter skovlen.

Kraften $\vec{F}$ på væsken i kontrollvolumet er $\vec{F} = \dot{\vec{M}}_{UT} - \dot{\vec{M}}_{INN}$,

hvor $\dot{\vec{M}}_{UT} = \int_{UT} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dA$, $\dot{\vec{M}}_{INN} = -\int_{INN} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dA$.

Her blir $(\dot{M}_x)_{UT} = \rho U_0^2 A\cos\alpha$, $(\dot{M}_y)_{UT} = \rho U_0^2 A \sin\alpha$

$(\dot{M}_x)_{INN} = \rho U_0^2 A$, $(\dot{M}_y)_{INN} = 0$.

$\Rightarrow$ $F_x = \rho U_0^2 A(\cos\alpha - 1)$, $F_y = \rho U_0^2 A \sin\alpha$

Kraften på skovlen er $\vec{F}_{skovl} = -\vec{F}$.

Altså

$$\underline{(F_{skovl})_x = \rho U_0^2 A (1-\cos\alpha), \quad (F_{skovl})_y = -\rho U_0^2 A \sin\alpha}$$

b) Transformerer til det system hvor skovlen er i ro. Da er innkommende vannhastighet lik $(U_0 - U)$. Regningen blir samme som ovenfor, med (U_0-U) istedenfor U_0. Altså

$$\underline{(F_{skovl})_x = \rho (U_0-U)^2 A(1-\cos\alpha), \quad (F_{skovl})_y = -\rho(U_0-U)^2 A \sin\alpha}$$

c) Effekt $P = (F_{skovl})_x \cdot U = \rho U (U_0 - U)^2 A (1-\cos\alpha)$

Maksimalverdi for P når $\frac{dP}{dU} = 0$, $\Rightarrow$

$(U_0 - U)^2 = 2U(U_0 - U)$, som gir $\underline{U = \frac{1}{3}U_0}$

$$\underline{P_{max} = \frac{4}{27}\rho U_0^3 A (1-\cos\alpha)}$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen: Iver Brevik,
Tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I EMNE TEP 4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

(Bokmål)

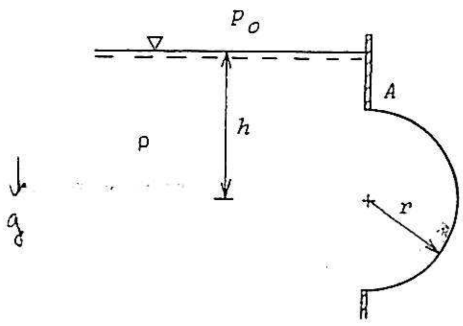
Torsdag 29. november 2007
Tid: 0900 – 1300

Studiepoeng: 7,5

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Sensuren faller innen 21.12.07

Oppgave 1.



Et vindu i en akvarievegg er formet som en halvsylinder med radius r og bredde b (inn i figurplanet). Vinduet er plassert som figuren viser, slik at sylinderens akse er horisontal og beliggende i avstand h under vannoverflaten. Vannets tetthet er ρ , tyngdens akselerasjon er g. Atmosfæretrykket er p_o.

a) Se først bort fra p_o, og finn størrelsen F_H av den totale horisontale kraft $\vec{F}_H$ på vindusflaten.

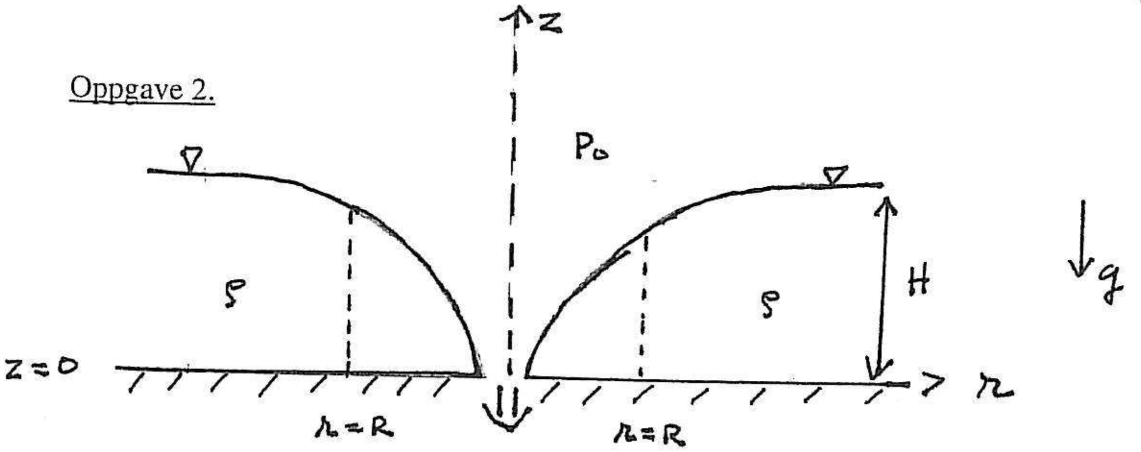
b) Finn tilsvarende størrelsen F_V av den vertikale kraft $\vec{F}_V$ på vindusflaten, og finn hvilken vinkel α resultantkraften $\vec{R} = \vec{F}_H + \vec{F}_V$ danner med horisontalaksen.

c) Finn dybden h_{CP} av trykksenteret for $\vec{F}_H$. Vil det ha noe å si for kreftene om vinduet vender innover istedenfor utover? Begrunn svaret.

Oppgitt:
For et rektangel med bredde b og høyde L er arealets treghetsmoment omkring en horisontal akse x (her inn i planet) gjennom centroiden lik

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}.$$

Oppgave 2.



Vann strømmer ut fra et lite hull i bunnen av en tank, som vist på figuren. Betrakt strømningsfeltet bare i området $r \geq R$, hvor R er en gitt avstand fra origo (hullet). I dette området er hastigheten til vannet tilnærmet gitt som

$$\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = \left(0, \frac{\omega R^2}{r}, 0\right).$$

Atmosfæretrykket er p_0. I stor avstand, $r \to \infty$, er vanndybden gitt lik H. Tyngdens akselerasjon er g, vannets tetthet er ρ. Se bort fra vannets viskositet, og legg koordinatsystemet som på figuren slik at $z = 0$ er bunnplaten.

a) Regn ut alle komponentene av virvlingen $\vec{\varsigma} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$, og finn høyden $z = h(r)$ av den frie overflate uttrykt ved r og de gitte konstanter.

b) Finn trykket $p = p(r,z)$ i et vilkårlig punkt i vannet.

c) Finn den totale kraft F_z på bunnplaten $z = 0$, i området mellom $r = R$ og en ytre radius $r = R_1$, $R_1 > R$.

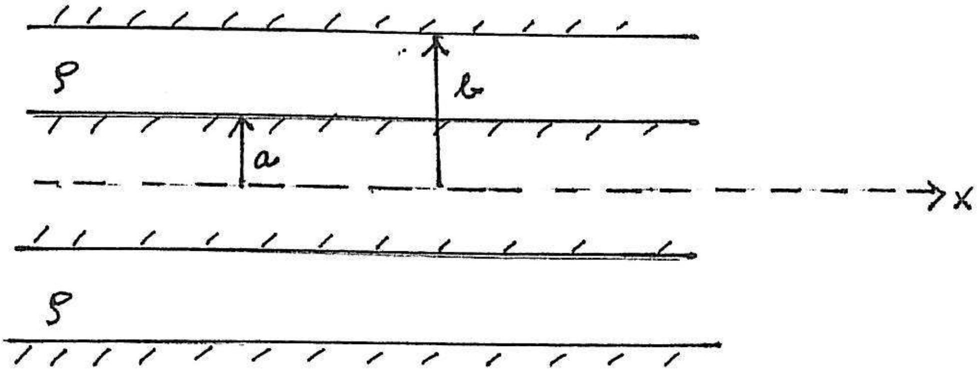
d) Finn strømfunksjonen ψ samt sirkulasjonen Γ. Du finner at $\Gamma \neq 0$ selv om $\varsigma_z = 0$. Kan du kommentere det?

Oppgitt
I sylinderkoordinater er generelt

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z},\ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

Oppgave 3.

a)



I et uendelig langt horisontalt rør med sirkulært tverrsnitt er det sentrisk i røret plassert en massiv sylinder. Rørets radius er b mens sylinderens radius er a. Rommet mellom rør og sylinder er fylt med et fluid med dynamisk viskositet μ. Fluidet er utsatt for en konstant trykkgradient $\partial p / \partial x$ i røraksens retning (x-retningen), og dette gjør at bare den horisontale hastighetskomponenten $u = u(r)$ er forskjellig fra null. Strømningen er stasjonær. Se bort fra tyngden.

Det opplyses at Navier-Stokes' ligning i horisontalretningen reduserer seg til

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Finn herav $u = u(r)$ i mellomrommet, når konstanten $\partial p / \partial x$ er en kjent størrelse.

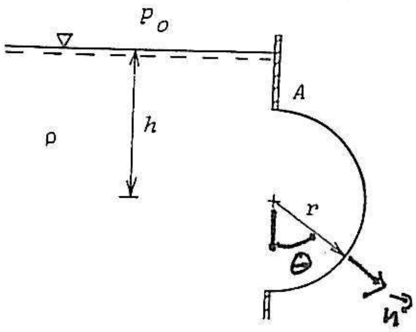
b) Dersom indre sylinder ikke holdes på plass, vil den akselerere horisontalt på grunn av skjærspenningene τ som virker på flaten $r = a$. Anta at indre sylinder "slippes" ved tiden $t = 0$. Beregn horisontalakselerasjonen a_x i dette øyeblikket. Sett massen av indre sylinder lik M, per lengdeenhet i x-retning.

Oppgitt:

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}$$

c) Gitt et todimensjonalt stasjonært strømningsfelt, hvor strømfunksjonen i kartesiske koordinater er $\psi = \psi(x, y)$. Vis hvordan differansen $\psi_2 - \psi_1$ mellom to strømlinjer er relatert til volumgjennomstrømningen Q mellom strømlinjene.

Løsning Oppgave 1



a) $F_H = \gamma h_{CG} A_x$, hvor $A_x = 2rb$ er det horisontalt projiserte areal.

Da $h_{CG} = h$, er

$$\underline{F_H = 2\gamma h r b}$$

b) $F_V = \gamma \mathcal{V}$ er tyngden av vannet over vindusflaten. Da volumet er $\mathcal{V} = \frac{1}{2}\pi r^2 b$, blir

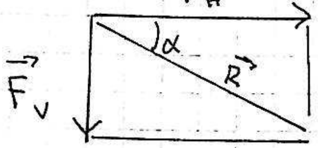
$$\underline{F_V = \frac{1}{2}\gamma \pi r^2 b}$$

Alternativt kan F_V finnes ved integrasjon:

Da $p = \gamma(h + r\cos\theta)$ er trykket på vinduet, er kraften på et element dA lik $d\vec{F} = p\vec{n}\,dA = \gamma(h + r\cos\theta)\vec{n}\, rb\, d\theta$, hvor $\vec{n}$ er normalvektor utover. Integrerer over vinduet,

$$\underline{F_Z} = \int dF_Z = \gamma r b \int_0^{\pi} (h + r\cos\theta)\cos\theta\, d\theta =$$

$$= \gamma r b \Big\{ h \underbrace{\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta}_{0} + r \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta}_{\frac{1}{2}\cdot\pi} \Big\} = \underline{\frac{1}{2}\gamma\pi r^2 b \quad (\equiv F_V)}, \text{ som ovenfor}$$

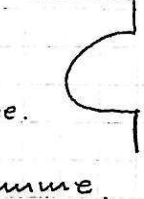


$$\underline{\tan\alpha} = F_V / F_H = \underline{\pi r / (4h)}.$$

c) $$h_{CP} = h_{CG} + \frac{I_{xx}}{h_{CG}\cdot A_x} = h + \frac{\frac{1}{12} b \cdot (2r)^3}{h \cdot 2rb}$$

$$\underline{h_{CP} = h + \frac{1}{3}\frac{r^2}{h}}$$

Hvis vinduet vender innover:



$\vec{F}_H$ er den samme fordi A_x er den samme.

Størrelsen F_V av $\vec{F}_V$ er også den samme, fordi volumet $\mathcal{V}$ er det samme. Men $\vec{F}_V$ er nå rettet oppover. Trykket er størst på undersiden.

oppover. trykket er størst på undersiden.

TEP 4105 FLUIDMEKANIKK 29. november 2007

Oppgave 2

$$\vec{V} = \left(0, \frac{\omega R^2}{r}, 0\right) \text{ gir}$$

a)

$$\nabla \times \vec{V} = \left(-\frac{\partial V_\theta}{\partial z}, 0, \frac{1}{r}\frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r}\right) = (0,0,0).$$

Dermed er Bernoullikonstanten den samme overalt.

Bernoulli mellom et vilkårlig punkt ($r > R$) på overflaten og overflaten ved $r = \infty$,

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega R^2}{r}\right)^2 + g h(r) = \frac{p_0}{\rho} + gH$$

$$\underline{h(r) = H - \frac{1}{2g}\frac{\omega^2 R^4}{r^2}}$$

b) Bernoulli mellom et vilkårlig punkt (r, z) og fri overflate ved $r = \infty$,

$$\frac{p(r,z)}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega R^2}{r}\right)^2 + gz = \frac{p_0}{\rho} + gH$$

$$\underline{p(r,z) = p_0 + \rho g (H - z) - \frac{1}{2}\rho \frac{\omega^2 R^4}{r^2}}$$

c) På bunnen er $p(r,0) = p_0 + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \frac{\omega^2 R^4}{r^2}$

Verikalkraft på bunnen:

$$F_z = \int_R^{R_1} p(r,0) \cdot 2\pi r \, dr = 2\pi \left\{ (p_0 + \rho g H) \int_R^{R_1} r \, dr - \frac{1}{2}\rho \omega^2 R^4 \int_R^{R_1} \frac{dr}{r} \right\}$$

$$\underline{F_z = \pi \left\{ (p_0 + \rho g H)(R_1^2 - R^2) - \rho \omega^2 R^4 \ln \frac{R_1}{R} \right\}}$$

TEP4105 FLUIDMEKANIKK, 29. november 2007

Oppgave 2d

Av $V_\theta = \frac{\omega R^2}{r}$, og $V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$ i planpolare koordinater,

får

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\omega R^2}{r}$$

Enkleste løsning $\underline{\psi = -\omega R^2 \ln r}$, som for virvel med styrke $K = \omega R^2$.

Sirkulasjon

$$\underline{\Gamma} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = 2\pi r \cdot V_\theta = 2\pi r \cdot \frac{\omega R^2}{r} = \underline{2\pi \omega R^2}$$

At $\zeta_z = 0$ betyr at lokal vinkelhastighet $\omega_z = \frac{1}{2}\zeta_z$ er null. Likevel er $\Gamma \neq 0$. Henger sammen med at det er en singularitet i origo, som for en virvel.

Oppgave 3

a) Integrerer $\frac{d}{dr}\left(r \frac{du}{dr}\right) = \frac{r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$r\frac{du}{dr} = \frac{r^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1, \quad \frac{du}{dr} = \frac{r}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_1}{r}$$

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1 \ln r + C_2.$$

Grensebetingelser: $u(a) = 0$ gir $0 = \frac{a^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1 \ln a + C_2$

$u(b) = 0$ gir $0 = \frac{b^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1 \ln b + C_2$.

Herav $C_1 = -\frac{b^2 - a^2}{4\mu}\frac{\partial p/\partial x}{\ln b/a}$, $C_2 = -\frac{b^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{b^2 - a^2}{4\mu}\frac{\partial p/\partial x}{\ln b/a}$

$$\underline{u(r) = -\frac{\partial p/\partial x}{4\mu}\left[b^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln b/a}\ln\frac{r}{b}\right]}$$

TEP4105 FLUIDMEKANIKK, 29. november 2007

Oppgave 3 b)

Regner ut $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{\partial p/\partial x}{4\mu}\left[2r - \dfrac{b^2-a^2}{\ln b/a}\cdot\dfrac{1}{r}\right]$

På overflaten $r = a$ er skjærspenningen

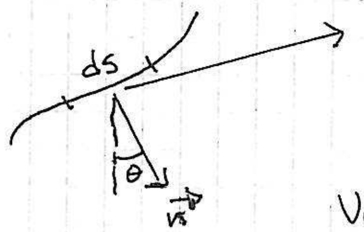
$$\tau = \mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=a} = \frac{1}{4}\frac{\partial p}{\partial x}\left[2a - \frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\cdot\frac{1}{a}\right]$$

Longitudinal kraft per lengdeenhet av indre sylinder:

$$F_x = \tau\cdot 2\pi a = \frac{1}{2}\pi a\frac{\partial p}{\partial x}\left[2a - \frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\cdot\frac{1}{a}\right] = M\cdot a_x$$

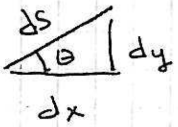
$$\underline{a_x = \frac{\pi a}{2M}\frac{\partial p}{\partial x}\left[2a - \frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\cdot\frac{1}{a}\right]}$$

c)



$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$$

$$\vec{n} = \vec{i}\sin\theta - \vec{j}\cos\theta$$

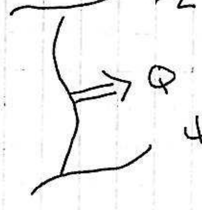


Volumgjennomstrømningen dQ gjennom et linjeelement ds av en vilkårlig kurve i planet er $dQ = (\vec{V}\cdot\vec{n})ds$, hvor $\vec{n}$ er enhetsnormalen.
Av figuren er $\vec{n} = (\sin\theta, -\cos\theta)$, $dx = ds\cdot\cos\theta$, $dy = ds\cdot\sin\theta$. Ettersom $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, blir

$$dQ = (un_x + vn_y)ds = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\sin\theta + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\theta\right)\cdot ds$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot dx = d\psi.$$

Den totale Q finnes ved å integrere dQ langs en vilkårlig kurve mellom ψ_1 og ψ_2:



$$\underline{Q} = \int_1^2 dQ = \int_1^2 d\psi = \underline{\psi_2 - \psi_1}$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I TEP 4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (Fysikk og matematikk) OG FAK. IME (Teknisk kybernetikk)

Onsdag 15. august 2007
Tid: 0900 – 1300

Studiepoeng: 7,5.

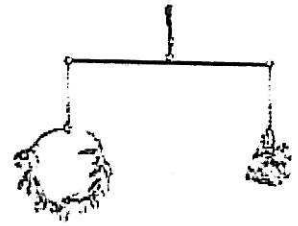
Bokmål/Nynorsk

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemider: Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Sensuren faller 2007

Oppgave 1

Hieron II (ca. år 200 f.Kr.), konge av Syrakus, ga en gullsmed gull for å lage en krone. Kongen som mistenkte gullsmeden for å ha byttet ut noe av gullet med tilsvarende vekt sølv, ba Archimedes om å avgjøre om kronen var rent gull. Og fordi kronen var hellig, dedikert til gudene, kunne ikke Archimedes ødelegge den på noen måte.

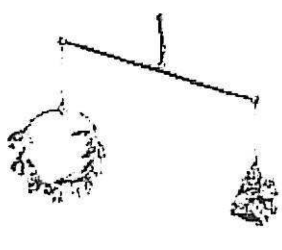


Archimedes benyttet en balansevekt for å lage en gullklump med samme vekt som kronen. Gullklumpen puttet han i en bolle og fylte den med vann til randen. Så erstattet han gullklumpen med kronen, og da den fortrengte mer vann ble gullsmeden halshogd.

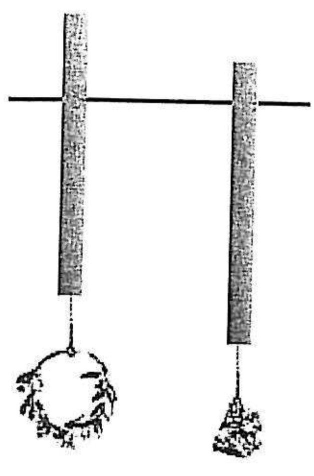
a) Anta at Archimedes brukte et kar med konstant tverrsnitt. Ved å legge gullklumpen i karet stiger vannet en høyde h_G, mens med kronen stiger vannet en høyde h_K. Kronens volum betegnes V_K og volumet av sølv i kronen for V_S. La oss undersøke høydeforskjellen hvis gullsmeden var riktig grisk og har byttet halve kronevolumet med sølv ($V_S/V_K = ½$). Vis at høyden h_K da kan skrives som

$$h_K = \frac{2}{1+r} h_G$$ der r er tetthetsforholdet sølv/gull.

Finn tallverdi for høydeforskjellen $h_K - h_G$. Bruk $h_G = 1.65$ mm og $r = 0.55$.

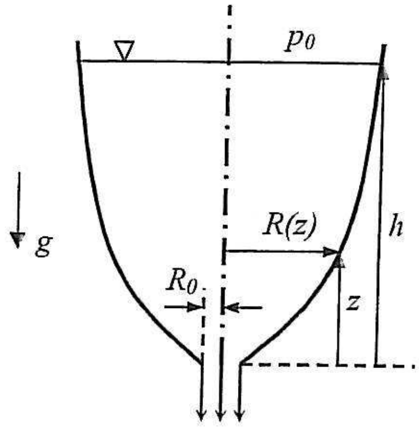


b) Hvis Archimedes hadde tenkt seg om kunne han ha gjort et litt mer rettferdig eksperiment ved å gjenta veiingen under vann som vist i figuren til høyre. Finn forskjellen i kraften som virker i hvert endepunkt av vektarmen uttrykt ved tettheten til vann ρ_V, kronens volum V_K, gullklumpens volum V_G og tyngdens akselerasjon g.



c) Eksperimentet i spørsmål b) markerer kun en eventuell vektforskjell, så for å måle vektforskjellen mer nøyaktig fester vi en sylindrisk trestokk med diameter d til kronen/gullklumpen og markerer vannoverflaten på stokken. Finn denne høydeforskjellen ΔH uttrykt ved V_S, d og r.

Oppgave 2



Vannuret som er vist på figuren ved siden av ble i oldtiden benyttet til måling av tid. Det består av en aksesymmetrisk beholder med sirkulært tverrsnitt som har variende radius $R(z)$. Vannet renner svært langsomt ut gjennom en liten sirkulær åpning med radius R_0 i bunnen av beholderen. Vannets tetthet er ρ, atmosfæretrykket er p_0 og tyngdens akselerasjon er g. Friksjonen neglisjeres.

a) Bestem hvordan vannoverflatens synkehastighet $v(h)$ avhenger av dybden h.

b) Påvis at synkehastigheten blir konstant dersom beholdertverrsnittets radius er gitt som

$$R(z) = R_0 \left[1 + \frac{2gz}{v_S^2} \right]^{1/4}$$

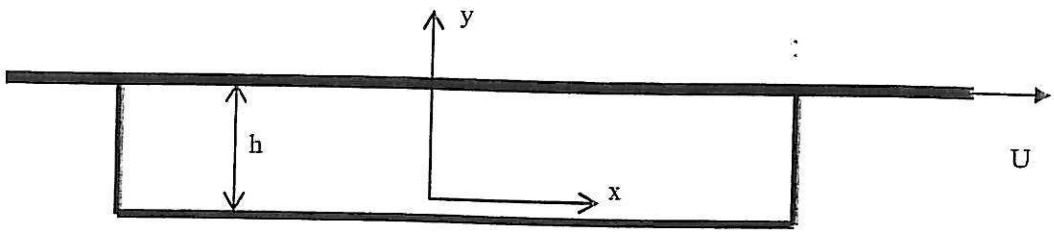
og v_S er den konstante synkehastigheten.

I resten av oppgaven forutsettes det at $R(z)$ varierer med z som ovenfor.

c) Bestem hvordan volumstrømmen Q gjennom bunnåpningen avhenger av vanndybden h.

d) Vannuret er fylt til en høyde $h = H$ ved tiden $t = 0$. Hvor lang tid tar det å tømme karet hvis $H = 1.8$ m og vannoverflaten synker 1 mm i minuttet? I dette vannuret er $R_0 = 1.3$ mm og $g = 9.81$ m/s^2.

Oppgave 3



Et belte beveger seg med konstant hastighet U i x-retningen som vist i figuren. Inntil beltet er det plassert et langstrakt kammer som står i ro. Kammeret er fylt med en væske med konstant tetthet ρ og viskositet μ. På grunn av friksjonen mot beltet får vi satt opp en laminær og stasjonær strømning inne i kammeret. Kammerets høyde h er mye mindre enn lengden i x-retningen. Vi ser bort fra områdene i hver ende av kammeret, og betrakter kun kammerets midtområde der vi antar at væskens bevegelse vil være parallell med den viste x-aksen. Se bort fra tyngdens innvirkning i problemet.

a) Vis at trykkgradienten **dp/dx** i x-retningen må være en konstant.

b) Vis at hastigheten u i x-retningen er gitt ved

$$u = \frac{U}{h} y + \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - hy)$$

c) Finn trykkgradienten **dp/dx** uttrykt ved U, μ og h. (Tips: Netto væsketransport i x-retning må være null.)

d) Sett inn for trykkgradienten i uttrykket for hastigheten u, og lag en skisse av hastighetsprofilet. Finn spesielt den største negative hastigheten i x-retning.

FLUIDMEKANIKK

TEP4105. Kontinuasjonseksamen 15. august 2007

Oppgave 1

a) Massene av gull og krone er like, $\rho_G V_G = \rho_K V_K \equiv M$.

Altså $\rho_K = \rho_G \dfrac{V_G}{V_K}$. Da $\rho_K = \frac{1}{2}(\rho_G + \rho_S)$ fås

$$\frac{1}{2}(\rho_G + \rho_S) = \rho_G \cdot \frac{V_G}{V_K}, \qquad \frac{V_G}{V_K} = \frac{1}{2}(1+r).$$

Hvis karets tverrsnitt er A er stigehøyden med gull i karet

$h_G = \dfrac{V_G}{A}$. Tilsvarende er $h_K = \dfrac{V_K}{A}$ med kronen i karet.

Det gir $\dfrac{h_K}{h_G} = \dfrac{V_K/A}{V_G/A} = \dfrac{V_K}{V_G} = \dfrac{2}{1+r}$

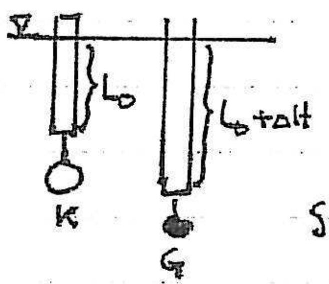
$$\underline{h_K - h_G} = h_G \frac{1-r}{1+r} = 1{,}65 \, \frac{1-0{,}55}{1+0{,}55} \text{ mm} = \underline{0{,}48 \text{ mm}}$$

b) Eksperiment i vann.

Oppdriftskraft F_{BK} for kronen: $F_{BK} = \rho_V g V_K$.

— " — F_{BG} " gull: $F_{BG} = \rho_V g V_G$

Forskjell $\underline{\Delta F} = F_{BK} - F_{BG} = \underline{\rho_V g (V_K - V_G)}$

c) 

Samme oppdrift:

$$F_{BK} + \rho_V g L_0 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = F_{BG} + \rho_V g (L_0 + \Delta H) \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

Setter inn $F_{BK} - F_{BG} = \rho_V g (V_K - V_G)$:

$$V_K - V_G = \Delta H \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

Da $V_K = 2V_S$, og $V_G = \frac{1}{2}(1+r) V_K = \frac{1+r}{2} \cdot 2V_S = (1+r) V_S$:

$$\Delta H = (V_K - V_G) \cdot \frac{4}{\pi d^2} = [2V_S - (1+r) V_S] \frac{4}{\pi d^2}$$

$$\underline{\Delta H = (1-r) V_S \cdot \frac{4}{\pi d^2}}$$

TEP4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 15. august 2007

Løsning eksamen

Oppgave 2 a)
Det er gitt at strømningen er friksjonsfri, og fordi utstrømningshastigheten er liten kan vi se på strømningen som tilnærmet stasjonær (tidsuavhengig). Dermed kan vi bruke Bernoulli's likning langs en strømlinje fra væskeoverflaten (der trykket er p_0 og hastigheten er $v(h)$) og til utløpet (der trykket også er p_0 mens hastigheten er v_{ut}):

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2(h)}{2}+gh=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_{ut}^2}{2}+0$$

Her forsvinner p_0, men vi har to ukjente hastigheter. Massebevarelse gir:

$$Q=v_{ut}\pi R_0^2=v(h)\pi R^2 \quad\Rightarrow\quad v_{ut}=v(h)\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$$

Setter uttrykket for v_{ut} inn i Bernoulli:

$$v^2(h)+2gh=v^2(h)\left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{v(h)=\sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{R}{R_0}\right)^4-1}}}}$$

{En god tilnærmelse vil være å neglisjere $v(h)$ i Bernoulli (fordi $v(h)<<v_{ut}$). Da får vi det klassiske resultatet $v_{ut}=\sqrt{2gh}$ og massebevarelsen gir oss dermed svaret

$$v(h)=\sqrt{2gh}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2$$

Dette er det samme som å sløyfe -1 i svaret over med argumentet $R^4>>R_0^4$.}

b)
Når synkehastigheten til overflaten $v(h)$ er konstant får vi fra svaret i a):

$$v(h)=v_S=\sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{R}{R_0}\right)^4-1}} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{R}{R_0}\right)^4-1=\frac{2gh}{v_S^2} \quad\Rightarrow\quad R=R_0\left[1+\frac{2gh}{v_S^2}\right]^{1/4}$$

Her har vi brukt h som dybden til væskeoverflaten. Uttrykket over gir oss dermed sammenhengen mellom radius R i karet og dybden:

$$\underline{\underline{R(z)=R_0\left[1+\frac{2gz}{v_S^2}\right]^{1/4}}}$$

{Fra den tilnærmede løsningen i a) får vi et litt annet uttrykk:

$$v(h)=v_S\simeq\sqrt{2gh}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad R=R_0\left(\frac{2gh}{v_S^2}\right)^{1/4}$$

som er en god tilnærmelse fordi v_S er liten.}

c)

Volumstrømmen Q ut av karet er gitt ved $Q = v_{ut}\pi R_0^2$. Nå er det gitt at synkehastigheten i karet er konstant lik v_S, så fra Bernoulli's likning får vi nå sammenhengen:

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_S^2}{2}+gh=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_{ut}^2}{2}+0 \quad\Rightarrow\quad v_{ut}=\sqrt{v_S^2+2gh} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{Q=\pi R_0^2\sqrt{v_S^2+2gh}}}$$

d)

Fordi synkehastigheten er konstant er tømmetiden T gitt ved $\underline{H = v_S \cdot T}$. Tallverdier:

$$v_S = 1\frac{mm}{minutt}\cdot\frac{1\,m}{1000\,mm}\cdot\frac{1\,minutt}{60\,s}=\frac{1}{60000}\,m/s$$

$$T=\frac{H}{v_S}=\frac{1.8m}{\frac{1}{60000}m/s}=10800\,s=\underline{\underline{30\,timer}}$$

Oppgave ~~4~~ 3

a)

Oppgitt kun hastighet i x-retningen: $\vec{v} = (u,0)$

Massebevarelse: $\nabla\cdot\vec{v}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x}=0 \;\Rightarrow\; u=u(y)$

Navier-Stokes, x-retning:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+g_x+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Her: stasjonært, $u = u(y)$, $v = 0$, $g = 0$, så den reduseres til:

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{d^2u}{dy^2}$$

Navier-Stokes, y-retning blir med $v = 0$:

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad\Rightarrow\quad p=p(x)$$

x-komponenten kan da skrives:

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dy^2}=\text{konstant}$$

b)

Integrerer opp x-komponenten av Navier-Stokes:

$$u=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{1}{2}y^2+C_1y+C_2$$

Grensebetingelser:

$$u(y=0)=0=C_2$$

$$u(y=h)=U=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h^2+C_1h \quad\Rightarrow\quad C_1=\frac{U}{h}-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h$$

$$\Rightarrow\quad u=\frac{U}{h}y+\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2-hy)$$

c)

Netto volumstrøm Q i x-retningen må være null:

$$Q=0=\int_0^h u\,dy=\frac{U}{h}\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{1}{3}h^3-h\frac{1}{2}h^2\right)=\frac{Uh}{2}+\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dp}{dx}=\frac{6U\mu}{h^2}$$

d)

Innsatt for trykkgradienten:

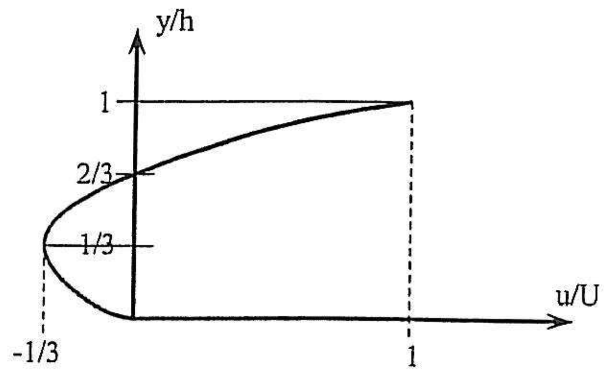
$$u=\frac{U}{h}y+\frac{1}{2\mu}\frac{6U\mu}{h^2}\left(y^2-hy\right)=3U\frac{y^2}{h^2}-2U\frac{y}{h}\quad\Rightarrow\quad \underline{\frac{u}{U}=3\left(\frac{y}{h}\right)^2-2\left(\frac{y}{h}\right)}$$

Funksjonen u/U kan dermed enkelt plottes for verdier av y/h mellom null og en:

$$\frac{u}{U}=0 \text{ for } \frac{y}{h}=0 \text{ og } \frac{y}{h}=\frac{2}{3}$$

Funksjonen har maks-verdi for y/h = 1/3:

$$\frac{u}{U}\left(\text{for } \frac{y}{h}=\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$$



NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I EMNE TEP 4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

(Bokmål)

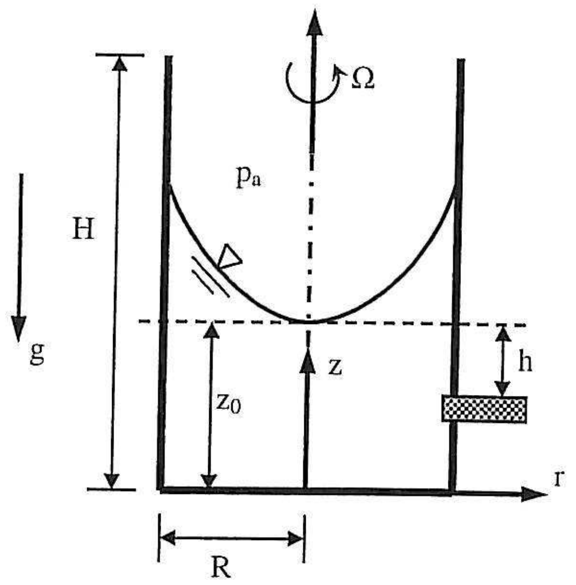
Torsdag 7. desember 2006
Tid: 0900 – 1300

Studiepoeng: 7,5

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Sensuren faller innen 08.01.07

Oppgave 1.



Et åpent sylindrisk kar roterer om sin vertikale akse (z) med konstant vinkelhastighet Ω. Karet inneholder en væske med tetthet ρ, og det forutsettes at Ω ikke er så stor at væsken renner over kanten av karet eller at noe område på bunnen blir liggende tørt. Sylinderen har høyden H og radius R, og avstanden langs z-aksen fra bunnen opp til væskeoverflatens laveste punkt betegnes z_0. Tyngdens akselerasjon er g og atmosfæretrykket er p_a. Legg koordinatsystemet som vist i figuren.

a) Vis at trykket i væsken kan skrives

$$p(r,z) = p_a + \rho g(z_0 - z) + \frac{\rho\Omega^2 r^2}{2}$$

b) Finn en likning for væskeoverflaten.

I en dybde h under z_0 sitter en sylindrisk plugg i veggen på karet. Pluggens diameter d er så liten at væsketrykket kan regnes konstant over endeflaten til pluggen inne i karet.

c) Finn kraften fra væsken på pluggens endeflate.

d) Pluggen faller ut og det oppstår en strømning gjennom hullet. Finn utstrømningshastigheten i forhold til karet når den relative væskebevegelsen inne i karet neglisjeres.

Oppgave 2.

I et plant strømningsfelt av et ideelt (friksjonsfritt) inkompressibelt fluid med tetthet ρ er hastighetskomponenten $v_r = 0$ for alle r, mens

$$v_\theta = \omega r, \quad r \leq r_0 \qquad (1)$$

$$v_\theta = \frac{A}{r}, \quad r > r_0 \qquad (2)$$

Her er ω og r_0 kjente konstanter. Tyngekraften neglisjeres.

a) Bestem konstanten A slik at v_θ blir kontinuerlig ved $r = r_0$. Finn virvlingens z-komponent ζ samt sirkulasjonen Γ i hele området $0 < r < \infty$.

b) Finn trykket p for $0 < r < \infty$, når det er oppgitt at $p = p_\infty$ for $r = \infty$.

c) Anta så at v_θ er gitt som i (1) for $r \leq r_0$ slik som før, mens

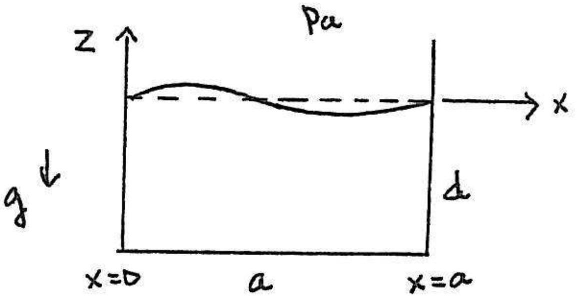
$$v_\theta = \frac{\omega r_0}{(r/r_0)^\alpha} \quad \text{for } r > r_0 \qquad (3)$$

Her er α en gitt konstant > 1. Finn nå ζ og p for $r > r_0$. Grensebetingelsen er $p = p_\infty$ for $r = \infty$ slik som før.

Oppgitt: Eulers likninger i polarkoordinater reduserer seg i vårt tilfelle til

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

Oppgave 3



Figuren viser en vanntank sett fra siden. Bredden av tanken er a. Anta uniforme forhold i y-retning (inn i papirplanet). Stillevannsdybden er d. Nivået z = 0 faller sammen med stillevannsnivået. Atmosfæretrykket er p_a.

a) Det oppgis at hastighetspotensialet for de stasjonære svingemodene i tanken kan skrives slik:

$$\phi = A\cos kx \cosh k(z+d)\cos \omega t. \qquad (1)$$

Her er A en gitt konstant. Gi først en kort utledning av den frie overflatebetingelse i lineær bølgeteori,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (z=0), \qquad (2)$$

og bestem deretter dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$ ut fra (1) og (2).

b) Vis hvordan den kinematiske grensebetingelse ved den vertikale veggen x = a bestemmer de tillatte verdier av bølgetallet k.

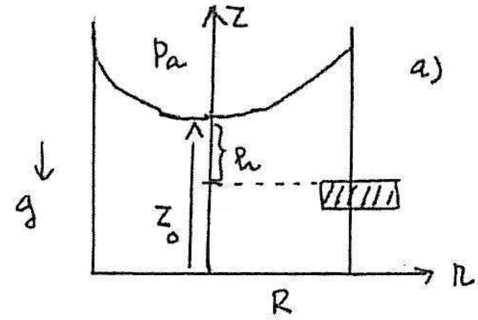
c) Utsvinget av den frie overflate kan skrives som

$$\eta = a\sin\omega t.$$

Uttrykk amplituden a = a(x) ved A og de andre konstantene, og skissér η for laveste svingemode som funksjon av x ved tidspunktet $\omega t = \pi/2$.

TEP 4105 Fluidmekanikk. Eksamen 7. desember 2006

<u>Løsning Oppgave 1</u>



a) I det roterende koordinatsystemet er forholdene statiske og akselerasjonen lik null

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\Omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} r^2\Omega^2 + gz\right) = 0.$$

Altså $\quad \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} r^2\Omega^2 + gz = C.$

Konstanten C bestemmes av at $p = p_a$ for $r = 0$, $z = z_0$:

$$\frac{p_a}{\rho} + g z_0 = C.$$

Altså $\quad \underline{p = p_a + \rho g (z_0 - z) + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2}$

b) Ved væskens overflate er $p = p_a \Rightarrow \underline{z = z_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}}$

c) På pluggens endeflate virker trykket

$$p(r = R, z = z_0 - h) = p_{plugg} = p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 R^2$$

Kraft på pluggen: $\underline{F} = p_{plugg} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = \underline{\left(p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 R^2\right)\cdot \frac{\pi}{4} d^2}$

d) Bernoullis ligning fra et punkt rett innenfor hullet (der trykket fremdeles er p_{plugg} fordi hastigheten er neglisjert) til strålen like utenfor åpningen:

$$\frac{p_{plugg}}{\rho} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\simeq 0} + \cancel{g(z_0 - h)} = \frac{p_a}{\rho} + \frac{v_{ut}^2}{2} + \cancel{g(z_0 - h)}$$

$$\frac{1}{2} v_{ut}^2 = \frac{p_{plugg}}{\rho} - \frac{p_a}{\rho} = gh + \frac{1}{2}\Omega^2 R^2$$

$$\underline{v_{ut} = \sqrt{2gh + \Omega^2 R^2}}, \text{ relativt til karet.}$$

TEP 4105 Fluidmekanikk. 7. desember 2006

Løsning Oppgave 2

Gitt $V_\theta = \omega r$ for $r \le r_0$, $V_\theta = A/r$ for $r > r_0$.

a) Kontinuitet av V_θ for $r = r_0$ gir $\underline{A = \omega r_0^2}$.

Virvling $\vec{\zeta} = (\nabla \times \vec{V})$; z-komponent $\zeta = (\nabla \times \vec{V})_z =$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}}_{0} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta). \quad \text{(Formelark)}$$

$r \le r_0$: $\zeta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\omega) = 2\omega$

$r > r_0$: $\zeta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\omega r_0^2}{r}\right) = 0$

} ζ diskontinuerlig ved $r = r_0$

Sirkulasjon $\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s}$

$r \le r_0$: $\Gamma = \omega r \cdot 2\pi r = 2\pi \omega r^2$

$r > r_0$: $\Gamma = \frac{\omega r_0^2}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \omega r_0^2$

} Γ er kontinuerlig ved $r = r_0$

b) Da $\zeta = 0$ for $r > r_0$ kan Bernoulli benyttes på utsiden:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \frac{p_\infty}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V^2_{(\infty)}}_{0}$$

Utside: $\underline{p} = p_\infty - \frac{1}{2}\rho V_\theta^2(r) = \underline{p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{\omega^2 r_0^4}{r^2}}$

Innside: Da $\zeta \neq 0$ for $r < r_0$ må Eulerlign. benyttes:

$$\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \text{dvs.} \quad \rho\omega^2 r = \frac{\partial p}{\partial r}$$

Integrerer: $p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + C$. Da $p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r_0^2$ for $r = r_0$, er

$$p_\infty - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r_0^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r_0^2 + C, \quad C = p_\infty - \rho\omega^2 r_0^2.$$

På innside altså: $\underline{p = (p_\infty - \rho\omega^2 r_0^2) + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2}$

Løsning Oppgave 2 c)

c) Anta nå at $V_\theta = \dfrac{\omega r_0}{(r/r_0)^\alpha} = \dfrac{\omega r_0^{\alpha+1}}{r^\alpha}$ på utsiden, $\alpha > 1$.

Da er på utsiden $\zeta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\omega r_0^{\alpha+1} \cdot r^{1-\alpha}\right)$

$$\underline{\zeta = -\,\omega r_0^{\alpha+1} \cdot (\alpha-1) \cdot r^{-\alpha-1} \neq 0.}$$

Da må Eulerligningen benyttes også på utsiden.

$$\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \Rightarrow \rho\omega^2 r_0^{2\alpha+2} \cdot r^{-2\alpha-1} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

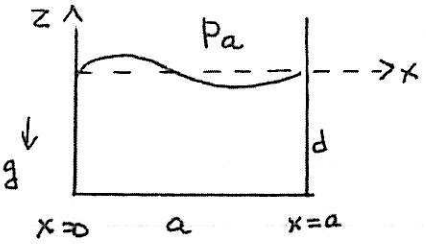
Integrerer: $p = \rho\omega^2 r_0^{2\alpha+2}\displaystyle\int r^{-2\alpha-1}\,dr = -\frac{\rho\omega^2 r_0^{2\alpha+2}}{2\alpha} \cdot r^{-2\alpha} + C$

Da $p(\infty) = p_\infty$ fås $C = p_\infty$. Dermed

$$\underline{p} = p_\infty - \frac{\rho\omega^2 r_0^{2\alpha+2}}{2\alpha} r^{-2\alpha} = \underline{p_\infty - \frac{\rho\omega^2 r_0^2}{2\alpha}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\alpha}}$$

$\alpha = 1$ gir $\underline{p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho\dfrac{\omega^2 r_0^4}{r^2}}$, som før.

Løsning Oppgave 3



a) Kinematisk overflatebetingelse (forelesn.):

$$\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{O(a)} + \underbrace{u \frac{\partial \eta}{\partial x}}_{O(a^2)} = \underbrace{w}_{O(a)}, \quad z = \eta.$$

Neglisjerer $O(a^2)$ leddet og erstatter $z = \eta$ med $z = 0$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad z = 0 \qquad ①$$

Dynamisk overflatebetingelse (Bernoulli) ved fri overflate:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + g\eta = C, \quad z = \eta.$$

Velger $C = p_a/\rho$, slik at $\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{O(a)} + \underbrace{\frac{1}{2}V^2}_{O(a^2)} + \underbrace{g\eta}_{O(a)} = 0$

Neglisjerer $O(a^2)$ og erstatter igjen $z = \eta$ med $z = 0$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad z = 0. \qquad ②$$

Deriverer ② med hensyn på t og setter inn i ①:

$$③ \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$ Fri overflatebetingelse.

Setter $\phi = A \cos kx \cosh k(z+d) \cos \omega t$ inn i ③:

$$-\omega^2 A \cos kx \cosh kd \cos \omega t + gkA \cos kx \sinh kd \cos \omega t = 0$$

$$\underline{\omega^2 = gk \tanh kd}.$$ Dispersjonsrelasjonen.

Løsning Oppgave 3 b

b) Kinematisk betingelse ved sideveggene: $u = 0$.

$$u = \partial\phi/\partial x = -Ak \sin kx \cosh k(z+d) \cos\omega t.$$

$x = 0$: $u = 0$ automatisk.

$x = a$: $u = 0 \Rightarrow \sin ka = 0$, $ka = n\cdot\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\underline{k = n\pi/a}$$

c) $\eta = a\cdot\sin\omega t$, hvor amplituden $a = a(x)$.

Fra ligning ② på forrige side er $\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}$, $z = 0$.

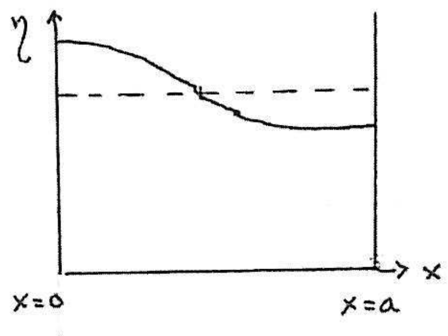
Det gir $\eta = \frac{\omega A}{g}\cos kx \cosh kd \sin\omega t \equiv a\cdot\sin\omega t$.

Altså $\underline{a = \frac{\omega A}{g}\cos kx \cosh kd}$

Laveste svingemode: $n = 1 \Rightarrow k = \pi/a$ og

$$\eta = \frac{\omega A}{g}\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\cosh kd\cdot\sin\omega t$$

$\omega t = \pi/2$ gir $\underline{\eta = \frac{\omega A}{g}\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\cosh kd}$



NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TEP4105 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. NT (Fysikk og matematikk)
OG FAK. IME (Teknisk kybernetikk)
Torsdag 17. august 2006
Tid: 0900 – 1300
Studiepoeng: 7,5

Sensuren faller i uke 36.

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1.
Gitt en stasjonær todimensjonal strømning hvor hastighetspotensialet er

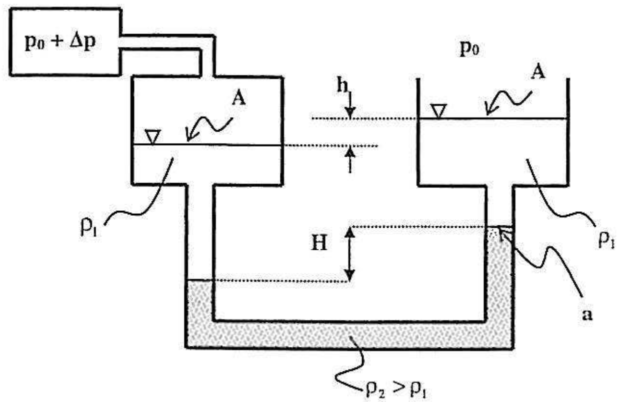
$$\phi(x,y) = xy + x^2 - y^2.$$

a) Sjekk at $\nabla^2\phi = 0$. Hva betyr dette fysisk? Finn strømfunksjonen $\psi(x,y)$.

b) Finn komponentene a_x og a_y av strømningsfeltets akselerasjon $\vec{a}$.

c) Finn trykket $p(x,y)$, når det er kjent at trykket i origo er p_0. Væskens tetthet er ρ.

Oppgave 2.



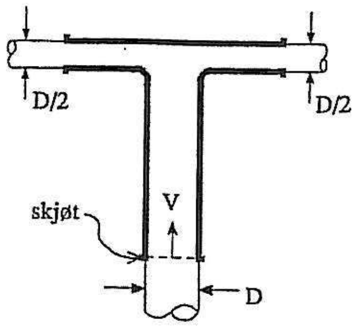
Figuren over viser et manometer beregnet til å måle små trykkforskjeller Δp. Et U-rør med tverrsnittsareal **a** har et kar med tverrsnittsareal **A** montert over hver ende av U-røret. Det venstre karet har en lukket luftforbindelse til målepunktet, mens det høyre karet er åpent mot atmosfæretrykket p_0. Nederst i U-røret er det væske med tetthet ρ_2, mens i øvre del og i karene er det væske med tetthet $\rho_1 < \rho_2$. Tyngdens akselerasjon er $g = 10\ m/s^2$.

a) Anta at tetthetene til de to manometervæskene er like, $\rho_2 = \rho_1 = 1000\ kg/m^3$. Finn høydeforskjellen **h** i de to karene som funksjon av overtrykket Δp. Sett til slutt inn for talleksempelet $\Delta p = 1$ Pa.

b) Anta at **A** » **a** slik at høydeforskjellen **h** i de to karene kan neglisjeres. Finn høydeforskjellen **H** i U-røret for den nedre væsken som funksjon av overtrykket Δp. Sett til slutt inn for talleksempelet $\Delta p = 1$ Pa når tetthetsforskjellen $\rho_2 - \rho_1 = 1\ kg/m^3$.

c) Beskriv kort hva som vil skje hvis manometeret utsettes for fritt fall mens overrtykket Δp holdes konstant.

Oppgave 3



Gass med tetthet ρ_g strømmer stasjonært gjennom et vertikalt rør med sirkulært tverrsnitt med diameter D. Til røret er det festet et T-bend som leder gassen inn i to identiske horisontale rør med sirkulære tverrsnitt med diametre D/2. Strømningshastighet og trykk antas å være konstant over rørtverrsnittene såvel ved innstrømningen til som ved utstrømningen fra T-bendet. Ved innstrømningen til T-bendet er hastigheten V_{inn} og trykket p_{inn}. Virkningen av tyngdekraften og atmosfæretrykket neglisjeres og gassens tetthet antas å være konstant.

a) Bestem hastigheten U og volumstrømmen Q gjennom hver av de to horisontale rørene.

b) Bestem vertikalkraften som skjøten mellom T-bendet og det vertikale røret må overføre.

Ved tiden $t=t_0$ passerer fronten av en lang oljeplugg med tetthet ρ_o skjøten mellom T-bendet og det vertikale røret. Pluggens oppoverrettede hastighet er V_o og trykket ved skjøten er nå p_o. I resten av oppgaven kan gasstettheten ρ_g neglisjeres.

c) Finn et uttrykk for hvordan bevegelsesmengden inne i T-bendet øker med tiden inntil pluggen treffer toppen av bendet.

TEP4105 Fluidmekanikk 17. august 2006 ①

Løsning

Oppgave 1

a)

$$\phi = xy + x^2 - y^2,$$

$$u = \partial\phi/\partial x = y + 2x, \quad v = \partial\phi/\partial y = x - 2y,$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Det betyr inkompressibel væske, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.
Strømfunksjonen ψ bestemmes av at $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$:

$$y + 2x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}y^2 + 2xy + f(x),$$

og

$$x - 2y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2y - f'(x) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + konst.$$

Det gir

$$\psi = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + 2xy,$$

når konstanten settes lik null.
b) Komponentene av akselerasjonen

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 5x,$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 5y.$$

c) Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = C$$

gir

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left[(y + 2x)^2 + (x - 2y)^2\right] = C.$$

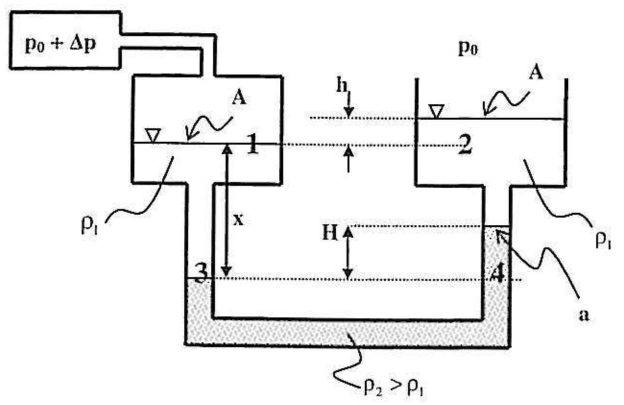
Innsatt $x = y = 0$:

$$p_0/\rho = C.$$

Altså

$$p = p_0 - \frac{5}{2}\rho(x^2 + y^2).$$

Oppgave 2



a)
Siden de to manometervæskene har samme tetthet er trykket det samme i et vilkårlig horisontalt snitt (i væske). Sammenlikner trykket i punkt 1 og 2 (vekten av luft neglisjeres):

$$p_1 = p_0 + \Delta p \quad \text{og} \quad p_2 = \rho_1 g h + p_0 \qquad \text{Disse må være like:}$$

$$p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \rho_1 g h \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h = \frac{\Delta p}{\rho_1 g}}}$$

Tallverdi: $\quad h = \dfrac{1\text{Pa}}{1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{10^{-4}\text{m}}}$ dvs 0.1 mm; "vanskelig" å måle nøyaktig.

b)
Manometervæskene har nå forskjellig tetthet. Trykket er det samme i et horisontalt snitt hvis vi befinner oss i den nederste væsken. Innfører ukjent høyde x lik avstanden mellom punkt 1 og 3, og sammenlikner trykket i punkt 3 og 4:

$$p_3 = \rho_1 g x + p_0 + \Delta p \quad \text{og} \quad p_4 = \rho_2 g H + \rho_1 g (x - H + h) + p_0 \qquad \text{Disse må være like:}$$

$$p_3 = p_4 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 g \cancel{x} + \cancel{p_0} + \Delta p = \rho_2 g H + \rho_1 g \left(\cancel{x} - H + \underbrace{\cancel{h}}_{\text{neglisjeres}} \right) + \cancel{p_0}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p = \rho_2 g H - \rho_1 g H \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{H = \frac{\Delta p}{g(\rho_2 - \rho_1)}}}$$

Tallverdi: $\quad H = \dfrac{1\text{Pa}}{10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \underline{\underline{0.1\text{m}}}$ dvs 10 cm; mye mer nøyaktig avlesning enn i a).

c)

Ved fritt fall i tyngdefeltet er manometeret vektløst, dvs tyngdekraften manifiesteres ved masse · aks. Dermed har vi ikke statikk lenger, en trykkforskjell kan ikke balanseres med noen tyngde, så vi vil få bevegelse: Manometervæskene vil strømme ut mot atmosfæren gjennom det åpne karet til høyre.

Oppgave 3

a) Massebevarelse gir:

$$\frac{\pi}{4}D^2 \cdot V_{inn} = Q + Q \Rightarrow \underline{Q = \frac{\pi}{8}D^2 \cdot V_{inn}}$$

$$Q = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot U = \frac{\pi}{8}D^2 \cdot V_{inn} \Rightarrow \underline{U = 2V_{inn}}$$

b) Impulssatsen $\Sigma \vec{F} = \iint_{CS} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})dS$ gir her i vertikal retning (y-retning):

$$p_{inn} \cdot \frac{\pi}{4}D^2 - F = \rho_g V_{inn}(-V_{inn})\frac{\pi}{4}D^2 \Rightarrow \underline{F = \frac{\pi}{4}D^2(\rho_g V_{inn}^2 + p_{inn})}$$

c) Bevegelsesmengde i y-retning:

$$\iiint_{CV} \rho V_y dV = \underbrace{\frac{\pi}{4}D^2 \cdot V_0(t - t_0)}_{\text{pluggvolum over skjøten}} \cdot \rho_0 V_0$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Fagleg kontakt under eksamen:
Namn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK (Nynorsk)
FOR FAK. NT (Fysikk og matematikk)
OG FAK. IME (Teknisk kybernetikk)
Måndag 12. desember 2005
Tid: 0900 – 1300
Studiepoeng: 7,5

Sensuren fell i veke 2, 2006.

Hjelpemedel C: Typegodkjend kalkulator, i samsvar med NTNU's reglar.
Trykte hjelpemedel:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, hefta ved oppgåvesettet.

Oppgåve 1

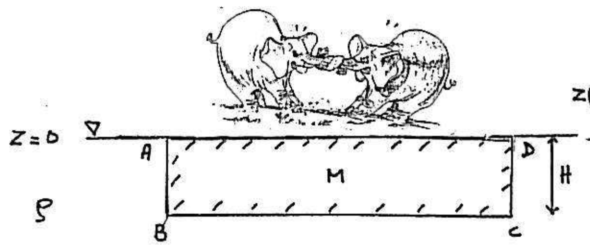


FIG. 1

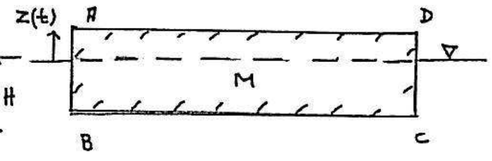


FIG. 2

To elefantar er i dragkamp om bord på ein flåte ABCD ute i sjøen. Flåten er ein homogen lekam med konstant tverrsnitt, og med høgd H. Massen til kvar elefant er m, medan massen til flåten er M. Gå ut frå at heile systemet er til å byrja med i (tilnærma) statisk likevekt, og at flåtens øvre kant er i flukt med vasspeilet, dvs. $z_o = 0$. Tyngdas akselerasjon er g.

a) Ved tidspunktet t = 0 glipp festet mellom snablane, og begge elefantane fell i sjøen. Flåten kjem dermed i vertikale svingninger, som er udempa så lenge som vatnets viskositet vert neglisjert. Initialvilkåra for flåten ved t = 0 er $z_o = 0$, $\dot{z}_o = 0$. Finn differensiallikninga for den tidsavhengige posisjon z(t) til flåtens øvre kant, kor bare størrelsene m, M, H og g inngår. (Sjå figur 2.) Finn svingningenes vinkelfrekvens ω.

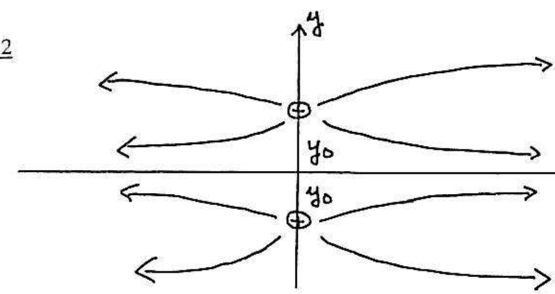
b) Det vert oppgjeve at løysinga til differensiallikninga kan skrivast på forma

$$z(t) = \frac{2mH}{2m + M} + \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t .$$

Finn verdiane av konstantane α og β.

c) Ta så omsyn til vatnets viskositet. Flåten kjem etter ei stund til ro. Den vert festa med eit tau til ein av elefantane (som nå er komen på land), og elefanten skal dra flåten inn mot land med konstant fart V_o. Gå ut frå at drag-koeffisienten for flåten er $C_D = 2{,}2$, at det effektive frontarealet er $A_{front} = 4{,}5\ m^2$, og at vannets tettleik er $\rho = 10^3 kg/m^3$. Elefanten yter effekten P = 0,80 kW. Kor stor blir V_o?

Oppgåve 2



a) To linjekjelder av samme styrke m (>0) er plassert i punktene $(0,y_o)$ og $(0, -y_o)$. Vis at straumfunksjonen for systemet kan skrivast som

$$\psi(x, y) = m\left[\arctan\frac{y - y_o}{x} + \arctan\frac{y + y_o}{x}\right]$$

Finn fartskomponentene u(x,y) og v(x,y). Kvifor kan planet y = 0 verta erstatta med ein fast vegg? Sjå i det fylgjande berre på området $y \geq 0$.

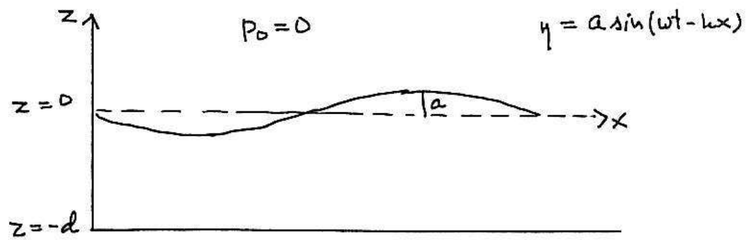
b) Finn trykket $p_w(x)$ ved veggen når fluidets tettleik er ρ og trykket langt borte frå veggen er p_∞. For kva for posisjoner x er $p_w(x)$ minst?

c) Finn volumgjennomstrøyminga Q (per lengdeeining inn i planet) gjennom eit vertikalt snitt, idet du integrerer u(x,y) over y frå y = 0 til y = ∞. Kunne du ha funne dette resultatet direkte, uten å rekna?

Oppgitt : $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$

$$\int \frac{dt}{x^2 + t^2} = \frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}$$

Oppgåve 3



Ei monokromatisk bylgje med liten amplitude ($ka \ll 1$) forplanter seg på grunt vatn ($kd \ll 1$). Her er k bylgjetallet, a amplituden, og d stillevasshøgda.

a) Finn dei tilnærma uttrykka for fartskomponentene u og w, og for det dynamiske trykket $p_d = -\rho \partial\phi/\partial t$. Sett heretter w = 0.

b) Finn den midlere energi E per eining grunnflate.

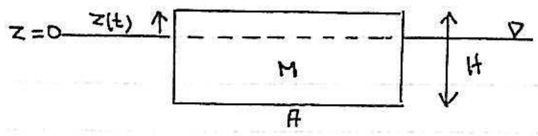
c) Vis at middelverdien $\overline{P(t)}$ av energifluksen P(t) gjennom eit vertikalt tverrsnitt kan skrivast slik:

$$\overline{P(t)} = E \cdot c,$$

hvor c er fasefarta (sett atmosfæretrykket $p_a = 0$). Kvifor er fasehastighet og gruppehastighet like, $c = c_g$?

TEP4105 Fluidmekanikk. Eksamen 12. desember 2005

Løsning Oppgave 1



Ser først på statisk likevekt, når elefantene er ombord på flåten og flåtens øvre kant er i flukt

a) med vannspeilet: $(2m+M)g = \rho g V$, hvor $V = A \cdot H$ er flåtens volum (A er arealet av grunnflaten).

Altså $2m + M = \rho A \cdot H$, $\quad A = \dfrac{2m+M}{\rho H}$.

Svingende system: Oppdriftskraften er $\rho g A(H-z) = g\dfrac{2m+M}{H}(H-z)$.

Newtons 2. lov gir da

$$g\frac{2m+M}{H}(H-z) - Mg = M\cdot\ddot{z}, \qquad \underline{\ddot{z} + g\frac{2m+M}{M\cdot H}\cdot z = \frac{2mg}{M}}$$

Vinkelfrekvens $\underline{\omega = \sqrt{g\dfrac{2m+M}{M\cdot H}}}$

b) Løsning $\quad z(t) = \dfrac{2mH}{2m+M} + \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t$.

Initialbetingelse $z_0 = 0$ gir $\dfrac{2mH}{2m+M} + \beta = 0$, $\beta = -\dfrac{2mH}{2m+M}$

$\dot{z}_0 = 0$ gir $\alpha = 0$. Altså $\underline{z(t) = \dfrac{2mH}{2m+M}(1-\cos\omega t)}$

c) Flåten dras mot land med konstant fart V_0.

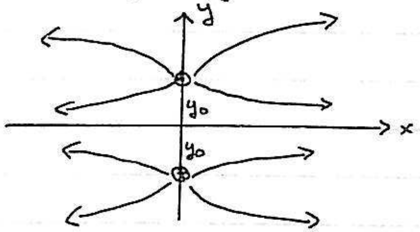
Motstandsformel: $\quad C_D \cdot \frac{1}{2}\rho V_0^2 \cdot A_{front} = D.$

Effekt: $\quad C_D \cdot \frac{1}{2}\rho V_0^3 \cdot A_{front} = D\cdot V_0 = P.$

$$\underline{V_0} = \sqrt[3]{\frac{2P}{C_D\cdot\rho\cdot A_{front}}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 800}{2{,}2\cdot 10^3\cdot 4{,}5}} = \sqrt[3]{0{,}1616} = \underline{0{,}55\ \text{m/s}}$$

Løsning Opggave 2

a)



Standardformel $\psi = m \cdot \theta$ for linjekilde i origo $\Longrightarrow$

$$\psi = m\left[\arctan\frac{y-y_0}{x} + \arctan\frac{y+y_0}{x}\right].$$

Herav finnes hastighetene:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = m\left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{(y-y_0)^2}{x^2}} + \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{(y+y_0)^2}{x^2}}\right]$$

$$\underline{u = mx\left[\frac{1}{x^2+(y-y_0)^2} + \frac{1}{x^2+(y+y_0)^2}\right]}$$

Tilsvarende

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -m\left[\frac{-\frac{y-y_0}{x^2}}{1+\frac{(y-y_0)^2}{x^2}} + \frac{-\frac{y+y_0}{x^2}}{1+\frac{(y-y_0)^2}{x^2}}\right]$$

$$\underline{v = m\left[\frac{y-y_0}{x^2+(y-y_0)^2} + \frac{y+y_0}{x^2+(y+y_0)^2}\right]}$$

På planet $y = 0$ er

$$\underline{v(x,0)} = m\left[\frac{-y_0}{x^2+y_0^2} + \frac{y_0}{x^2+y_0^2}\right] = \underline{0}$$

Derfor kan planet erstattes av fast vegg.

b) For potensialstrømning er Bernoulli-konstanten den samme overalt. Benytter Bernoulli fra et punkt på veggen og ut til et punkt langt ute hvor $p = p_\infty$:

$$\tfrac{1}{2}\rho u^2(x,0) + p_w = 0 + p_\infty.$$

Fra ovenfor er $u(x,0) = \dfrac{2mx}{x^2+y_0^2}$.

$$\Rightarrow \underline{p_w(x)} = p_\infty - \tfrac{1}{2}\rho u^2(x,0) = \underline{p_\infty - \frac{2\rho m^2 x^2}{(x^2+y_0^2)^2}}$$

Løsning Opggave 2, forts

$p_w(x)$ er minst når $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+y_0^2)^2}$ er størst.

Av $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x^2+y_0^2)^2 - x^2\cdot 2(x^2+y_0^2)\cdot 2x}{(x^2+y_0^2)^2} = 0$ finnes løsningen

$$x^2 = y_0^2, \quad \underline{x = \pm y_0}$$

c) $$Q = \int_0^\infty u\,dy = mx\left[\int_0^\infty \frac{dy}{x^2+(y-y_0)^2} + \int_0^\infty \frac{dy}{x^2+(y+y_0)^2}\right]$$

Ser på $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dy}{x^2+(y-y_0)^2} = \int_{-y_0}^\infty \frac{dt}{x^2+t^2}$ med $t = y - y_0$.

Med oppgitt formel: $I_1 = \dfrac{1}{x}\Big|_{-y_0}^{\infty}\arctan\dfrac{t}{x} = \dfrac{1}{x}\Big[\underbrace{\arctan\infty}_{\frac{\pi}{2}} + \arctan\dfrac{y_0}{x}\Big]$

Tilsvarende: $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dy}{x^2+(y+y_0)} = \frac{1}{x}\Big[\underbrace{\arctan\infty}_{\frac{\pi}{2}} - \arctan\frac{y_0}{x}\Big]$

(lar $y_0 \to -y_0$).

Altså $I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{x}$, som gir

$$\underline{Q} = mx\,(I_1 + I_2) = \underline{m\cdot\pi}$$

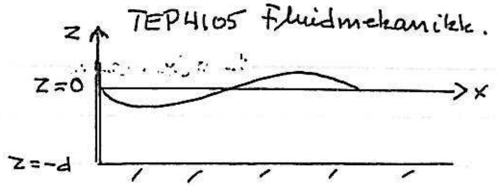
Kan ses direkte: En må ha $Q = \psi(x, y=\infty) - \psi(x, y=0)$.

Fra ovenfor er

$$\psi(x, y=\infty) = m\cdot\Big[\underbrace{\arctan\infty}_{\frac{\pi}{2}}\Big]\cdot 2 = m\cdot\pi,$$

$$\psi(x, y=0) = m\cdot\left[\arctan\left(-\frac{y_0}{x}\right) + \arctan\frac{y_0}{x}\right] = 0.$$

Altså $\underline{Q = m\cdot\pi}$, som før.



Generelt er hastighetspotensialet

$$\phi = \frac{a\omega}{k}\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\cdot\cos(\omega t - kx).$$

a) $$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \omega a \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\sin(\omega t - kx)$$

$$w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = \omega a \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd}\cos(\omega t - kx)$$

$$p_d = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\rho a\omega^2}{k}\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\sin(\omega t - kx)$$

Når $kd \ll 1$, er tilnærmet $\cosh k(z+d) = 1$, $\sinh kd = kd$, og dispersjonsligningen $\omega^2 = gk\tanh kd \Rightarrow \omega = k\sqrt{gd}$.
Tilnærmet altså, når $\theta = \omega t - kx$ er fasen,

$$u = \frac{\omega a}{kd}\sin\theta,\quad w = \omega a\frac{z+d}{d}\cos\theta,\quad p_d = \rho g a\sin\theta$$

---

b) $w \simeq 0$. Potensiell energi per grunnflateenhet

$$PE = \int_{-d}^{\eta}\rho g z\,dz - \int_{-d}^{0}\rho g z\,dz = \int_{0}^{\eta}\rho g z\,dz = \frac{1}{2}\rho g\eta^2$$

Da $\eta = a\sin\theta$ altså $\overline{PE} = \frac{1}{4}\rho g a^2$.

Kinetisk energi $KE = \frac{1}{2}\rho\int_{-d}^{\eta}u^2dz \to \frac{1}{2}\rho\int_{-d}^{0}u^2dz$ fordi korreksjonen er av høyere orden. Setter inn $u = \frac{\omega a}{kd}\sin\theta$:

$$KE = \frac{1}{2}\rho\frac{\omega^2a^2}{k^2d^2}\sin^2\theta\underbrace{\int_{-d}^{0}dz}_{d} = \frac{1}{2}\rho g a^2\cdot\sin^2\theta,\ \text{da } \omega = k\sqrt{gd}.$$

Middelverdi $\overline{KE} = \frac{1}{4}\rho g a^2$.

Total energi $\underline{E} = \overline{PE} + \overline{KE} = \underline{\frac{1}{2}\rho g a^2}$.

Løsning Oppgave 3, forts.

c) Energifluksen $\underline{P}(t)$ setter seg sammen av to bidrag: ett bidrag fra trykket som lokalt er $p\cdot u$, og ett bidrag fra energitettheten: $(\rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2)\cdot u$ (da $w = 0$).
Altså

$$\underline{P}(t) = \int_{-d}^{\eta}[\,p + \rho g z + \underbrace{\tfrac{1}{2}u^2}_{\text{NEGL.}}\,]\cdot u\,dz$$

Da $p_0 = 0$ er $(p + \rho g z)$ lik det dynamiske trykket p_d.
Altså til laveste orden $\underline{P}(t) = \int_{-d}^{\eta}p_d\cdot u\,dz \to \int_{-d}^{0}p_d\cdot u\,dz$.

Setter inn $p_d = \rho g a\sin\theta$, $u = \frac{\omega a}{kd}\sin\theta$:

$$\underline{P}(t) = \rho g a\sin^2\theta\cdot\frac{\omega a}{kd}\underbrace{\int_{-d}^{0}dz}_{d} = \rho g a^2\sqrt{gd}\cdot\sin^2\theta$$

Middelverdi: $\underline{\overline{P(t)}} = \frac{1}{2}\rho g a^2\cdot\sqrt{gd} = \underline{E\cdot c}$

Bølgene er ikke-dispersive; fasehastighet c og gruppehastighet c_g er like.

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

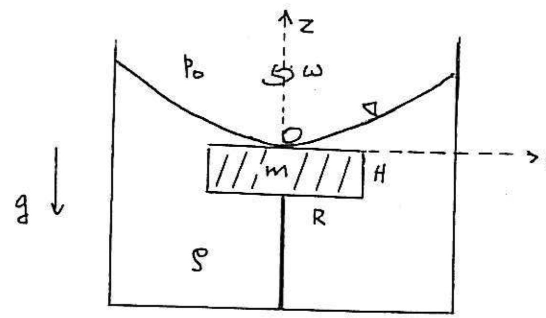
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F1
(Linje for Fysikk og matematikk)
.15..august 2005
Tid: 0900 – 1300
Studiepoeng: 7,5

Sensuren faller i uke .36...

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

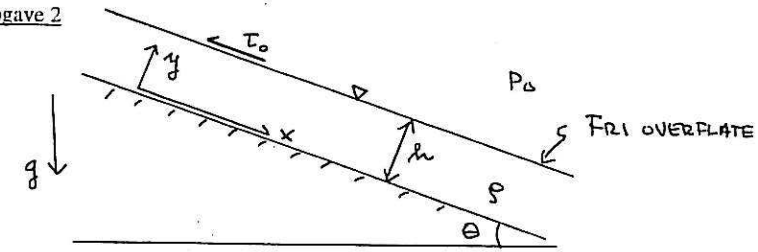


En lukket sylindrisk beholder er festet til en stav og holdt på plass i et kar fylt med væske med konstant tetthet ρ. Beholderen med innhold har masse m. Dens ytre radius er R; høyden er H. Atmosfæretrykket er p_0.

Karet med innhold dreies om sin symmetriakse (z-akse) med konstant vinkelhastighet ω slik at sentrum O av beholderens toppflate blir fri mot atmosfæren.

a) Finn trykkfordelingen p(r) over beholderens toppflate og bunnflate.
b) Finn stangkraften.

Oppgave 2



En væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν renner laminært og stasjonært nedover et skråplan som har helningsvinkel θ. Væskesjiktet har fri overflate mot atmosfæren. Atmosfæretrykket er p_0. Strømningen er todimensjonal, med strømlinjer som overalt er parallelle med x-aksen. Tyngdens akselerasjon er g. Anta at det blåser en vind imot den frie overflaten, slik at det oppstår en konstant skjærspenning (tangensialspenning) τ_0 oppover, imot den viste x-retningen. Anta at τ_0 (> 0) er en kjent størrelse.

a) De eneste ukjente størrelsene er trykket p samt hastigheten $u = u(y)$ i x-retningen. Skriv opp x- og y- komponentene av Navier-Stokes' ligning, og vis at størrelsen K, definert ved

$$K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \sin\theta ,$$

hvor $\gamma = \rho g$, er en konstant som er uavhengig av x og y.

b) Spesifisér grensebetingelsene på hastighetsfeltet ved y = 0 og y = h. Hvorfor er $\partial p / \partial x = 0$ overalt i væsken?

c) Vis ved integrasjon at hastighetsprofilet blir

$$u(y) = \frac{gh\sin\theta}{\nu} y \left(1 - \frac{y}{2h}\right) - \frac{\tau_0}{\rho\nu} y .$$

d) Bestem skjærspenningen τ_0 på sjiktets ytterkant slik at netto massestrøm i sjiktet blir lik null. Lag en kvalitativ skisse av hastighetsprofilet gjennom sjiktet for dette tilfellet.

Oppgave 3

En tornado modelleres som en potensialstrømning, hvor et sluk av styrke m (< 0) er superponert med en virvel av styrke K. Hastighetspotensialet oppgis å være

$$\phi = m \ln r + K\theta$$

hvor r og θ er plane polarkoordinater.

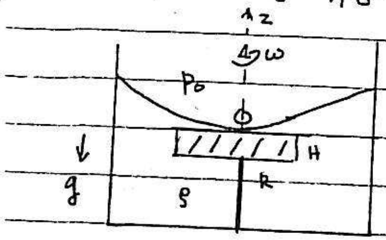
a) Skriv opp uttrykket for strømfunksjonen ψ, og bestem strømlinjenes form. Skissér en typisk strømlinje for tilfellet $m/K = -1/\pi$.

b) Anta at volumstrømningen Q inn i sluket (per lengdeenhet i vertikal z-retning), samt sirkulasjonen Γ omkring z-aksen, er kjent. (Sett Q > 0.) Finn sammenhengen mellom konstantene m, K og Q, Γ.

c) Fluidet har en fri overflate som langt unna z-aksen er horisontal og gitt ved z = 0. Finn ligningen for overflaten i rz-planet, og skissér resultatet for tilfellet gitt under pkt. a) og med Q = 0,84 m^2/s. Sett $g = 9{,}81 m/s^2$.

TEP4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 15. august 2005 ①

Løsning Oppgave 1



a) Bevegelsesligning i roterende system:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}$$

Inkompressibel væske:

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0 \Rightarrow$$

$$p = -\gamma z + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + C, \quad \gamma = \rho g$$

Da $p = p_0$ i $r = 0$, $z = 0$ er $p_0 = C$, og $p = -\gamma z + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0$.

Toppflate $z = 0$ gir $p(r) = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0$ ①

Bunnflate $z = -H$ gir $p(r) = \gamma H + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0$ ②

b) Trykkraft på toppflate:

$$P_{topp} = 2\pi\int_0^R\left(\frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0\right)r\,dr = \pi R^2\left(\rho R^2\omega^2 + p_0\right)$$

Bunnflate: $$P_{bunn} = 2\pi\int_0^R\left(\gamma H + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + p_0\right)r\,dr =$$

$$= \pi\gamma H R^2 + \pi R^2\left(\rho R^2\omega^2 + p_0\right)$$

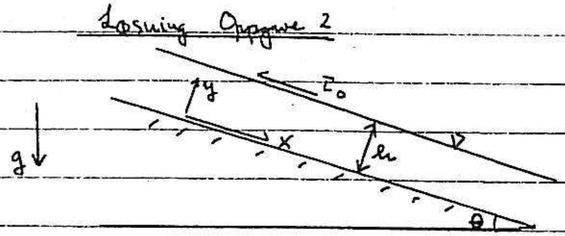
Netto trykkraft $P = P_{bunn} - P_{topp} = \gamma \cdot \pi R^2 H$.

Dette kunne en se direkte ut fra ① og ②: Verken sentrifugaltrykket ($\frac{1}{2}\rho r^2\omega^2$) eller atmosfæretrykket har betydning for netto trykkraft.

Strengkraft S: Av kraftbalansen $S + mg = P$ fås

$$S = \gamma \cdot \pi R^2 H - mg$$

Løsning Oppgave 2



$\vec{g} = (g\sin\theta, -g\cos\theta)$

a) Navier-Stokes:

$$x \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \nu\frac{d^2u}{dy^2} \qquad ①$$

$$y \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\theta \qquad ②$$

② skrives som $\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma\cos\theta$, $p = -\gamma y\cos\theta + f(x)$, $f(x)$ vilkårlig

$\Rightarrow \partial p/\partial x = f'(x)$, uavhengig av y.

Skriver ① som $\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta = \mu\frac{d^2u}{dy^2}$, $\mu = \rho\nu$.

Da venstre side avhenger bare av x, høyre side bare av y, må

$K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ være en konstant, uavhengig av x og y.

b) Grensebetingelser:

1) Heftbetingelse $u = 0$ ved $y = 0$.

2) Da generelt $\tau = \mu\frac{du}{dy}$ og $\tau = -\tau_0$ ved $y = h$, vil

$\left.\frac{du}{dy}\right|_h = -\frac{\tau_0}{\mu}$. Negativ størrelse.

Da K er konstant, må $\partial p/\partial x$ være konstant. Kan evalueres i fri overflate, hvor $p = p_0$ = konstant. Altså $\partial p/\partial x = 0$ overalt.

c) Integrerer ligningen $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{K}{\mu}$, og får

$\frac{du}{dy} = \frac{K}{\mu}y + C_1$, $u(y) = \frac{K}{2\mu}y^2 + C_1 y + C_2$

Grensebet. $u(0) = 0$ gir $C_2 = 0$, mens $\left.\frac{du}{dy}\right|_h = -\frac{\tau_0}{\mu}$ gir

$\frac{K}{\mu}\cdot h + C_1 = -\frac{\tau_0}{\mu}$, $\Rightarrow$ $u(y) = -\frac{Kh}{\mu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right) - \frac{\tau_0}{\mu}y$

Da $K = -\gamma\sin\theta$: $u(y) = \frac{gh\sin\theta}{\nu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right) - \frac{\tau_0}{\rho\nu}y$

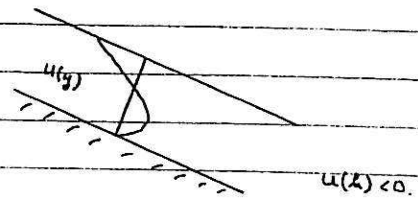
Oppgave 2, forts

d) Antar én lengdeenhet inn i planet.

Massestrøm $\dot{m} = \rho\int_0^h u\,dy = 0 \Rightarrow$

$$\frac{gh\sin\theta}{\nu}\underbrace{\int_0^h\left(y - \frac{y^2}{2h}\right)dy}_{\frac{1}{3}h^2} - \frac{\tau_0}{\rho\nu}\underbrace{\int_0^h y\,dy}_{\frac{1}{2}h^2} = 0$$

$\therefore$ $\tau_0 = \frac{2}{3}\gamma h\sin\theta$



TEP 4105 Fluidmekanikk. Kontinuasjonseksamen 15. august 2005 ④

Løsning Oppgave 3

a) Gitt $\phi = m\ln r + K\theta$. Tilsvarende strømfunksjon er

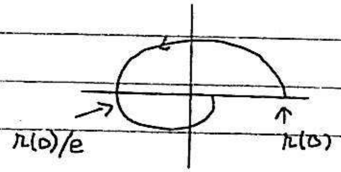
$\psi = -K\ln r + m\theta$ (formelark).

Strømlinjer $\psi =$ konstant bestemt av

$K\ln r = -\psi + m\theta$, $\Rightarrow$

$r = e^{-\psi/K} \cdot e^{m\theta/K} = e^{-\psi/K} \cdot e^{-|m|\theta/K}$

Hvis $|m|/K = 1/\pi$ fås $r = e^{-\psi/K} \cdot e^{-\theta/\pi} = r(0)e^{-\theta/\pi}$



b) Volumstrømning inn per lengdeenhet: $Q = 2\pi r \cdot |V_r| = 2\pi r \cdot \frac{|m|}{r} = 2\pi|m|$

Sirkulasjon $\Gamma = \oint \vec{V}\cdot d\vec{s} = V_\theta \cdot 2\pi r = \frac{K}{r}\cdot 2\pi r = 2\pi K$

c) For potensialstrømning er $\nabla\times\vec{V} = 0$ og Bernoulli kan brukes.

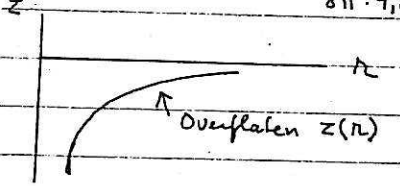
$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p_0}{\rho} + gz = \left[\frac{1}{2}V^2 + \frac{p_0}{\rho}\right]_\infty$$

Da $V \to 0$ når $r \to \infty$ fås $-z(r) = \frac{V^2}{2g} = \frac{V_r^2 + V_\theta^2}{2g} = \frac{m^2 + K^2}{2g}\frac{1}{r^2}$

Fra pkt. a) er $K^2 = m^2\pi^2$, $\Rightarrow$

$$-z(r) = \frac{m^2(1+\pi^2)}{2g}\frac{1}{r^2} = \frac{Q^2(1+\pi^2)}{8\pi^2 g}\frac{1}{r^2},$$

Numerisk $-z(r) = \frac{0{,}84^2(1+\pi^2)}{8\pi^2 \cdot 9{,}81}\frac{1}{r^2} = \frac{0{,}010}{r^2}$



NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

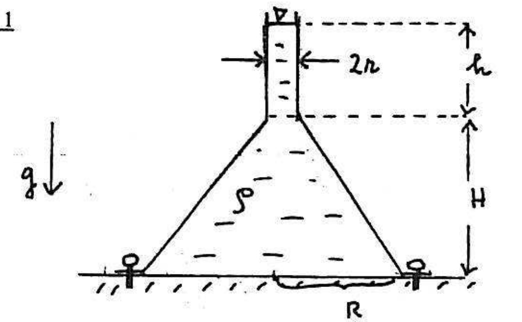
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. F1
(Linje for Fysikk og matematikk)
Fredag 3. desember 2004
Tid: 0900 – 1300
Studiepoeng: 7,5

Sensuren faller i uke 53.

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

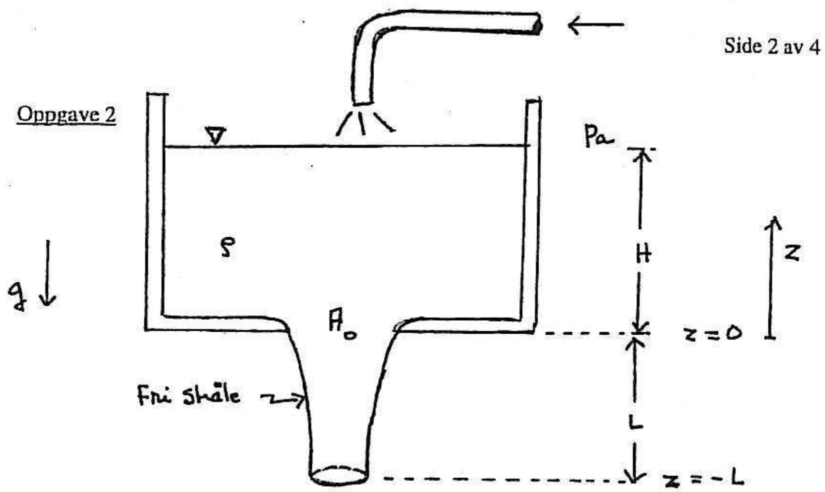


En sirkulær metallisk kjegle med radius R = 1m og høyde H = 2m er påmontert et tynt vertikalt rør med radius r = 0,10m, som vist på figuren. Systemet er fylt med vann, opp til høyden h = 3m i røret. Tyngden av det metalliske systemet (kjegle pluss rør) er W = 25kN. Systemet holdes fast til bakken av seks bolter. Vannets tetthet er ρ. Sett $\gamma = \rho g = 10^4\,\mathrm{Pa/m}$.

Finn boltekraften F_{bolt}, når du ser bort fra atmosfæretrykket. Vil svaret endres dersom du tar hensyn til atmosfæretrykket?

Oppgitt: Volumet av den avkortede kjeglen på figuren er $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

Oppgave 2



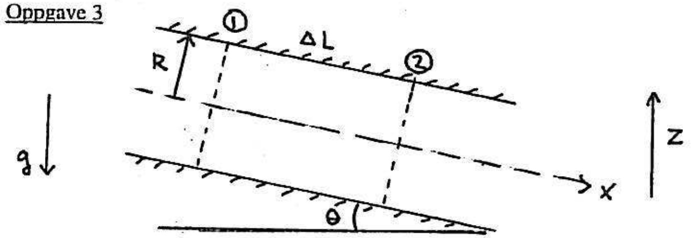
En vanntank har en åpning med tverrsnitt A_o i bunnen ($z = 0$). Vannets høyde H i tanken blir holdt konstant ved at vann fylles på kontinuerlig ovenfra, slik at strømningen blir stasjonær. Nedenfor utløpet, for $z < 0$, danner vannet en fri stråle med tverrsnitt $A = A(z)$ som er en funksjon av z. Tyngdens akselerasjon er g, atmosfæretrykket er p_a.

a) Forklar hvorfor trykket inne i den frie stråle må være lik atmosfæretrykket, og finn hastigheten V(z) av den frie stråle.

b) Finn tverrsnittet A(z) av den frie stråle uttrykt ved A_o, H og z.

c) Hvor lang tid T trenger en fluidpartikkel på å tilbakelegge en strekning L av den frie stråle, fra $z = 0$ til $z = -L$?

Oppgave 3

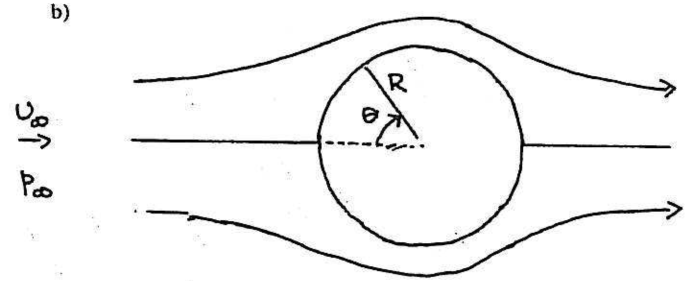


a) Gitt en stasjonær viskøs inkompressibel strømning gjennom et sirkulært rør. Radius i røret er R. Rørets helningsvinkel er θ, tyngdens akselerasjon er g. Betrakt en lengde ΔL av røret, beliggende mellom snittene 1 og 2 på figuren. Benytt energiligningen mellom 1 og 2 til å finne friksjonshøyden h_f uttrykt ved Δz, Δp og γ, hvor

$$\Delta z = z_1 - z_2 \quad , \quad \Delta p = p_1 - p_2 \quad , \quad \gamma = \rho g .$$

Uttrykk deretter h_f som funksjon av skjærspenningen τ_w ved veggen, samt ΔL, R og γ.

b)



En stillestående sirkulær sylinder med radius R står på tvers i en uniform luftstrøm. Luftas opprinnelige hastighet er U_∞. Anta først at strømningen er ideell (ikke-viskøs). Strømfunksjonen for $r \geq R$ er

$$\psi = U_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin\theta .$$

Finn trykket $p(R,\theta)$ på sylinderens overflate som funksjon av θ.

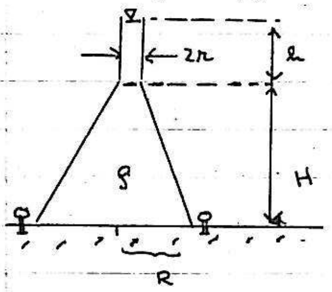
c) Tegn opp trykkmotstandskoeffisienten C_p, definert ved

$$C_p = \frac{p(R,\theta)-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2},$$

for ideell strømning som funksjon av θ. (La $\theta = 0$ tilsvare stagnasjonspunktet på sylinderens forside.) Tegn i samme figur hvordan C_p varierer dersom en antar realistiske forhold, enten med (i) laminært grensesjikt, eller (ii) turbulent grensesjikt. Kommentér kurvene.

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. EKSAMEN 3. DESEMBER 2004

Løsning Oppgave 1



Hele systemet tenkes innelukket i en sirkulær sylinder med radius R og høyde H + h. Da vil den totale kraft på metallet være null.

Den totale oppdriftskraft F_B er følgelig lik tyngden av vannet på utsiden av metallet:

$$F_B = \gamma\left[\pi R^2(H+h) - \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2) - \pi r^2 h\right] \qquad (\gamma = \rho g)$$

$$F_B = \pi\gamma\left[R^2\left(\frac{2}{3}H+h\right) - r^2\left(\frac{1}{3}H+h\right) - \frac{1}{3}HRr\right]$$

Boltekreftene $6F_{bolt}$ og tyngden W av metallet virker nedover. Dette må balansere F_B som virker oppover:

$$6F_{bolt} + W = F_B.$$ Det gir

$$\underline{F_{bolt} = \frac{1}{6}\pi\gamma\left[R^2\left(\frac{2}{3}H+h\right) - r^2\left(\frac{1}{3}H+h\right) - \frac{1}{3}HRr\right] - \frac{1}{6}W}$$

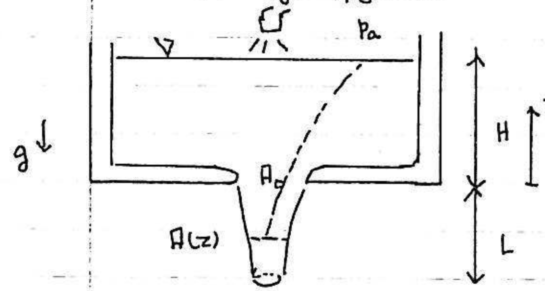
Numerisk:

$$\underline{F_{bolt}} = \frac{1}{6}\pi\cdot 10^4\left[\left(\frac{4}{3}+3\right) - 10^{-2}\left(\frac{2}{3}+3\right) - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 0{,}1\right] - \frac{1}{6}\cdot 25\cdot 10^3 = \underline{18{,}0\ kN}$$

Å ta hensyn til atmosfæretrykket vil si at en får et uniformt ekstra trykk fra alle sider. Svaret endres ikke

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. 3.des. 2004

Løsning Oppgave 2



a) Trykket inne i strålen lik p_a, ellers ville strålen ekspandere eller trekke seg sammen på tvers.

Ser på strømlinje som starter i fri overflate ($z = H$) og ender i posisjon z i den frie stråle:

$$\frac{p_a}{\rho} + gH = \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}V^2(z) + gz, \quad \underline{V(z) = -\sqrt{2g(H-z)}}, \quad z \le 0$$

b) Kontinuitet: $A_0 V_0 = A(z)V(z)$, hvor $V_0 = -\sqrt{2gH}$ er hastigheten ved $z = 0$. Innsetting av $V(z)$ gir

$$\underline{A(z) = A_0\sqrt{\frac{H}{H-z}}}$$

c) Av $V(z) = \frac{dz}{dt} = -\sqrt{2g(H-z)}$ følger

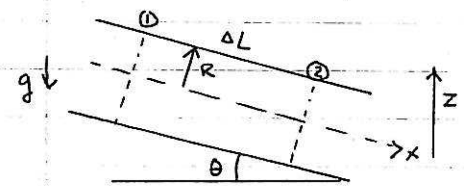
$$\int_0^T dt = -\int_0^{-L} \frac{dz}{\sqrt{2g(H-z)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_H^{H+L} \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\Big|_H^{H+L}\sqrt{u}, \quad u = H - z.$$

Altså

$$\underline{T = \sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{H+L} - \sqrt{H}\right]}$$

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. 3. des. 2004.

Løsning Oppgave 3



a) Energiligningen mellom ① og ②:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 + \underset{0}{w_s} + gh_f.$$

Da $V_1 = V_2$:

$$\underline{h_f} = (z_1 + \frac{p_1}{\gamma}) - (z_2 + \frac{p_2}{\gamma}) = \underline{\Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma}} \qquad ①$$

Impulsbalansen: $\sum F_x = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN} = 0$ fordi $V_1 = V_2$.

$$\underbrace{\Delta p \cdot \pi R^2}_{\text{Trykkraft}} + \underbrace{\gamma \cdot (\pi R^2 \Delta L) \cdot \sin\theta}_{\text{Tyngdekraft}} - \underbrace{\tau_w \cdot (2\pi R)\Delta L}_{\text{Skjærkraft}} = 0$$

$$\Delta p \cdot \pi R^2 + \gamma \pi R^2 \cdot \Delta z - \tau_w \cdot 2\pi R \cdot \Delta L = 0$$

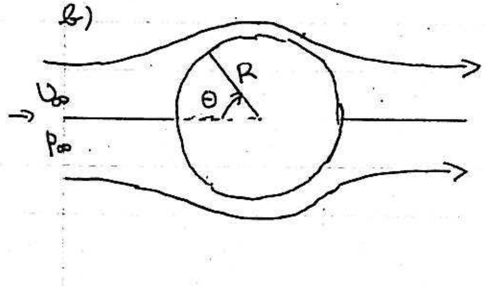
Da $\Delta z = h_f - \Delta p/\gamma$ fra ligning ①:

$$\cancel{\Delta p \cdot \pi R^2} + \gamma \pi R^2 (h_f - \cancel{\Delta p/\gamma}) - \tau_w \cdot 2\pi R \cdot \Delta L = 0$$

$$\gamma \pi R^2 \cdot h_f = 2\pi R \tau_w \cdot \Delta L$$

$$\underline{h_f = \frac{2\tau_w}{\gamma} \cdot \frac{\Delta L}{R}} \qquad ②$$

b)



$$\psi = U_\infty\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta$$

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

Oppgave 3, forts.

På sylinderens overflate: $V_r(R,\theta) = 0, \quad V_\theta(R,\theta) = -2U_\infty \sin\theta.$

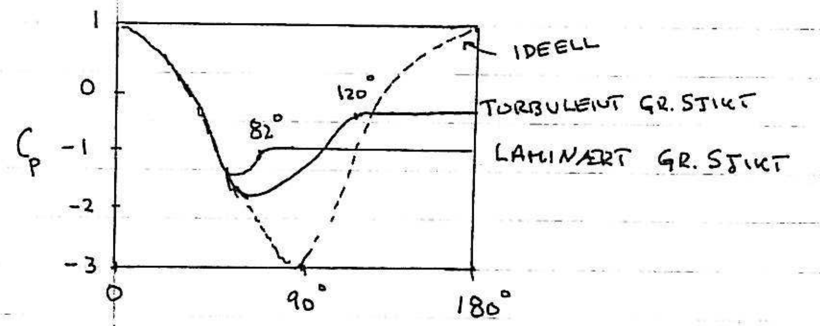
Bernoulli:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}U_\infty^2 = \frac{1}{\rho}p(R,\theta) + \frac{1}{2}\left(2U_\infty \sin\theta\right)^2$$

$$\Rightarrow: \quad \underline{p(R,\theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - 2\rho U_\infty^2 \sin^2\theta} \quad ③$$

c) Generelt $C_p = \dfrac{p(R,\theta) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$.

For ideell strømning finnes av ligning ③: $\underline{C_p = 1 - 4\sin^2\theta}$



For ideell strømning: Figuren er symmetrisk om $\theta = 90°$.

For viskøs strømning: Etter avløsningspunktet er trykket konstant.

Laminært grensesjikt: Avløsningspunktet omkring $\theta = 82°$.

Turbulent —"— : — " — $\theta = 120°$.

Turbulent grensesjikt har større kinetisk energi enn laminært, og har derfor større klebende evne. Avløsningspunktet kommer senere.

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

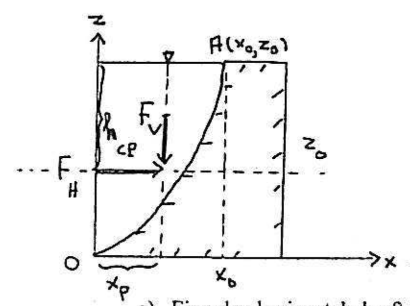
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. F1
(Linje for Fysikk og matematikk)
2. august 2004
Tid: 0900 – 1400
Studiepoeng: 7,5

Sensuren faller i uke 36.

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Figuren viser et utsnitt av en betong-dam som skal innelukke vann i et basseng. Vanndybden er $z_o = 8{,}5$ m. Flaten OA av dammen er parabolsk, og er gitt ved formen

$$z = z_o\left(\frac{x}{x_o}\right)^2,$$

hvor $x_o = 3{,}0$ m. Dammens bredde inn i planet er $b = 12{,}0$ m. Se bort fra atmosfæretrykket, og sett $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

a) Finn den horisontale kraft F_H og den vertikale kraft F_V som virker fra vannet på dammen.

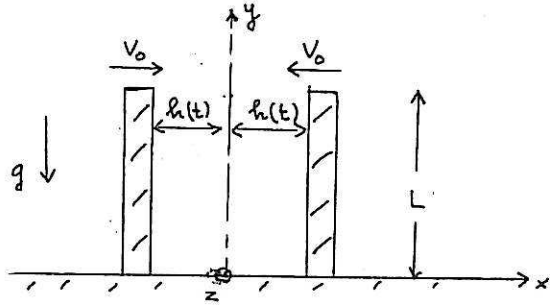
b) Finn trykksenterets dybde h_{CP}.

c) Finn horisontalavstanden x_p til angrepslinjen for F_V.

Oppgitt: Treghetsmomentet for flatens horisontale projeksjon omkring y-aksen gjennom centroiden er

$$I_{yy} = b z_o^3/12$$

Oppgave 2



To vertikale plater med høyde L har ved et vilkårlig tidspunkt en innbyrdes avstand 2h(t). Platene beveger seg mot hverandre med konstant hastighet V_o på et glatt horisontalt bord. Rommet mellom platene er fylt av en inkompressibel væske. På grunn av platenes bevegelse blir væske presset ut fra mellomrommet, og det oppstår i mellomrommet en ikke-stasjonær strømning som skal antas todimensjonal (altså ingen bevegelse i z-retning).

a) Vis at horisontale og vertikale hastighetskomponenter

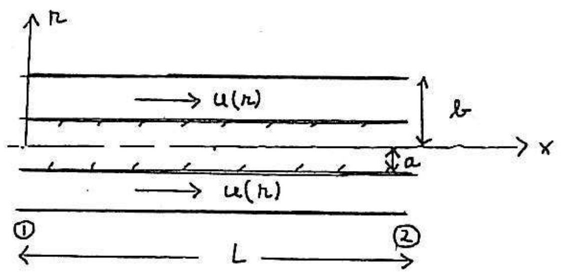
$$u(x,t) = -\frac{V_o}{h(t)}x \quad , \quad v(y,t) = \frac{V_o}{h(t)}y$$

representerer et mulig hastighetsfelt.

b) Finn akselerasjonskomponentene a_x og a_y.

c) Benytt Eulerligningen til å finne trykket i mellomrommet når trykket ved utløpet $y = L$ settes lik p_o.

Oppgave 3



Det annulære området $a \le r \le b$ mellom en kompakt indre sylinder r = a og en ytre sylinderflate r = b er fylt med en inkompressibel væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν. Strømningen er horisontal og stasjonær. Trykkforskjellen over lengden L av røret er gitt, lik $\Delta p = p_1 - p_2$. Se bort fra tyngden. På grunn av symmetrien vil bare den horisontale hastighetskomponenten u = u(r) være forskjellig fra null. Kontinuitetsligningen er automatisk oppfylt.

Symmetrien gjør at Navier-Stokes' ligninger blir forenklet. De lyder i x- og r-retning

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) , \qquad (1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} . \qquad (2)$$

a) Vis herav at $\partial p / \partial x$ = konstant, lik $-\Delta p / L$.

b) Vis ved integrasjon av (1) at hastighetsprofilet i det annulære område blir

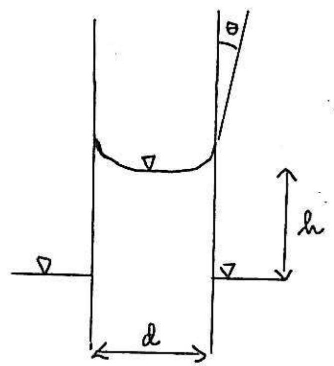
$$u = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left[b^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln(b/a)}\ln\frac{r}{b}\right] , \qquad (3)$$

hvor $\mu = \rho\nu$.

c) Sett a = 1 m, b = 2 m, og finn volumgjennomstrømningen Q uttrykt ved $\Delta p, \mu$ og L.

Oppgitt: $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$.

Oppgave 4 (halv vekt)

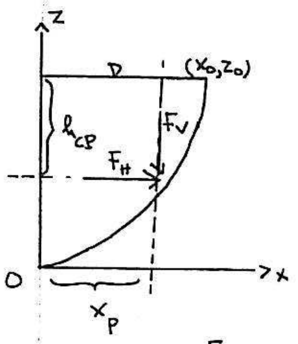


To parallelle plane plater settes vertikalt ned i et kar med vann. Avstanden mellom platene er d = 2mm. På grunn av overflatespenningen blir vannet trukket opp mellom platene, til en høyde h. Kontaktvinkelen mellom væskeflatens tangent og platen er $\theta = 10°$ (se fig.) Vannets tetthet er $\rho = 1000\ kg/m^3$, overflatespenningen er $\Upsilon = 0{,}073\ N/m$, og $g = 10\ m/s^2$. Finn h.

①

TEP4105 FLUIDMEKANIKK. KONTINUASJONSEKS. AUGUST 2004

Løsning Oppgave 1



a) Horisontal kraft $F_H = \gamma h_{cg} A_x$, hvor centroidens dybde er $h_{cg} = \frac{1}{2} z_0$ og $A_x = z_0 b$.

Altså $\underline{F_H} = \gamma \cdot \frac{1}{2} z_0^2 b = 10^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8{,}5^2 \cdot 12\,\mathrm{N} = \underline{4{,}34\ \mathrm{MN}}$

F_V er tyngden av vannet:

$F_V = \gamma \mathcal{V}$, hvor $\mathcal{V} = b \int_0^{z_0} x\,dz$ er volumet.

Da $z = \frac{z_0}{x_0^2} x^2$ blir $dz = \frac{2z_0}{x_0^2} x\,dx$, slik at

$\mathcal{V} = b \cdot \frac{2z_0}{x_0^2} \int_0^{x_0} x^2\,dx = b \cdot (\frac{2}{3} x_0 z_0)$, hvor $\frac{2}{3} x_0 z_0$ er arealet av vannet over parabelen. Altså $\underline{F_V = \gamma b \cdot (\frac{2}{3} x_0 z_0)}$.

Innsatt: $\underline{F_V} = 10^4 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 8{,}5\ \mathrm{N} = \underline{2{,}04\,\mathrm{MN}}$

b) Dybden ned til angrepslinjen for F_H er $h_{CP} = h_{cg} + l$, hvor l er differansen mellom posisjonene til trykksenter og centroide. Med aksen som på figuren (y-aksen inn i planet) blir

$$l = \frac{I_{yy}}{h_{cg} \cdot A_x} = \frac{\frac{1}{12} b z_0^3}{\frac{1}{2} z_0 \cdot b z_0} = \frac{1}{6} z_0.$$

Altså $\underline{h_{CP}} = h_{cg} + l = \frac{1}{2} z_0 + \frac{1}{6} z_0 = \underline{\frac{2}{3} z_0} = \underline{5{,}67\,\mathrm{m}}$

c) Avstanden x_p til angrepslinjen for F_V finnes ved å ta momentet av arealet omkring O (del arealet opp i vertikale striper):

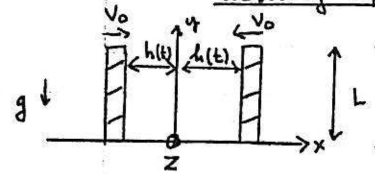
$$(\tfrac{2}{3} x_0 z_0) \cdot x_p = \int_0^{x_0} x (z_0 - z)\,dx = \int_0^{x_0} x (z_0 - \tfrac{z_0}{x_0^2} x^2)\,dx = \tfrac{1}{4} z_0 x_0^2.$$

Det gir $\underline{x_p = \frac{3}{8} x_0} = \underline{1{,}12\,\mathrm{m}}$

②

TEP4105. Kontinuasjonseksamen august 2004

Løsning Oppgave 2



a) $u(x,t) = -\frac{V_0}{h(t)} x$, $v(y,t) = \frac{V_0}{h(t)} y$

oppfyller grensebetingelsene $\underline{u(\pm h, t) = \mp V_0,\ v(0,t) = 0}$

og også betingelsen for inkompressibilitet:

$\underline{\nabla \cdot \vec{V}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{V_0}{h} + \frac{V_0}{h} = \underline{0}$. Derfor mulig hastighetsfelt.

b) $\underline{a_x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V_0 x}{h^2} \frac{dh}{dt} + \frac{V_0 x}{h} \cdot \frac{V_0}{h} = \underline{0}$

$\underline{a_y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{V_0 y}{h^2} \frac{dh}{dt} + \frac{V_0 y}{h} \frac{V_0}{h} = \underline{\frac{2V_0^2}{h^2} \cdot y}$

c) Euler: $\underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}}_{= \vec{a}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$

x-komponent: $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, dvs. $p = p(y,t)$.

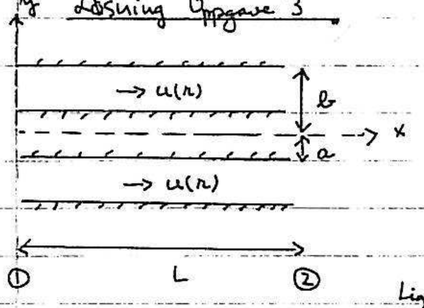
y-komponent: $\frac{2V_0^2}{h^2} \cdot y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g$.

Integrerer: $p = -\rho g y - \frac{\rho V_0^2}{h^2} \cdot y^2 + f(t)$, $f(t)$ vilkårlig.

Da $p(y = L) = p_0$ fås $f(t) = p_0 + \rho g L + \frac{\rho V_0^2}{h^2} L^2$.

Altså $\underline{p(y,t) = p_0 + \rho g (L - y) + \frac{\rho V_0^2}{h^2} (L^2 - y^2)}$

Løsning Oppgave 3



a)
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \qquad (2)$$

Ligning (2) viser at trykket er konstant over tverrsnittet.

Deriverer (1) mhp. x : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0$

Deriverer (2) mhp. x : $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0.$

Altså er $\partial p/\partial x$ uavhengig av x og r, derfor en konstant.

Da blir $\underline{\partial p/\partial x = dp/dx = -\Delta p/L}$ $(\Delta p = p_1 - p_2 > 0)$.

b) Av (1): $\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{r}{\mu}\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{\mu L}\cdot r$, $\Rightarrow$

$$r\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu L}r^2 + C_1, \quad \frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu L}r + \frac{C_1}{r}.$$

Ny integrasjon : $u = -\frac{\Delta p}{4\mu L}r^2 + C_1 \ln r + C_2.$

To grensebetingelser:

$$u(a) = 0 = -\frac{\Delta p}{4\mu L}a^2 + C_1 \ln a + C_2$$

$$u(b) = 0 = -\frac{\Delta p}{4\mu L}b^2 + C_1 \ln b + C_2.$$

Herav
$$C_1 = \frac{\Delta p}{4\mu L}\frac{b^2-a^2}{\ln b/a},$$

$$C_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L}b^2 - \frac{\Delta p}{4\mu L}\frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\ln b.$$

Oppgave 3, forts.

$$\underline{u = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left[b^2 - r^2 + \frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\ln\frac{r}{b}\right]}$$

c) Volumgjennomstrømning $Q = 2\pi\int_a^b u\cdot r\,dr.$

Med a = 1m, b = 2m blir

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left(4 - r^2 + \frac{3}{\ln 2}\cdot\ln\frac{r}{2}\right), \text{ dermed}$$

$$Q = \frac{\pi\cdot\Delta p}{2\mu L}\int_1^2\left(4r - r^3 + \frac{3}{\ln 2}\cdot r\ln\frac{r}{2}\right)dr$$

$$= \frac{\pi\cdot\Delta p}{2\mu L}\left\{\underbrace{\Big|_1^2\left(2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)}_{=9/4} + \frac{3}{\ln 2}\int_1^2 r\ln\frac{r}{2}\,dr\right\}$$

Tar ut delintegralet $\left(\frac{r}{2} = x\right)$

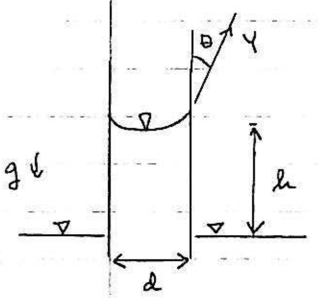
$$\int_1^2 r\ln\frac{r}{2}\,dr = 4\int_{\frac{1}{2}}^1 x\ln x\,dx = 4\Big|_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Altså

$$Q = \frac{\pi\cdot\Delta p}{2\mu L}\left\{\frac{9}{4} + \frac{3}{\ln 2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\right)\right\}$$

$$\underline{Q = \frac{3\pi\cdot\Delta p}{8\mu L}\left(5 - \frac{3}{\ln 2}\right)}$$

TEP 4105 Kontinuasjonseksamen august 2004



Løsning Oppgave 4

Betrakter én lengdeenhet inn i planet.

Vertikalkomponenten $2\Upsilon\cos\theta$ av kraften fra overflate-spenningen Υ må ved likevekt balansere tyngden $\gamma \cdot d \cdot h$ av vannsøylen:

$$2\Upsilon\cos\theta = \gamma d h \quad , \quad \text{hvor } \gamma = \rho g .$$

$$\therefore \quad \underline{h = \frac{2\Upsilon\cos\theta}{\gamma d}}$$

Innsatt:

$$\underline{h} = \frac{2 \cdot 0{,}073 \cdot \cos 10^\circ}{10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \text{ m} = 0{,}0072 \text{ m} = \underline{0{,}72 \text{ cm}}$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

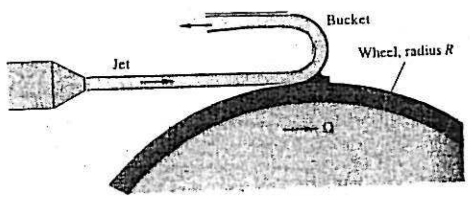
Fagleg kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK (Nynorsk)
FOR FAK. F1
(Linje for Fysikk og matematikk)
Tysdag 18. mai 2004
Tid: 0900 – 1400
Studiepoeng: 7,5

Sensuren fell i veke 24.

Hjelpemeddel C: Typegodkjend kalkulator, i samsvar med NTNU's reglar.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, hefta ved oppgåvesettet.

Oppgåve 1

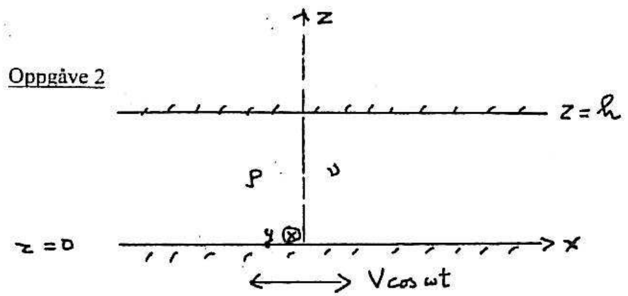


Ein vassjet med fart V_j og tverrsnittsareal A fell inn på ei skovl (engelsk "bucket") på eit turbinhjul og vert avbøyd 180^0. Turbinhjulet, som har radius R, roterer med konstant vinkelfart Ω. Tettleiken til vatnet er ρ.

a) Finn den krafta $\bar{F}_{skovl}$ som vert overførd til skovlen, samt den tilhørende effekt P.

b) For kva for ein verdi av Ω vil P være størst, $P = P_{max}$? Finn verdien av P_{max}.

Oppgåve 2



Ei uendeleg stor plan flate oscillerar harmonisk i x-retningen med fart $V\cos\omega t$ i sitt eige plan $z = 0$. Området på oversida av flata, fra $z = 0$ til $z = h$, er fylt av ei viskøs inkompressibel væske med tettleik ρ og kinematisk viskositet ν. Det øverste planet $z = h$ er i ro. Sjå bort frå tyngdekrafta. På grunn av symmetrien vil alle fysiske størrelser være uavhengig av horisontalkoordinatane x og y.

a) Vis at vertikalkomponenten w av fluidets fart er overalt lik null. Skriv ned komponentane av Navier-Stokes' ligning i x- og z-retning, og vis at trykket p er konstant.

b) Søk ei løysing av Navier-Stokes' ligning for den horisontale farten u(z,t) på fylgjande komplekse form:

$$u(z,t) = (A\sin kz + B\cos kz)e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

der A og B er konstantar. Vis fyrst at verdien av k vert kompleks og gjeve ved

$$k = \sqrt{i\omega/\nu}.$$

Bruk deretter heftvilkåra ved dei to flatene til å bestemme konstantane A og B i (1), og vis at horisontalfarten kan uttrykkast på kompleks form slik:

$$u(z,t) = V\frac{\sin k(h-z)}{\sin kh}e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

c) Finn skjærspenninga $\tau(0,t)$ ved nedre plan $z = 0$ på kompleks form, idet du gjer bruk av uttrykket (2).

Lat så $h \to \infty$, og finn korleis den fysiske skjærspenninga ved planet $z = 0$ varierer med t. Angi faseforskjellen i forhold til planets fart.

[Hint: $\cot kh \to -i$ når $h \to \infty$.]

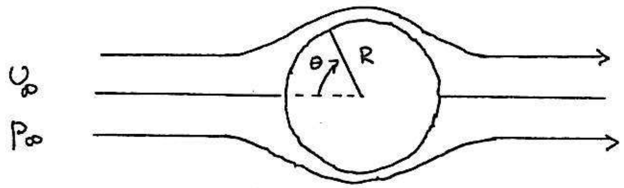
Oppgåve 3

a) Straumfunksjonen for ei linjekjelde av styrke m plassert i origo er som kjend gjeve ved $\psi = m\theta$. Anta at ei positiv kjelde m er plassert i punktet (-a,0) og at eit tilsvarande sluk $-m$ er plassert i (a,0). Når $m \to \infty$, $a \to 0$ slik at produktet $m \cdot a$ er konstant, får vi ein dipol (dublett). Dipolmomentet er definert som $\lambda = 2ma$. Vis at i store avstander r frå dipolen vert

$$\psi = -\frac{\lambda}{r}\sin\theta .$$

b) Dipolstraumen ovanfor vert superponert med ein uniform straum U_∞ i x-retninga:

$$\psi = U_\infty\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta , \quad \left(U_\infty R^2 \equiv \lambda\right).$$



Denne ψ framstiller for $r \geq R$ potensialstraumen kring ein sylinder med radius R. Vis at straumen er virvelfri, og vis at grensevilkåret ved $r = R$ er oppfylt.

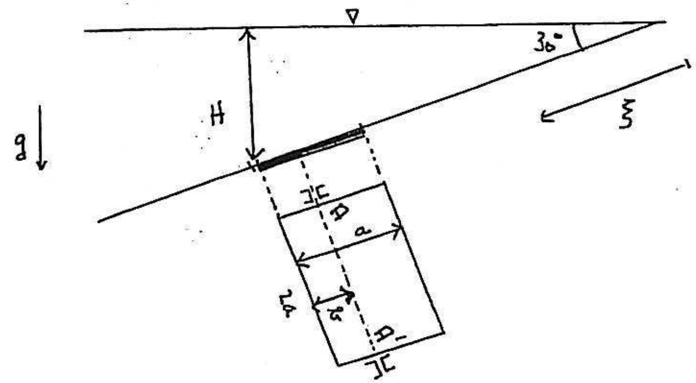
c) Finn trykket $p_s(\theta)$ som funksjon av vinkelen θ på sylinderens overflate, og lag ei skisse av trykkmotstandskoeffisienten C_p, definert som

$$C_p = \frac{p_s(\theta) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} ,$$

som funksjon av θ når θ varierer frå 0 til 180°. (La stagnasjonspunktet på framsida tilsvara $\theta = 0$.)

d) Teikn inn i samme diagram dei verkelege kurvene for C_p ein får ved å ta omsyn til fluidets viskositet. Teikn inn dei omtrentlege avløsningspunktene når grensesjiktet er laminært, og når det er turbulent. Gjev ei kort forklåring.

Oppgåve 4 (halv vekt)

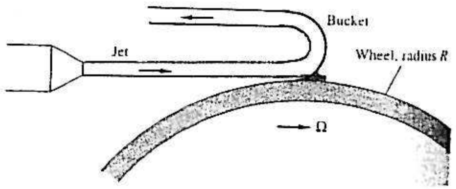


Ei rektangulær luke i ein dam har sidekantar 2a og a. Luka har mulighet for å svinge fritt om ei akse AA′ i avstand b frå nedre kant. Vassdjupet ned til lukas nedre kant er H. Så lenge H er mindre enn ei kritisk grense H_{max} ligg trykksenteret nedanfor aksen AA′ slik at luka er stengd, som vist på figuren. Men hvis vasssdjupet vert større enn H_{max}, vil trykksenteret koma på oversida av aksen og luka vil åpne seg automatisk.

Største tillatne vassdjup i dammen er H_{max}. Bestem avstanden b slik at luka opner seg når $H = H_{max}$. Svaret uttrykkast ved a og H_{max}.

Oppgjeve: Lukas treghetsmoment kring x-aksen gjennom centroiden er $I_{xx} = a^4/6$.

Løsning Oppgave 1



a) Går over til medfølgende koordinatsystem. Relativ vannhastighet $V_{rel} = V_j - R\Omega$.

J dette systemet er, når en regner i x-retning,

$$\dot{M}_{INN} = \int_{INN} \rho V_{rel}^2 \, dA = \rho (V_j - R\Omega)^2 A$$

$$\dot{M}_{UT} = -\int_{UT} \rho V_{rel}^2 \, dA = -\rho (V_j - R\Omega)^2 A$$

Kraft på vannet : $F = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN} = -2\rho A (V_j - R\Omega)^2$.

Kraft på skovlen: $\underline{F_{skovl} = -F = 2\rho A (V_j - R\Omega)^2}$, mot høyre.

Effekt $\underline{P} = F_{skovl} \cdot R\Omega = \underline{2\rho A R\Omega (V_j - R\Omega)^2}$

b) Ekstremalverdi for $\underline{P}$ når $d\underline{P}/d\Omega = 0$, $\Rightarrow$

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\Omega (V_j - R\Omega)^2\right] = 0$$

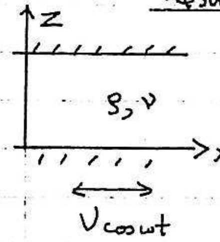
$$(V_j - R\Omega)^2 - 2R\Omega(V_j - R\Omega) = 0$$

$$(V_j - R\Omega)(V_j - 3R\Omega) = 0$$

Fysisk løsning $\underline{\Omega = \frac{1}{3}\frac{V_j}{R}}$

Da er $\underline{P = P_{max} = \frac{8}{27}\rho A V_j^3}$

Løsning Oppgave 2



a) Inkompressibilitet $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ gir her $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, fordi det er ingen variasjon i x- og y-retningene. Altså er w uavhengig av z, og må være lik null fordi $w = 0$ ved platene.

Navier - Stokes : $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V}$

z-retning: $\underline{0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}$, altså er $\underline{p \text{ konstant.}}$

x-retning: $\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{(\vec{V}\cdot\nabla)u}_{0} = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{0} + \nu \nabla^2 u$

$$\therefore \quad \underline{\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \qquad ①$$

b) Innsetting av $u = (A\sin kz + B\cos kz)e^{-i\omega t}$ i ① gir

$-i\omega u = -k^2 \nu u$, $\underline{k = \sqrt{i\omega/\nu}}$.

Heftbetingelse ved $z = 0$: $Ve^{-i\omega t} = Be^{-i\omega t}$ $\therefore$ $B = V$.

Heftbetingelse ved $z = h$: $0 = A\sin kh + B\cos kh$, altså $A =$
$= -B\cot kh = -V\cot kh$. Dermed

$$u = (-V\cot kh \sin kz + V\cos kz)e^{-i\omega t} = \frac{V}{\sinh}\Big(\underbrace{-\cos kh \sin kz + \sin kh \cos kz}_{\sin k(h-z)}\Big)e^{-i\omega t}$$

$$\underline{u(z,t) = \frac{V}{\sin kh}\cdot \sin k(h-z)e^{-i\omega t}}$$

c) $\underline{\tau(0,t)} = \mu(\partial u/\partial z)_0 = \underline{-\mu(Ve^{-i\omega t})k\cot kh}$, $k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)$.

$h \to \infty$: $\tau(0,t) = -\mu V(\cos\omega t - i\sin\omega t)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)\cdot(-i) =$

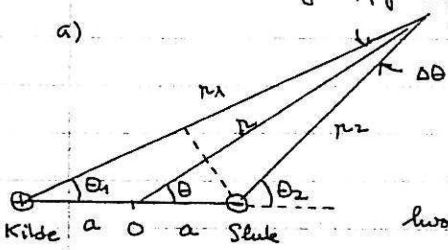
$= -\mu V\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(\cos\omega t - i\sin\omega t)(1-i) = -\mu V\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(\cos\omega t - \sin\omega t - i\sin\omega t - i\cos\omega t)$.

Realdel : $\underline{\tau(0,t) = -\mu V\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(\cos\omega t - \sin\omega t) = -\sqrt{\omega\mu\rho}\, V\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})}$.

Faseforskjell $3\pi/4$ i forhold til hastigheten.

Løsning Oppgave 3

a)



Strømfunksjoner:

Fra kilde i $(-a,0)$, $\psi_1 = m\theta_1$

Fra sluk i $(+a,0)$, $\psi_2 = -m\theta_2$

Superponerer: $\psi = m(\theta_1 - \theta_2) = -m\cdot\Delta\theta$,

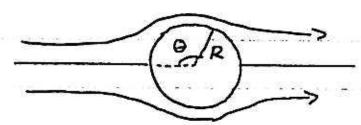
hvor $\Delta\theta$ er toppvinkel ved feltpunktet P.

Av figuren: $\Delta\theta = \dfrac{2a\sin\theta}{r}$ i store avstander r.

Altså $\psi = -\dfrac{2ma}{r}\sin\theta = -\dfrac{\lambda}{r}\sin\theta.$

b)

U_∞
p_∞



$$\psi = U_\infty\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta, \quad U_\infty R^2 = \lambda.$$

I plane koordinater gjelder $\nabla^2\psi = -\zeta_z$. Trenger dermed bare å sjekke om $\nabla^2\psi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$ er lik null.

Regner ut

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = U_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta, \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{U_\infty}{r}\frac{d}{dr}\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cdot\sin\theta = \frac{U_\infty}{r}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = -\frac{U_\infty}{r}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta. \quad \text{Altså } \nabla^2\psi = 0, \Rightarrow \zeta_z = 0$$

Hastighetskomponenter:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta.$$

Én grensebetingelse ved $r = R$: $V_r(R) = 0$, som stemmer.

Oppgave 3, forts.

c) Da $\zeta_z = 0$ kan Bernoulli benyttes mellom vilkårlige punkter:

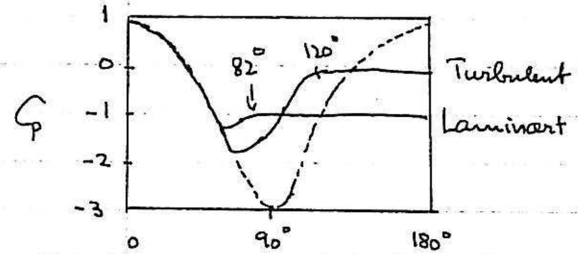
$$\tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 + p_\infty = \tfrac{1}{2}\rho V_s^2(\theta) + p_s(\theta)$$

Da $V_s^2(\theta) = \underset{=0}{V_r^2} + V_\theta^2 = 4U_\infty^2\sin^2\theta$, fås

$$p_s(\theta) = \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 + p_\infty - 2\rho U_\infty^2\sin^2\theta$$

$$C_p = \frac{p_s(\theta) - p_\infty}{\tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta.$$

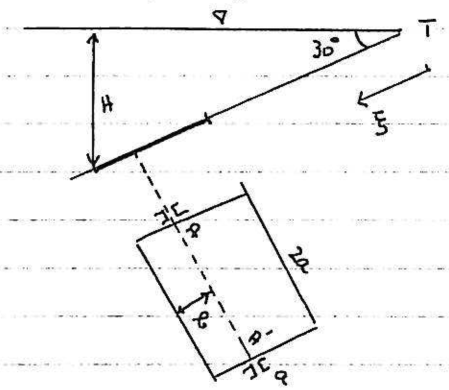
d)



Laminært grensesjikt: Avløsning ved $\theta \simeq 82°$. For høyere θ er trykket praktisk talt konstant.

Turbulent grensesjikt: Avløsning ved $\theta \simeq 120°$. Større kinetisk energi i grensesjikt, og dermed større klebende evne til overflaten.

Løsning Oppgave 4



Avstand fra toppunktet T til centroiden langs planet er ξ_{CG}. Tilsvarende avstand til trykksenteret er ξ_{CP}.

$$\xi_{CP} - \xi_{CG} = \frac{I_{xx}}{\xi_{CG} \cdot A} \qquad (1)$$

Kritisk punkt tilsvarende $H = H_{max}$ når trykksenteret faller sammen med aksen AA'. Da er

$$\xi_{CP} = \frac{H}{\sin 30^\circ} - b = 2H - b.$$

Centroiden ligger midt på luka:

$$\xi_{CG} = 2H - \frac{a}{2}.$$

Altså $\xi_{CP} - \xi_{CG} = 2H - b - (2H - \frac{a}{2}) = \frac{a}{2} - b$, som en også ser direkte av figuren.

Setter inn i (1):

$$\frac{a}{2} - b = \frac{\frac{1}{6}a^4}{(2H - \frac{a}{2}) \cdot 2a^2} = \frac{a^2}{(4H - a)6}$$

$$\underline{b = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{6(4H_{max} - a)}}$$, når H erstattes med H_{max}.

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

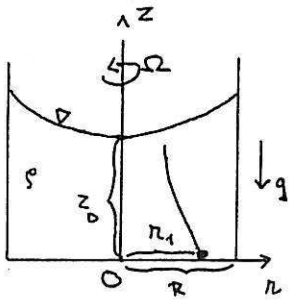
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F1
(Linje Fysikk og matematikk)
Onsdag 13. august 2003
Tid: 0900 – 1400
Vekttall: 2,5

Sensuren faller i uke 36.

Hjelpemidler: C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Et sylindrisk kar med radius R roterer omkring den vertikale z-aksen med konstant vinkelhastighet Ω. Legg origo O på bunnen av karet, som vist på figuren. Avstanden fra O til bunnen av den frie overflaten er kjent, lik z_0. Vannets tetthet er ρ. Se bort fra atmosfæretrykket.

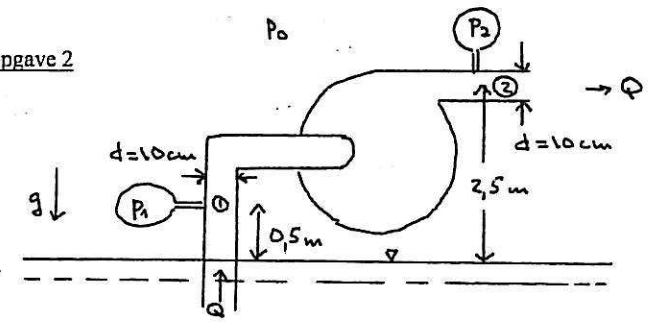
a) Finn trykket $p(r,z)$ i vannet, og finn formen av den frie overflate.

b) Finn volumet V av vannet i karet.

c) En vimpel ("buoyant streamer"), med tetthet mindre enn vann, er festet til bunnen i avstand r_1 fra origo (se fig.). Dersom karet ikke roterte, ville vimpelen stå i vertikal posisjon. Finn hvilken form $r = r(z)$ vimpelen får når karet roterer.

Hint: I ethvert punkt vil vimpelen stå vinkelrett på isobaren gjennom punktet.

Oppgave 2

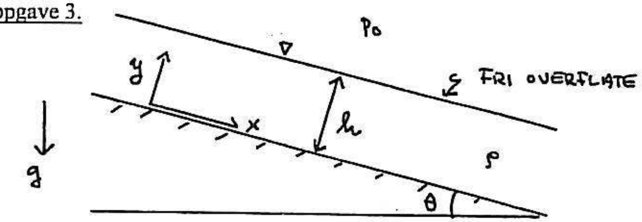


En vannpumpe med effekt $P = 2{,}8$ kW trekker vann opp av et basseng, og avleverer det under trykket $p_2 = 160$ kPa. Anta stasjonære forhold. Atmosfæretrykket er $p_0 = 101$ kPa. Manometeret ved 1 viser trykket $p_1 = 90$ kPa. Anta uniforme hastighetsprofiler i rørene, både ved 1 og 2 Sett $\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

a) Finn vannets hastighet V ved 1 og finn volumgjennomstrømningen Q.

b) Hvor stor er $-w_s$, det tilførte arbeid per masseenhet? Finn pumpens friksjonshøyde h_f.

Oppgave 3.



En væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν renner laminært og stasjonært nedover et skråplan som har helningsvinkelen θ. Væskefilmens konstante tykkelse er h. Væskefilmen har fri overflate mot atmosfæren; atmosfæretrykket er p_0. Strømningen er todimensjonal, med strømlinjer som overalt er parallelle med x-aksen. Tyngdens akselerasjon er g.

a) Skriv opp x- og y-komponentene av Navier-Stokes' ligning, idet du benytter koordinatsystemet på figuren. Ligningene skrives slik at de eneste ukjente størrelser er trykket p samt hastigheten $u = u(y)$ i x-retningen. Vis at størrelsen K, definert ved

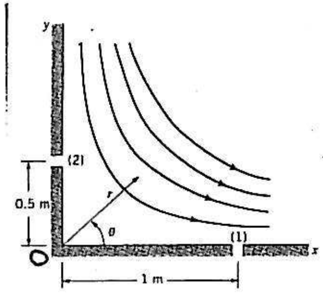
$$K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \sin\theta ,$$

er en konstant, uavhengig av x og y.

b) Forklar hvilke to grensebetingelser væsken må tilfredsstille. Vis at $\partial p / \partial x = 0$.

c) Finn ved integrasjon hastighetsprofilet $u(y)$.

Oppgave 4



En potensialstrømning i 1. kvadrant er gitt, som vist på figuren. Origo er O. Strømfunksjonen i plane polarkoordinater er oppgitt til å være

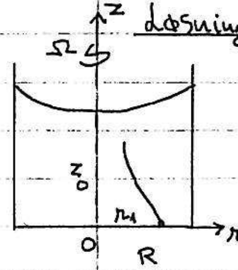
$$\psi = 2r^2 \sin 2\theta .$$

a) Vis at ψ tilfredsstiller Laplaces ligning samt grensebetingelsene på de faste flatene.

b) Hvis trykket i punkt (1) er 30 kPa, hvor stort er trykket i punkt (2)? Anta tettheten $\rho = 10^3 \,\mathrm{kg/m^3}$. Se bort fra tyngden.

c) Finn hastighetspotensialet ϕ (enkleste form).

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. Kontinuasjonseksamen 13 August 2003



Løsning Oppgave 1

a) Eulerligningen i det roterende system

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\Omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}, \quad \vec{g} = (0,0,-g) \quad \Rightarrow$$

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + gz\right) = 0, \text{ altså}$$

$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \rho g z + C. \quad \text{Da } p = 0 \text{ ved } r = 0, z = z_0,$$

fås $C = \rho g z_0$.

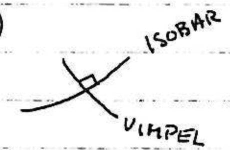
Altså $\underline{p(r,z) = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 + \rho g(z_0 - z)}$ ①

Fri overflate, $p = 0$, gir $\underline{z = z_0 + \frac{r^2\Omega^2}{2g}}$

b) Volum $\underline{V} = 2\pi\int r\,dr\cdot z = 2\pi\int_0^R r\,dr\left(z_0 + \frac{r^2\Omega^2}{2g}\right)$

$$= 2\pi z_0\int_0^R r\,dr + \frac{\pi\Omega^2}{g}\int_0^R r^3\,dr = \underline{\pi R^2\left(z_0 + \frac{\Omega^2 R^2}{4g}\right)}.$$

c)



For isobarene (p = konst.) er $dp = 0$.

Differensierer ①: $0 = \rho\Omega^2 r\,dr - \rho g\,dz$

Altså $dz/dr = r\Omega^2/g$.

Kurvene vinkelrett på isobarene (GL = "gradient lines") har vinkelkoeffisient lik den negative inverse av vinkelkoeffisienten ovenfor:

$$\left.\frac{dz}{dr}\right|_{GL} = -\frac{g}{r\Omega^2}$$

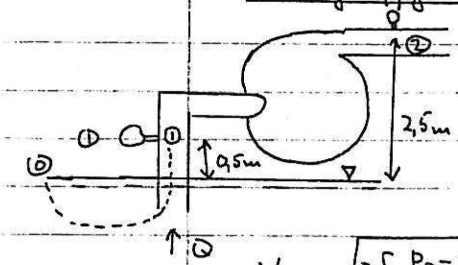
Separerer ligningen, og sløyfer GL:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\Omega^2}{g}dz \quad \Rightarrow \quad \ln r = -\frac{\Omega^2}{g}z + \text{konst.}$$

Altså $\underline{r = r_1 e^{-\Omega^2 z/g}}$, $r = r_1$ ved $z = 0$.

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. 13. august 2003

Løsning Oppgave 2



$d = 10$ cm, $\underline{P} = 2{,}8$ kW

a) $p_0 = 101$ kPa, $p_1 = 90$ kPa, $p_2 = 160$ kPa

Bernoulli fra overflaten ⓪ opp til ① gir

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{V_0^2} + gz_0 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz_1$$

$$\underline{V} = \sqrt{2\left[\frac{p_0 - p_1}{\rho} + g(z_0 - z_1)\right]} = \sqrt{2\left(\frac{101-90}{10^3}\cdot 10^3 - 10\cdot 0{,}5\right)} = \underline{3{,}46 \text{ m/s}}$$

Samme hastighet V ved ① og ②.

Volumgjennomstrømning $\underline{Q} = A\cdot V = \frac{\pi d^2}{4}\cdot V = \frac{\pi}{4}0{,}10^2\cdot 3{,}46 = \underline{0{,}027 \text{ m}^3/\text{s}}$

b) Effekt $\underline{P} = (-w_s)\cdot\rho\cdot Q$ gir $\underline{-w_s} = \frac{P}{\rho Q} = \frac{2{,}8\cdot 10^3}{10^3\cdot 0{,}027} = \underline{104 \text{ m}^2/\text{s}^2}$

Mekanisk energiligning gjennom pumpen, langs strømlinje fra ⓪ til ②:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{V_0^2} + gz_0 = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz_2\right) + w_s + gh_f$$

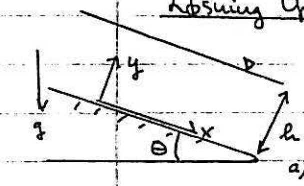
$$gh_f = \frac{p_0 - p_2}{\rho} + g(z_0 - z_1) - \frac{1}{2}V^2 - w_s$$

$$= 101 - 160 - 10\cdot 2{,}5 - \frac{1}{2}\cdot 3{,}46^2 + 104 = 14$$

$$\underline{h_f = 1{,}4 \text{ m}}$$

SIO1009 FLUIDMEKANIKK 13. august 2003

Løsning Oppgave 3



a)

$\vec{g} = (g\sin\theta, -g\cos\theta)$

Navier-Stokes:

$\underline{x}$ $\quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \nu\frac{d^2u}{dy^2}$ ①

$\underline{y}$ $\quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\theta$ ②

Skriver ② slik: $\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma\cos\theta$, $p = -\gamma y\cos\theta + f(x)$, hvor $f(x)$ er vilkårlig. Deriverer: $\partial p/\partial x = f'(x)$, uavhengig av y.

Skriver ① slik:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta = \mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

Venstre side avhenger bare av x, høyre side bare av y $\Rightarrow$

$K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ er konstant, uavhengig av x og y.

b) Grensebetingelser: $u = 0$ ved $y = 0$, og

$\tau(y) = \mu\frac{du}{dy}\Big|_h = 0$ ved fri overflate.

Da $K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ er konstant, må $\partial p/\partial x$ være konstant.

Kan evalueres i fri overflate, hvor $p = p_0$ = konstant.

Altså $\partial p/\partial x = 0$ overalt i væsken.

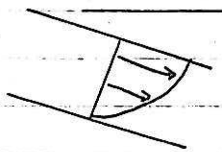
c) $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{K}{\mu}$, $\quad \frac{du}{dy} = \frac{K}{\mu}y + C_1$, $\quad u(y) = \frac{K}{2\mu}y^2 + C_1 y + C_2$.

Grensebet. $u(0) = 0$ gir $C_2 = 0$.

— " — $\frac{du}{dy}\Big|_h = 0$ gir $C_1 = -\frac{K}{\mu}h$.

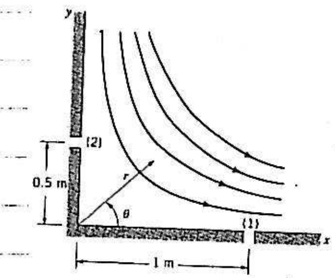
Da $K = -\gamma\sin\theta$ fås profilet

$$u(y) = \frac{gh}{\nu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right)\sin\theta$$



SIO1009 FLUIDMEKANIKK 13. august 2003

Løsning Oppgave 4



a) $\psi = 2r^2\sin 2\theta$

Laplaces ligning $\nabla^2\psi = 0$.

Polarkoordinater: $\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$

$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 4r\sin 2\theta$, $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 8r\sin 2\theta$

$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = -8r^2\sin 2\theta$, altså $\nabla^2\psi = 8\sin 2\theta - 8\sin 2\theta = \underline{0}$

Grensebetingelser: $\psi = 0$ for $\theta = 0$ og $\theta = \frac{1}{2}\pi$; stemmer med at ψ = konstant på en fast flate.

b) For potensialstrømning kan Bernoulli benyttes mellom vilkårlige punkter: $p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$.

Må finne hastighetene i (1) og (2).

$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 4r\cos 2\theta$, $\quad V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -4r\sin 2\theta$ $\Rightarrow$

$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = 16r^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) = 16r^2$.

Det gir $V_1^2 = 16r_1^2 = 16\ m^2/s^2$, $V_2^2 = 16\cdot r_2^2 = 4\ m^2/s^2$.

$\underline{p_2} = p_1 + \frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2) = 30\cdot 10^3 + \frac{1}{2}\cdot 10^3\cdot(16-4) = \underline{\underline{36\ kPa}}$

c) $V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = 4r\cos 2\theta$ gir $\phi = 2r^2\cos 2\theta + f_1(\theta)$, f_1 vilkårlig

$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -4r\sin 2\theta$ gir $\phi = -4r^2\int\sin 2\theta\, d\theta = 2r^2\cos 2\theta + f_2(r)$, f_2 vilkårlig.

Enkleste løsning fås ved $f_1 = f_2 = 0$, $\Rightarrow$

$$\underline{\phi = 2r^2\cos 2\theta}$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

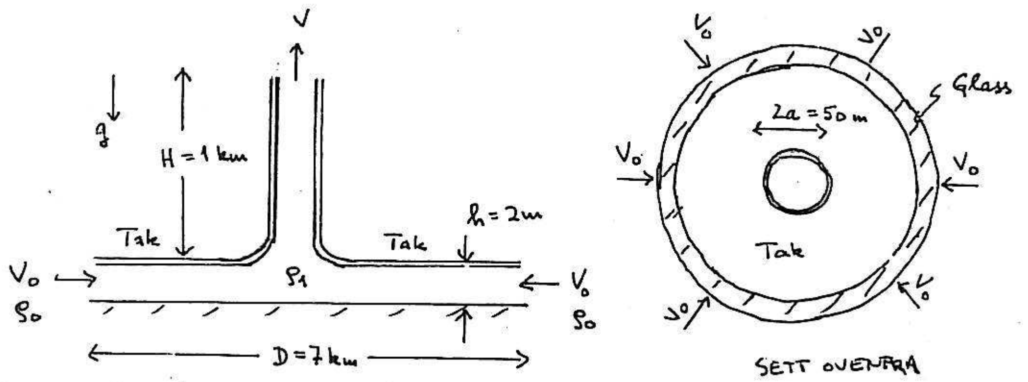
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F1(Bokmål)
(Linje Fysikk og matematikk)
Lørdag 10. mai 2003
Tid: 0900 – 1400
Vekttall: 2,5

Sensuren faller innen 31. mai.

Hjelpemidler: C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Verdens høyeste byggverk – et solkrafttårn – vil snart bli satt under konstruksjon i ørkenen i New South Wales i Australia. Solkrafttårnet er en pipe med høyde H = 1 km. Hensikten med tårnet er å utnytte gjennomstrømmende luft med hastighet V til å drive turbiner. Pipa er forbundet nedentil med et stort horisontalt tak, som har diameter D = 7 km. Anta at takets ytre rand (det skraverte området på høyre figur) er av glass, slik at den lufta som blir radielt trukket inn under taket utenfra med lav hastighet V_0, er oppvarmet fra omgivelsenes temperatur T_0 = 305 K til temperaturen T_1 = 330 K når den er kommet inn igjennom randområdet. Den tilsvarende tetthet av lufta er ρ_1. Anta at lufta er en ideell gass, og har konstant tetthet $\rho = \rho_1$ helt til den går ut igjen til atmosfæren med hastighet V i høyden z = H. (Anlegget virker altså som en peis.) Anta stasjonære forhold, og neglisjer luftas kinetiske energi ved inntaksåpningen.

a) Finn tettheten ρ_1.

b) Finn utløpshastigheten V, idet du gjør bruk av formlene for troposfæren:

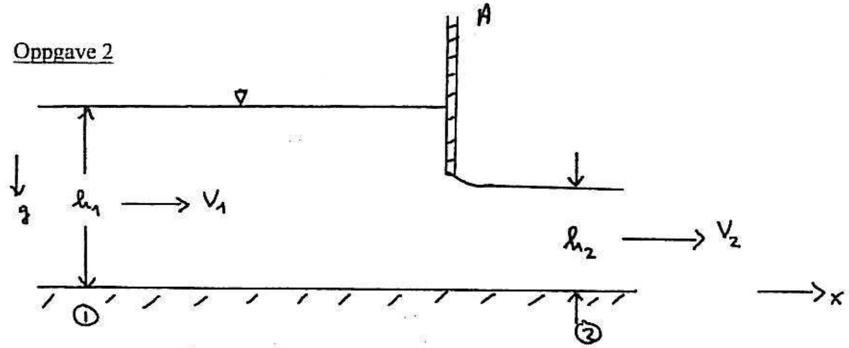
$$T = T_0 - 0{,}0065z\ , \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5{,}26}$$

$$p_0 = 1{,}01\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\ , \qquad \rho_0 = 1{,}16\,\mathrm{kg/m^3}\ , \quad g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}.$$

(Indeks 0 refererer til z = 0.)

c) Anta at høyden av glasstaket er h = 2m ved inntaksåpningen (se figuren), og at pipas diameter er 2a = 50m. Gi et overslag over verdien av V_0, idet du neglisjerer forskjellen mellom ρ_0 og ρ_1.

Oppgave 2

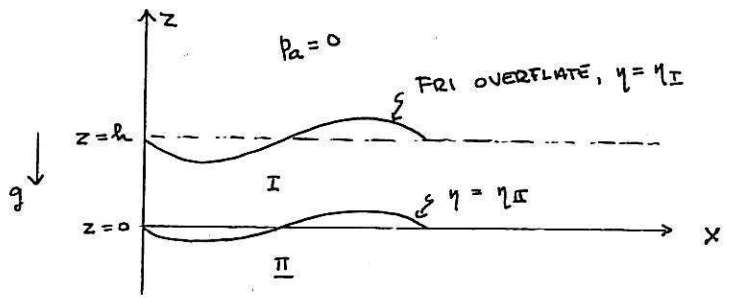


En sluseport A kontrollerer mengden av vann som strømmer ut fra et basseng. Ved seksjonene 1 og 2 er strømningen uniform og trykket er hydrostatisk. Kanalbredden er b, inn i planet. Strømningen er stasjonær. Se bort fra friksjon ved bunnen.

a) Anta at størrelsene h_1, V_1, h_2, V_2 på figuren er gitt. Finn størrelse F_{port} og retning av den ytre kraft $\vec{F}_{port}$ som trengs for å holde porten på plass. Har det noe å si om en tar hensyn til atmosfæretrykket? Begrunn svaret.

b) Anta så at h_1 og V_1 ved inn-seksjonen holdes fast, mens høyden av porten reguleres. For hvilken h_2 vil F_{port} blir størst?

Oppgave 3



To ideelle væsker I og II er overlagret hverandre: Øvre væske med konstant tetthet ρ_I danner et sjikt av tykkelse h (ved stillevann er sjiktets to overflater beliggende ved $z = 0$ og $z = h$). Sjiktets nedre overflate danner grensen mot nedre væske II som er av uendelig dybde $(z \to -\infty)$, og som har konstant tetthet ρ_{II}. Det oppgis at hastighetspotensialene i de to områdene kan skrives på formen

$$\phi_I = \left(Ae^{-kz} + Be^{kz}\right)\cos(\omega t - kx) \tag{1}$$

$$\phi_{II} = Ce^{kz}\cos(\omega t - kx), \tag{2}$$

der A, B og C er konstanter.

a) Skriv ned den kinematiske og den dynamiske betingelse ved den frie overflate, $\eta = \eta_I$. Linearisér ligningene, og finn herav den frie overflatebetingelse

$$\frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi_I}{\partial z} = 0 \;, \qquad z = h. \tag{3}$$

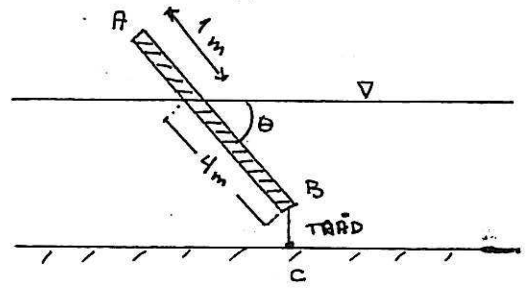
b) Skriv ned de tilsvarende lineariserte kinematiske og dynamiske betingelser ved nedre grenseflate $\eta = \eta_{II}$ (sett Bernoulli-konstantene lik null). Vis herav at potensialene må tilfredsstille følgende differensialligning:

$$\rho_I \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} - \rho_{II}\frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial t^2} + g(\rho_I - \rho_{II})\frac{\partial \phi_{II}}{\partial z} = 0 \;, \qquad z = 0. \tag{4}$$

c) Sett uttrykkene (1) og (2) inn i den lineariserte kinematiske betingelse ved $z = 0$, samt inn i ligningene (3) og (4). Anta deretter at øvre sjikt har uendelig bredde, $h \to \infty$, og vis at én mulig frekvens er gitt ved $\omega^2 = gk$. Hva betyr denne løsningen fysisk?

Finn også den andre løsningen for ω, idet du setter $B = 0$ i (1).

Oppgave 4 (halv vekt)

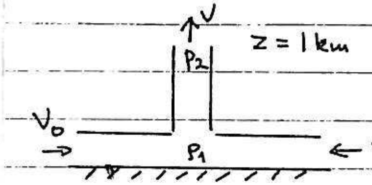


En rund trestav AB av lengde L = 5m og diameter D = 10 cm er festet til bunnen med en vertikal tråd BC. Staven blir stående i delvis neddykket tilstand, som vist på figuren.

a) Finn spenningen S i tråden.
b) Finn treets tetthet ρ_{tre}.

Spesifikk tyngde for vann er $\gamma_{vann} = 9790$ Pa / m.

Løsning Oppgave 1



Hastighet V inne i tårnet.

Hastighet V_0 ved inntaket

a) Trykkforskjellen Δp ved innløp og utløp er tilnærmet lik null.

Ellers ville en ha akselerasjon.

Betingelse p = konst gir ved inntaket $\rho_0 T_0 = \rho_1 T_1$, hvor ρ_1 og T_1 refererer til den oppvarmede luft etter inntaksregionen.

Altså $\underline{\rho_1} = \rho_0 \dfrac{T_0}{T_1} = 1{,}16 \dfrac{305}{330} = \underline{1{,}072 \text{ kg/m}^3}$

b) Ideell gass, $\rho = \rho_1$ = konstant gjennom hele anlegget.

Bernoulli:

$$\underbrace{p_1}_{=p_0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho_1 V_0^2}_{\text{negl.}} = \underbrace{p_2}_{\text{øverst i pipa}} + \tfrac{1}{2}\rho_1 V^2 + \rho_1 g H \qquad ①$$

[Når avviket mellom ρ_0 og ρ_1 er lite, $\dfrac{\rho_1}{\rho_0} = 0{,}92$, kan en tilnærmet sette at luftas hastighet etter oppvarmingen er V_0.]

Av ①: $\tfrac{1}{2}\rho_1 V^2 = p_0\left(1 - \dfrac{p_2}{p_0}\right) - \rho_1 g H.$ ②

Her må p_2, trykket øverst i pipa, finnes. p_2 er lik atmosfæretrykket i høyden $z = H$.

Da $T_{atm}(H) = T_0 - 0{,}0065 z = 305 - 0{,}0065 \cdot 1000 = 298{,}5 \text{ K}$

finnes

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_{atm}(H)}{p_0} = \left(\frac{T_{atm}(H)}{T_0}\right)^{5{,}26} = \left(\frac{298{,}5}{305}\right)^{5{,}26} = 0{,}893,$$

$$p_2 = 0{,}902 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

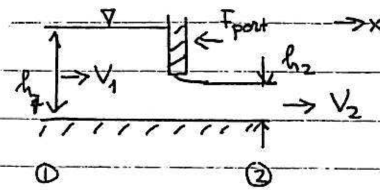
Av ②: $V^2 = \dfrac{2p_0}{\rho_1}\left(1 - \dfrac{p_2}{p_0}\right) - 2gH = \dfrac{2 \cdot 1{,}01 \cdot 10^5}{1{,}072}(1 - 0{,}893) -$

$- 2 \cdot 9{,}81 \cdot 1000 = 20162 - 19620 = 542$, $\underline{V = 23{,}3 \text{ m/s}}$

c) Inntaksåpningens areal er $\pi D \cdot h$, hvor h er høyden av glasstaket. Utløpsåpningens areal er πa^2. Når $\rho_1 \simeq \rho_0$, og tilsvarende antagelse gjøres ved utløpet, må volumgjennomstrømningen Q være den samme:

$$\pi D h \cdot V_0 = \pi a^2 \cdot V$$

$$\underline{V_0} = \frac{a^2 V}{D h} = \frac{25^2 \cdot 23{,}3}{7000 \cdot 2} \simeq \underline{1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$



Løsning Oppgave 2

a) Hydrostatisk trykkfordeling gir horisontalkraft $\gamma h_{cg} A$, hvor h_{cg} er dybden av centroiden.

Horisontalkraft på vertikal flate ved ① altså $\gamma \cdot \frac{1}{2}h_1 \cdot h_1 b = \frac{1}{2}\gamma h_1^2 b$. Tilsv. kraft ved ② er $\frac{1}{2}\gamma h_2^2 b$.

Impulssatsen $\Sigma F = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN}$ i x-retning gir

$$F_x + \frac{1}{2}\gamma h_1^2 b - \frac{1}{2}\gamma h_2^2 b = \rho V_2^2 \cdot h_2 b - \rho V_1^2 \cdot h_1 b.$$

Her er F_x lik x-komponenten av kraften på vannet i kontrollvolumet mellom ① og ②. En har $F_x < 0$, fordi kraften på vannet er mot venstre. $\vec{F}$ er lik den ytre kraft $\vec{F}_{port}$ som virker på porten.

$$F_x = \frac{1}{2}\gamma b(h_2^2 - h_1^2) + \rho b(V_2^2 h_2 - V_1^2 h_1)$$

Størrelse $\underline{F_{port}} = |\vec{F}_{port}| = -F_x = \underline{\frac{1}{2}\gamma b(h_1^2 - h_2^2) - \rho b(V_2^2 h_2 - V_1^2 h_1)}$ ①

Ved å innføre massefluks $\dot{m} = \rho V_1 h_1 b = \rho V_2 h_2 b$ kan dette alternativt skrives som $\underline{F_{port} = \frac{1}{2}\gamma b(h_1^2 - h_2^2) - \dot{m}(V_2 - V_1)}$.

Atmosfæretrykket vil si at et uniformt trykk på virker overalt, og har ingen innflytelse på F_{port}.

b) Omskriver ① med bruk av kontinuitetsligningen $V_1 h_1 = V_2 h_2$, som gir $V_2 = V_1 h_1 / h_2$. Det gir

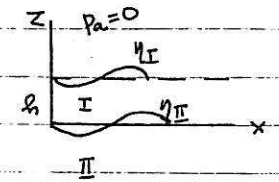
$$F_{port} = \frac{1}{2}\gamma b h_1^2 - \frac{1}{2}\gamma b h_2^2 - \rho b \frac{V_1^2 h_1^2}{h_2} + \rho b V_1^2 h_1.$$

Her er det bare h_2 som varierer. F_{port} blir størst når

$$\frac{dF_{port}}{dh_2} = 0 \text{, dvs. } -\gamma b h_2 + \rho b \frac{V_1^2 h_1^2}{h_2^2} = 0$$

$$\underline{h_2 = (V_1^2 h_1^2 / g)^{1/3}}$$

Løsning Oppgave 3



a) Kinematisk betingelse fri overflate:

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} + u\frac{\partial \eta_I}{\partial x} = w, \quad z = h + \eta_I$$

Dynamisk betingelse (Bernoulli):

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 + g\eta_I = C, \quad z = h + \eta_I, \quad C \text{ er vilkårlig.}$$

Har benyttet at $p_a = 0$.

Lineariserer:

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} = \frac{\partial \phi_I}{\partial z}, \quad z = h$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + g\eta_I = C, \quad z = h$$

Deriverer siste ligning: $\frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} + g\frac{\partial \eta_I}{\partial t} = 0$, som innsatt i foregående ligning gir

$$\frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi_I}{\partial z} = 0, \quad z = h. \quad \text{Fri overflatebetingelse.}$$

b) Ved nedre grenseflate er linearisert kinematisk betingelse

$$\frac{\partial \eta_{II}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_I}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta_{II}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial z}, \quad z = 0.$$

Altså $$\frac{\partial \phi_I}{\partial z} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial z}, \quad z = 0$$

Linearisert dynamisk betingelse:

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \frac{p_I}{\rho_I} + g\eta_{II} = C_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} + \frac{p_{II}}{\rho_{II}} + g\eta_{II} = C_1 = 0$$

Ganger med tetthetene:

$$\rho_I \frac{\partial \phi_I}{\partial t} + p_I + \rho_I g \eta_{II} = 0$$

$$\rho_{II} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} + p_{II} + \rho_{II} g \eta_{II} = 0$$

$p_I = p_{II}$ ved grenseflaten

Subtraherer:

$$\rho_I \frac{\partial \phi_I}{\partial t} - \rho_{II} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} + g(\rho_I - \rho_{II})\eta_{II} = 0$$

Deriverer mhp. t, og benytter $\frac{\partial \eta_{II}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial z}$:

$$\rho_I \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial t^2} - \rho_{II} \frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial t^2} + g(\rho_I - \rho_{II}) \frac{\partial \phi_{II}}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

c) Innsetting av uttrykkene (1) og (2) i den kinematiske betingelsen $\partial \phi_I/\partial z = \partial \phi_{II}/\partial z$ ved $z = 0$, gir

$(-kA + kB)\cos\theta = kC\cos\theta, \quad \theta = \omega t - kx.$

Altså $\quad C = B - A \quad$ (i)

Innsetting i den frie overflatebetingelse (3) gir

$-\omega^2(Ae^{-kh} + Be^{kh})\cos\theta + gk(-Ae^{-kh} + Be^{kh})\cos\theta = 0$

$\therefore \quad \omega^2(Ae^{-kh} + Be^{kh}) = gk(-Ae^{-kh} + Be^{kh}) \quad$ (ii)

Innsetting i (4) gir

$-\rho_I\omega^2(A+B)\cos\theta + \rho_{II}\omega^2 C\cos\theta + g(\rho_I - \rho_{II})kC\cos\theta = 0$

$\therefore \quad \rho_I\omega^2(A+B) = [\rho_{II}\omega^2 + g(\rho_I - \rho_{II})k]C \quad$ (iii)

$kh \to \infty$: Av (ii) følger $\omega^2 B = gkBe^{kh}$, $\quad \omega^2 = gk$.

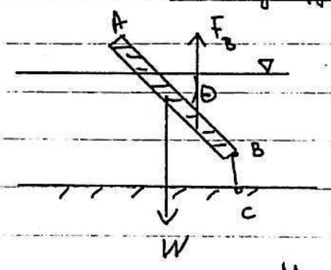
Dette er en fri overflatebølge på dypt vann.

$B = 0$: $\quad C = B - A \to -A$, og ligning (iii) gir

$-\rho_I\omega^2 C = [\rho_{II}\omega^2 + g(\rho_I - \rho_{II})k]C$

$$\omega^2 = \frac{\rho_{II} - \rho_I}{\rho_{II} + \rho_I} \cdot gk$$

Løsning Oppgave 4



Stavens tyngde W

Oppdriftskraft F_B

Tverrsnittsareal $A = \pi D^2/4$.

Momentbalanse om B:

a) $\quad W \cdot 2{,}5\cos\theta = F_B \cdot 2\cos\theta, \quad W = 0{,}8F_B$.

Da $W = \gamma_{tre} \cdot 5A$, $\quad F_B = \gamma_{vann} \cdot 4A$, får

$\gamma_{tre} \cdot 5A = 0{,}8 \cdot \gamma_{vann} \cdot 4A, \quad \gamma_{tre} = 0{,}64\,\gamma_{vann}$.

$\gamma_{tre} = 0{,}64 \cdot 9790 = 6266 \ \frac{Pa}{m}, \quad \rho_{tre} = \frac{6266}{9{,}81} = 639 \ \frac{kg}{m^3}$

b) Spenning i tråden $S = F_B - W$.

Da $F_B = \gamma_{vann} \cdot 4A = 9790 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}10^2 = 307{,}6$ N

og $W = 0{,}8F_B = 246{,}0$ N, får

$S = 307{,}6 - 246{,}0 = 61{,}6$ N

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F1
(Linje Fysikk og matematikk)
5. august 2002
Tid: 0900 – 1400
Vekttall: 2,5

Sensuren faller i uke 34.

Hjelpemidler: C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1.

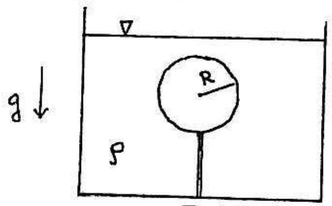


Fig.1

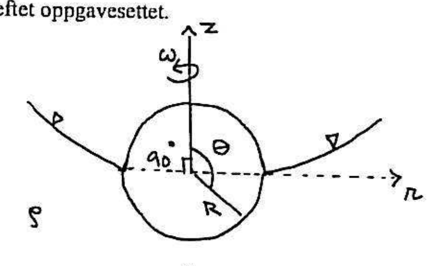


Fig.2

En kompakt kule med masse m og radius R er festet til en stang og holdt på plass i et kar fylt med væske med konstant tetthet ρ (Fig.1). Tyngdens akselerasjon er g.

a) Kula er helt neddykket i væsken. Finn stangkraften når du ser bort fra stangas masse og diameter.

b) Karet med innhold dreies så om sin symmetriakse (z-aksen) med konstant vinkelhastighet ω. Anta at når likevekt i væsken er inntrådt, er øvre halvpart av kuleoverflaten fri mot atmosfæren. Se bort fra atmosfæretrykket. Legg origo i kulas sentrum, som vist på Fig. 2, og vis at trykket i væsken blir

$$p = -\gamma z - \frac{1}{2}\rho\left(R^2 - r^2\right)\omega^2, \quad \gamma = \rho g.$$

c) Finn hvor stor stangkraften blir nå. [Hint: Innfør polarvinkelen θ vist i Fig. 2, sett $z = R\cos\theta$, $r = R\sin\theta$, og integrér trykkraftens vertikalkomponent over nedre halvpart av kuleoverflaten.] Vil det ha noe å si for stangkraften om vi tar hensyn til atmosfæretrykket?

Oppgave 2.

a) Vis at for en todimensjonal stasjonær potensialstrømning vil differansen i strømfunksjonen ψ mellom to strømlinjer være lik volumstrømningen Q mellom strømlinjene.

Hva er den fysiske interpretasjon av ligningen $\nabla^2\psi = 0$ for potensialstrømning?

b) Ved en todimensjonal, stasjonær og inkompressibel strømning er

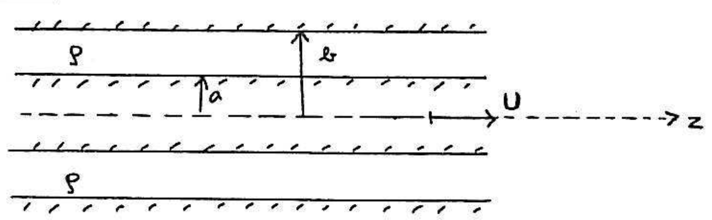
$$u(x,y) = a\left(x^2 - y^2\right),$$

hvor a er en gitt positiv konstant.

Finn den andre hastighetskomponenten v(x,y), når det er oppgitt at v(x,0) = 0.

c) Finn differensialligningen for strømlinjene, og skissér på grunnlag av denne det omtrentlige forløp til den strømlinjen som går gjennom punktet (2,2).

Oppgave 3.



Det ringformede område $a \le r \le b$ mellom en kompakt indre sylinder $r = a$ og en ytre sylinderflate $r = b$ er fylt av en inkompressibel væske med tetthet ρ og dynamisk viskositet $\mu = \rho\nu$; se figuren. Den indre sylinderen trekkes med konstant fart U langs symmetriaksen (z-aksen), mens ytre sylinderflate er i ro. Sylinderne antas uendelig lange. Se bort fra tyngdekraften.

På grunn av symmetrien kan væskens hastighetsvektor skrives på formen $\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z)$, hvor $V_z = V_z(r)$. Komponentene av Navier-Stokes ligning gir da i r-retning

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

og i z-retning

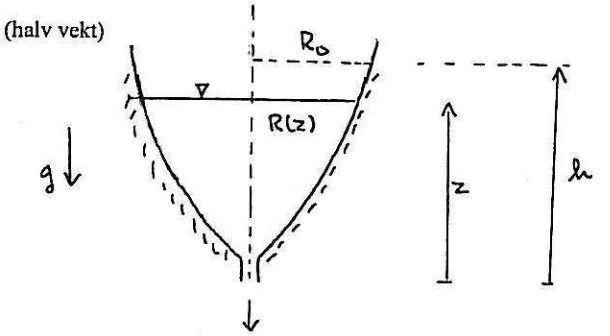
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{d^2V_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_z}{dr}\right).$$

a) Symmetrien gjør at en kan sette også $\partial p/\partial z = 0$. Utled på grunnlag av dette formelen

$$V_z(r) = U\frac{\ell n\, b/r}{\ell n\, b/a}.$$

b) Finn friksjonskraften på indre sylinder per lengdeenhet i z-retningen.

Oppgave 4 (halv vekt)



Figuren viser en gammeldags vannklokke. Tiden måles ved fall av vannstanden i et stort glasskar. Vannet renner langsomt ut gjennom et lite hull i bunnen av karet. Finn et tilnærmet uttrykk for radius R(z) av karet (sylindersymmetri antas) når vannspeilet skal falle med 5 cm pr time, og når diameteren av utløpsåpningen er 2 mm. Sett $g = 9{,}81$ m/s^2. Initialradius ved $t = 0$ er R_0.

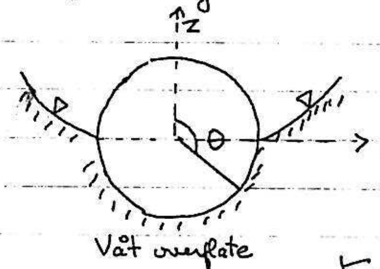
Hvilken høyde h må klokka ha dersom den skal kunne gå i 24 timer uten etterfylling? Og hvilken verdi av R_0 tilsvarer dette?

SIO1009 FLUIDMEKANIKK. Kontinuasjonseksamen 5. aug. 2002.

<u>Løsning Oppgave 1</u>

a) Kar i ro. <u>Stangkraft</u> = oppdrift − tyngde = $\underline{\gamma \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 - mg}$

b) Rotasjon.



Bevegelsesligning i det roterende system:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}.$$

Antar inkompressibel væske:

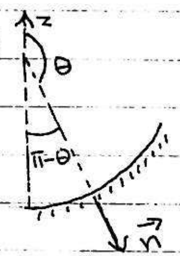
$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0 \quad , \Rightarrow$$

$$p = -\gamma z + \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + C.$$

Konstanten C bestemmes ved at $p = 0$ i punktet $r = R,\ z = 0$: $0 = \frac{1}{2}\rho R^2\omega^2 + C$, $C = -\frac{1}{2}\rho R^2\omega^2$

∴ $\underline{p = -\gamma z - \frac{1}{2}\rho(R^2 - r^2)\omega^2}$

c)



Våt overflate for $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Trykkraft på flateelement dA er $d\vec{F} = -p\vec{n}\,dA$, hvor $\vec{n}$ er normalen rettet ut fra kuleflaten.

I z-retning: $dF_z = -p n_z\,dA = -p\cos\theta \cdot dA$

(Stemmer med at $dF_z > 0$, ettersom $\cos\theta < 0$).

Trykkraft i z-retning:

$$F_z = \int dF_z = -\int_{\substack{\text{Våt}\\ \text{overflate}}} p\cos\theta \cdot dA.$$

Pga. symmetri er $dA = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$

$$F_z = -2\pi R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} p\cos\theta\sin\theta\,d\theta = 2\pi R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\gamma z + \frac{1}{2}\rho(R^2 - r^2)\omega^2\right]\cos\theta \overbrace{\ }^{\sin\theta\,d\theta}.$$

Da $z = R\cos\theta$, $r = R\sin\theta$, får

<u>Oppg. 1c, forts.</u>

$$F_z = 2\pi R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\gamma R\cos\theta + \frac{1}{2}\rho(\underbrace{R^2 - R^2\sin^2\theta}_{R^2\cos^2\theta})\omega^2\right]\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi R^3 \left[\gamma \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + \frac{1}{2}\rho R\omega^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\right].$$

Regner ut integralene:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \overset{u=\cos\theta}{=} -\int_0^{-1} u^2\,du = -\frac{1}{3}\Big|_0^{-1} u^3 = \frac{1}{3},$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta\sin\theta\,d\theta \overset{u=\cos\theta}{=\!=} -\int_0^{-1} u^3\,du = -\frac{1}{4}\Big|_0^{-1} u^4 = -\frac{1}{4}.$$

Det gir $F_z = \underbrace{\gamma \cdot \frac{2\pi}{3}R^3}_{\substack{\text{Statisk}\\ \text{bidrag}}} - \frac{1}{4}\pi\rho\omega^2 R^4$. Virker oppover.

Kraft nedover: $F_{stang} + mg$.

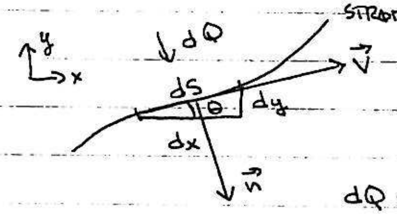
Kraftbalanse: $F_{stang} + mg = \gamma \cdot \frac{2\pi}{3}R^3 - \frac{1}{4}\pi\rho\omega^2 R^4$

$$\underline{F_{stang} = \gamma \cdot \frac{2\pi}{3}R^3 - mg - \frac{1}{4}\pi\rho\,\omega^2 R^4}$$

Atmosfæretrykket bidrar med motsatt rettede krefter på kulas overside og underside, og har ingen effekt.

Løsning Oppgave 2

a) (Følger White (1999), side 240.)



$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$$

Normalvektor $\vec{n} = \sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}$

Volumstrømning gjennom element ds:

$$dQ = (\vec{V}\cdot\vec{n})\,ds$$

$$= (u\vec{i} + v\vec{j})\cdot(\sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j})\,ds = (u\sin\theta - v\cos\theta)\,ds$$

Da $\sin\theta = dy/ds$ og $\cos\theta = dx/ds$ blir

$$dQ = u\cdot\frac{dy}{ds}ds - v\frac{dx}{ds}ds = u\,dy - v\,dx = \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = d\psi$$

Ved integrasjon:

$$\underline{Q} = \int_1^2 dQ = \int_1^2 d\psi = \underline{\psi_2 - \psi_1}$$

Da $\nabla^2\psi = -\zeta_z$ hvor $\vec{\zeta} \equiv \nabla\times\vec{V}$ er virvlingen (forutsatt plane polarkoordinater eller kartesiske koordinater), vil $\nabla^2\psi = 0$ uttrykke virvlingsfrihet.

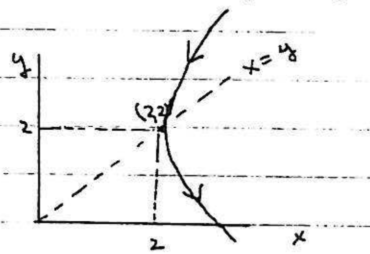
b) $u = a(x^2 - y^2)$. Inkompressibilitet $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ gir

$$v = -\int\frac{\partial u}{\partial x}dy + F(x) = -2ax\int dy + F(x) = -2axy + F(x),$$

hvor $F(x)$ er vilkårlig. Av $v(x,0) = 0$ følger $F(x) = 0$.

Altså $\underline{v(x,y) = -2axy}$

c) Strømlinjer $dy/dx = v/u$ gir ved innsetting



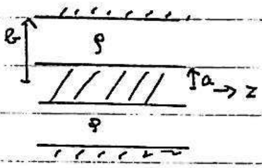
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

Når $y = x$ er strømlinjen vertikal.

$y > x$ gir $\dfrac{dy}{dx} > 0$, $y < x$ gir $\dfrac{dy}{dx} < 0$.

Pilretningen finnes f.eks. ved å se at $v = -2axy < 0$ i 1. kvadrant.

Løsning Oppgave 3



Av $\partial p/\partial r = 0$ (Navier-Stokes) og $\partial p/\partial z = 0$ (symmetri) følger p = konstant, uavhengig av r og z.

Navier-Stokes i z-retning gir, med $V_z' \equiv \dfrac{dV_z}{dr}$,

$$V_z'' + \frac{1}{r}V_z' = 0.$$

Da $(rV_z')' = V_z' + rV_z'' = r(V_z'' + \frac{1}{r}V_z')$, får $(rV_z')' = 0$

Altså $rV_z' = C_1$, $V_z' = C_1/r$. Integrasjon gir

$$V_z = C_1\ln r + C_2.$$

Grensebetingelsen gir $V_z(a) = U$, $V_z(b) = 0$, dvs.

$$\left.\begin{aligned} U &= C_1\ln a + C_2 \\ 0 &= C_1\ln b + C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = \frac{-U}{\ln\frac{b}{a}}, \quad C_2 = \frac{U\ln b}{\ln\frac{b}{a}}$$

Altså

$$\underline{V_z} = \frac{-U\ln r}{\ln b/a} + \frac{U\ln b}{\ln b/a} = \underline{\frac{U\ln b/r}{\ln b/a}}$$

b) Ved $r = a$ er $V_z' = \dfrac{C_1}{a} = \dfrac{-U}{a\ln b/a}$, $\tau = \mu V_z' = \dfrac{-\mu U}{a\ln b/a}$

Friksjonskraft per lengdeenhet dermed

$$\underline{F_f} = \tau\cdot 2\pi a = \underline{-\frac{2\pi\mu U}{\ln b/a}}$$

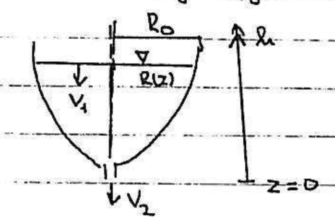
F_f er negativ, ~~fordi~~ friksjonskraften virker imot bevegelsen.

SIO1009 FLUIDMEKANIKK

(3)

5. august 2002

Løsning Oppgave 4



Bernoulli mellom vannspeilet og utløpet:

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz = \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 . \quad (1)$$

Her er utløpshastigheten V_2 ukjent.

Benytter kontinuitetsligningen:

$\pi R^2(z) \cdot V_1 = \pi R_0^2 \cdot V_2$, hvor R_0 er radius i utløpet. Altså $V_2 = \frac{R^2(z)}{R_0^2} \cdot V_1$. (2)

Innsetting av (2) i (1) gir $\underline{R(z) = R_0 \left(1 + \frac{2gz}{V_1^2}\right)^{1/4}}$

Tallverdier $V_1 = 5\ cm/hr$, $2R_0 = 2\ mm$ gir

$$R(z) = \left[1 + \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot z}{\left(\frac{0{,}05}{3600}\right)^2}\right]^{1/4} mm = \left(1 + 1{,}02 \cdot 10^{11} z\right)^{1/4} mm$$

dominerer

$$\underline{R(z)} \simeq (1{,}02 \cdot 10^{11} z)^{1/4} \cdot 10^{-3}\ m = \underline{0{,}565\ z^{1/4}\ \ m}$$

Hvis klokka skal gå i 24 timer må høyden h minst være

$\underline{h} = V_1 \cdot T = 5 \frac{cm}{hr} \cdot 24\ hr = \underline{120\ cm} = \underline{1{,}20\ m}$

Det gir initialradius $\underline{R_0} = 0{,}565 \cdot 1{,}20^{1/4} = \underline{0{,}59\ m}$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

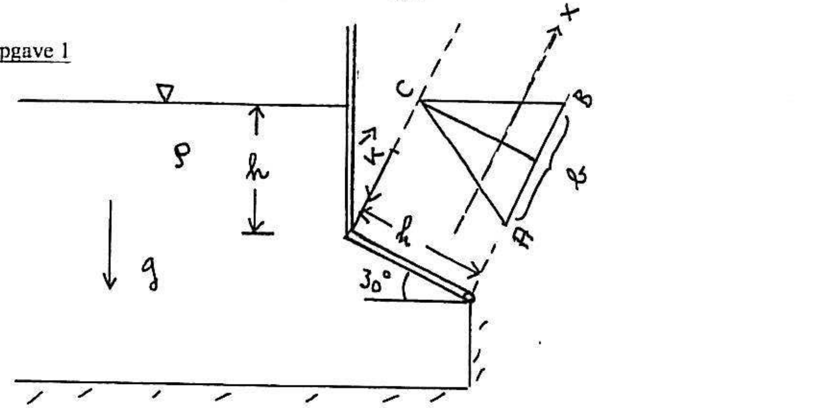
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F1 (Bokmål)
(Linje Fysikk og matematikk)
Lørdag 11. mai 2002
Tid: 0900 – 1400
Vekttall: 2,5

Sensuren faller i uke 22.

Hjelpemidler: C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



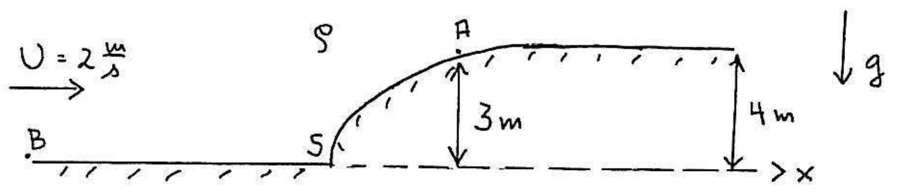
En trekantet luke ABC i en dam er hengslet gjennom grunnlinjen AB. Sidekantene AC og BC i luka er like. Det oppgis at AB = b, og at avstanden mellom toppunktet og grunnlinjen er h. Luka holdes på plass av en kraft K som står vinkelrett på luka, og som angriper i toppunktet C.

a) Hvor stor er kraften F fra vannet på luka?

b) Hvor stor må kraften K minst være for å holde luka på plass?

[Hint: Innfør ξ -aksen parallelt med lukas plan.]
Oppgitt: For en likebent trekant med grunnlinje b og høyde h ligger centroiden h/3 over grunnlinjen. Flatens treghetsmoment omkring x-aksen gjennom centroiden er $I_{xx} = bh^3/36$.

Oppgave 2



Som kjent formes Rankines halv-legeme av en uniform strømning U pluss en kilde av styrke m plassert i origo. Overflatens ligning er

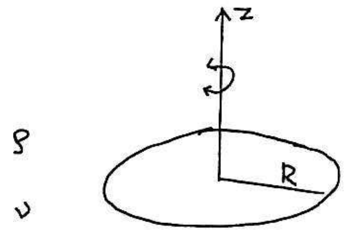
$$r = \frac{m}{U}\frac{\pi - \theta}{\sin\theta} \quad .$$

Bunnen av en elv har en forhøyning 4m når $x \to \infty$. Anta at bunnen kan approksimeres med et Rankine halv-legeme. Gitt $p_B = 120\text{kPa}$, $U = 2\text{m/s}$ (i stor avstand). Se bort fra vannets viskositet, sett $\rho = 10^3\,\text{kg}/\text{m}^3$ og $g = 10\,\text{m}/\text{s}^2$.

a) Finn avstanden a fra stagnasjonspunktet (S på figuren) til kilden. Punktet A ligger 3m høyere enn punkt B. Hvilken polarvinkel θ svarer punktet A til?

b) Finn trykket p_A i punkt A.

Oppgave 3



En plan skive med stor radius R, helt neddykket i en inkompressibel væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν, oscillerer omkring z-aksen med konstant vinkelhastighet ω. Vinkelutslaget er

$$\theta(t) = \theta_o \cos\omega t\,,$$

hvor θ_o er en gitt størrelse. Se bort fra tyngdekraften.

a) Anta at væskens hastighet er $\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, V_\theta, 0)$, hvor den asimutale komponent V_θ kan skrives på formen $V_\theta(r,z,t) = r\Omega(z,t)$. Her er $\Omega(z,t)$ væskens vinkelhastighet som funksjon av z og t. Det oppgis at Navier-Stokes' ligning gjør at Ω tilfredsstiller

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} \quad .$$

Løsningen av denne ligningen kan skrives på formen

$$\Omega = \Omega_o e^{-\beta z}\sin(\omega t - \beta z),$$

hvor $z = 0$ er skivas plan (anta $z \geq 0$). Bestem konstantene Ω_o og β uttrykt ved θ_o, ω og ν.

b) Finn hvordan skjærspenningen $\tau(0,t)$ ved skivas overflate varierer med t. Lag en skisse av $\tau(0,t)$, og angi faseforskyvningen mellom skjærspenningen og skivas hastighet.

c) Det oppgis at den instantane effekt som må tilføres skiva per overflateenhet, for å opprettholde den stasjonære oscillasjonen, er lik $-\tau(0,t)V_\theta(r,0,t)$. Finn hvilken instantan effekt P(t) dette tilsvarer for hele skiva (ta her hensyn til skivas to sider). Finn den midlere effekt $\overline{P(t)}$.

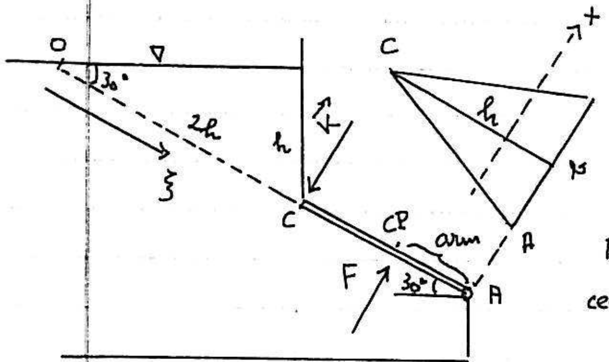
Oppgave 4 (halv vekt)

En flytevest med massetetthet 0,2 relativt til vann skal kunne holde en person av masse m = 72 kg og relativ massetetthet 0,95 flytende i vann.

Anta at 75% av personens volum befinner seg under vannet. Hvor stort må volumet V_L av flytevesten minst være? Sett $g = 10 m/s^2$, og $\rho = 10^3 kg/m^3$ for vann.

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. Eksamen 11. mai 2002

Løsning Oppgave 1



Legger ξ-aksen med origo i vannspeilet.
Avstand til centroiden: ξ_{CG}.
Avstand til trykksenteret: ξ_{CP}.
Avstand fra grunnlinjen AB til centroiden er $h/3$ (oppgitt).

a) $\xi_{CG} = (2h + h) - h/3 = 8h/3$.

Dybde av centroiden: $h_{CG} = \xi_{CG} \cdot \sin 30^\circ = 4h/3$.

Arealet av luka: $A = bh/2$.

Kraft på luka fra vannet: $\underline{F} = \gamma h_{CG} \cdot A = \gamma \cdot \frac{4h}{3} \cdot \frac{1}{2} bh = \underline{\frac{2}{3} \gamma b h^2}$

b) Momentbalanse omkring grunnlinjen AB: $K \cdot h = F \cdot \text{arm}$, hvor armen fra grunnlinjen til trykksenteret CP må finnes.

Av
$$\xi_{CP} - \xi_{CG} = \frac{I_{xx}}{\xi_{CG} \cdot A} \quad \text{finnes}$$

$$\xi_{CP} - \xi_{CG} = \frac{\frac{1}{36} b h^3}{\frac{8h}{3} \cdot \frac{1}{2} bh} = \frac{h}{48}, \quad \xi_{CP} = \frac{8h}{3} + \frac{h}{48} = \frac{43}{16} h.$$

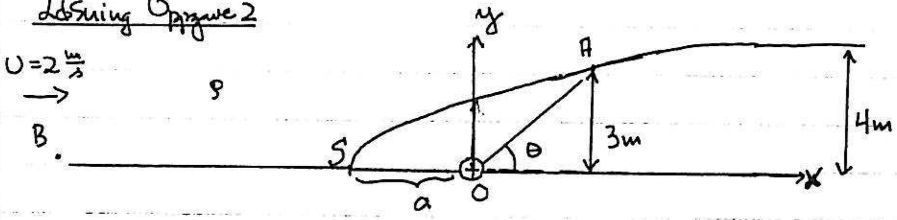
Det gir
$$\text{arm} = 3h - \xi_{CP} = 3h - \frac{43}{16} h = \frac{5}{16} h.$$

Momentbalansen dermed $K \cdot h = \left(\frac{2}{3} \gamma b h^2\right) \cdot \frac{5}{16} h$

$$\underline{K = \frac{5}{24} \gamma b h^2}$$

SIO 1009 Fluidmekanikk, 11. mai 2002 ②

Løsning Oppgave 2



a) Origo O legges i kilden. Av $r = \frac{m}{U}\frac{\pi-\theta}{\sin\theta}$ finnes avstanden a mellom origo og stagnasjonspunktet S:

$$\underline{a} = \frac{m}{U}\lim_{\theta\to\pi}\frac{\pi-\theta}{\sin\theta} = \underline{\frac{m}{U}}$$

Also er høyden $\underline{y} = r\sin\theta = \frac{m}{U}(\pi-\theta) = \underline{a(\pi-\theta)}$.

Oppgitt: I stor avstand, $\theta \to 0$, er $y = 4$ meter. Det gir

$4 = a\cdot\pi$, $\underline{a} = 4/\pi = \underline{1{,}27\ m}$

Punkt A: $3 = 1{,}27(\pi-\theta) = 4 - 4\theta/\pi$, $\underline{\theta = \pi/4}$

b) Strømfunksjonen $\psi = Ur\sin\theta + m\theta$ gir

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\cos\theta + \frac{m}{r} = U\left(\cos\theta + \frac{a}{r}\right)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\sin\theta, \Rightarrow V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 =$$

$$= U^2\left[\left(\cos\theta + \frac{a}{r}\right)^2 + \sin^2\theta\right] = U^2\left(1 + \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

I punkt A er $\theta = \pi/4$, $\Rightarrow r = a\frac{\pi-\theta}{\sin\theta} = \frac{4}{\pi}\frac{3\pi/4}{1/\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

(som kan ses direkte av figuren). I punkt A altså

$$V_A^2 = 4\left(1 + \frac{4}{3\pi} + \frac{8}{9\pi^2}\right) = 6{,}06\ m^2/s^2.$$

Bernoulli: $p_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \gamma z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \gamma \overset{=0}{z_B}$, gir

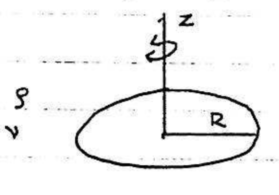
$$p_A = p_B + \tfrac{1}{2}\rho(V_B^2 - V_A^2) - \gamma z_A = 120\cdot10^3 + \tfrac{1}{2}\cdot10^3(4 - 6{,}06) - 10^4\cdot 3$$

$$= 10^3(120 - 1{,}03 - 30)\ Pa = 89\cdot10^3\ Pa$$

$$\underline{p_A = 89\ kPa}$$

SIO 1009 Fluidmekanikk, 11. mai 2002 ③

Løsning Oppgave 3



$\theta(t) = \theta_0\cos\omega t$

a) Platens hastighet $r\dot\theta = -r\theta_0\omega\sin\omega t$ er lik væskens hastighet $r\Omega(0,t) = r\Omega_0\sin\omega t$ når $z = 0$, dvs.

$$\underline{\Omega_0 = -\omega\theta_0}$$

Vilkårlig $z \ge 0$:

$\Omega = -\omega\theta_0 e^{-\beta z}\sin(\omega t - \beta z)$, $\partial\Omega/\partial t = -\omega^2\theta_0 e^{-\beta z}\cos(\omega t - \beta z)$

$\partial\Omega/\partial z = \omega\theta_0\beta e^{-\beta z}[\sin(\omega t - \beta z) + \cos(\omega t - \beta z)]$

$\partial^2\Omega/\partial z^2 = -2\omega\theta_0\beta^2 e^{-\beta z}\cos(\omega t - \beta z)$.

Innsetting gir $-\omega^2\theta_0 e^{-\beta z}\cos(\omega t - kz) = -2\nu\omega\theta_0\beta^2 e^{-\beta z}\cos(\omega t - kz)$

$$\underline{\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}$$

b) Skjærspenning ved skivas overflate: $\tau(0,t) = \mu\left.\frac{dV_\theta}{dz}\right|_{z=0}$

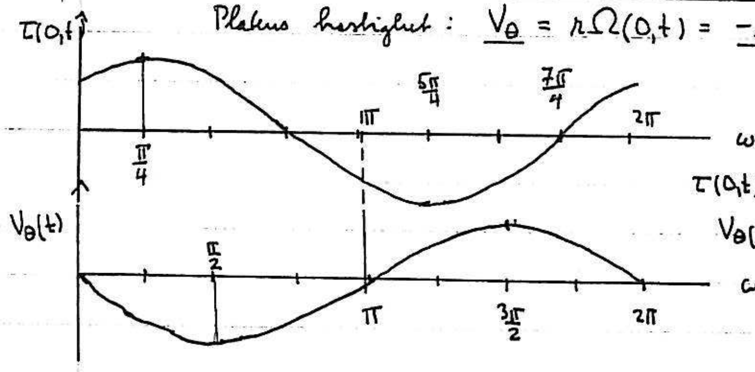
Det gir

$$\tau(0,t) = \mu\omega\theta_0\beta r\underbrace{(\sin\omega t + \cos\omega t)}_{\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\mu\omega\theta_0\beta r\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Setter inn for β:

$$\underline{\tau(0,t) = \rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega\theta_0 r\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Platens hastighet: $\underline{V_\theta} = r\Omega(0,t) = \underline{-r\omega\theta_0\sin\omega t}$



$\tau(0,t)$ ligger $\frac{3\pi}{4}$ foran $V_\theta(t)$ i fase.

SIO1009 Fluidmekanikk, 11. mai 2002 ④

Løsning Oppgave 3 c)

Instantan effekt per overflateenhet er

$-\tau(0,t)\cdot V_\theta(r,0,t) = \rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega\,\theta_0\, r\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})\cdot r\omega\theta_0\sin\omega t$

$= \rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega^2\theta_0^2\, r^2\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})\sin\omega t.$

Instantan effekt $P(t)$ for hele skiva finnes ved å integrere over arealet (overside/underside):

$$P(t) = \rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega^2\theta_0^2\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})\sin\omega t\cdot\int_0^R r^2\cdot 2\pi r\,dr\cdot \overset{\text{2 sider}}{2}$$

Da $\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4}R^4$ får

$$\underline{P(t) = \pi\rho\sqrt{\nu\omega}\,\omega^2\theta_0^2R^4\cdot\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})\sin\omega t}$$

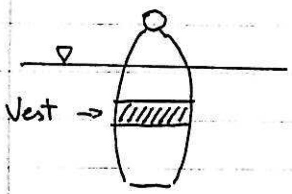
Tidsmiddel: Da $\overline{\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})\sin\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(\sin\omega t+\cos\omega t)\sin\omega t}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\sin^2\omega t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ får

$$\underline{\overline{P(t)} = \frac{1}{2}\pi\rho\sqrt{\frac{\nu\omega}{2}}\,\omega^2\theta_0^2R^4}$$

SIO1009 Fluidmekanikk, 11. mai 2002 ⑤

Løsning Oppgave 4



V_P: personens volum

V_L: flytevestens volum.

Flytevesten mest effektiv når den er helt neddykket.

Personens tyngde: $mg = 72\cdot 10 = 720$ N

Personens volum: $V_P = \frac{m}{\rho_P} = \frac{72}{0{,}95\cdot 10^3} = 0{,}0758\ m^3$

Flytevestens tyngde: $\gamma_L\cdot V_L = 0{,}2\cdot 10^4\cdot V_L = 2000\ V_L$

Oppdriftskraft: $\gamma_{H_2O}\cdot\underbrace{(0{,}75\,V_p + V_L)}_{\text{neddykket volum}} = 10^4(0{,}75V_p + V_L)$

Kraftbalanse: $10^4(0{,}75\,V_p + V_L) = 720 + 2000\,V_L$

$0{,}0569 + V_L = 0{,}072 + 0{,}2\,V_L$

$0{,}8V_L = 0{,}0151$

$\underline{V_L} = 0{,}019\ m^3 = \underline{19\ dm^3}$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

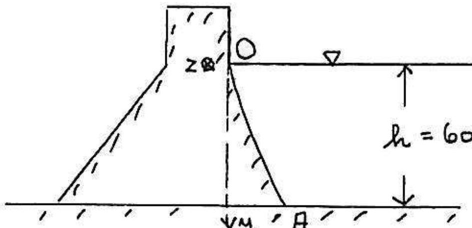
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK
FOR FAK. F (Linje Fysikk og matematikk)
6. august 2001
Tid: 0900 – 1400

Sensuren faller i uke 35.

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Figuren viser en betong-dam som skal innelukke vann i et basseng. Vannhøyden er h = 60 m. Betrakt i det følgende bare én lengdeenhet av dammen inn i planet (i z-retning). Legg koordinatsystemet som på figuren. Den delen av dammen som har betydning for oppgaven er stykket OA mellom origo O og bunnpunktet A, hvor den analytiske formen

$$x = \frac{1}{4} y^{3/4}$$

av betongens overflate er kjent. Sett $g = 10\ m/s^2$.

a) Finn den horisontale hydrostatiske kraft F_x på dammen, samt avstanden $y_p (= h_p)$ fra origo til denne kraftens angrepslinje.

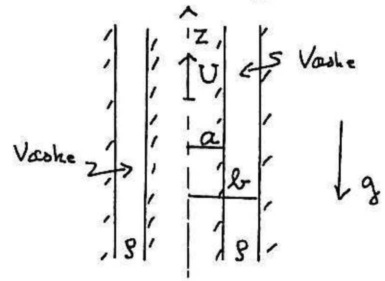
b) Finn ved integrasjon den tilsvarende vertikale kraft F_y, samt avstanden x_p til angrepslinjen.

Oppgitt: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment omkring en horisontal akse (her z-aksen) gjennom grunnlinjen lik

$$I_z = \frac{bh^3}{3}.$$

(Hvis aksen går gjennom centroiden, er $I_{zc} = \frac{bh^3}{12}$.)

Oppgave 2



Området $a \le r \le b$ mellom en kompakt indre sylinder $r = a$ og en ytre sylinderflate $r = b$ er fylt av en inkompressibel væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν. Figuren viser et vertikalsnitt gjennom z-aksen. Den indre sylinderen trekkes vertikalt oppover med konstant fart U, mens den ytre sylinderflaten er i ro. Sylinderne er uendelig lange. Tyngdens akselerasjon er g. Anta stasjonære forhold. På grunn av symmetrien kan væskens hastighetsvektor skrives slik: $\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z)$, hvor $V_z = V_z(r)$.

a) Med den gitte symmetrien vil Navier-Stokes' ligninger bli forenklet. De lyder i r- og z-retning:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \quad ,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\left(\frac{d^2 V_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_z}{dr}\right).$$

Vis ut ifra disse ligningene at størrelsen $\tilde{p}$, definert ved

$$\tilde{p} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \quad ,$$

er en konstant, uavhengig av r og z.

b) Hva blir grensebetingelsene ved r = a og r = b? Vis ved integrasjon at hastighetsprofilet $V_z(r)$ blir

$$V_z(r) = -\frac{\tilde{p}}{4\mu}\left(b^2 - r^2\right) + \left[U + \frac{\tilde{p}}{4\mu}\left(b^2 - a^2\right)\right]\frac{\ell n\, b/r}{\ell n\, b/a} \qquad (1)$$

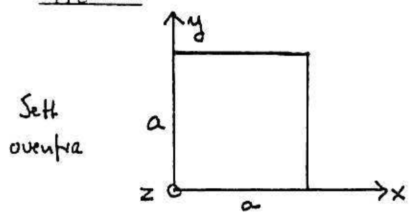
$(\mu = \rho\nu)$, idet du gjør bruk av at $rV_z'' + V_z' = \left(rV_z'\right)'$.

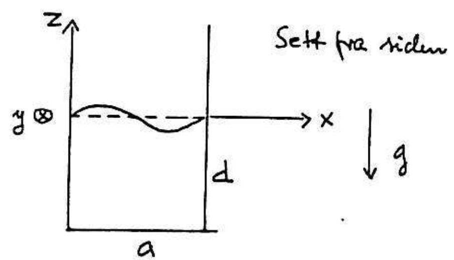
c) Anta i det følgende at mellomrommet (b-a) mellom sylinderflatene er lite i forhold til radiene: $\Delta \equiv 1 - a/b << 1$. Da vil ligning (1) tilnærmet kunne skrives

$$V_z(r) = \frac{U}{\Delta}\left(1 - \frac{r}{b}\right)$$

(dette skal ikke utledes). Finn herav volumgjennomstrømningen Q gjennom et tverrsnitt z = konstant.

Oppgave 3.





En tank med kvadratisk grunnflate (sidekant a) er fylt med vann opp til høyden d. Horisontale akser er x og y. Vertikal z-akse peker oppover, slik at planet z = 0 faller sammen med vannspeilet når vannet er i ro.

Oppgaven er i det følgende å analysere de stasjonære svingemodene til den frie overflaten. Den frie overflatebetingelse i lineær teori oppgis å være

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad , \quad z = 0.$$

a) Hastighetspotensialet oppgis å ha formen

$$\Phi = f(x, y)\cosh k(z + d)\cos\omega t\,.$$

Finn dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$.

b) Bruk inkompressibilitetsbetingelsen til å finne hvilken differensialligning funksjonen f(x,y) må oppfylle. Anta at f(x,y) er av formen

$$f(x, y) = \cos px \cos qy \quad ,$$

hvor p og q er konstanter. Bruk de kinematiske grensebetingelsene ved tankens sidevegger $(x = 0, a \text{ og } y = 0, a)$ til å vise at p og q er proporsjonale med hele tall. Kall disse tallene for m og n.

c) Finn de tillatte bølgetall k, uttrykt ved a, m og n.

d) Anta at hele tanken gis en konstant akselerasjon α oppover, i positiv z-retning. Hva vil dispersjonsrelasjonen være da?

Oppgave 4 (halv vekt)

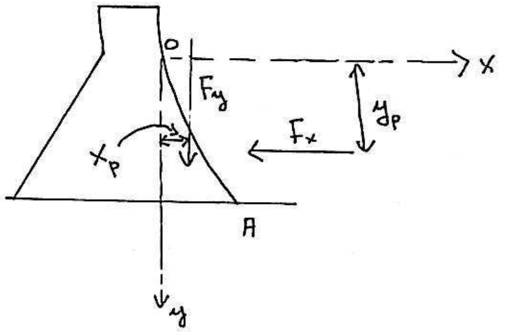
a) En kompakt sylinder står på tvers i en uniform luftstrøm. Tegn en figur som viser hvordan motstandskoeffisienten C_D varierer med Reynolds tall.

b) Hva er den fysiske betydning av motstandskrisen (drag crisis)?

c) Forklar, ved hjelp av en figur, hvordan gage-trykket varierer som funksjon av vinkelen θ på sylinderoverflaten når luftstrømmen er ideell, laminær, eller turbulent.

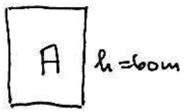
SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. Kontinuasjonseksamen ①

Løsning Oppgave 1 6. august 2001



(a) Horisontal kraft $F_x = \gamma h_{cx} A_x$ ifølge formelark (betrakter platens horisontale projeksjon). $\gamma = 10^4$ Pa/m.
Dybden h_{cx} til centroiden er $h_{cx} = \frac{1}{2}h = 30$ m.
Arealet av den horisontale projeksjon: $A_x = 1 \cdot h = 60$ m^2

$\therefore$ $\underline{F_x} = 10^4 \cdot 30 \cdot 60 = \underline{1{,}8 \cdot 10^7 \text{ N}}$



Avstand $y_p = \dfrac{I_z}{y_c \cdot A}$.

$b = 1$m Omkring en akse som går enten gjennom topplinje eller grunnlinje er $I_z = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3} \cdot h^3$.
Da $y_c = \frac{1}{2}h$ og $A = h$ altså

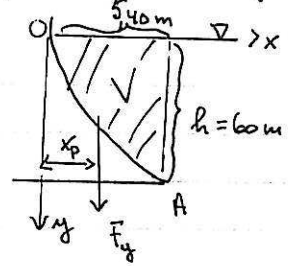
$$\underline{y_p} = \frac{\frac{1}{3}h^3}{\frac{1}{2}h \cdot h} = \frac{2h}{3} = \underline{40 \text{ m}}$$

[Alternativt kan en finne y_p som

$$\underline{y_p} = y_c + \frac{I_{zx}}{y_c \cdot A} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{1}{12}h^3}{\frac{1}{2}h \cdot h^2} = \underline{\frac{2h}{3}} \text{ .]}$$

Oppg. 1, forts. SIO 1009 Fluidmekanikk, 6. august 2001 ②

(b) Vertikal kraft $F_y = \gamma V$, hvor V er det



skraverte areal (volum).
Må integrere:
$V = \int y \, dx$
Differensierer $x = \frac{1}{4} y^{3/4}$:
$dx = \frac{3}{16} y^{-1/4} dy \quad \Rightarrow$

$$\underline{V} = \frac{3}{16}\int_0^h y^{3/4} dy = \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{7} \Big|_0^h y^{7/4} = \frac{3}{28} h^{7/4} = \underline{1386 \text{ m}^2}$$

$\therefore$ $\underline{F_y} = 10^4 \cdot 138{,}6 \text{ N} = \underline{1{,}39 \cdot 10^6 \text{ N}}$

Avstand til kraftlinjen $x_p = x_c$ = avstand til flatesenteret for V.

Momentbalanse omkring O:

$F_y \cdot x_p = \gamma \int x y \, dx.$

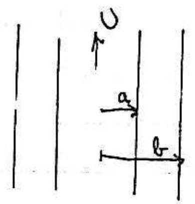
Da $F_y = \gamma V$ altså $x_p = \dfrac{\int x y \, dx}{V}$

Her er $\int xy \, dx = \int_0^h \frac{1}{4} y^{3/4} \cdot y \cdot \frac{3}{16} y^{-1/4} dy = \frac{3}{64}\int_0^h y^{3/2} dy = \frac{3}{160} h^{5/2}$

$\Rightarrow$

$$\underline{x_p} = \frac{\frac{3}{160}h^{5/2}}{\frac{3}{28}h^{7/4}} = \frac{7}{40} h^{3/4} = \underline{3{,}77 \text{ m}}$$

Løsning Oppgave 2



$$p = p(r, z), \quad V_z = V_z(r)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad ①$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\left(V_z''(r) + \frac{1}{r}V_z'(r)\right) \qquad ②$$

a) Deriverer ① mhp. z : $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0$

Deriverer ② mhp z : $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} =$ konstant, uavhengig av r og z.

Altså er også $\underline{\tilde{p} \equiv \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \text{ en konstant}}$

b) Grensebetingelser : $\underline{V_z(a) = U, \quad V_z(b) = 0}$

Av ② følger

$$\frac{\tilde{p}}{\mu} = V_z'' + \frac{1}{r}V_z' = \frac{1}{r}(rV_z')'$$

Integrerer: $rV_z' = \frac{\tilde{p}}{2\mu}r^2 + C_1, \quad V_z = \frac{\tilde{p}}{4\mu}r^2 + C_1 \ln r + C_2$

Grensebetingelsene gir:

$$U = \frac{\tilde{p}}{4\mu}a^2 + C_1 \ln a + C_2$$

$$0 = \frac{\tilde{p}}{4\mu}b^2 + C_1 \ln b + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = -\left[U + \frac{\tilde{p}}{4\mu}(b^2 - a^2)\right]\frac{1}{\ln b/a}$$

$$C_2 = \frac{U \ln b}{\ln b/a} + \frac{\tilde{p}}{4\mu}\left[\frac{\ln b}{\ln b/a}(b^2 - a^2) - b^2\right]$$

Innsetting gir

$$\underline{V_z(r) = -\frac{\tilde{p}}{4\mu}(b^2 - r^2) + \left[U + \frac{\tilde{p}}{4\mu}(b^2 - a^2)\right]\frac{\ln b/r}{\ln b/a}}$$

Løsning Oppgave 2C

Smal spalt : $V_z(r) = \frac{U}{\Delta}\left(1 - \frac{r}{b}\right), \quad \Delta = 1 - \frac{a}{b}$

$$Q = \int V_z \cdot dA = \int_a^b V_z \cdot 2\pi r \, dr$$

$$= \frac{2\pi U}{\Delta}\int_a^b \left(1 - \frac{r}{b}\right) r\, dr = \frac{2\pi U}{\Delta}\Big|_a^b \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{r^3}{3b}\right)$$

$$= \frac{\pi U}{\Delta}\left[b^2 - a^2 - \frac{2}{3b}(b^3 - a^3)\right]$$

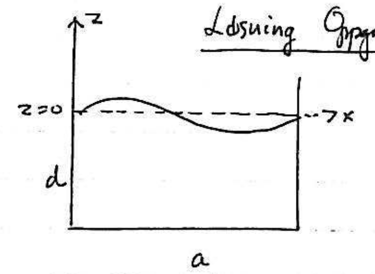
$$= \frac{\pi U}{\Delta}(b-a)\left[b + a - \frac{2}{3b}(b^2 + ab + a^2)\right]$$

$$= \frac{\pi U}{3}\left[3b(b+a) - 2(b^2 + ab + a^2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi U(b^2 + ab - 2a^2) \quad \text{, eller}$$

$$\underline{Q = \frac{1}{3}\pi U(2a + b)(b - a)}$$

Løsning Oppgave 3



Oppgitt

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \qquad z = 0. \qquad (1)$$

a) $\Phi = f(x,y)\cosh k(z+d)\cos\omega t$ innsatt i (1) gir, ettersom

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Phi \quad \text{og} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = k f(x,y)\sinh k(z+d)\cos\omega t, \quad \text{at}$$

$$-\omega^2 f(x,y)\cosh kd\cos\omega t + gk f(x,y)\sinh kd\cos\omega t = 0, \quad \text{altså}$$

(2) $\underline{\omega^2 = gk\tanh kd}$. Samme dispersjonsrelasjon som for propagerende bølger.

b) Inkompressibilitetsbetingelsen $\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow$

$$\underline{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + k^2 f(x,y) = 0} \qquad (3)$$

Innsetting av $f = \cos px\cos qy$ gir

$$\Phi = \cos px\cos qy\cosh k(z+d)\cos\omega t.$$

Kinematiske grensebetingelser ved sideflatene:

Må ha $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ ved $x = 0, a$

og $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ ved $y = 0, a$.

Da $u = -p\sin px\cos qy\cosh k(z+d)\cos\omega t$

og $v = -q\cos px\sin qy\cosh k(z+d)\cos\omega t$,

altså $\sin pa = 0$, $\sin qa = 0$, som gir

$$\underline{p = m\pi/a, \qquad q = n\pi/a},$$

m og n hele tall.

c) Av (3) følger $k^2 = p^2 + q^2$. Innsetting for p og q gir

$$k^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(m^2+n^2), \qquad \underline{k = \frac{\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}}$$

d) Hvis hele tanken akselereres oppover med konstant akselerasjon α, vil den effektive tyngdeakselerasjonen være $(g+\alpha)$.

Dispersjonsrelasjon altså

$$\underline{\omega^2 = (g+\alpha)k\tanh kd}$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

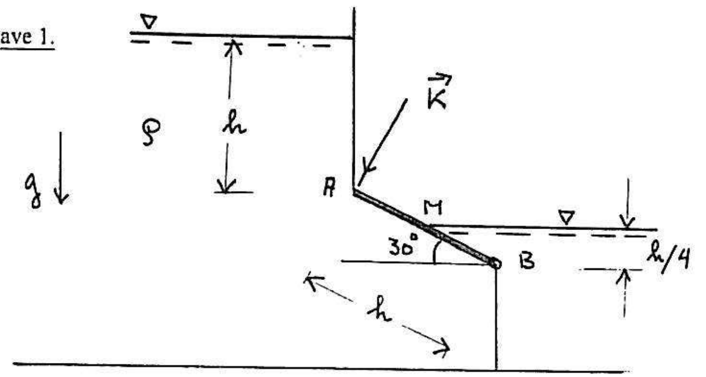
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F (Bokmål)
(Linje Fysikk og matematikk)
Mandag 4. desember 2000
Tid: 0900 – 1400

Sensuren faller i uke 52.

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1.

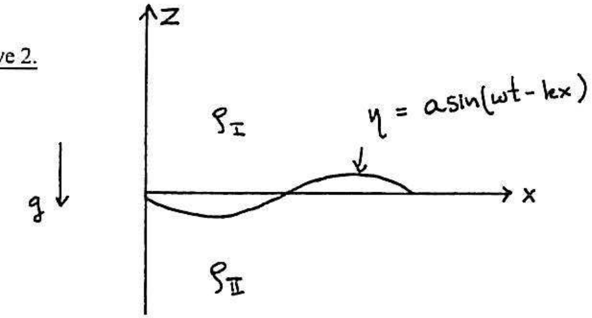


I en dam er det en kvadratisk luke AB med sidekant h. Luka kan svinge fritt om en aksling gjennom B. På utsiden er det også vann, som står opp til midtpunktet M på luka. En ytre kraft $\vec{K}$, som står vinkelrett på luka, holder luka på plass. Hvor stor må K være?

[Oppgitt, for dem som ønsker å benytte formel fra vedlagte formelark: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment om en akse parallell med x-aksen gjennom centroiden lik

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12}\,.]$$

Oppgave 2.



To ikke-blandbare ideelle væsker I og II er overlagret hverandre:

Øvre væske I med konstant tetthet ρ_I fyller hele området fra grenseflaten $\eta = a\sin(\omega t - kx)$ opp til $z = +\infty$, mens nedre væske II med konstant tetthet ρ_{II} fyller hele området fra grenseflaten ned til $z = -\infty$.

a) Skriv ned den kinematiske, og den dynamiske, betingelse ved grenseflaten. Lineariser ligningene, idet du setter Bernoulli-konstantene i områdene I og II lik null. Det oppgis at hastighetspotensialene kan skrives slik:

$$\Phi_I = A\,e^{-kz}\cos(\omega t - kx), \qquad \text{område I}$$

$$\Phi_{II} = B\,e^{kz}\cos(\omega t - kx), \qquad \text{område II.}$$

Finn konstantene A og B uttrykt ved ω, a og k.

b) Finn dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$. Sjekk resultatet i grensetilfellet $\rho_I \to 0$.

c) Finn de dynamiske trykkene p_{dI} og p_{dII} i områdene I og II. Finn, ved integrasjon over alle z, middelverdien $\overline{P(t)}$ av den totale energifluksen

$$P(t) = P_I(t) + P_{II}(t),$$

og sjekk igjen grensetilfellet $\rho_I \to 0$.

Oppgitt: I området II er

$$P_{II}(t) = \int_{-\infty}^{\eta} \left(p_{dII} + \frac{1}{2}\rho_{II} V^2 \right) u\,dz \;,$$

og tilsvarende i området I.

Oppgave 3.

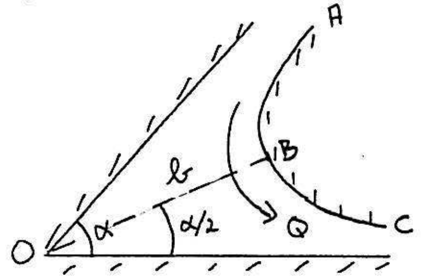
Det komplekse potensialet

$$w(z) = Uz^{\pi/\alpha}$$

er gitt, hvor U(>0) er en konstant. α er en gitt vinkel i området $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Potensialet beskriver en todimensjonal ideell strømning inne i en kile med åpningsvinkel α.

a) Sett $z = re^{i\theta}$, og finn hastighetspotensialet Φ og strømfunksjonen Ψ, samt hastighetskomponentene V_r og V_θ, alle som funksjoner av r og θ. Skissér strømlinjebildet.

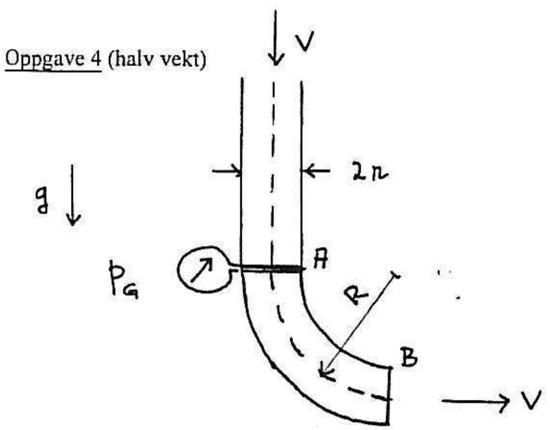
b)



Anta så at én av strømlinjene (ABC på figuren) erstattes av en fast flate. Avstanden mellom kilens toppunkt O og det nærmeste punkt B på flaten (tilsvarende $\theta = \frac{1}{2}\alpha$) er gitt, lik b. Finn volumgjennomstrømningen Q i kanalen, uttrykt ved U, b og α, ved å integrere V_r over en sirkelbue med toppunkt i O og radius lik b. Kunne du ha innsett resultatet for Q direkte, uten å regne?

c) Finn trykket p i væsken, når trykket i O er kjent, lik p_0. Væskens tetthet er ρ. Er svaret realistisk for store verdier av r?

Oppgave 4 (halv vekt)

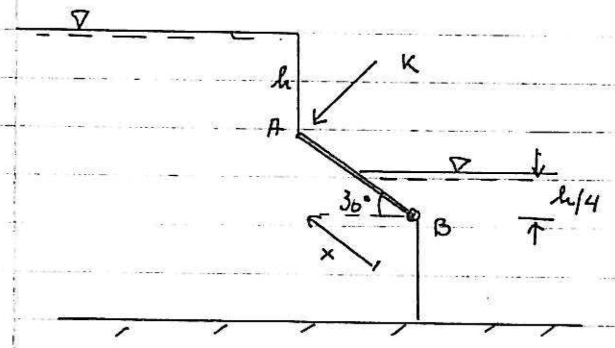


Vann med tetthet ρ strømmer stasjonært gjennom et sirkulært rør med konstant radius $r = 12\,\text{cm}$. Middelhastigheten er V = 8,0 m/s. Til røret er sveiset fast et kvartsirkel-formet bend AB i posisjon A, med samme radius r. Midtlinjens radius er R = 80 cm. Se bort fra bendets tyngde. Ved A måles gage-trykket $p_G = 6$ kPa. Sett $g = 10$ m/s^2.

Finn den kraft $\bar{F}_{sveis}$ som sveisen må overføre for å holde bendet når vannet strømmer igjennom.

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK 4. desember 2000 ①

Løsning Oppgave 1



På innsiden er trykket $p = \gamma\left(h + \frac{h-x}{2}\right) = \frac{1}{2}\gamma(3h - x)$, når x-aksen er valgt som på figuren.

Kraftmomentet M_{indre} omkring B fra vannet på innsiden altså

$$\underline{M_{indre}} = h\int_0^h p\,x\,dx = \frac{1}{2}\gamma h\int_0^h (3hx - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma h\Big|_0^h\left(\frac{3}{2}hx^2 - \frac{1}{3}x^3\right) = \underline{\frac{7}{12}\gamma h^4}.$$

På utsiden er $p = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{h}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\gamma(h - 2x)$.

Kraftmoment M_{ytre} fra utsiden:

$$\underline{M_{ytre}} = h\int_0^{h/2} p\,x\,dx = \frac{1}{4}\gamma h\int_0^{h/2}(hx - 2x^2)\,dx = \frac{1}{4}\gamma h\Big|_0^{h/2}\left(\frac{1}{2}hx^2 - \frac{2}{3}x^3\right) = \underline{\frac{1}{96}\gamma h^4}$$

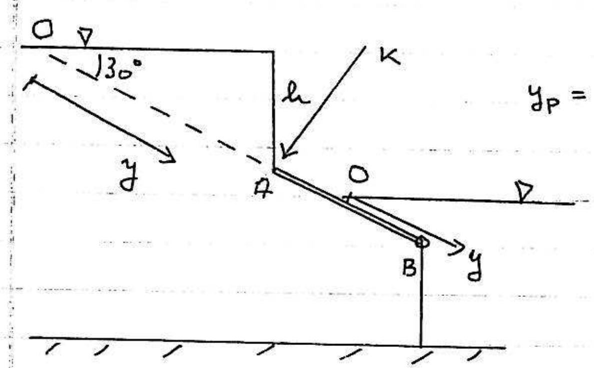
Momentbalanse omkring B gir

$$K\cdot h = M_{indre} - M_{ytre} = \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{96}\right)\gamma h^4 = \frac{55}{96}\gamma h^4$$

$$\underline{K = \frac{55}{96}\gamma h^3}$$

4. desember 2000 ②

Oppgave 1, alternativ løsningsmetode



Benytter

$$y_P = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c\cdot A}, \text{ hvor } I_{xc} = \frac{1}{12}bh^3 \text{ generelt.}$$

På innsiden legges origo O som vist, i vannspeilet, med y-aksen parallelt med luken. Da er $y_c = 2h + \frac{1}{2}h = \frac{5}{2}h$, og $A = h^2$.

Altså $y_P = \frac{5}{2}h + \frac{\frac{1}{12}h^4}{\frac{5}{2}h\cdot h^2} = \frac{38}{15}h$.

Avstand fra B til trykksenteret: $3h - y_P = \frac{7}{15}h$.

Kraft på innsiden: $F_{indre} = \gamma h_c A = \frac{5}{4}\gamma h^3$

Altså $\underline{M_{indre}} = \left(\frac{5}{4}\gamma h^3\right)\cdot\frac{7}{15}h = \underline{\frac{7}{12}\gamma h^4}$, som før.

På utsiden legges origo O i ytre vannspeil, som vist.

Da er $y_c = \frac{1}{4}h$, $I_{xc} = \frac{1}{12}h\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{h^4}{96}$.

$A = \frac{1}{2}h^2$, $h_c = \frac{1}{8}h \Rightarrow F_{ytre} = \gamma h_c A = \gamma\cdot\frac{1}{8}h\cdot\frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{16}\gamma h^3$.

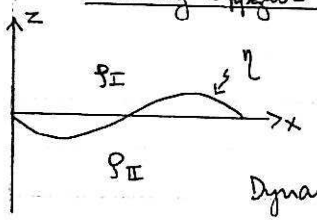
$y_P = \frac{1}{4}h + \frac{\frac{1}{96}h^4}{\frac{1}{4}h\cdot\frac{1}{2}h^2} = \frac{1}{3}h$.

Avstand fra B til trykksenteret på utsiden: $\frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}h$

$\Rightarrow \underline{M_{ytre}} = \left(\frac{1}{16}\gamma h^3\right)\cdot\frac{1}{6}h = \underline{\frac{1}{96}\gamma h^4}$, som før.

Da M_{indre} og M_{ytre} er som før, blir også K den samme.

Løsning Oppgave 2



(a) Kinematisk betingelse:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} = w\,,\quad \text{for } z=\eta$$

Dynamisk betingelse: $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + g\eta = C,\quad z=\eta$$

Setter $C=0$, og lineariserer:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\,,\quad z=0 \qquad ①$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}\,,\quad z=0 \qquad ②$$

Tilsvarende for Bernoulli:

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial t} + \frac{p_I}{\rho_I} + g\eta = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} + \frac{p_{II}}{\rho_{II}} + g\eta = 0$$

Da $p_I = p_{II}$ ved grenseflaten, kan trykket elimineres:

$$\rho_I \frac{\partial \Phi_I}{\partial t} + \rho_I g\eta = \rho_{II}\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} + \rho_{II} g\eta \qquad ③$$

Av ① og ②, når en setter inn $\eta = a\sin(\omega t - kx)$ og de gitte uttrykkene for Φ_I og Φ_{II}:

$$\left.\begin{aligned} a\omega\cos(\omega t-kx) &= -kA\cos(\omega t-kx)\\ a\omega\cos(\omega t-kx) &= kB\cos(\omega t-kx)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A = -\frac{a\omega}{k}\,,\quad B = \frac{a\omega}{k}$$

Innsetting for A og B gir

$$\Phi_I = -\frac{\omega a}{k}e^{-kz}\cos(\omega t-kx),\qquad \Phi_{II} = \frac{\omega a}{k}e^{kz}\cos(\omega t-kx).$$

Oppgave 2, forts.

b) Dispersjonsrelasjonen: Innsetting av Φ_I og Φ_{II} i ③ gir

$$\rho_I\frac{\omega^2 a}{k}\sin\theta + \rho_I g a\sin\theta = -\rho_{II}\frac{\omega^2 a}{k}\sin\theta + \rho_{II} g a\sin\theta,$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = kg\frac{\rho_{II}-\rho_I}{\rho_{II}+\rho_I} \qquad (\theta = \omega t - kx).$$

Når $\rho_I \to 0$ vil $\omega^2 = kg$, som stemmer for dypvannsbølger.

c) Dynamisk trykk $p_d = -\rho\,\partial\Phi/\partial t$ generelt.

Altså

$$p_{dI} = -\rho_I\frac{\partial \Phi_I}{\partial t} = -\frac{\rho_I\omega^2 a}{k}e^{-kz}\sin\theta$$

$$p_{dII} = -\rho_{II}\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} = \frac{\rho_{II}\omega^2 a}{k}e^{kz}\sin\theta$$

Energifluks i I: $$P_I(t) = \int_\eta^\infty \Big(p_{dI} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho_I V^2}_{\text{neglisjeres}}\Big)u_I\,dz \simeq \int_0^\infty p_{dI}\cdot u_I\,dz$$

til laveste orden.

Innsetting for p_{dI}, samt for $u_I = -\omega a e^{-kz}\sin\theta$, gir

$$P_I(t) = \frac{\rho_I\omega^3 a^2}{k}\sin^2\theta\int_0^\infty e^{-2kz}dz = \frac{\rho_I\omega^3a^2}{2k^2}\sin^2\theta$$

Middelverdi: $$\overline{P_I(t)} = \frac{\rho_I\omega^3a^2}{4k^2}$$

Tilsvarende er

$$P_{II}(t) = \int_{-\infty}^{\eta}\big(p_{dII} + \tfrac{1}{2}\rho_{II}V^2\big)u_{II}\,dz \simeq \int_{-\infty}^{0} p_{dII}\cdot u_{II}\,dz$$

Innsetting for p_{dII}, samt for $u_{II} = \omega a e^{kz}\sin\theta$, gir

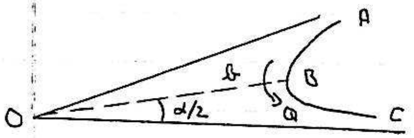
$$P_{II}(t) = \frac{\rho_{II}\omega^3a^2}{k}\sin^2\theta\int_{-\infty}^0 e^{2kz}dz = \frac{\rho_{II}\omega^3a^2}{2k^2}\sin^2\theta$$

Middelverdi: $$\overline{P_{II}(t)} = \frac{\rho_{II}\omega^3a^2}{4k^2}$$

∴ $$\overline{P(t)} = \frac{\rho_I+\rho_{II}}{4k^2}\omega^3a^2.$$

Når $\rho_I \to 0$ vil $$\overline{P}(t) = \frac{\rho_{II}}{4k^2}\omega^3a^2 = \frac{\rho_{II}\omega^2a^2}{2k}\underbrace{\left(\frac{\omega}{2k}\right)}_{\text{gruppehastighet } c_g} = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\rho_{II} g a^2\right)}_{E_{II}} c_g = E_{II}c_g,\ \text{st.}$$

Løsning Oppgave 3



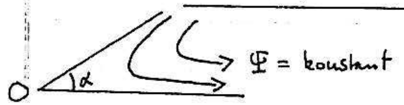
$$w(z) = U \cdot e^{\pi/\alpha}.$$

(a) $\Phi + i\Psi = U r^{\pi/\alpha} \cdot e^{i\pi\theta/\alpha} = U r^{\pi/\alpha}\left(\cos\frac{\pi\theta}{\alpha} + i\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) \Rightarrow$

$$\underline{\Phi = U r^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}, \quad \Psi = U r^{\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}}$$

Fra formelark er $V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$, $V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$

Altså $\underline{V_r = \frac{\pi U}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\cdot\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}, \quad V_\theta = -\frac{\pi U}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\cdot\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}}$



(b) Integrerer over sirkelbuen med toppkt. i O og radius lik b:

$$\underline{Q} = \int_0^{\alpha/2} V_r \cdot b\, d\theta = \frac{\pi U}{\alpha} b^{\pi/\alpha} \underbrace{\int_0^{\alpha/2} \cos\frac{\pi\theta}{\alpha}\, d\theta}_{\alpha/\pi} = \underline{U \cdot b^{\pi/\alpha}}$$

Kan innses direkte: $\Psi(r, \theta = 0) = 0$, $\Psi(r = b, \theta = \frac{\alpha}{2}) = U \cdot b^{\pi/\alpha}$

$\underline{Q}$ = differensen i Ψ = $\underline{U \cdot b^{\pi/\alpha}}$, som stemmer.

(c) For potensialstrømning er Bernoulli-konstanten den samme overalt. Altså kan vi skrive

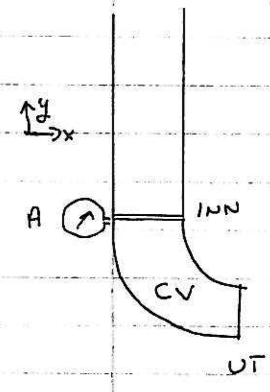
$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\rho V_0^2 + p_0}_{\text{Origo}} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho V^2 + p}_{\text{Vilkårlig punkt}}$$

Da $V_0 = 0$ i origo, og $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = \left(\frac{\pi U}{\alpha}\right)^2 r^{2\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)}$, fås

$$\underline{p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho V^2 = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{\pi U}{\alpha}\right)^2 r^{2\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)}}$$

Urealistisk svar for så store r at $p < 0$.

Løsning Oppgave 4



Legger kontrollvolumet rundt selve bendet.

Summen av alle kreftene på vannet i bendet:

$$\sum\vec{F} = \dot{\vec{M}}_{UT} - \dot{\vec{M}}_{INN}, \text{ hvor}$$

$$\dot{\vec{M}}_{UT} = \int_{UT}\rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA, \quad \dot{\vec{M}}_{INN} = -\int_{INN}\rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA$$

Her er

$\dot{M}_{UT,x} = \rho V^2 \cdot A$, $A = \pi r^2 = 0{,}0452\ m^2$.

$$\underline{\dot{M}_{UT,y} = 0, \quad \dot{M}_{INN,x} = 0, \quad \dot{M}_{INN,y} = -\rho V^2 \cdot A}$$

Impulsbalansen i x-retning: $\sum F_x = F_{sveis,x}$

— " — i y-retning: $\sum F_y = -p_G \cdot A - W_G + F_{sveis,y}$, hvor

W_G er vannets tyngde:

$\underline{W_G} = \gamma \cdot A \cdot \frac{\pi R}{2} = 10^4 \cdot 0{,}0452 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}80}{2} = \underline{568\ N}$, og hvor

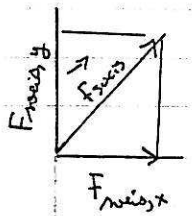
$\underline{p_G \cdot A} = 6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0452 = \underline{271\ N}$.

Altså blir $\underline{F_{sveis,x}} = \rho V^2 A = 10^3 \cdot 64 \cdot 0{,}0452 = \underline{2893\ N}$,

og

$$F_{sveis,y} = \rho V^2 A + p_G A + W_G = 2893 + 271 + 568$$

$$\underline{F_{sveis,y} = 3732\ N}$$



$\vec{F}_{sveis}$ virker altså oppover mot høyre.

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 73 59 35 55

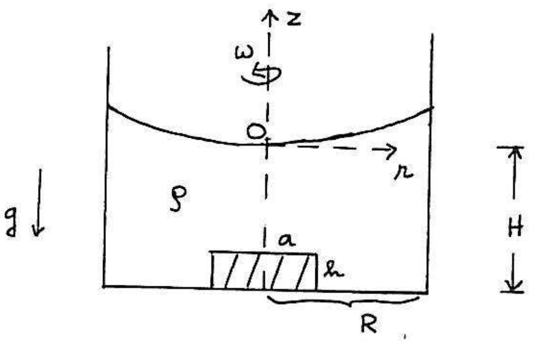
KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F (Linje Fysikk og matematikk)

11. august 2000
Tid: 0900 – 1400

Sensuren faller i uke 35.

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



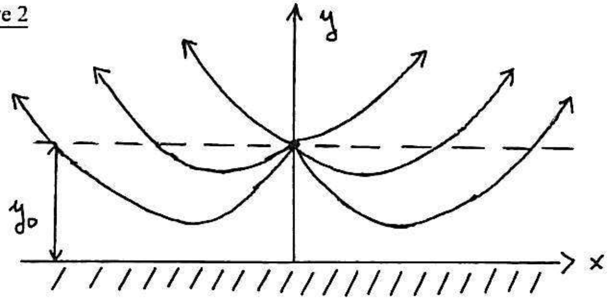
Et sylindrisk kar med grunnflateradius R roterer omkring den vertikale z-aksen med konstant vinkelhastighet ω. I karet er det en inkompressibel væske med tetthet ρ. Anta stasjonære forhold. Tyngdens akselerasjon er g. Se bort fra atmosfæretrykket. Legg origo som vist på figuren. Avstanden mellom origo og karets bunn er en gitt størrelse, lik H.

a) Finn trykket $p(r,z)$ i væsken.

b) På karets bunn er festet en kloss med sylindrisk tverrsnitt (se figuren). Klossens grunnflate har radius a; klossens høyde er h. Klossen er festet konsentrisk med karet. Finn den vertikale kraft F som væsken utøver mot klossen.

c) Finn volumet V av væsken i karet, uttrykt ved H samt de andre gitte størrelser.

Oppgave 2



Hastighetspotensialet for en linjekilde av styrke λ anbragt i avstanden y_0 fra en plan vegg er gitt ved

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\ell n\sqrt{x^2+(y-y_0)^2} + \ell n\sqrt{x^2+(y+y_0)^2}\right],$$

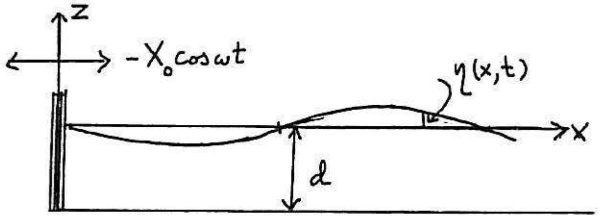
hvor x og y er kartesiske koordinater som vist på figuren. Fluidet er friksjonsfritt.

a) Finn hastighetskomponentene u og v i x- og y-retning, og vis at grensebetingelsen ved veggen er oppfylt.

b) Finn trykket $p_w = p_w(x)$ ved veggen når fluidets tetthet er ρ og trykket langt borte fra veggen er p_∞.

c) Bestem kildestyrken λ slik at minimumsverdien av $p_w(x)$ blir lik null, og angi den tilhørende verdi av x.

Oppgave 3



En monokromatisk bølge med liten amplitude ($ka << 1$) forplanter seg på grunt vann ($kd << 1$). Her er k bølgetallet, a amplituden, og d stillevannsdybden. Tyngdens akselerasjon er g, vannets tetthet er ρ. Se bort fra atmosfæretrykket. For gruntvannsbølger gjelder tilnærmet

$$u = u(x,t), \qquad w \approx 0,$$

hvor u er den horisontale og w den vertikale hastighetskomponent.

a) Skriv ned x- og z- komponentene av den lineariserte Eulerligningen, og vis herav at

$$p = \gamma(\eta - z), \qquad \partial u/\partial t = -g\,\partial\eta/\partial x\,,$$

hvor $\gamma = \rho g$ og η er overflatens elevasjon.

b) Det oppgis at for gruntvannsbølger kan kontinuitetsligningen tilnærmet skrives slik:

$$\partial\eta/\partial t + d\,\partial u/\partial x = 0.$$

Bruk ligningene ovenfor til å utlede bølgeligningen for η, og bestem fasehastigheten c.

c) Det oppgis at horisontalhastigheten for gruntvannsbølger er

$$u = \frac{\omega a}{kd}\sin(\omega t - kx).$$

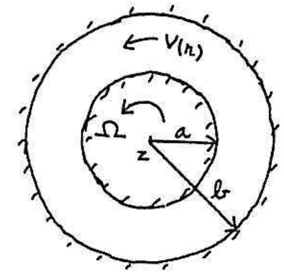
Finn herav hvordan den horisontale posisjon x til en fluidpartikkel varierer med t. (Kall middelposisjonen x_0.)

Anta at bølgene settes opp i en lang horisontal bølgerenne ved at den venstre endeveggen utfører harmoniske svingninger i x-retningen (se figuren) etter loven

$$X = -X_0 \cos\omega t\,.$$

Her er X_0 en gitt konstant. Finn den genererte bølgens amplitude a, uttrykt ved X_0, k og d.

Oppgave 4. (halv vekt)



Figuren viser geometrien i den såkalte Couette-strømningen: En viskøs væske befinner seg imellom to koaksiale sylinderflater med radier henholdsvis a og b. Indre sylinder (radius a) roterer med konstant vinkelhastighet Ω, mens ytre sylinder (radius b) er i ro. Anta uniforme forhold langs rotasjonsaksen (z-aksen), og anta at den asimutale strømningen er stasjonær. Benytt plane polarkoordinater r, θ, z. På grunn av symmetrien må vi ha

$$V_z = V_r = 0\,, \qquad V_\theta = V(r)\,.$$

Det opplyses (dette skal ikke utledes) at Navier-Stokes' ligning gir følgende ligning for V:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} = 0\,.$$

Denne ligningen har løsninger av formen r^n, hvor n er et helt tall. Hvilke verdier kan n ha? Benytt dette, samt grensebetingelsene ved r = a og r = b, til å vise at

$$V = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(r - \frac{b^2}{r}\right).$$

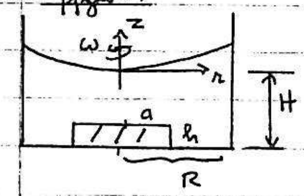
Hvor stort dreiemoment M utøver væsken på indre sylinder, per lengdeenhet i z-retning?

Oppgitt: Skjærspenning $\tau = \mu\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right)$.

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK ①

Kontinuasjonseksamen 11. august 2000

Oppgave 1



a) Eulerligning i roterende system

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}, \quad \text{med } \vec{g} = (0,0,-g),$$

gir $\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0$, altså

$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z + C, \quad \text{hvor } \gamma = \rho g.$$

Da $p = 0$ for $r = z = 0$ blir $C = 0$, så

$$\underline{p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z}$$

b) På klossens overflate er $z = -H + h$, altså

$$p = p(r) = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + \gamma(H-h).$$

Trykkraft på klossens overflate

$$F = \int_0^a p(r)\cdot 2\pi r\,dr = 2\pi\int_0^a \left[\frac{1}{2}\rho r^3\omega^2 + \gamma(H-h)r\right]dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{8}\rho a^4\omega^2 + \frac{1}{2}\gamma(H-h)a^2\right]$$

$$\underline{F = \pi\rho a^2\left[\frac{1}{4}a^2\omega^2 + g(H-h)\right]}$$

c) Ligningen for fri overflate $(p=0)$ er $z = \frac{r^2\omega^2}{2g}$.

Volum av vannet dersom også klossens volum var fylt med vann:

$$\int_0^R 2\pi r\,dr\left(H + \frac{r^2\omega^2}{2g}\right) = 2\pi\int_0^R\left(Hr + \frac{\omega^2}{2g}r^3\right)dr$$

$$= \pi R^2\left(H + \frac{\omega^2R^2}{4g}\right).$$

Trekker ifra volumet $\pi a^2 h$ av klossen:

$$\underline{V = \pi R^2\left(H + \frac{\omega^2R^2}{4g}\right) - \pi a^2 h}$$

Fluidmekanikk 11. august 2000 ②

Løsning Oppgave 2

$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\ln\sqrt{x^2+(y-y_0)^2} + \ln\sqrt{x^2+(y+y_0)^2}\right]$ er hastighetspotensialet fra to linjekilder i uendelig stort rom, den ene kilden i $(0, y_0)$, den andre i $(0, -y_0)$.

a)

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\lambda}{2\cancel{4}\pi}\left[\frac{x}{x^2+(y-y_0)^2} + \frac{x}{x^2+(y+y_0)^2}\right]$$

$$\underline{v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\lambda}{2\cancel{4}\pi}\left[\frac{y-y_0}{x^2+(y-y_0)^2} + \frac{y+y_0}{x^2+(y+y_0)^2}\right]}$$

Grensebetingelse ved veggen er $v(x,0) = 0$

Direkte utregning:

$$\underline{v(x,0)} = \frac{\lambda}{2\cancel{4}\pi}\left[\frac{-y_0}{x^2+y_0^2} + \frac{y_0}{x^2+y_0^2}\right] = 0 \text{, som stemmer.}$$

b)

Langs veggen er $u = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{x}{x^2+y_0^2}$

Bernoulli: $\frac{1}{2}u^2(x,0) + \frac{p_w}{\rho} = 0 + \frac{p_\infty}{\rho}$

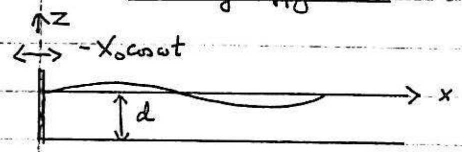
så: $\underline{p_w} = p_\infty - \frac{1}{2}\rho u^2(x,0) = \underline{p_\infty - \frac{\rho\lambda^2}{2\cancel{8}\pi^2}\frac{x^2}{(x^2+y_0^2)^2}}$

c) $p_w = p_{w\,min}$ når $|x| = y_0$. Skal ha $p_{w\,min} = 0$, altså

$$0 = p_\infty - \frac{\rho\lambda^2}{2\cancel{8}\pi^2}\frac{1}{4y_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\lambda = 2\cancel{4}\pi y_0\sqrt{\frac{2p_\infty}{\rho}}}$$

Løsning Oppgave 3



a) Linearisert Eulerligning $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$

x-retning : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}$ ①

Vilkårlig

z-retning : $0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} - g \Rightarrow p = -\gamma z + f(x,t)$ ②

f bestemmes ved at $p = 0$ i overflaten $z = \eta$:

$0 = -\gamma\eta + f \quad \therefore \quad f = \gamma\eta.$

Altså $\underline{p = \gamma(\eta - z)}$ ③

Deriverer ③:

$\dfrac{\partial p}{\partial x} = \gamma\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$, Som innsatt i ① gir

$\underline{\dfrac{\partial u}{\partial t}} = -\dfrac{1}{\rho}\cdot\gamma\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \underline{-g\dfrac{\partial \eta}{\partial x}}$ ④

b) Deriverer kontinuitetsligningen $\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + d\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ mhp t:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + d\frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{-g\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\text{fra ④}}\Big) = 0$$

Altså $\underline{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gd\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0}$. Bølgeligningen.

Fasehastighet: På formen $\eta \propto \sin(\omega t - kx)$ fås ved innsetting i bølgeligningen

$-\omega^2 + gdk^2 = 0$

$\therefore \quad \underline{c = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{gd}}$

Løsning Oppgave 3, forts.

c) Av $u = \dfrac{\omega a}{kd}\sin(\omega t - kx)$ fås tilnærmet, for små utslag,

$u = \dfrac{\omega a}{kd}\sin(\omega t - kx_0)$, hvor x_0 er middelposisjonen.

Integrerer over t:

$\underline{x} = \int u\,dt = \underline{-\dfrac{a}{kd}\cos(\omega t - kx_0) + x_0}$,

ettersom integrasjonskonstanten må være lik middelverdien.

Setter $x_0 = 0$: $x = -\dfrac{a}{kd}\cos\omega t$

Sammenligner med utsvinget $X = -X_0\cos\omega t$ av venstre endvegg.

Altså $\dfrac{a}{kd} = X_0$,

eller $\underline{a = X_0 \cdot kd}$

⑤

Fluidmekanikk 11. august 2000

Løsning Oppgave 4

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} = 0$$ har løsninger på formen

$V = c r^n$, hvor c er en konstant og n et helt tall.

Da $dV/dr = c n r^{n-1}$, $d^2V/dr^2 = c n(n-1) r^{n-2}$, fås

$c n(n-1) r^{n-2} + c n r^{n-2} - c r^{n-2} = 0$, eller $n(n-1) + n - 1 = 0$

Herav: $n^2 = 1$, som gir $\underline{n = \pm 1}$

Løsning på formen $V = \alpha r + \beta r^{-1}$, hvor α, β er konstanter.

Heftbetingelse ved $r = a$: $a\Omega = \alpha \cdot a + \beta \cdot a^{-1}$

— " — $r = b$: $0 = \alpha \cdot b + \beta \cdot b^{-1} \Rightarrow \beta = -\alpha b^2$

Herav: $a\Omega = \alpha \cdot a - \alpha b^2/a$, slik at

$$\alpha = \frac{a^2\Omega}{a^2 - b^2}, \qquad \beta = \frac{a^2 b^2 \Omega}{b^2 - a} \quad \text{:}$$

$$V = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(r - \frac{b^2}{r}\right)$$

Dreiemoment M = kraft × arm = $(\tau(a) \cdot 2\pi a) \cdot a$, hvor

$\tau(a)$ er skjærspenningen ved $r = a$.

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \rightarrow -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \text{ når } r = a.$$

$$\frac{V}{r} = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \rightarrow \Omega \text{ når } r = a.$$

Dermed $$\tau(a) = \mu\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right)_{r=a} = \mu\Omega\frac{-2b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{M = -4\pi\mu\Omega\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}}$$

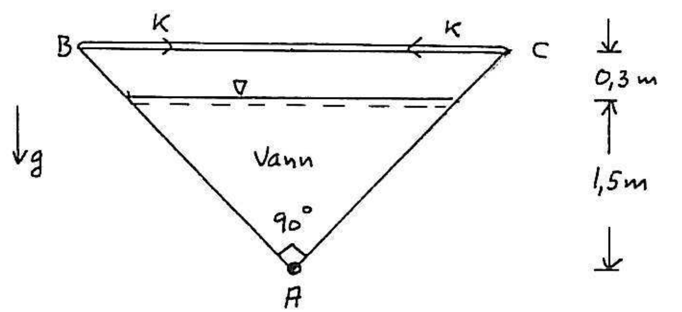
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F (Bokmål)
(Linje for Fysikk og matematikk)
Mandag 6. desember 1999
Tid: 0900 – 1400
Sensuren faller i uke 52.

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Mellom to plane lemmer AB og AC, vinkelrett på hverandre og hengslet i A, er innelukket en vannmengde opp til høyden 1,5 m. Lemmene, som betraktes som vektløse, er 3,5 m lange. Lemmene holdes på plass av en horisontal stang BC, beliggende 0,3 m over vannspeilet. Hvor stor er kraften K i stanga? Sett $g = 10$ m/s^2.

Vi så ovenfor bort fra atmosfæretrykket p_0. Vil det forandre resultatet om en tar hensyn til p_0?

Oppgitt: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment omkring en horisontal akse gjennom centroiden lik

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12}.$$

Oppgave 2.

Den effektive løftkoeffisienten $C_L(\alpha)$ for et subsonisk fly antas å variere lineært med angrepsvinkelen α etter følgende formel:

$$C_L(\alpha) = 0{,}6 + 0{,}08\alpha \;; \quad \alpha \text{ i grader.}$$

Formelen gjelder opp til $\alpha = \alpha_{max} = 15^\circ$, hvoretter steiling (stall) inntrer og løftet ødelegges. Flyets masse er m = 6300 kg; det effektive vingearealet er S = 15 m^2. Anta standardatmosfære. Sett g = 10 m/s^2.

a) Flyet beveger seg med hastighet V = 95 m/s i jevn horisontal flukt i troposfæren. Pitotrøret viser et dynamisk trykk på $\frac{1}{2}\rho(z)V^2 = 3320$ Pa, der $\rho(z)$ er luftas tetthet i flyets høyde z. Finn z.

b) Hvilken angrepsvinkel α svarer dette til?

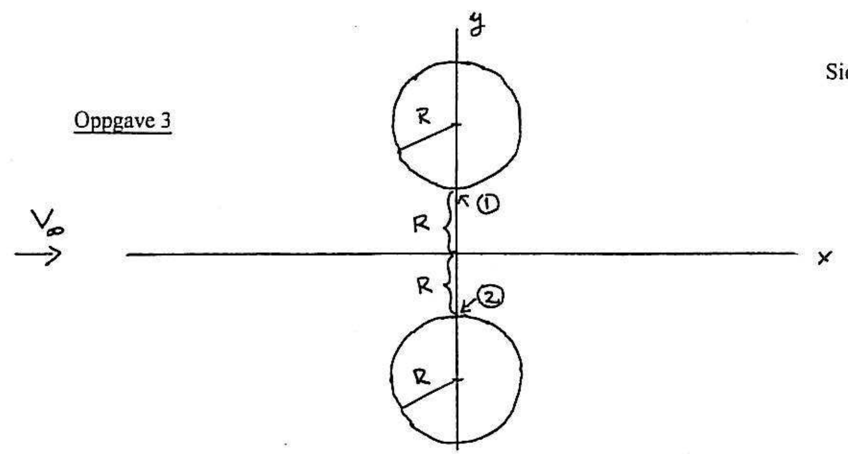
c) Anta så at angrepsvinkelen økes, opp til $\alpha = \alpha_{max}$, og holdes deretter konstant på denne verdi. Hastigheten V = 95 m/s holdes også konstant. Flyet vil stige, til det flater ut i en høyde $z = z_{max}$. Finn $\rho(z_{max})$ og z_{max}.

Oppgitt: For standardatmosfæren er

$$T(z) = T_o - 0{,}0065z \,, \; T_o = 288\,\text{K},$$

$$\frac{\rho(z)}{\rho_o} = \left(\frac{T(z)}{T_o}\right)^{4{,}26} , \quad \rho_o = 1{,}23\,\text{kg}/\text{m}^3$$

Oppgave 3



To like sylindere med radius R er plassert med sine sentra på y-aksen, i posisjonene (0, 2R) og (0, -2R). Det komplekse potensial w(z) for en potensialstrømning omkring sylinderne oppgis å være

$$w(z) = V_\infty\left(z + \frac{R^2}{z-2iR} + \frac{R^2}{z+2iR}\right), \qquad (1)$$

hvor V_∞ er hastigheten av den innkommende strømning parallell med x-aksen.

a) Sett z = x + iy; finn av ligning (1) hastighetspotensialet $\Phi(x,y)$ og strømfunksjonen $\Psi(x,y)$.

b) Du finner at

$$\Psi(x,y) = V_\infty\left[y - R^2\frac{y-2R}{x^2+(y-2R)^2} - R^2\frac{y+2R}{x^2+(y+2R)^2}\right] .$$

Finn herav volumgjennomstrømningen Q mellom sylinderne, dvs. mellom punktene 1 og 2 på figuren.

c) To linjevirvler legges inn i sylindernes sentra, slik at øvre sylinder får sirkulasjon $-\Gamma_o$ og nedre sylinder får sirkulasjon $+\Gamma_o$ $(\Gamma_o > 0)$. Det komplekse potensial blir nå

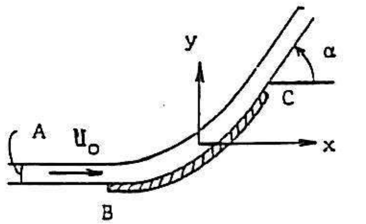
$$w(z) = V_\infty\left(z + \frac{R^2}{z-2iR} + \frac{R^2}{z+2iR}\right) + \frac{i\Gamma_o}{2\pi}\ln\frac{z-2iR}{z+2iR} .$$

Vis at stagnasjonspunktenes posisjon er gitt som løsninger av ligningen

$$1 - 2R^2 \frac{z^2 - 4R^2}{\left(z^2 + 4R^2\right)^2} - \frac{2\Gamma_o R}{\pi V_\infty} \frac{1}{z^2 + 4R^2} = 0$$

Hvor stor må Γ_o være for at to av stagnasjonspunktene skal falle sammen med punktene ① og ② på figuren?

Oppgave 4 (halv vekt)



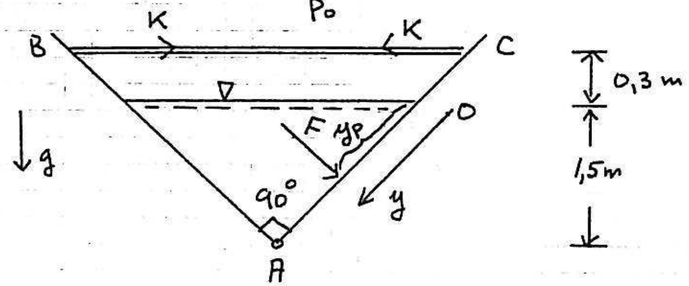
En væskestråle med tverrsnittsareal A og hastighet U_0 er opprinnelig rettet parallelt x-aksen i det viste aksekors. Væskestrålen avbøyes av en skovl. Tangentene til skovleflaten ved innløpet B og avløpet C danner vinkelen α med hverandre. Det forutsettes rette, parallelle strømlinjer både ved B og C. Væskens tetthet er ρ. Friksjon og tyngde neglisjeres.

a) Bestem kraften $\vec{F}_{skovl}$ fra væsken på skovlen når skovlen står i ro.

b) Bestem kraften $\vec{F}_{skovl}(U)$ fra væsken på skovlen når skovlen beveger seg i negativ x-retning med konstant hastighet U(>0).

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. 6. desember 1999 ①

Løsning. Oppgave 1



Legger y-aksen langs planet AC, med origo i vannspeilet O. Lengden AO er $1{,}5\sqrt{2} = 2{,}12$ m.

Dybden fra vannspeilet til centroiden for AO er

$h_c = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 = 0{,}75$ m, $\quad y_c = \frac{1}{2} \cdot 2{,}12 = 1{,}06$ m

Areal $A = 3{,}5 \cdot 2{,}12 = 7{,}42\ m^2$.

Hydrostatisk kraft

$F = \gamma h_c A = 10^4 \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}42 = 5{,}56 \cdot 10^4$ N

Angrepspunktets y-verdi y_P er gitt ved

$$y_P = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A} = 1{,}06 + \frac{\frac{1}{12} \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}12^3}{1{,}06 \cdot 7{,}42} = 1{,}06 + 0{,}35 = 1{,}41 \text{ m}$$

Avstand fra A til trykksenter:

arm $= AO - y_P = 2{,}12 - 1{,}41 = 0{,}71$ m

Momentbalanse om A gir

$K \cdot 1{,}8 = F \cdot \text{arm} = 5{,}56 \cdot 10^4 \cdot 0{,}71 = 3{,}95 \cdot 10^4$

$\underline{K = 2{,}19 \cdot 10^4 \text{ N}}$

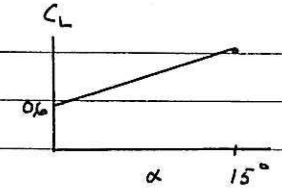
Atmosfæretrykket gir opphav til en uniform overflatekrafttetthet p_0 overalt, og vil ikke innvirke på K.

6. desember 1999 ②

Løsning. Oppgave 2

$C_L(\alpha) = 0{,}6 + 0{,}08\alpha, \quad \alpha \le 15^\circ$

$C_{L\,max} = 0{,}6 + 0{,}08 \cdot 15 = 1{,}8$



(a) $q \equiv \frac{1}{2}\rho(z)V^2 = 3320\ \mathrm{Pa}, \quad V = 95\ \mathrm{m/s}$

$\rho(z) = \dfrac{2 \cdot 3320}{95^2} = 0{,}736\ \mathrm{kg/m^3}; \quad \dfrac{\rho(z)}{\rho_0} = \dfrac{0{,}736}{1{,}23} = 0{,}598$

Av $\dfrac{\rho(z)}{\rho_0} = \left(\dfrac{T(z)}{T_0}\right)^{4{,}26}$ fås $\dfrac{T(z)}{T_0} = \left(\dfrac{\rho(z)}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{4{,}26}} = 0{,}598^{\frac{1}{4{,}26}} = 0{,}886$

$T(z) = 288 \cdot 0{,}886 = 255\,\mathrm{K}.$

Da $T(z) = 288 - 0{,}0065z$ fås $z = \dfrac{288-255}{0{,}0065} = \underline{5077\ \mathrm{m}}$

(b) Ved horisontal flukt må løftet bære flyets tyngde:

$C_L(\alpha) \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho(z)V^2}_{q} \cdot S = mg$

$C_L(\alpha) = \dfrac{63000}{3320 \cdot 15} = 1{,}27$

Av $1{,}27 = 0{,}6 + 0{,}08\alpha$ fås $\underline{\alpha} = \underline{8{,}3^\circ}$

(c) $\alpha = \alpha_{max} = 15^\circ, \quad C_L = C_{L\,max} = 1{,}8$ gir

$1{,}8 \cdot \frac{1}{2}\rho(z_{max})V^2 \cdot S = mg$

Fra før er $1{,}27 \cdot \frac{1}{2}\rho(z)V^2 \cdot S = mg$

Divisjon av ligningene gir

$\dfrac{1{,}8 \cdot \rho(z_{max})}{1{,}27 \cdot \rho(z)} = 1.$ Med $\rho(z) = 0{,}736\ \mathrm{kg/m^3}$ fås

$\underline{\rho(z_{max}) = 0{,}519\ \mathrm{kg/m^3}}.$ Av $\dfrac{T(z_{max})}{T_0} = \left(\dfrac{\rho(z_{max})}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{4{,}26}}$ fås

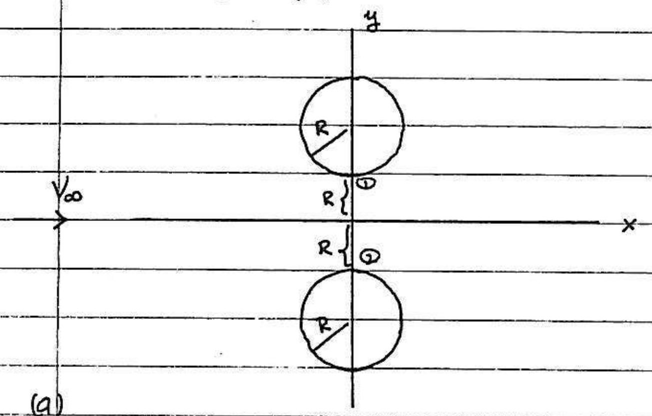
$\dfrac{T(z_{max})}{T_0} = \left(\dfrac{0{,}519}{1{,}23}\right)^{\frac{1}{4{,}26}} = 0{,}422^{\frac{1}{4{,}26}} = 0{,}817$

$T(z_{max}) = 288 \cdot 0{,}817 = 235\,\mathrm{K} = 288 - 0{,}0065 \cdot z$

$\Rightarrow \quad \underline{z = 8154\ \mathrm{m}}$

6. desember 1999 ③

Løsning. Oppgave 3



(a) $w(z) = V_\infty\left(z + \dfrac{R^2}{z-2iR} + \dfrac{R^2}{z+2iR}\right), \qquad z = x + iy$

Spalter opp

$\dfrac{1}{z-2iR} = \dfrac{1}{x+i(y-2R)} \dfrac{x-i(y-2R)}{x-i(y-2R)} = \dfrac{x-i(y-2R)}{x^2+(y-2R)^2}$

$\dfrac{1}{z+2iR} = \dfrac{1}{x+i(y+2R)} \dfrac{x-i(y+2R)}{x-i(y+2R)} = \dfrac{x-i(y+2R)}{x^2+(y+2R)^2}$

Derved spaltes $w(z)$ slik:

$w(z) = V_\infty\left(x + \dfrac{R^2x}{x^2+(y-2R)^2} + \dfrac{R^2x}{x^2+(y+2R)^2}\right) +$

$+ iV_\infty\left(y - \dfrac{R^2(y-2R)}{x^2+(y-2R)^2} - \dfrac{R^2(y+2R)}{x^2+(y+2R)^2}\right) = \Phi + i\Psi$

Altså

$\Phi = V_\infty x\left(1 + \dfrac{R^2}{x^2+(y-2R)^2} + \dfrac{R^2}{x^2+(y+2R)^2}\right),$

$\Psi = V_\infty\left(y - \dfrac{R^2(y-2R)}{x^2+(y-2R)^2} - \dfrac{R^2(y+2R)}{x^2+(y+2R)^2}\right).$

Oppgave 3, forts.

(b) En har $Q = \Psi_1 - \Psi_2$, hvor $\Psi_1 = \Psi(0,R)$, $\Psi_2 = \Psi(0,-R)$.

Når $x=0$ er $\Psi(0,y) = V_\infty\left(y - \frac{R^2}{y-2R} - \frac{R^2}{y+2R}\right)$.

Altså gir øvre punkt $y = R$ at

$\Psi_1 = V_\infty(R + R - \frac{R}{3}) = \frac{5}{3}V_\infty R$,

mens nedre punkt $y = -R$ gir

$\Psi_2 = V_\infty(-R + \frac{R}{3} - R) = -\frac{5}{3}V_\infty R$.

Da blir

$\underline{Q} = \frac{5}{3}V_\infty R + \frac{5}{3}V_\infty R = \underline{\underline{\frac{10}{3}V_\infty R}}$

(c) Stagnasjonspunktene bestemt ved $w'(z) = 0$:

$$V_\infty\left(1 - \frac{R^2}{(z-2iR)^2} - \frac{R^2}{(z+2iR)^2}\right) + \frac{i\Gamma_0}{2\pi}\left(\frac{1}{z-2iR} - \frac{1}{z+2iR}\right) = 0.$$

Omrydding gir

$$1 - R^2\frac{(z+2iR)^2}{(z^2+4R^2)^2} - R^2\frac{(z-2iR)^2}{(z^2+4R^2)^2} + \frac{i\Gamma_0}{2\pi V_\infty}\frac{4iR}{z^2+4R^2} = 0$$

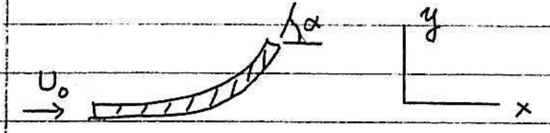
$$\underline{1 - 2R^2\frac{z^2-4R^2}{(z^2+4R^2)^2} - \frac{2\Gamma_0 R}{\pi V_\infty}\frac{1}{z^2+4R^2} = 0}$$

To stagnasjonspunkter i $z = \pm iR$, dvs. $z^2 = -R^2$, gir

$$1 + \frac{10}{9} - \frac{\Gamma_0}{\pi V_\infty R}\cdot\frac{2}{3} = 0$$

$\therefore \quad \underline{\Gamma_0 = \frac{19\pi}{6}V_\infty R}$

Løsning. Oppgave 4



(a) Lar kontrollvolumet omslutte skovlen. Kraften $\vec{F}$ på vannet i kontrollvolumet er $\vec{F} = \dot{\vec{M}}_{UT} - \dot{\vec{M}}_{INN}$, hvor

$\dot{\vec{M}}_{UT} = \int_{UT} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dA$, $\quad \dot{\vec{M}}_{INN} = -\int_{INN} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dA$.

Her er $(\dot{M}_x)_{UT} = \rho U_0^2 A\cos\alpha$, $\quad (\dot{M}_y)_{UT} = \rho U_0^2 A\sin\alpha$

$(\dot{M}_x)_{INN} = \rho U_0^2 A$, $\quad (\dot{M}_y)_{INN} = 0$.

Altså $F_x = \rho U_0^2 A(\cos\alpha - 1)$, $\quad F_y = \rho U_0^2 A\sin\alpha$

Kraften $\vec{F}_{skovl} = -\vec{F}$, altså

$\underline{(F_{skovl})_x = \rho U_0^2 A(1-\cos\alpha), \quad (F_{skovl})_y = -\rho U_0^2 A\sin\alpha}$

(b) Skovlen beveger seg til venstre med konstant hastighet U: Transformerer til det koordinatsystem hvor skovlen er i ro. Da er innkommende vannhastighet lik $(U_0 + U)$. Altså

$[F_{skovl}(U)]_x = \rho(U_0+U)^2 A(1-\cos\alpha)$,

$\underline{[F_{skovl}(U)]_y = -\rho(U_0+U)^2 A\sin\alpha}$.

NORGES TEKNISK NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG
FLUIDDYNAMIKK

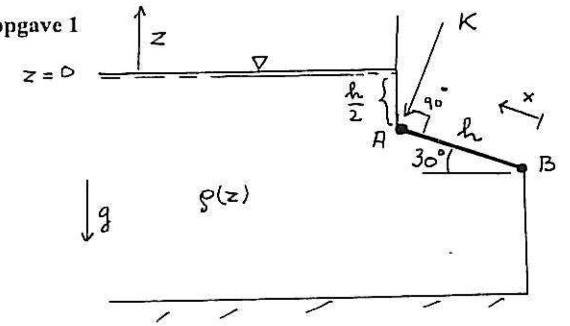
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 73 59 35 55

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIO 1009 – FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F (Linje Fysikk og matematikk)

Dato: 7. august 1999
Tid: kl. 0900 – 1400

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



I et basseng med saltvann øker saltinnholdet (saliniteten) med dybden. Anta at tettheten ρ (z) dermed øker lineært med dybden, etter formelen

$$\rho(z) = \rho_0(1-kz) \ .$$

Her er nivået z = 0 den frie overflate, ρ_0 er tettheten ved denne overflate, og k er en gitt positiv konstant. Tyngdens akselerasjon er g. Se bort fra atmosfæretrykket.

(a) Vis, for eksempel ved å starte med Eulers ligning, at det hydrostatiske trykket er

$$p(z) = -\gamma_o z\left(1-\frac{1}{2}kz\right), \ hvor \ \gamma_o = \rho_o g \ .$$

(b) Figuren viser en kvadratisk luke AB, med sidekant h, som er hengslet i nedre sidekant B. Hvor stor må kraften K minst være for at luka ikke skal åpne seg?
Hint: Ta momentbalansen omkring B, idet du innfører koordinaten x fra B opp til et vilkårlig punkt på luka. Sett inn p = p(x).

Oppgave 2

Gitt en horisontal vannstråle med bredde H_o hvor hastigheten er V_o, konstant over strålens tverrsnitt. Strålen er plan, dvs. dens utstrekning antas uendelig innover i papirplanet (i z-retningen). Atmosfæretrykket er p_o. Se bort fra tyngdekraften. Vannets viskositet neglisjeres.

(a)

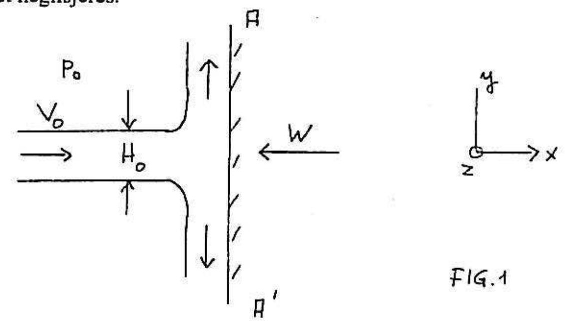


FIG. 1

Hvor stort er trykket p inne i strålen? Begrunn svaret.
Strålen treffer en vertikal plate A – A' som skyves mot venstre med konstant hastighet W (se figur 1). Hvor stor er den horisontale kraft F_{plate} vannet utøver mot platen? Regn per lengdeenhet i z-retningen.

(b)

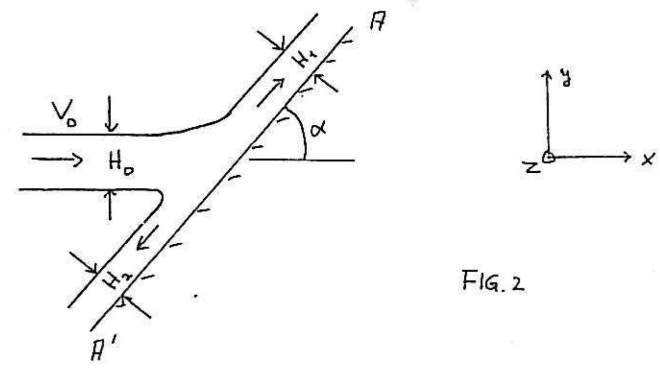
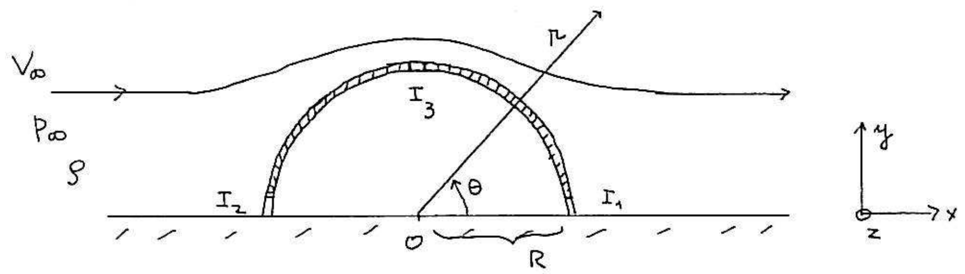


FIG. 2

Platen A – A' antas så å være i ro, men holdes i posisjon slik at den danner en vinkel α med x-aksen (figur 2). Den treffes av samme horisontale vannstråle som før. Hva er nå x- og y-komponentene av den kraft $\vec{F}_{plate}$ (per enhet i z-retningen) som vannet utøver mot platen?

(c) Når vannstrålen i figur 2 treffer platen deler den seg i to grenstrømmer, parallelt med platen. Finn grenstrømmenes høyder H_1 og H_2.

Oppgave 3



En igloo har form av en halvsylinder med radius R. Se bort fra veggtykkelsen, og se bort fra luftas tyngde og viskositet. Lufta har tettheten ρ. Det blåser en konstant vind på tvers mot iglooen, med opprinnelig hastighet V_∞. Legg origo i punktet O.

(a) Luftas hastighetskomponenter på utsiden ($r \geq R$) er

$$V_r = V_\infty\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,,\quad V_\theta = -V_\infty\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta\,.$$

Finn herav hastighetspotensialet ϕ og strømfunksjonen Ψ på utsiden.

(b) Anta at det er to små åpninger i veggen, én på baksiden ved I_1 ($\theta = 0$) og én på forsiden ved I_2 ($\theta = 180^\circ$), og at veggen ellers er tett. Finn trykket p_{in} inne i iglooen.

(c) Finn den vertikale nettokraft F_y (per lengdeenhet i z-retningen) som lufta utøver mot iglooen.

(d) Anta så at det lages et tredje hull i veggen, i posisjon I_3 ($\theta = 90^\circ$). Forklar kvalitativt hvilken luftstrømning som oppstår inne i iglooen.

Oppgave 4 (halv vekt)

Gitt det komplekse potensial

$$w(z) = Uz^{\pi/\alpha}$$

hvor $U(>0)$ er en gitt hastighet, og α en gitt vinkel i området $0<\alpha<\pi$.

(a) Sett $z = re^{i\theta}$, finn hastighetspotensialet Φ og strømfunksjonen Ψ som funksjon av r og θ, og skisser strømlinjebildet når $0<\theta<\alpha$.

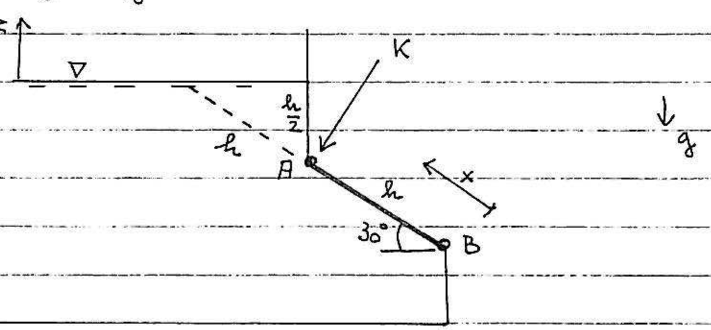
(b) Benytt formelen

$$V^2 = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{d\overline{w}}{d\overline{z}}$$

til å finne fluidets fart V. Har strømningen et stagnasjonspunkt?

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK 7. august 1999 ①

Løsning, Oppgave 1



(a) Eulers ligning $0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$ gir i z-retningen

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad \text{altså} \quad \underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{\frac{dp}{dz}} = -\rho g = -\underbrace{\rho_0 g}_{\gamma_0}(1-kz)$$

Integrerer: $p(z) = -\gamma_0 \int (1-kz)dz = -\gamma_0\left(z - \frac{1}{2}kz^2\right) + \text{konstant}$.

Da det hydrostatiske trykk er null ved overflaten, fås

$$\underline{p(z) = -\gamma_0 z\left(1 - \frac{1}{2}kz\right)}$$

(b) Uttrykker z ved x: Av figuren er $-z = [h + (h-x)]\cdot \sin 30°$

s. $\underline{z = \frac{x}{2} - h}$, $\quad \underline{p(x) = -\gamma_0\left(\frac{x}{2}-h\right)\left[1 - \frac{k}{2}\left(\frac{x}{2}-h\right)\right]}$

Tar momentbalanse omkring B:

$$\int_0^h x\cdot p(x)dx = K\cdot h$$

$$-\gamma_0\left\{\int_0^h x\left(\frac{x}{2}-h\right)dx - \frac{k}{2}\int_0^h x\left(\frac{x}{2}-h\right)^2 dx\right\} = K\cdot \cancel{h}.$$

Regner ut $\int_0^h x\left(\frac{x}{2}-h\right)dx = \Big|_0^h \frac{1}{6}x^3 - \frac{h}{2}x^2 = -\frac{1}{3}h^3$,

$$\int_0^h x\left(\frac{x}{2}-h\right)^2 dx = \int_0^h \left(\frac{1}{4}x^3 - hx^2 + h^2x\right)dx = \Big|_0^h \frac{1}{16}x^4 - \frac{h}{3}x^3 + \frac{h^2}{2}x^2 = \frac{11}{48}h^4.$$

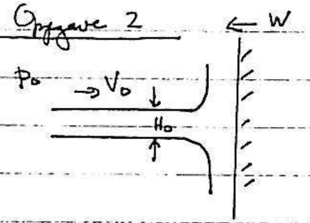
$$\Rightarrow \quad -\gamma_0\left[-\frac{1}{3}h^3 - \frac{k}{2}\cdot\frac{11}{48}h^4\right] = K\cdot\cancel{h}$$

$$\underline{K = \frac{1}{3}\gamma_0 h^2\left(1 - \frac{11}{32}kh\right)}$$

7. august 1999 ②

Løsning, Oppgave 2

a)

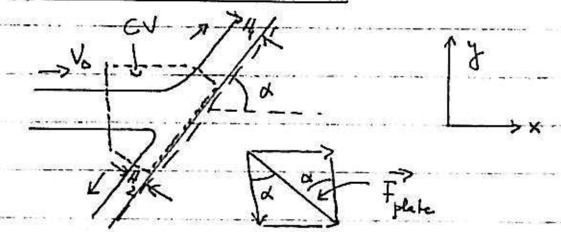


Inne i strålen er $p = p_0$. Hvis $p \neq p_0$, ville det være en transversal kraft på strålen som ville forandre dens tverrsnitt. Når platen skyves mot venstre med hastighet W, er den relative hastighet av vannet lik $(V_0 + W)$.

Da strålens tverrsnitt, per m lengde inn i planet, er H_0, blir F_{plate} lik den relative impulsfluksen inn:

$$\underline{F_{plate} = \rho(V_0+W)^2\cdot H_0}$$

b)



Når viskositeten er null, er skjærkraften null, og den eneste kraft er normalkraften mot platen.

Innfallende impulsfluks $\rho V_0^2 H_0$. Dens komponent normalt på platen er $\rho V_0^2 H_0 \cdot \sin\alpha$. Altså $F_{plate} = \rho V_0^2 H_0 \cdot \sin\alpha$.

Komponenter av $\vec{F}_{plate}$:

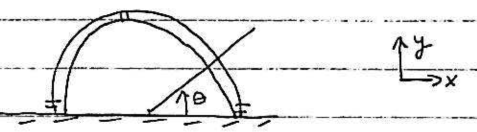
$$\underline{(F_{plate})_x = \rho V_0^2 H_0 \sin^2\alpha, \quad (F_{plate})_y = -\rho V_0^2 H_0 \sin\alpha\cos\alpha}$$

c) Bernoulli anvendt på strålen gir at hastighetene i begge grenene er lik V_0. Kontinuitet: $V_0 H_0 = V_0 H_1 + V_0 H_2 \Rightarrow H_0 = H_1 + H_2$. Ingen viskositet gir null kraft langs platen: $\dot{M}_{UT} = \dot{M}_{INN}$ langs platen. Dvs. $\rho V_0^2 H_1 - \rho V_0^2 H_2 = \rho V_0^2 H_0 \cdot \cos\alpha$, eller $H_1 - H_2 = H_0 \cos\alpha$. De to ligningene gir

$\underline{H_1 = \frac{1}{2}H_0(1+\cos\alpha), \quad H_2 = \frac{1}{2}H_0(1-\cos\alpha)}$. Stemmer for $\alpha = 0$ og $\alpha = 90°$.

7. august 1999 (3)

Løsning, Oppgave 3



a) Uttrykk:

$V_r = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta, \qquad V_\theta = -V_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$

Av $V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ eller $V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ finnes ved integrasjon

$$\underline{\Phi = V_\infty\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta}$$

Tilsvarende, av $V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ eller $V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$ finnes

$$\underline{\Psi = V_\infty\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta}$$

b) For potensialstrømning er Bernoullis konstant den samme overalt.

Altså $\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}V_\infty^2 = \frac{p(R,\theta)}{\rho} + \frac{1}{2}V_\theta^2(R,\theta)$

Innsetting av $V_\theta(R,\theta) = -2V_\infty \sin\theta$ gir $\underline{p(R,\theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)}$.

Når $\theta = 0$ eller 180° blir $\underline{p = p_{in} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$. Overtrykk.

c)

$$\underline{F_y} = \int_0^\pi \left\{ \left(p_\infty + \tfrac{1}{2}\rho V_\infty^2\right) - \left[p_\infty + \tfrac{1}{2}\rho V_\infty^2 (1 - 4\sin^2\theta)\right]\right\} \sin\theta \cdot R\,d\theta$$

$$= 2\rho V_\infty^2 R \int_0^\pi \sin^3\theta = \underline{\tfrac{8}{3}\rho V_\infty^2 R} \qquad \text{Løftekraft.}$$

d) Med ekstra hull ved $\theta = 90^\circ$:

$p_{in}(\theta = 0, \pi) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$, overtrykk i forhold til atmosfæren

$p_{in}(\theta = \frac{\pi}{2}) = p_\infty - \frac{3}{2}\rho V_\infty^2$, undertrykk — —

Lavest trykk ved taket inne i igloen. Derfor strømning inn gjennom åpningene ved $\theta = 0, \pi$ og ut gjennom åpningen i taket.

7. august 1999 (4)

Løsning, Oppgave 4

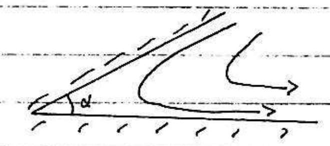
a) $w(z) = U z^{\pi/\alpha}$.

Da $w = \Phi + i\Psi$ og $z = re^{i\theta}$, fås

$$\Phi + i\Psi = U r^{\pi/\alpha} \cdot e^{i\pi\theta/\alpha} = U r^{\pi/\alpha}\left(\cos\frac{\pi\theta}{\alpha} + i \sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)$$

⇒:

$$\underline{\Phi = U r^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}}, \qquad \underline{\Psi = U r^{\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}}$$



b)

$$V^2 = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}$$

Deriverer den gitte formel: $\frac{dw}{dz} = \frac{U\pi}{\alpha}\cdot z^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$.

Tar den komplekst konjugerte: $w(\bar{z}) = U\bar{z}^{\pi/\alpha}$, som gir

$$\frac{dw(\bar{z})}{d\bar{z}} = \frac{U\pi}{\alpha}\bar{z}^{\frac{\pi}{\alpha}-1}.$$

Altså $V^2 = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \left(\frac{U\pi}{\alpha}\right)^2 (z\bar{z})^{\frac{\pi}{\alpha}-1} = \left(\frac{U\pi}{\alpha}\right)^2 r^{2\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)}$

$$\text{Fart } \underline{V = \frac{U\pi}{\alpha}\cdot r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}}$$

Da $\alpha < \pi$ er $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$, og stagnasjonspunktet $V = 0$ ligger i origo.

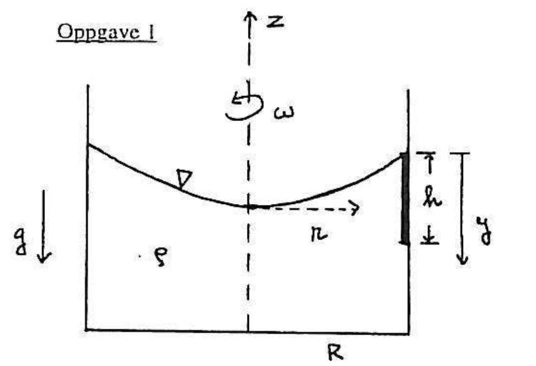
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

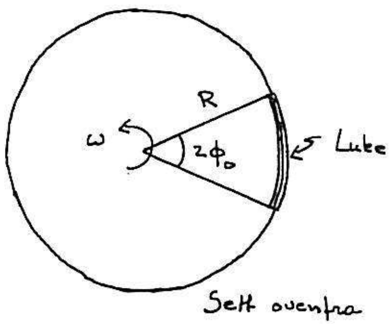
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG SIO 1009 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F
(Linje Fysikk og matematikk)
Onsdag 16. desember 1998
Tid: 0900 – 1400

Hjelpemidler: B2: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1





Et sylindrisk kar med grunnflateradius R roterer om den vertikale z-aksen med konstant vinkelhastighet ω. I karet er det en inkompressibel væske med tetthet ρ. Anta stasjonære forhold. På karets sideflate er det en luke som dekker en åpningsvinkel $2\phi_0$ (se figuren). Lukas øvre kant ligger i samme nivå som væskeoverflaten ved veggen. Tyngdens akselerasjon er g. Se bort fra atmosfæretrykket.

a) Utled formelen for trykket p(r,z) i væsken.

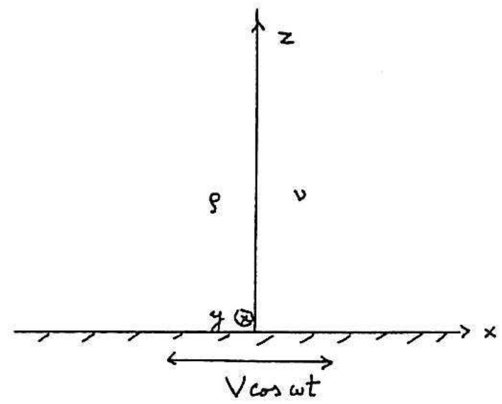
b) Finn størrelse og retning av den totale trykkraft $\vec{F}$ som vannet utøver mot luka. (Det er hensiktsmessig å skrive trykket ved veggen p(R,z) som en funksjon av avstanden y fra lukas øvre kant, se figuren.)

c) Finn avstanden y_p fra lukas øvre kant ned til kraftens angrepspunkt.

Oppgitt: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment omkring en horisontal akse x gjennom centroiden lik

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12}$$

Oppgave 2



En uendelig stor plan flate oscillerer harmonisk i x-retningen med hastighet $V\cos\omega t$ i sitt eget plan (z = 0). Området på oversiden av flaten, fra z = 0 til z = ∞, er fylt med en viskøs inkompressibel væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν. Tyngdekraften neglisjeres. På grunn av heftbetingelsen vil væsken ved veggen bli revet med i flatens bevegelse.

a) På grunn av symmetrien vil alle fysiske størrelser være uavhengig av x og y. Trykket p vil dessuten være uavhengig også av z. Hvorfor? Skriv ned Navier-Stokes' ligning for den horisontale hastigheten u(z,t). Det oppgis at løsningen av denne ligningen har formen

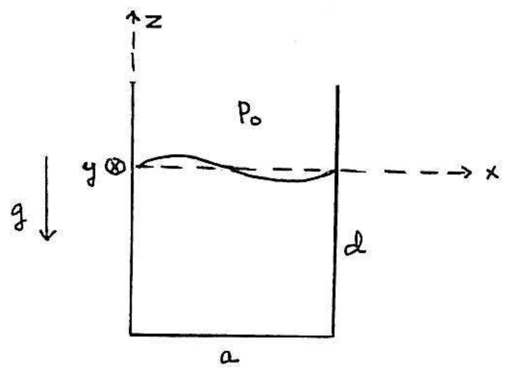
$$u(z,t) = u_0\, e^{-\beta z} \cos(\beta z - \omega t)$$

Bestem konstantene u_0 og β uttrykt ved de gitte konstanter V, ω og ν.

b) Finn hvordan skjærspenningen $\tau(0,t)$ ved overflaten varierer med t. Lag en skisse av $\tau(0,t)$, og angi faseforskyvningen mellom skjærspenningen og flatens hastighet.

c) Hvor stor er den midlere effekt $\overline{P(t)}$ som må tilføres flaten per overflateenhet for å opprettholde bevegelsen?

Oppgave 3



Figuren viser en vanntank sett fra siden. Bredden av tanken er a. Stillevannsdybden er d. Horisontale akser er x og y, vertikal akse er z, slik at nivået z = 0 faller sammen med stillevannsnivået. Anta uniforme forhold inn i papirplanet (y-retningen). Atmosfæretrykket er p_0.

Oppgaven i det følgende er å analysere de stasjonære svingemodene til den frie overflaten.

a) Sett opp den kinematiske betingelse for den frie overflaten, samt den dynamiske overflatebetingelse (Bernoullis ligning), og utled herav den frie overflatebetingelse i lineær teori:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0\,, \quad z = 0.$$

b) Hastighetspotensialet oppgis å ha formen

$$\Phi = f(x)\cosh k(z+d)\cos\omega t\,.$$

Finn ved hjelp av inkompressibilitetsbetingelsen hvilken differensialligning funksjonen f(x) må oppfylle. Finn dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$.

c) Løs differensialligningen for f(x), idet du tar hensyn til de kinematiske betingelsene ved tankens sidevegger x = 0 og x = a. Hva blir de tillatte verdier av bølgetallet k?

d) Du finner at Φ kan skrives på formen

$$\Phi = \beta\cos kx\cosh k(z+d)\cos\omega t\,,$$

hvor β er en konstant. Finn det dynamiske trykk $p_d = p_d(x,z,t)$ i vannet,uttrykt ved β og de andre konstanter.

Oppgave 4 (halv vekt)

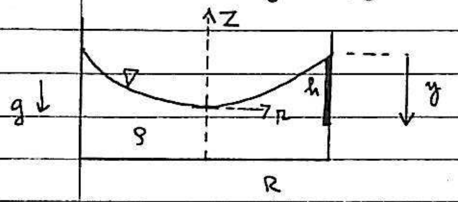
En linjekilde av styrke λ og et linjesluk av styrke $-\lambda$ er plassert på x-aksen, i posisjonene (-a,0) og (a,0) henholdsvis. Anta at $a \to 0$, $\lambda \to \infty$ slik at produktet $\mu = 2\lambda a$ = konstant. Da har vi en dipol med moment μ.

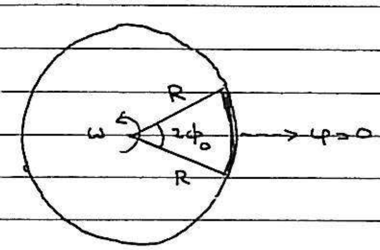
Finn det komplekse potensial w(z) i stor avstand fra dipolen, og finn herav dipolens hastighetspotensial Φ og strømfunksjon Ψ uttrykt ved μ, avstanden r fra origo, samt polarvinkelen θ.

Oppgitt: Det komplekse potensial fra en linjekilde λ i origo er $w = \dfrac{\lambda}{2\pi}\ell n\, z$.

SIO 1009 FLUIDMEKANIKK. 16. desember 1998

Løsning Oppgave 1





a) Eulerligningen i det roterende system:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}. \quad \text{Da } \vec{g} = (0,0,g_z) = (0,0,-g)$$

får $\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0$, dvs. $p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z + C$, $\gamma = \rho g$

Da $p = 0$ for $r = z = 0$, blir $C = 0$, som gir

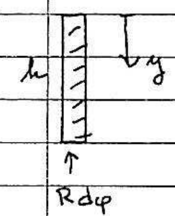
$$\underline{p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z}$$

b) Fri overflate, $p = 0$, gir $z = r^2\omega^2/2g$, altså $z = R^2\omega^2/2g$ ved veggen. Trykket ved veggen er $\underline{p(R,z)} = \frac{1}{2}\rho R^2\omega^2 - \gamma z$

$= \gamma\left(\frac{R^2\omega^2}{2g} - z\right) \equiv \underline{\gamma \cdot y}$. ~~Rent hydrostatisk trykk,~~ når

en regner avstanden fra lukas øvre kant.

På grunn av symmetrien er $\vec{F}$ rettet radielt. Angrepslinjen for $\vec{F}$ går gjennom lukas midtpunkt, $\varphi = 0$.



Deler inn luka i vertikale striper, hver stripe med høyde h og bredde $R d\varphi$. Arealet av stripen er $dA = R h\, d\varphi$. Horisontal kraft på hver stripe er $dF = \gamma h_c\, dA = \gamma \cdot \frac{1}{2}h \cdot R h\, d\varphi$ $= \frac{1}{2}\gamma R h^2 d\varphi$. Komponenten av $d\vec{F}$ rettet ~~gjennom~~ parallelt med retningen $\varphi = 0$ er $dF \cdot \cos\varphi$.

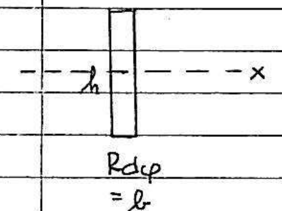
Integrerer over stripene:

$$\underline{F} = \int_{-\phi_0}^{\phi_0} dF \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}\gamma R h^2 \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \cos\varphi\, d\varphi = \underline{\gamma R h^2 \cdot \sin\varphi_0}$$

På vektorform: $\underline{\vec{F} = \gamma R h^2 \sin\varphi_0\, \vec{e}_r}$

Oppgave 1, forts.

c) Angrepspunktets dybde y_p fra øvre kant er den samme som for hver enkelt stripe.



Gitt at treghetsmomentet I_{xc} omkring ~~centroiden~~ (midtpunktet) er

$$I_{xc} = \frac{b h^3}{12} = \frac{R d\varphi \cdot h^3}{12}.$$

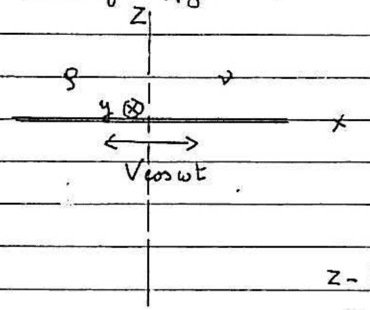
Dybden ned til trykksentret er iflg. formelark

$$y_p = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A}$$

Her er $y_c = \frac{1}{2}h$, $A = R d\varphi \cdot h$, slik at

$$\underline{y_p} = \frac{1}{2}h + \frac{\frac{1}{12}R d\varphi \cdot h^3}{\frac{1}{2}h \cdot R d\varphi} = \frac{1}{2}h + \frac{1}{6}h = \underline{\underline{\frac{2}{3}h}}$$

Løsning Oppgave 2



Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{V}$$

Bare x-komponenten av hastigheten, $u(z,t)$, er forskjellig fra null.
z-komponenten av Navier-Stokes gir
$\underline{0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}$, altså p uavhengig av z

x-komponenten av Navier-Stokes: $\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)u = \nu\nabla^2 u$.
Da $(\vec{V}\cdot\nabla)u = u\,\partial u/\partial x = 0$, blir ligningen
$\underline{\partial u/\partial t = \nu\nabla^2 u = \nu\,\partial^2 u/\partial z^2}$, $u = u(z,t)$.

Oppgitt løsningsform $u(z,t) = u_0 e^{-\beta z}\cos(\beta z - \omega t)$, $z \geq 0$
Ved overflaten $z = 0$: $u(0,t) = u_0 \cos\omega t = V\cos\omega t$
på grunn av heftbetingelsen. Altså $\underline{u_0 = V}$.
Deriverer $u(z,t) = Ve^{-\beta z}\cos(\beta z - \omega t)$:
$\partial u/\partial t = \omega V e^{-\beta z}\sin(\beta z - \omega t)$
$\partial u/\partial z = -\beta V e^{-\beta z}[\cos(\beta z - \omega t) + \sin(\beta z - \omega t)]$
$\partial^2 u/\partial z^2 = 2\beta^2 V e^{-\beta z}\sin(\beta z - \omega t)$.
x-komponenten av Navier-Stokes blir dermed
$\omega V e^{-\beta z}\sin(\beta z - \omega t) = 2\nu\beta^2 V e^{-\beta z}\sin(\beta z - \omega t)$, som gir

$$\underline{\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}$$

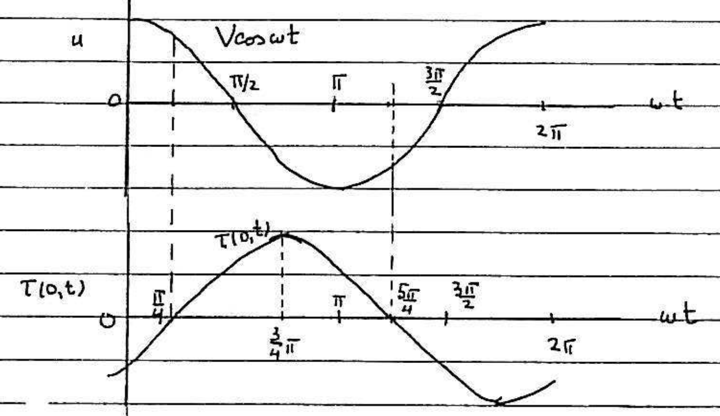
b) Skjærspenning ved veggen $\tau(0,t) = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}$

Innsetting for u:

$$\underline{\tau(0,t)} = \mu\beta V\underbrace{(\sin\omega t - \cos\omega t)}_{-\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})} = \underline{-\mu\beta V\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \tfrac{\pi}{4})}$$

Setter inn for β: $\underline{\tau(0,t) = -\rho V\sqrt{\omega\nu}\cdot\cos(\omega t + \tfrac{\pi}{4})}$

Løsning Oppgave 2, forts.



Skjærspenningen ligger $\frac{3}{4}\pi$ bak hastigheten i fase.

c)

Instantan effekt er $P(t) = -\tau(0,t)\cdot V\cos\omega t$.
Dette fordi fluidets kraft mot flaten per flateenhet er $+\tau(0,t)$. Den kraft vi må tilføre flaten for å opprettholde bevegelsen er like stor og motsatt.

Altså $P(t) = \rho V^2\sqrt{\omega\nu}\,\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\cos\omega t$.

Her er middelverdien $\overline{\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\cos\omega t} =$

$= \overline{(\cos\omega t\cos\frac{\pi}{4} - \sin\omega t\sin\frac{\pi}{4})\cos\omega t} = \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$,

slik at $\underline{\overline{P(t)} = \frac{1}{2}\rho V^2\sqrt{\frac{\omega\nu}{2}}}$

Løsning Oppgave 3

a)

Kinematisk betingelse :

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_{z=\eta} = w(\eta) \qquad (1)$$

Bernoulli ved fri overflate :

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} + \frac{1}{2}V^2(\eta) + \frac{p_0}{\rho} + g\eta = C$$

Velger $C = \frac{p_0}{\rho}$, slik at

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} + \frac{1}{2}V^2(\eta) + g\eta = 0 \qquad (2)$$

Ligningene (1) og (2) gjelder også i ikke-lineær teori.

Lineær approksimasjon :

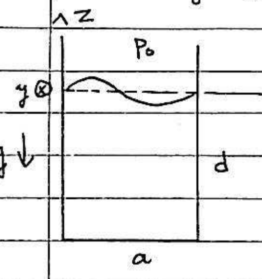
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad z = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0, \qquad z = 0$$

Herav følger fri overflatebetingelse:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \qquad z = 0.$$

Løsning Oppgave 3, forts



b) Gitt $\Phi = f(x)\cosh k(z+d)\cos\omega t$.

Inkompressibilitetsbetingelsen $\nabla\cdot\vec{V} = 0$

$\Rightarrow \nabla^2\Phi = 0$, som gir

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$. Derivasjon av Φ gir

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \qquad (1)$$

Dispersjonsrelasjonen følger av $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$:

$$-\omega^2 f(x)\cosh kd\cos\omega t + gk f(x)\sinh kd\cos\omega t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = gk\tanh kd$$

c) Ligning (1) har generell løsning

$f(x) = \alpha\sin kx + \beta\cos kx$, α og β konstanter. Altså

$\Phi = (\alpha\sin kx + \beta\cos kx)\cosh k(z+d)\cos\omega t$. Det gir

$u = \partial\Phi/\partial x = k(\alpha\cos kx - \beta\sin kx)\cosh k(z+d)\cos\omega t$.

Kinematiske betingelser er $u(0,t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, og

$u(a,t) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0$. Altså

$$k = n\pi/a, \text{ hvor } n = 1, 2, 3, \ldots$$

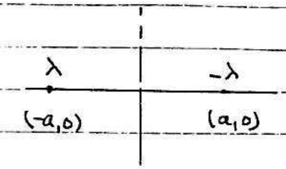
d) $\Phi = \beta\cos kx\cosh k(z+d)\cos\omega t$ følger av ovenstående.

Av Bernoulli: $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V^2}_{\text{negl.}} + gz = \frac{p_0}{\rho}$ følger

$$p_d \equiv p - (p_0 - \rho g z) = -\rho\,\partial\Phi/\partial t$$

Altså $\underline{p_d = \rho\beta\omega\cos kx\cosh k(z+d)\sin\omega t}$

Løsning Oppgave 4



$\mu = 2\lambda a$

Adderer potensialene:

$$w = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\ln(z+a) - \ln(z-a)\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\ln\frac{z+a}{z-a} = \frac{\lambda}{2\pi}\ln\frac{1+a/z}{1-a/z} \simeq \frac{\lambda}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{z}\right)^2 = \frac{\lambda}{2\pi}\ln\left(1+\frac{2a}{z}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\frac{2a}{z} = \frac{\mu}{2\pi z},$$ til laveste orden i a/z.

Da $z = re^{i\theta}$ kan w skrives

$$w = \frac{\mu}{2\pi r}e^{-i\theta} = \frac{\mu}{2\pi r}\cos\theta - \frac{i\mu}{2\pi r}\sin\theta$$

Sammenligner med $w = \Phi + i\Psi$:

$$\Phi = \frac{\mu}{2\pi r}\cos\theta$$

$$\Psi = -\frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 7359 3555

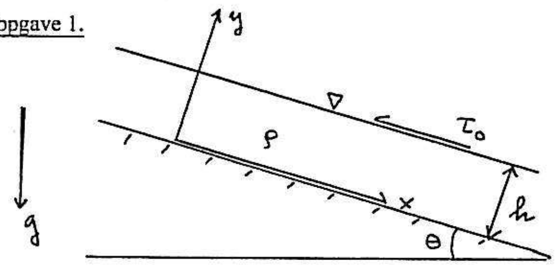
KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK
FOR FAKULTET F

(Linje Fysikk og matematikk)

Dato: 4. august 1998
Tid: kl.0900 –1300

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1.



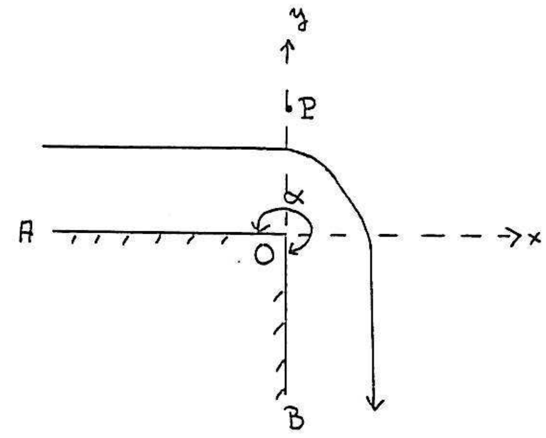
Gitt et væskesjikt av konstant tykkelse h, som glir nedover et skråplan. Helningsvinkelen er θ. Væskens tetthet er ρ, og dens dynamiske viskositet er μ. Tyngdens akselerasjon er g. Anta stasjonære forhold. Legg koordinatsystemet som på figuren.

a) Vis at væskens hastighet u(y) langs planet er

$$u(y)= \frac{gh}{\nu}\, y(1-\frac{y}{2h})\,\sin\theta \qquad (\nu=\mu/\rho)$$

b) Systemet blir så utsatt for en kraftig luftstrøm i negativ x-retning, parallelt med sjiktets overflate. Lufta forårsaker at det oppstår en konstant skjærspenning τ_0 i overflaten, rettet imot sjiktets opprinnelige bevegelse (se fig.). Hvor stor må τ_0 være for at den totale væsketransport langs skråplanet skal bli lik null?

Oppg. 2



Gitt en potensialstrømning rundt et hjørne AOB med utvendig vinkel $\alpha = 3\pi/2$.

a) Vis at strømfunksjonen

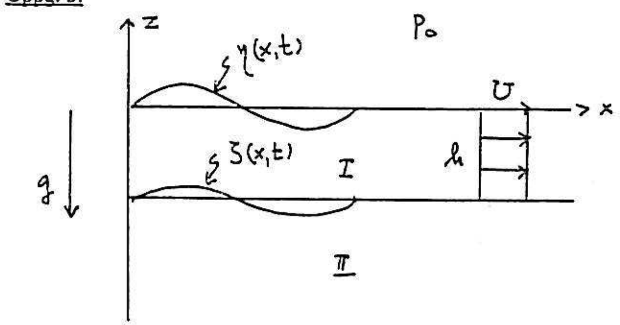
$$\psi = Ar^{2/3}\sin\left(\frac{2\theta}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

hvor A er en positiv konstant, tilfredsstiller feltligningen samt grensebetingelsene på flatene AO og OB. (Her er r og θ vanlige plane polarkoordinater; θ = -π/2 langs OB.)

b) Finn trykket p(r) i væsken som funksjon av r, når trykket i avstanden r = R fra origo er kjent, p(R) = p_0. Væskens tetthet er ρ. Se bort fra tyngden.

c) Punktet P på figuren ligger i posisjonen θ = π/2, r = R. Hvor stor er volumgjennomstrømningen Q, per lengdeenhet inn i planet, mellom punktene O og P?

Oppg. 3.



Monokromatiske vannbølger propagerer fra venstre mot høyre på et strømsjikt (område I). Strømsjiktet er opprinnelig uniformt, med konstant dybde h, og med konstant horisontal hastighet U for $-h \le z \le 0$. Det opprinnelige strømprofilet er vist til høyre på figuren. Når bølgene beveger seg inn i sjiktet, får vi et vekselvirkende bølgestrøm-system som skal antas å være rent periodisk i x-retningen. Nedenfor sjiktet (område II) er det dypt vann. Vannets tetthet ρ er den samme overalt. Atmosfæretrykket er p_0.
Bølgeprofilene har formen

$\eta = a \sin(\omega t - kx)$, fri overflate
$\zeta = b \sin(\omega t - kx)$, grenseflate I/II,

hvor a og b er amplitudene. Hastighetspotensialet i område I oppgis å ha formen

$$\Phi_I = Ux + \frac{a\omega}{k}(Ae^{kz} + Be^{-kz})\cos(\omega t - kx),$$

hvor A og B er konstanter. Lineær bølgeteori forutsettes.

a) Skriv ned uttrykkene for hastighetskomponentene (u_I, w_I) i område I.
I Bernoullis ligning

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C \qquad (1)$$

er konstanten $C = C_I$ den samme overalt i område I. Hvorfor? Sett inn uttrykkene for (u_I, w_I) i ligning (1) ved den frie overflate $z = \eta$, og finn verdien av C_I ved å midle over en bølgeperiode. Vis at med de gjenværende ledd reduseres ligningen til

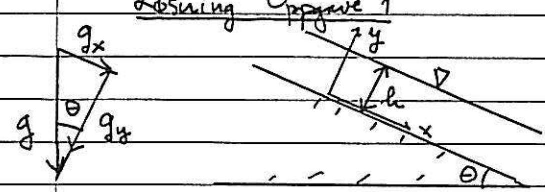
$$\omega(\omega - kU)(A + B) = gk.$$

b) Sett opp den kinematiske grensebetingelse for område I, både ved fri overflate $z = \eta$, og ved nedre grenseflate $z = -h + \zeta$. Vis at disse betingelsene reduserer seg til ligningene

$$\omega - kU = \omega(A - B)$$

$$b(\omega - kU) = a\omega(Ae^{-kh} - Be^{kh}).$$

Løsning Oppgave 1



$v = 0$,

$u = u(y)$,

$\therefore\ \nabla^2 u = d^2u/dy^2$.

a) Navier-Stokes : $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu\nabla^2\vec{V}$

Stasjonære forhold gir $0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu\nabla^2\vec{V}$.

Av figuren er $g_x = g\sin\theta$, $g_y = -g\cos\theta$

N-S i x-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \nu\frac{d^2u}{dy^2}$ ①

N-S i y-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\theta$ ②

Skriver ② slik: $\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma\cos\theta$, dvs.

$p = -\gamma y\cos\theta + f(x)$, hvor $f(x)$ er vilkårlig.

Deriverer m.h.p. x : $\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x)$, uavhengig av y.

Skriver ① slik:

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta}_{\text{Avhenger bare av } x} = \underbrace{\mu\frac{d^2u(y)}{dy^2}}_{\text{Avhenger bare av } y}$$

Da må $\tilde{p} \equiv \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ være uavhengig av x og y.

Ordinær 2. ordens diff. ligning for hastighetsprofilet:

$$\frac{d^2u(y)}{dy^2} = \frac{\tilde{p}}{\mu}.$$

Dette gir $\frac{du}{dy} = \frac{\tilde{p}}{\mu}y + C_1$, $u(y) = \frac{1}{2}\frac{\tilde{p}}{\mu}y^2 + C_1 y + C_2$

Trenger to grensebetingelser:

1. Heft ved veggen, $u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.
2. Ingen skjærspenning ved overflaten, $\tau(h) = \mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=h} = 0$.

Det gir $0 = \frac{\tilde{p}}{\mu}h + C_1$, $C_1 = -\frac{\tilde{p}}{\mu}h$

Løsning $u(y) = \frac{1}{2}\frac{\tilde{p}}{\mu}y^2 - \frac{\tilde{p}}{\mu}h\cdot y$

$$u(y) = -\frac{\tilde{p}}{\mu}hy\left(1 - \frac{y}{2h}\right).$$

Trenger å bestemme $\tilde{p}$: Da $\tilde{p} = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ er uavhengig av posisjonen, kan den evalueres i fri overflate hvor $\partial p/\partial x = 0$. Dvs. $\tilde{p} = -\gamma\sin\theta$

Innsetting gir $\underline{u(y) = \frac{gh}{\nu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right)\sin\theta}$, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

b) Med skjærspenning τ_0 produsert av luftstrømmen:

$C_2 = 0$ som før, slik at $u(y) = \frac{1}{2}\frac{\tilde{p}}{\mu}y^2 + C_1 y$,

$\frac{du}{dy} = \frac{\tilde{p}}{\mu}y + C_1$. Nå er $\tau(h) = \mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=h} = -\tau_0$

$\Rightarrow \mu\left(\frac{\tilde{p}}{\mu}h + C_1\right) = -\tau_0$. Da $\tilde{p} = -\gamma\sin\theta$ som før fås

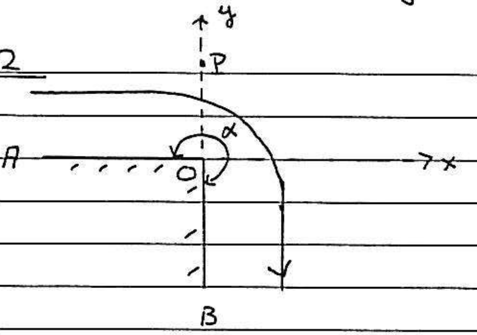
$$C_1 = \frac{\gamma h\sin\theta}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu}, \text{ og dermed}$$

$$u(y) = -\frac{gy^2}{2\nu}\sin\theta + \left(\frac{\gamma h\sin\theta}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu}\right)y$$

$$u(y) = \frac{gh}{\nu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right)\sin\theta - \frac{\tau_0 y}{\mu}$$

$Q = \int_0^h u(y)\,dy = 0$ gir $\underline{\tau_0 = \frac{2}{3}\gamma h\sin\theta}$

Løsning Oppgave 2



$$\Psi = A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

a) Feltligningen er $\nabla^2 \Psi = 0$.

Fra formelark: $\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{2}{3} A r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = \frac{4}{9} A r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -\frac{4}{9} A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla^2 \Psi} = \frac{4}{9} A r^{-\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{4}{9} A r^{-\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{0}$$, som den skal.

Grensebetingelser: Ψ = konstant på faste flater.

Flaten AO ($\theta = \pi$): $\Psi = A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{0}$

Flaten OB ($\theta = -\frac{\pi}{2}$): $\Psi = A r^{\frac{2}{3}} \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \underline{0}$.

Grensebetingelsene dermed oppfylt.

b) Potensialstrømning gir at $p + \frac{1}{2}\rho V^2$ = konstant over hele fluidet.

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{2}{3} A r^{-\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{2}{3} A r^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = \frac{4}{9} A^2 r^{-\frac{2}{3}}$$, uavhengig av θ.

Oppgave 2b, forts.

Da trykket for $r = R$ er kjent, lik p_0, fås av Bernoulli

$$p(r) + \frac{1}{2}\rho V^2(r) = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2(R)$$

$$p(r) + \frac{2}{9}\rho A^2 r^{-\frac{2}{3}} = p_0 + \frac{2}{9}\rho A^2 R^{-\frac{2}{3}}$$

$$\underline{p(r) = p_0 + \frac{2}{9}\rho A^2 \left(R^{-\frac{2}{3}} - r^{-\frac{2}{3}}\right)}$$

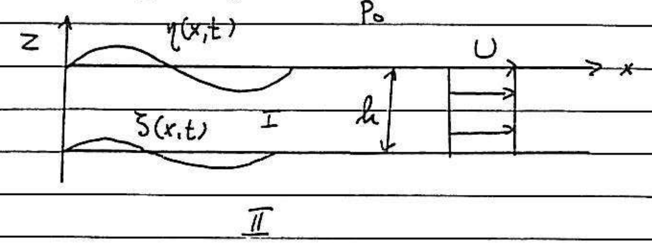
c) Q er lik differansen mellom strømfunksjonene:

$$Q = \Psi(P) - \Psi(0) = \Psi(P).$$

Setter inn $r = R$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ i Ψ:

$$\underline{Q} = A R^{\frac{2}{3}} \sin\frac{2\pi}{3} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot A R^{\frac{2}{3}}}$$

Løsning Oppgave 3



$\theta = \omega t - kx$

a) $$\Phi_I = Ux + \frac{a\omega}{k}\left(Ae^{kz} + Be^{-kz}\right)\cos(\omega t - kx)$$

gir

$$u_I = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} = U + a\omega\left(Ae^{kz} + Be^{-kz}\right)\sin\theta$$

$$w_I = \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} = a\omega\left(Ae^{kz} - Be^{-kz}\right)\cos\theta$$

I Bernoullis ligning $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C$

er $C = C_I$ den samme overalt i område I pga. potensialstrømning.

$z = \eta$: $$\left.\frac{\partial \Phi_I}{\partial t}\right|_{z=\eta} + \left.\frac{1}{2}\left(u_I^2 + w_I^2\right)\right|_{z=\eta} + \frac{p_0}{\rho} + g\eta = C_I$$

I lineær teori erstattes $z=\eta$ med $z=0$ i 1. og 2. ledd:

$$-\frac{a\omega^2}{k}(A+B)\sin\theta + \frac{1}{2}\left[U + a\omega(A+B)\sin\theta\right]^2 +$$
$$+\frac{1}{2}a^2\omega^2(A-B)^2\cos^2\theta + \frac{p_0}{\rho} + ga\sin\theta = C_I$$

Neglisjerer $O(a^2)$:

$$-\frac{a\omega^2}{k}(A+B)\sin\theta + \frac{1}{2}U^2 + Ua\omega(A+B)\sin\theta + \frac{p_0}{\rho} + ga\sin\theta = C_I$$

Midler over en periode: $C_I = \frac{1}{2}U^2 + \frac{p_0}{\rho}$

Resten gir $\underline{\omega(\omega - kU)(A+B) = gk}$

Oppgave 3 b

Kinematisk betingelse ved $z = \eta$:

$$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} + u_I(\eta,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} = w_I(\eta,t)$$

Lineær teori: $z = \eta$ erstattes av $z = 0$:

$$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} + u_I(0,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} = w_I(0,t)$$

Med $\eta = a\sin\theta$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -ka\cos\theta$ får

$$a\omega\cos\theta + \left[U + \underbrace{a\omega(A+B)\sin\theta}_{\text{negl.}}\right](-ka)\cos\theta = a\omega(A-B)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\omega - kU = \omega(A-B)}$$

Ved nedre grenseflate $z = -h + \zeta$:

$$\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial t} + u_I(-h+\zeta,t)\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial x} = w_I(-h+\zeta,t)$$

Lineær teori gir som ovenfor

$$\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial t} + u_I(-h,t)\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial x} = w_I(-h,t)$$

Med $\zeta = b\sin\theta$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -kb\cos\theta$:

$$b\omega\cos\theta + \left[U + \underbrace{a\omega\left(Ae^{-kh} + Be^{kh}\right)\sin\theta}_{\text{negl.}}\right](-kb)\cos\theta =$$
$$= a\omega\left(Ae^{-kh} - Be^{kh}\right)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \underline{b(\omega - kU) = a\omega\left(Ae^{-kh} - Be^{kh}\right)}$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

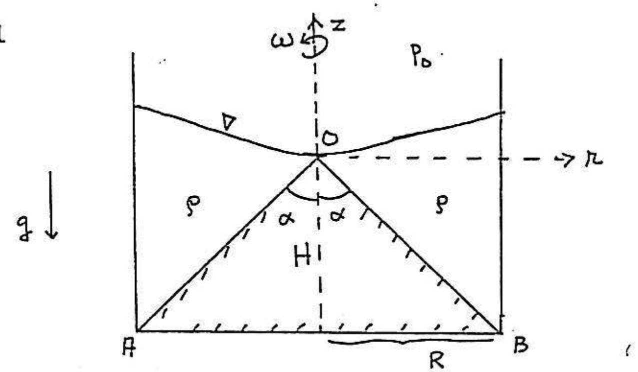
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: 73 59 35 55

EKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. F

(Linje Fysikk og matematikk)
Onsdag 6. mai 1998
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU tillatt.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

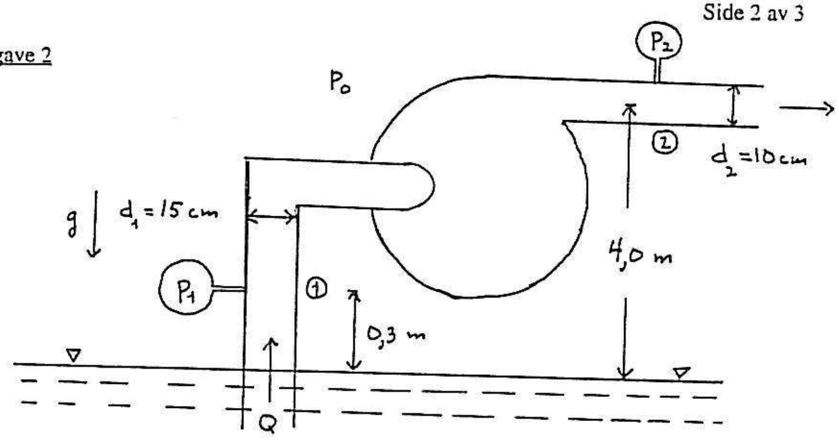


En massiv kjegle AOB er plassert på bunnen av et kar med sylindrisk grunnflate AB. Kjeglens radius er R, lik karets radius. Kjeglens høyde er $H = R \cot \alpha$ (se figuren). Karet fylles med vann (på utsiden av kjeglen). Hele systemet settes i rotasjon omkring z-aksen med konstant vinkelhastighet ω, slik at når likevekt har innstilt seg, vil den frie overflaten berøre kjeglen i dens toppunkt O. Vannets tetthet er ρ, tyngdens akselerasjon er g, og atmosfæretrykket er p_0. Benytt sylinderkoordinater, og legg origo i punktet O.

a) Skriv ned vannets bevegelsesligning i det roterende koordinatsystem, og finn trykket $p(r,z)$ i vannet. Bestem formen på den frie overflate.

b) Skriv ned trykket $p_k(z)$ i et punkt på kjegleflaten uttrykt ved punktets vertikale posisjonskoordinat z, og finn ved integrasjon vertikalkomponenten F_z av den totale kraft som vannet utøver mot kjegleflaten.

Oppgave 2



En vannpumpe trekker vann opp av et basseng, og avleverer det under trykket $p_2 = 180$ kPa. Atmosfæretrykket er $p_0 = 101$ kPa. Manometret ved ① viser et svakt undertrykk relativt til atmosfæretrykket, $p_1 = 95$ kPa. Forholdene er stasjonære. Volumgjennomstrømningen er Q m³/s. Rørdiametre og høyder er angitt på figuren. Tapshøyden, på grunn av friksjon inne i pumpen, antas å være $h_L = 0{,}8$ m. Anta uniforme hastighetsprofiler i rørene, både ved ① og ②. Sett $\rho = 10^3$ kg/m³, $g = 10$ m/s².

a) Finn Q idet du ser bort fra friksjonstap utenfor pumpen.

b) Finn pumpens effekt P.

Oppgave 3

I et plant strømningsfelt av et ideelt inkompressibelt fluid er hastighetskomponentene i plane polarkoordinater

$$V_r = 0 \quad \text{for alle } r, \qquad V_\theta = \begin{cases} \alpha r^2, & r \le r_0 \\ \dfrac{A}{r}, & r > r_0. \end{cases}$$

Her er α og r_0 kjente konstanter. Fluidets tetthet er ρ. Tyngdekraften neglisjeres.

a) Bestem konstanten A slik at V_θ blir en kontinuerlig funksjon av r, og finn virvlingens z-komponent ζ_z i hele området $0 < r < \infty$.

b) Finn trykket $p(r)$ for $0 < r < \infty$, når det er kjent at $p = p_\infty$ for $r \to \infty$. Skissér $p(r)$.

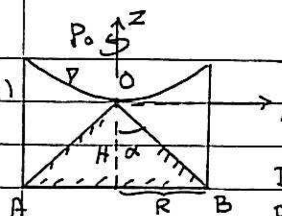
c) Finn strømfunksjonen Ψ for $0 < r < \infty$, og regn herav ut $\nabla^2\Psi$ i samme område. Kunne du ha insett resultatet for $\nabla^2\Psi$ direkte, uten å regne?

Oppgitt: Eulerligningens r-komponent

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

Løsning Oppgave 1

a)



Eulerlign. i roterende koordinatsystem:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + r\omega^2 \vec{e}_r + \vec{g}$$

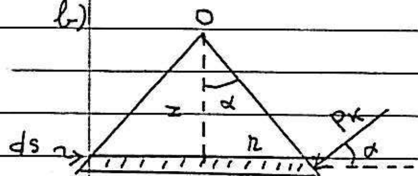
Da ρ er konstant: $\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}r^2\omega^2 + gz\right) = 0$, som gir

$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}r^2\omega^2 - gz + C$. Konstanten C bestemmes av at $p = p_0$ i origo, dvs. $C = p_0/\rho$. Altså

$$p(r,z) = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z + p_0, \quad \text{hvor } \gamma = \rho g.$$

Fri overflate, $p = p_0$, gir $\quad z = \frac{r^2\omega^2}{2g}$

b)



Av fig.: $r = -z\tan\alpha$, slik at

$$p_K(z) = \frac{1}{2}\rho z^2\omega^2\tan^2\alpha - \gamma z + p_0$$

Vertikalkomponent av trykkraften på et flateelement dA: $dF_z = -p_K(z)\sin\alpha \cdot dA$, hvor arealet dA av en ring tilsvarende linjeelementet ds langs kjeglefaten er

$$dA = 2\pi r\,ds = 2\pi\cdot(-z\tan\alpha)\cdot dz/\cos\alpha = -2\pi(\tan\alpha/\cos\alpha)\cdot z\,dz.$$

Altså $dF_z = 2\pi p_K\cdot\tan^2\alpha\cdot z\,dz$. Integrerer:

$$F_z = \int_{\text{kjegle}} dF_z = 2\pi\tan^2\alpha\int_{-H}^{0}\left(\frac{1}{2}\rho z^3\omega^2\tan^2\alpha - \gamma z^2 + p_0 z\right)dz$$

$$= 2\pi\tan^2\alpha\left|_{-H}^{0}\left(\frac{1}{8}\rho z^4\omega^2\tan^2\alpha - \frac{1}{3}\gamma z^3 + \frac{1}{2}p_0 z^2\right) = \right.$$

$$= 2\pi\tan^2\alpha\left(-\frac{1}{8}\rho H^4\omega^2\tan^2\alpha - \frac{1}{3}\gamma H^3 - \frac{1}{2}p_0 H^2\right). \text{ Da } H^2\tan^2\alpha = R^2:$$

$$F_z = -\pi R^2\left(\frac{1}{4}\rho\omega^2R^2 + \frac{2}{3}\gamma H + p_0\right).$$ Her kan bidraget fra p_0 utelates.

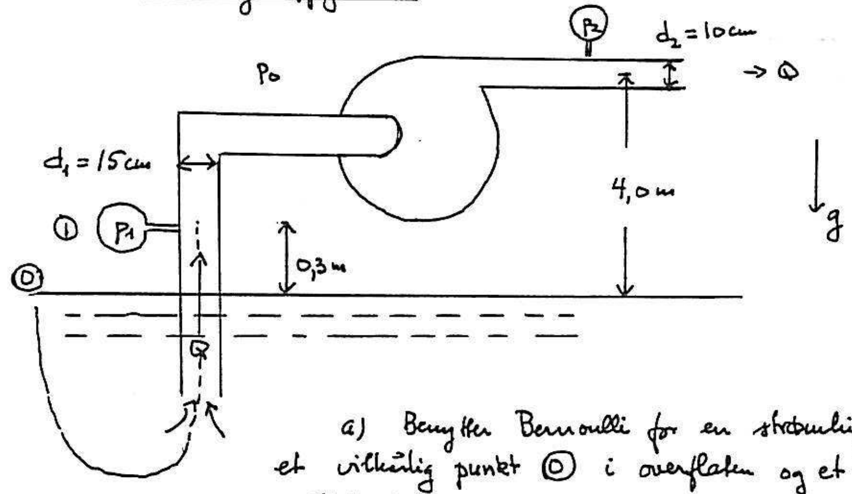
Alternativt kan en innføre flateelementets vertikale projeksjon $dA_z = 2\pi r\,dr$ og integrere over r:

$$F_z = -\int_0^R p_K\cdot 2\pi r\,dr = -2\pi\int_0^R\left(\frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + \gamma\cdot r\cot\alpha + p_0\right)r\,dr$$

$$= -2\pi\left(\frac{1}{8}\rho\omega^2R^4 + \frac{1}{3}\gamma R^3\cot\alpha + \frac{1}{2}p_0R^2\right)$$

$$= -\pi R^2\left(\frac{1}{4}\rho\omega^2R^2 + \frac{2}{3}\gamma H + p_0\right),$$ som før.

Løsning Oppgave 2



a) Benytter Bernoulli for en strømlinje mellom et vilkårlig punkt ⓪ i overflaten og et punkt i snittet ①:

$$\frac{p_0}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V_0^2}_{=0} + gz_0 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1$$

$$V_1 = \sqrt{2\left[\frac{p_0-p_1}{\rho} + g(z_0-z_1)\right]} = \sqrt{2\left[\frac{(101-95)\cdot10^3}{10^3} + 10\cdot(-0{,}3)\right]} = \underline{2{,}45\ \frac{m}{s}}$$

$$Q = A_1V_1 = \frac{1}{4}\pi d_1^2\cdot V_1 = \frac{1}{4}\pi\cdot0{,}15^2\cdot2{,}45 = \underline{0{,}043\ m^3/s}$$

b) Mekanisk energiligning langs strømlinje, fra ⓪ til ②:

$$\left(\frac{p_0}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V_0^2}_{=0} + gz_0\right) - w_s = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2\right) + gh_L$$

$$-w_s = \frac{p_2-p_0}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + g(z_2-z_0) + gh_L.$$

V_2 finnes av $V_2 = V_1\frac{A_1}{A_2} = V_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 2{,}45\left(\frac{15}{10}\right)^2 = 5{,}51$ m/s

$$\Rightarrow \quad -w_s = (180-101) + \frac{1}{2}\cdot5{,}51^2 + 10\cdot4 + 10\cdot0{,}8 = 142{,}2\ m^2/s^2$$

Dette er effekt per masseenhet. For å finne P, må en gange med ρ, og deretter med volumgjennomstrømningen Q:

$$\underline{P} = (-w_s)\cdot\rho\cdot Q = 142{,}2\cdot10^3\cdot0{,}043 = 6115\ W \simeq \underline{6{,}12\ kW}$$

Løsning Oppgave 3

a) Kontinuitet av V_θ ved $r = r_0$ gir $\underline{A = \alpha r_0^3}$, slik at

$$V_\theta = \frac{\alpha r_0^3}{r} \text{ for } r \ge r_0.$$

Virvling $\zeta_z \equiv (\nabla \times \vec{V})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_\theta)$.

$r \le r_0$: $\underline{\zeta_z} = \underline{3\alpha r}$, $\quad r > r_0$: $\underline{\zeta_z = 0}$

b) Ettersom $\zeta_z = 0$ for $r > r_0$ er Bernoullis konstant i dette området den samme for alle punkter:

$$p(r) + \frac{1}{2}\rho V^2(r) = p_\infty$$

$r > r_0$: $\underline{p(r) = p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{\alpha^2 r_0^6}{r^2}}$

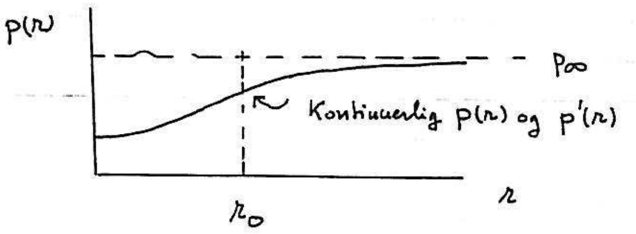
For $r < r_0$ er $\zeta_z \ne 0$ slik at Eulers ligning må benyttes:

$$-\frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \text{altså} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \alpha^2 r^3$$

$p(r) = \frac{1}{4}\rho\alpha^2 r^4 + C$, hvor C bestemmes av at $p(r)$ er kontinuerlig ved $r = r_0$: $p_\infty - \frac{1}{2}\rho\alpha^2 r_0^4 = \frac{1}{4}\rho\alpha^2 r_0^4 + C$

$C = p_\infty - \frac{3}{4}\rho\alpha^2 r_0^4$.

Altså, for $r \le r_0$ er $\quad \underline{p(r) = p_\infty - \frac{1}{4}\rho\alpha^2(3r_0^4 - r^4)}$



Løsning Oppgave 3, forts

3c) Strømfunksjonen Ψ finnes av $V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$

$r \le r_0$: $-\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \alpha r^2$, $\quad \underline{\Psi = -\frac{1}{3}\alpha r^3}$

$r > r_0$: $-\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\alpha r_0^3}{r}$, $\quad \underline{\Psi = -\alpha r_0^3 \ln r}$

Av $\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)$ finnes

$r \le r_0$: $\underline{\nabla^2 \Psi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-\alpha r^3) = \underline{-3\alpha r}$

$r > r_0$: $\underline{\nabla^2 \Psi} = \underline{0}$

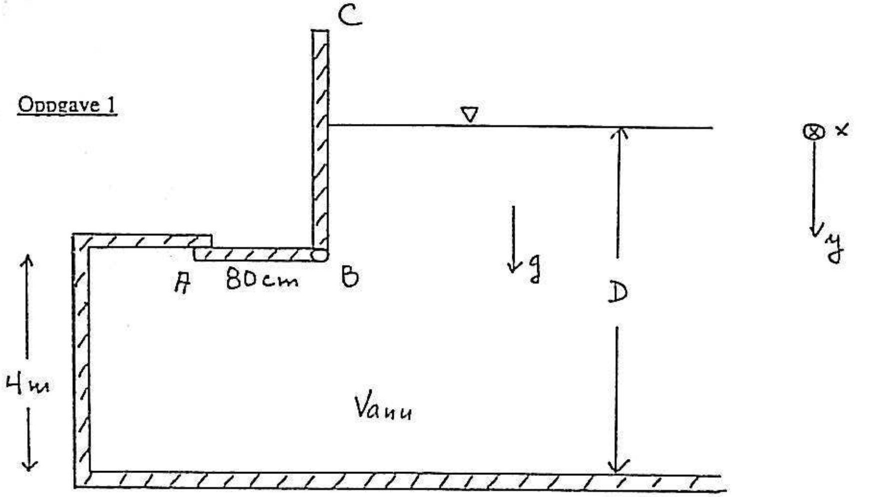
Stemmer med den generelle relasjonen $\nabla^2 \Psi = -\zeta_z$ i plane polarkoordinater.

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik Helge Anderssson
Tlf.: 73 59 35 55 73 59 35 56

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. VII
Tirsdag 5. august 1997
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU tillatt.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1

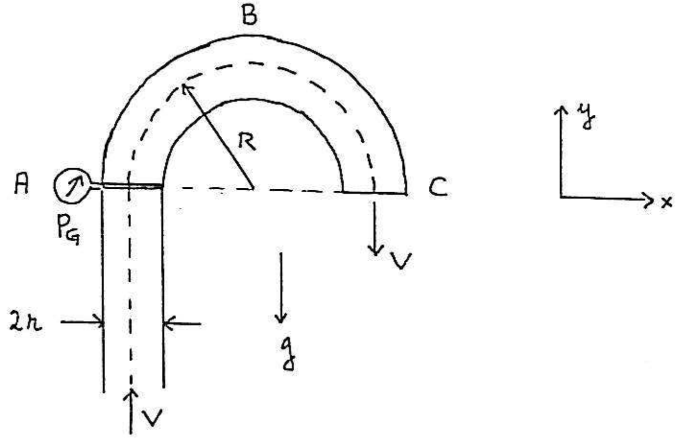


ABC på figuren er en stiv damport som kan svinge fritt om en aksling gjennom B. Porten har lengden 2m inn i papirplanet (dvs. i x-retningen). Porten vil åpne seg ved A og slippe ut vann dersom vanndybden blir stor nok. For hvilken vanndybde D vil porten begynne å åpne seg? Se bort fra portens tyngde.

Oppgitt: For et rektangel med bredde b og høyde h er arealets treghetsmoment om en akse parallell med x-aksen gjennom centroiden

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12}$$

Oppgave 2.



Vann strømmer stasjonært gjennom et sirkulært rør med radius r = 10 cm. Middelhastigheten er V = 5,0 m/s. Til røret er det sveiset fast et halvsirkelformet bend ABC i posisjon A. Midtlinjens radius er R = 1,20 m. Rør og bend har samme radius r, slik at når vannet strømmer fritt ut i posisjon C, har det samme middelhastighet V som før. Posisjonene A og C ligger på samme horisontale nivå. Ved A måles gage-trykket $p_G = 0{,}8 \cdot 10^4$ Pa. Sett tyngdens akselerasjon lik $g = 10\ m/s^2$.

a) Se bort fra bendets tyngde, og finn den kraft $\bar{F}_{sveis}$ som sveisen må overføre for å holde bendet når vannet strømmer igjennom.

b) Dette bendet har friksjonstap. Hvor stor er den tilhørende tapshøyden h_L? Hva ville $\bar{F}_{sveis}$ være dersom bendet ble gjennomstrømmet med vann med samme (middel-) hastighet V som ovenfor, men uten friksjonstap?

Oppgave 3

Hastighetspotensialet for monokromatiske vannbølger med liten amplitude a (ka << 1) er, for vilkårlig vanndyp d,

$$\Phi = \frac{ag}{\omega}\,\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\,\cos(\omega t - kx).$$

Dispersjonsrelasjonen er $\omega^2 = gk \tanh kd$. Det dynamiske trykket er $p_d = -\rho\, \partial\Phi/\partial t$.

a) Vis at gruppehastigheten c_g kan skrives som

$$c_g = \frac{1}{2}c\left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd}\right),$$

hvor c er fasehastigheten.

b) Vis at middelverdien $\bar{P}(t)$ av den instantane energifluks P(t) gjennom et vertikalt tverrsnitt,

$$P(t) = \int_{-d}^{\eta}\left[p + \rho g z + \frac{1}{2}(u^2 + w^2)\right]u\, dz ,$$

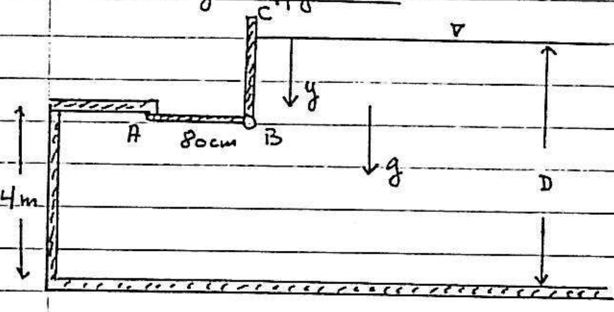
er

$$\bar{P}(t) = E c_g ,$$

hvor $E = \frac{1}{2}\rho g a^2$ er energien per overflateenhet. Atmosfæretrykket neglisjeres.

6I124 FLUIDMEKANIKK 5. august 1997 ①

Løsning Oppgave 1



Trykk på luke AB: $p_{AB} = \gamma(D-4)$

Kraft på luke AB: $F_{AB} = p_{AB}\cdot A = p_{AB}\cdot 0{,}8\cdot 2 = 1{,}6\,\gamma(D-4)$

Tilhørende kraftmoment: $M_B = F_{AB}\cdot 0{,}4 = 0{,}64\,\gamma(D-4)$ ①

Kraft på vertikal luke BC: $F_{BC} = \gamma h_c\cdot(D-4)\cdot 2$, hvor centroidens dybde h_c er $h_c = (D-4)/2$.

Altså $F_{BC} = \gamma(D-4)^2$

Differanse mellom trykksenter y_p og centroide:

$$y_p - y_c = \frac{I_{xc}}{y_c\cdot(D-4)\cdot 2}.$$ Her er $y_c = h_c = \frac{D-4}{2}$ og

$I_{xc} = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}\cdot 2\cdot(D-4)^3 = \frac{1}{6}(D-4)^3$. Altså

$$y_p - \frac{D-4}{2} = \frac{\frac{1}{6}(D-4)^3}{\frac{D-4}{2}\cdot(D-4)\cdot 2} = \frac{D-4}{6}, \quad y_p = \frac{2}{3}(D-4)$$

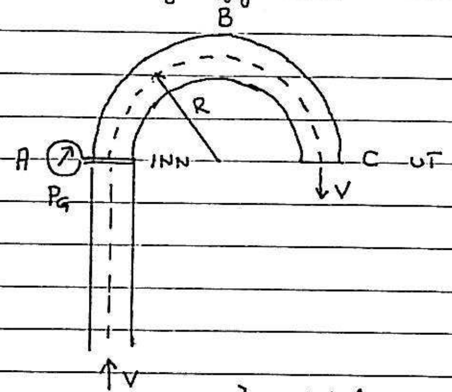
Arm, for kraftmomentet om B på vertikal luke:
$(D-4) - \frac{2}{3}(D-4) = \frac{1}{3}(D-4) \Rightarrow$

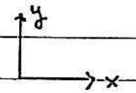
$M_B = F_{BC}\cdot\frac{1}{3}(D-4) = \frac{1}{3}\gamma(D-4)^3$ ②

Setter ① og ② lik hverandre: $0{,}64\,\gamma(D-4) = \frac{1}{3}\gamma(D-4)^3$

$(D-4)^2 = 1{,}92$, $D = 4 + 1{,}39 = \underline{5{,}39\text{ m}}$

Løsning Oppgave 2





Ingen krefter eller impulsfluksen i x-retningen. $\vec{F}_{sveis}$ virker i y-retningen.

a) Impulsbalanse i y-retningen, når bare skalare størrelser benyttes,

$\sum F = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN}$, hvor kontrollvolumet legges inntil rørbendet ABC.

$\sum F$ er sammensatt av trykkraft $p_G A$ ved INN-seksjonen, vannets tyngde W_G, og kraften F_{sveis} som sveisen må overføre: $\sum F = p_G A - W_G + F_{sveis}$. Her er

$A = \pi r^2 = \pi \cdot 0{,}01$. $\quad p_G A = 0{,}8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 0{,}01 = 251\ N$.

$W_G = \gamma A \cdot \pi R = 10^4 \cdot 0{,}01\pi \cdot \pi \cdot 1{,}2 = 1184\ N$

Impulsbalansen altså

$251 - 1184 + F_{sveis} = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN} = -2\dot{M}_{INN} = -2\rho V^2 \cdot A$

$= -2 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot \pi \cdot 0{,}01 = -1571\ N$

$\underline{F_{sveis} = -638\ N}$, virker nedover.

b) Av mekanisk energiligning:

$\frac{p_G}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz - w_s = \frac{1}{2}V^2 + gz + gh_L$ følger, ettersom $w_s = 0$,

$\frac{p_G}{\rho} = gh_L$, $\quad h_L = \frac{p_G}{\gamma} = \frac{0{,}8 \cdot 10^4}{10^4} = \underline{0{,}8\,m}$

Null tap gir at $p_G \to 0$. Da vil $-W_G + F_{sveis} = -2\rho V^2 \cdot A$

$\underline{F_{sveis}} = W_G - 2\rho V^2 A = 1184 - 1571 = \underline{-387\ N}$

Løsning Oppgave 3

a) Deriverer $\omega^2 = gk \tanh kd$:

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(gk \tanh kd) = g \tanh kd + \frac{gkd}{\cosh^2 kd}$$

Gruppehastighet $\quad c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega}\left(\tanh kd + \frac{kd}{\cosh^2 kd}\right)$

Kan også multiplisere med ω i teller og nevner og skrive c_g slik:

$$c_g = \frac{g\omega}{2\omega^2} \cdot \tanh kd \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd}\right)$$

$$= \frac{g\omega \tanh kd}{2gk \tanh kd}\left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd}\right)$$

Da fasehastigheten er $c = \omega/k$:

$$\underline{c_g = \tfrac{1}{2}c\left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd}\right)}$$

5. august 1997

Løsning Oppgave 3, forts.

b) $\Phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx)$

$(\theta = \omega t - kx)$

$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx)$

Når atmosfæretrykket $p_0 = 0$ er det dynamiske trykk $p_d = p + \rho g z$.

$p_d = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho a g \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx)$

$$P(t) = \int_{-d}^{\eta} (p + \rho g z + \underbrace{\tfrac{1}{2} V^2}_{O(a^2),\ \text{negl.}}) u\, dz = \int_{-d}^{\eta} p_d u\, dz$$

Kan erstatte øvre grense med 0, fordi korreksjonen er av $O(a^3)$. Altså

$$P(t) = \int_{-d}^{0} p_d u\, dz = \frac{\rho g^2 k a^2}{\omega} \frac{\sin^2\theta}{\cosh^2 kd} \int_{-d}^{0} \cosh^2 k(z+d)\, dz \, .$$

Integralet er $\int_{-d}^{0} \cosh^2 k(z+d)\, dz = \int_{-d}^{0} \frac{\cosh 2k(z+d) + 1}{2} dz$

$$= \int_{-d}^{0} \left(\frac{1}{4k} \sinh 2k(z+d) + \frac{z}{2} \right) = \frac{\sinh 2kd}{4k} + \frac{d}{2} = \frac{\sinh 2kd}{4k} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)$$

Middel: $\overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}$. Altså

$$\overline{P}(t) = \frac{\rho g^2 k a^2}{\omega} \frac{\frac{1}{2}}{\cosh^2 kd} \cdot \frac{\sinh 2kd}{4k} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} \rho g a^2\right)}_{E} \cdot \underbrace{\frac{g}{2\omega} \tanh kd \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)}_{c_g} = \underline{E \cdot c_g}$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

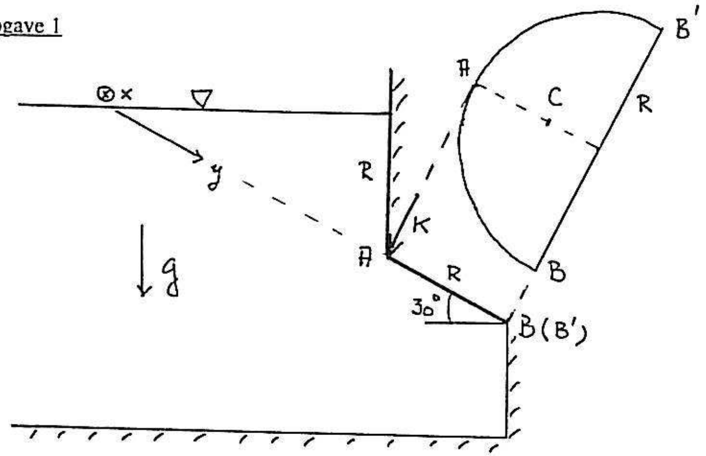
Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Iver Brevik
Tlf.: (735) 93555

EKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. VII
Mandag 5. mai 1997
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk.
Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



En luke i en dam har form av en halvsirkel ABB′ med radius R. Luka er hengslet i sidekanten BB′, og er påvirket av en kraft K, rettet vinkelrett på luka, i toppunktet A. Lukas helningsvinkel er 30°. Vanndybden ved punkt A er lik R. Vannets tetthet er ρ.

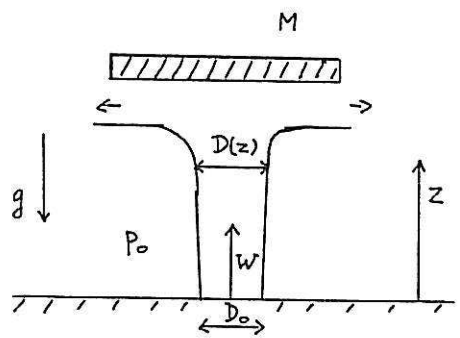
a) Finn den totale kraft F som vannet utøver mot luka.

b) Finn hvor stor K må minst være for at luka ikke skal åpne seg.

Oppgitt: For en halvsirkel ligger centroiden (punkt C på figuren) i avstanden $4R/(3\pi)$ fra grunnlinjen BB'. Arealets treghetsmoment om en akse parallell med x-aksen gjennom centroiden er

$$I_{xc} = \frac{1}{8}\pi R^4\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right).$$

Oppgave 2



a) En vertikal sirkulær vannstråle har diameter D_0 og utgangshastighet W i posisjon $z = 0$. D_0 og W er kjente størrelser. En sirkulær skive med masse M og diameter større enn vannstrålens diameter D(z) holdes oppe av strålen. Vis at likevektshøyden z_0 er

$$z_0 = \frac{1}{2g}\left[W^2 - \left(\frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\right)^2\right],$$

hvor g er tyngdens akselerasjon og ρ vannets tetthet.

b) Skiva gis en liten vertikal forskyvning ξ ut fra likevektsstillingen, dvs. $z \to z_0 + \xi$, og slippes så, slik at den utfører harmoniske vertikale svingninger med vinkelfrekvens ω omkring likevektsstillingen. Bestem ω.

Oppgave 3

En tornado modelleres ved at et sluk, av styrke $\lambda = -2800$ m²/s, superponeres med en linjevirvel, av styrke (sirkulasjon) $\Gamma = 5600$ m²/s. Både sluket og linjevirvelen er sentrert i origo.

a) Skriv ned uttrykket for tornadoens strømfunksjon ψ, og finn ligningen $r = r(\theta)$ for strømlinjene. Lag en approksimativ kvantitativ skisse av den strømlinje som tilsvarer $\psi = 0$.

b) Når r blir mindre enn en viss grenseverdi r_g kan vi ikke lenger bruke inkompressibel teori. Angi verdien av r_g. Hvor stort er gage-trykket i denne posisjonen?

Oppgitt: Lydhastighet $c = 340$ m/s, luftas tetthet $\rho = 1{,}20\ \mathrm{kg/m^3}$.

c) For $r < r_g$ er strømningen kompressibel. Bruk Eulerligningen til å vise generelt, for enhver stasjonær kompressibel strømning, at vi kan skrive en Bernoullis ligning på formen

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \text{konstant}$$

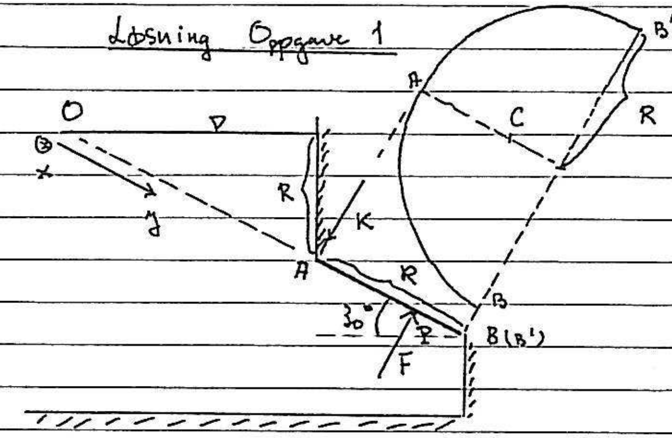
langs en strømlinje (tyngdekraften er utelatt). Anta så at strømningen er adiabatisk, slik at den oppfyller betingelsen p/ρ^γ = konstant hvor γ er adiabatkonstanten, og vis at Bernoullis ligning kan da skrives slik:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \text{konstant}$$

langs strømlinjen.

61124 FLUIDMEKANIKK , 5. mai 1997

Løsning Oppgave 1



a) Velger origo i punktet O, og legger koordinataksene som vist på figuren.

$F = \gamma h_c A$, hvor centroidens dybde er

$h_c = R + (R - \frac{4R}{3\pi})\sin 30^\circ = \frac{R}{2}(3 - \frac{4}{3\pi})$.

Arealet er $A = \frac{1}{2}\pi R^2 \Rightarrow \underline{F = \frac{1}{4}\pi\gamma R^3(3 - \frac{4}{3\pi})}$

b) Minsteverdien av K finnes av momentbalansen:

$K \cdot R = F \cdot BP$, hvor BP er avstanden fra grunnlinjen BB' til trykksentret P. Av fig.: $y_P = OB - BP$, hvor $OB = 2R + R = 3R$. Altså $BP = 3R - y_P$.

Her finnes y_P av formel:

$y_P = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A}$. Da $y_c = 2R + (R - \frac{4R}{3\pi}) = R(3 - \frac{4}{3\pi})$ fås

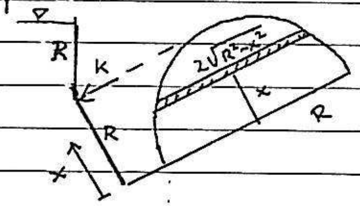
$$y_P = R(3 - \frac{4}{3\pi}) + \frac{\frac{1}{8}\pi R^4(1 - \frac{64}{9\pi^2})}{R(3 - \frac{4}{3\pi}) \cdot \frac{1}{2}\pi R^2} = R(3 - \frac{4}{3\pi}) + \frac{R(1 - \frac{64}{9\pi^2})}{4(3 - \frac{4}{3\pi})}$$ og

$$BP = 3R - y_P = \frac{4R}{3\pi} - \frac{R}{4}\frac{1 - \frac{64}{9\pi^2}}{3 - \frac{4}{3\pi}} = \frac{4R}{\pi}\frac{1 - \frac{\pi}{16}}{3 - \frac{4}{3\pi}}$$

Ligningen $K \cdot R = F \cdot BP$ gir nå

$$K \cdot R = \frac{1}{4}\pi\gamma R^3(3 - \frac{4}{3\pi}) \cdot \frac{4R}{\pi}\frac{1 - \frac{\pi}{16}}{3 - \frac{4}{3\pi}}, \quad \underline{K = \gamma R^3(1 - \frac{\pi}{16})}$$

Alternativt kan oppgaven løses ved direkte integrasjon: legger nå koordinatsystemet slik at x peker oppover langs luken:



Momentbalanse

$$K \cdot R = \int_{luke} p\,dA \cdot x$$

Her er trykket $p = \gamma[R + (R-x)\sin 30^\circ] = \frac{1}{2}\gamma(3R - x)$, og arealelementet er $dA = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$. Altså

$$K \cdot R = \frac{1}{2}\gamma\int_0^R (3R - x) \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot x\,dx =$$

$$= 3\gamma R\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx - \gamma\int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

1. integral: $t^2 = R^2 - x^2$, dvs. $t\,dt = -x\,dx$, gir

$$\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^R t^2\,dt = \frac{1}{3}R^3$$

2. integral: $x = R\sin\theta$, $dx = R\cos\theta\,d\theta$, gir

$$\int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = R^4\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}R^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}R^4\int_0^{\pi/2}\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{8}R^4\Big|_0^{\pi/2}(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta) = \frac{\pi}{16}R^4.$$

Altså $K \cdot R = \gamma R^4 - \frac{\gamma\pi}{16}R^4$, $\underline{K = \gamma R^3(1 - \frac{\pi}{16})}$, som før.

Løsning Oppgave 2

a) I strålen er vertikalhastigheten $w = w(z)$. Antas uniform over tverrsnittet. Da $p = p_0$ inne i strålen (fordi strålen er en fri stråle), gir Bernoulli at

$$\frac{1}{2}w^2(z) + gz = \frac{1}{2}W^2 \quad \text{d.v.s.} \quad \underline{w^2(z) = W^2 - 2gz}.$$

Kontinuitetsligningen gir

$$\frac{1}{4}\pi D^2(z)\cdot w(z) = \frac{1}{4}\pi D_0^2 W, \qquad \underline{D(z) = D_0\sqrt{W/w(z)}},$$ som

med innsetting for $w(z)$ gir

$$\underline{D(z) = D_0(1 - 2gz/W^2)^{-1/4}}.$$

Beregning av z_0: Impulsfluksen $\rho w^2(z_0)\cdot\frac{1}{4}\pi D^2(z_0)$ må balansere tyngden Mg av skiva:

$$\rho w^2(z_0)\cdot\frac{1}{4}\pi D^2(z_0) = Mg.$$

Setter inn $w^2(z_0) = W^2 - 2gz_0$ og $D^2(z_0) = D_0^2(1 - 2gz_0/W^2)^{-1/2}$ og får

$$\frac{1}{4}\rho\pi D_0^2 \frac{W^2 - 2gz_0}{\sqrt{1 - 2gz_0/W^2}} = Mg$$

$$\underline{z_0 = \frac{1}{2g}\left[W^2 - \left(\frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\right)^2\right]} \qquad ①$$

b) Forskyvning $z = z_0 + \xi$: Kraft fra vannet $\rho w^2(z)\cdot\frac{1}{4}\pi D^2(z)$ minus skivas tyngde Mg må være lik $M\cdot\ddot{\xi}$:

$$\rho w^2(z)\cdot\frac{1}{4}\pi D^2(z) - Mg = M\cdot\ddot{\xi}.$$ Da $w(z)\cdot D^2(z) = W\cdot D_0^2$ ifølge kontinuitetsligningen, fås $\frac{1}{4}\rho\pi D_0^2 W\cdot w(z) - Mg = M\ddot{\xi}$. ②

Her er

$$w(z) = \sqrt{W^2 - 2gz} = \sqrt{(W^2 - 2gz_0) - 2g\xi}, \quad \text{hvor ifølge } ①$$

$$W^2 - 2gz_0 = \left(\frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\right)^2. \quad \text{Altså } w(z) = \frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\sqrt{1 - 2g\xi\cdot\left(\frac{\rho\pi D_0^2 W}{4Mg}\right)^2}$$

$$\simeq \frac{4Mg}{\rho\pi D_0^2 W}\left[1 - g\xi\left(\frac{\rho\pi D_0^2 W}{4Mg}\right)^2\right].$$ Innsetting i ② gir

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{\rho\pi D_0^2 W}{4M}\right)^2\xi = 0, \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega = \frac{\rho\pi D_0^2 W}{4M}}$$

Løsning Oppgave 3

a) Ifølge formelark er tornadoens strømfunksjon

$$\underline{\Psi = \frac{\lambda}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r}, \quad \text{hvor } \lambda < 0 \text{ for sluk.}$$

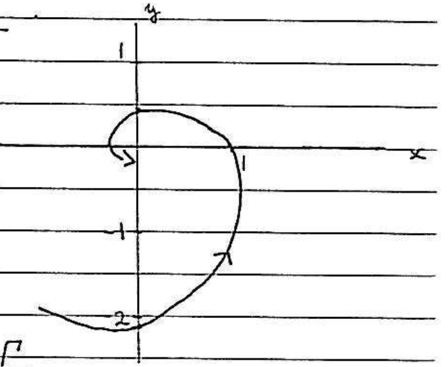
Strømlinjer tilsvarer Ψ = konstant. Da $\ln r = -\frac{2\pi\Psi}{\Gamma} + \frac{\lambda\theta}{\Gamma}$

fås $$r = r(\theta) = e^{-2\pi\Psi/\Gamma}\cdot e^{\lambda\theta/\Gamma}$$

$$\underline{r = e^{-2\pi\Psi/5600}\cdot e^{-\theta/2}}.$$

$\Psi = 0$ gir $r = e^{-\theta/2}$.

θ	$-\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π
r	4,81	2,19	1	0,46	0,21



Hastighetskomponenter:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad V_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \Rightarrow$$

$$V^2(r) = V_r^2 + V_\theta^2 = \frac{\lambda^2 + \Gamma^2}{(2\pi r)^2} = \frac{2800^2 + 5600^2}{(2\pi r)^2}$$

$$\underline{V(r) = \frac{996}{r}}$$

b) Inkompressibel strømning kan antas inn til $V/c = 0{,}3$, d.v.s.

$$\frac{996}{r_g\cdot 340} = 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad \underline{r_g = 9{,}76\text{ m}}$$

For potensialstrømning er Bernoullis konstant den samme overalt, d.v.s. $p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho \underbrace{V_\infty^2}_{0} = p_\infty$.

Gage-trykk $p - p_\infty = -\frac{1}{2}\rho V^2$. Med $r_g = 9{,}76$ m fås

$$\underline{p_g - p_\infty} = -\frac{1}{2}\cdot 1{,}20\cdot\left(\frac{996}{9{,}76}\right)^2 \simeq -6250\text{ Pa} = \underline{-6{,}25\text{ kPa}}$$

Løsning Oppgave 3, forts.

c) Eulerligningen for stasjonær strømning, når gravitasjonsfeltet utelates:

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

Langs strømlinje s:

$$V\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$$

Integrerer langs strømlinjen:

$$\int V\,dV + \int \frac{dp}{\rho} = 0$$

Da $\int V\,dV = \frac{1}{2}V^2 + \text{konstant}$, kan dette skrives

(1) $\underline{\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = C = \text{konstant langs strømlinje}}$

Adiabatisk strømning: $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{konstant} \equiv K$ gir

$\frac{dp}{d\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1}$, slik at

$$\int \frac{dp}{\rho} = K\gamma\int \rho^{\gamma-2}\,d\rho = \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} =$$

$= \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$. Her kan det opptre en integrasjonskonstant, som vi trekker inn i "sekkekonstanten" C i (1).

Altså $\underline{\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = C.}$ Bernoullis ligning for adiabatisk strømning.

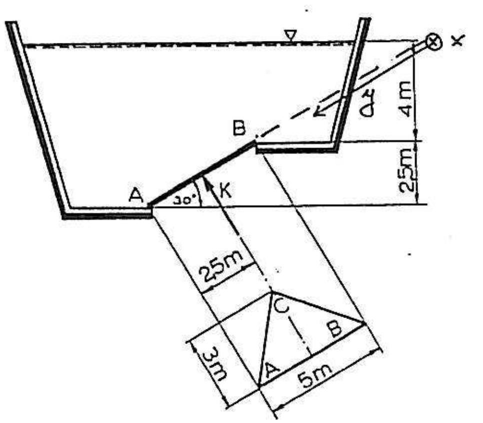
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: (735) 93555

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 61124 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. VII
Tirsdag 6. august 1996
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.
Trykte hjelpemidler:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet

<u>Oppgave 1</u>



I bunnen av et basseng er det en trekantet luke ABC beliggende slik at sidekanten AB er parallell med figurens plan. Luka kan åpnes med en kraft K som virker vinkelrett på lukas plan i punktet C. Bassenget er fylt med vann til en høyde 4 m over punktet B, og til 6,5 m over punktet A. Vinkelen mellom lukas plan og horisontalplanet er 30^0. Se bort fra atmosfæretrykket, og sett $\gamma = 10^4$ Pa/m.

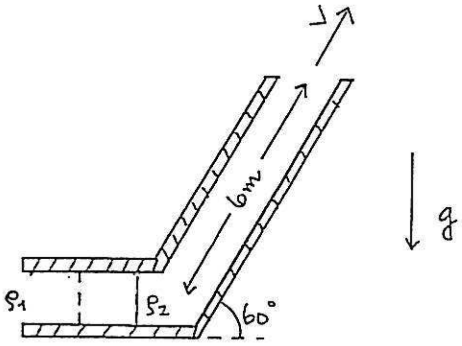
a) Finn den resulterende hydrostatiske trykkraft F på luka.

b) Legg y-aksen i figurens plan, parallelt med AB, og la x-aksen peke vinkelrett inn i planet som vist på figuren. Finn y-koordinaten y_p for trykksenteret.

Oppgitt: For en likebent trekant med grunnlinje b og høyde h ligger centroiden h/3 over grunnlinjen. Flatens treghetsmoment omkring en akse langs høyden er $I_{xc} = b^3h/48$.

c) I x-retningen vil trykksenteret ligge i avstanden h/3 = 1 m fra grunnlinjen AB. Hvorfor? Benytt dette til å beregne hvor stor kraften K må være for å åpne luka når denne er hengslet langs AB.

<u>Oppgave 2</u>



Luft med opprinnelig tetthet ρ_1 kommer inn i et kammer (peis) hvor den varmes opp og får tettheten ρ_2. Den oppvarmede lufta stiger opp gjennom en skorstein som danner vinkelen 60^0 med horisontalplanet. Skorsteinens lengde er 6 m. Luftas utløpshastighet til fri atmosfære er V. Anta at lufta er inkompressibel, bortsett fra i forbrenningssonen. Luftas kinetiske energi kan neglisjeres i kammeret. Tyngdens akselerasjon er g.

Finn V, når det oppgis at lufttemperaturen er $t_1 = 5^0$ C, og at temperaturen i kammeret etter oppvarmingen er $t_2 = 150^0$ C.

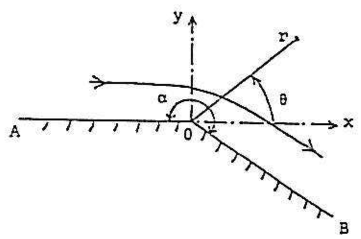
Oppgave 3

a) For todimensjonal stasjonær potensialstrømning vil differansen i strømfunksjonen ψ mellom to strømlinjer være lik volumstrømningen mellom strømlinjene.
Vis det.
Gi også en kort utledning av den grensebetingelse som ψ må oppfylle på en fast overflate.

b) Vis at

$$\psi = Ar^{m+1} \sin[(m+1)\theta - m\pi],$$

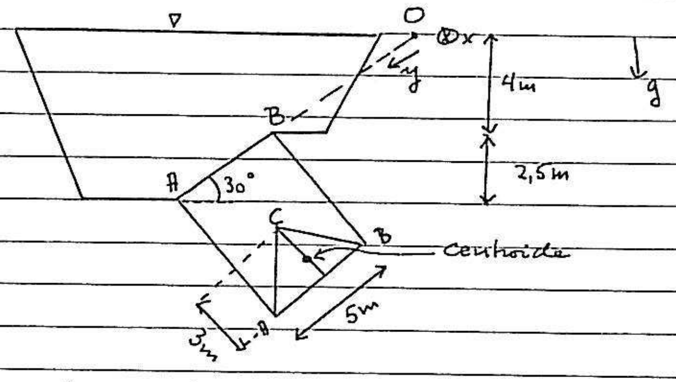
hvor konstanten A er positiv og m et negativt tall mellom -1/2 og 0, er strømfunksjonen for potensialstrømning rundt et hjørne AOB med utvendig vinkel $\alpha = \pi/(m+1)$ (se figuren). [Hint: Vis at $\nabla^2\psi = 0$, og at grensebetingelsen for ψ på flaten AOB er oppfylt.]



c) Regn ut hastighetskvadratet $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2$, og vis at trykket p avhenger av r men er uavhengig av θ. Finn p(r), når trykket p(1) for r = 1 er kjent, lik p_1. Væskens tetthet kalles ρ. Tyngden neglisjeres.

61124 FLUIDMEKANIKK, 6. august 1996 (1)

Løsning Oppgave 1

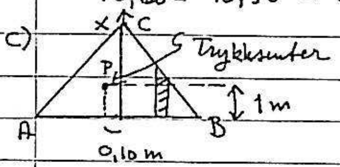


a) $F = \gamma h_c A$, hvor centroidens dybde er
$h_c = 4 + \frac{2,5}{2} = 5,25$ m (centroiden ligger på trekantens midtlinje).
Trekantens areal $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7,5 \text{ m}^2$
$\Rightarrow F = 10^4 \cdot 5,25 \cdot 7,5 = \underline{3,94 \cdot 10^5 \text{ N}}$

b)
Formel $y_p = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A}$

Av figuren: $y_c = OB + \frac{5}{2} = 8 + \frac{5}{2} = 10,5$ m.
Av oppgitt formel: $I_{xc} = \frac{1}{48} b^3 h = \frac{1}{48} \cdot 5^3 \cdot 3 = 7,81 \text{ m}^4$
$\Rightarrow$
$y_p = 10,5 + \frac{7,81}{10,5 \cdot 7,5} = \underline{10,60 \text{ m}}$ (trykksenteret ligger
10,60 − 10,50 = 0,10 m nedenfor trekantens symmetrilinje).

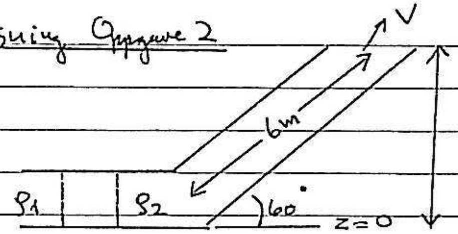
c)



Det er ingen trykkvariasjon over en areal-stripe som er parallell med x-retningen (skravert stripe). Ved å ta kraftmomentet om AB fås derfor samme integral som når en tar flatemomentet. Trykksenterets avstand fra AB derfor den samme som flatesenterets, dvs. $x_p = x_c = h/3 = 1$ m.
Momentbalanse: $K \cdot 3 = F \cdot 1 = 3,94 \cdot 10^5$

$\underline{K = 1,31 \cdot 10^5 \text{ N}}$

Løsning Oppgave 2



Tilstandsligningen er $p = \rho R T$. Betingelsen konstant trykk over forbrenningssonen gir ρT = konstant, altså $\rho_1/\rho_2 = T_2/T_1$.

Inkompressibel gass i pipa gjør at Bernoulli kan benyttes:

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\rho_2 V_2^2}_{\text{negl.}} + p_0 + 0 = \tfrac{1}{2}\rho_2 V^2 + (p_0 - \rho_1 g z) + \rho_2 g z$$

↑ atmosfæretrykk etter forbrenningssonen

Her er benyttet at trykket er det samme like innenfor som like utenfor utløpet av pipa.

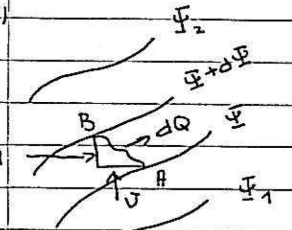
$$V = \sqrt{\frac{2(\rho_1-\rho_2)gz}{\rho_2}} = \sqrt{2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}-1\right)gz}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{T_2}{T_1}-1\right)gz} = \sqrt{2\left(\frac{423}{278}-1\right)\cdot 9{,}81 \cdot 6 \cdot \sin 60°}$$

$$\underline{V = 7{,}3 \text{ m/s}}$$

Løsning Oppgave 3

a)



Forskjell i Ψ mellom to strømlinjer Ψ_1 og Ψ_2:

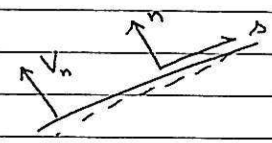
$$\Psi_2 - \Psi_1 = \int_1^2 d\Psi = \int_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \int_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy$$

$$= \int_1^2 (-v\,dx + u\,dy).$$

På figuren er $dx < 0$ og $dy > 0$ når en går fra A til B. Dermed er $(-v\,dx + u\,dy) = dQ$, og

$\underline{\Psi_2 - \Psi_1} = \int dQ = \underline{Q_{12}}$, volumstrømningen.

Grensebetingelse fast overflate:



Da normalkomponenten $V_n = -\partial\Psi/\partial s$ må være null på flaten, følger Ψ = konstant på flaten.

b)

Gitt $\Psi = A r^{m+1} \sin[(m+1)\theta - m\pi]$

Av formelark:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$$

Regner ut

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \cancel{A(m+1)r^m \sin[(m+1)\theta - m\pi]}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = A(m+1)^2 r^m \sin[(m+1)\theta - m\pi]$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -A(m+1)^2 r^{m-1} \sin[(m+1)\theta - m\pi]$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\nabla^2 \Psi} = \frac{1}{r}\cdot A(m+1)^2 r^m \sin[(m+1)\theta - m\pi] - A(m+1)^2 r^{m-1}\sin[(m+1)\theta - m\pi] = \underline{0}$$

6. august 1996 ④

Grensebetingelser:

Flaten AO, $\theta = \pi$: $\Psi = A r^{m+1} \sin[(m+1)\pi - m\pi] = \underline{0}$

Flaten OB, $\theta = -(\alpha - \pi) = \frac{m\pi}{m+1}$: $\Psi = A r^{m+1} \sin(m\pi - m\pi) = \underline{0}$

Altså er Ψ konstant over hele flaten AOB. Dermed gir Ψ en potensialstrømning.

c) Hastighetskomponenter:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = A(m+1) r^m \cos[(m+1)\theta - m\pi]$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -A(m+1) r^m \sin[(m+1)\theta - m\pi]$$

$$\Rightarrow \underline{V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = A^2(m+1)^2 r^{2m}}, \text{ uavhengig av } \theta.$$

Bernoulli: $p(r,\theta) + \frac{1}{2}\rho V^2(r) =$ konstant over hele fluidet.
Altså er $p(r,\theta) = p(r)$, uavhengig av θ.
Benytter et vilkårlig punkt på sirkelen $r = 1$ i Bernoulli:

$$p(r) + \frac{1}{2}\rho A^2 (m+1)^2 r^{2m} = p_1 + \frac{1}{2}\rho A^2 (m+1)^2 \cdot 1^{2m}$$

$$\Rightarrow \underline{p(r) = p_1 + \frac{1}{2}\rho A^2 (m+1)^2 (1 - r^{2m}).}$$

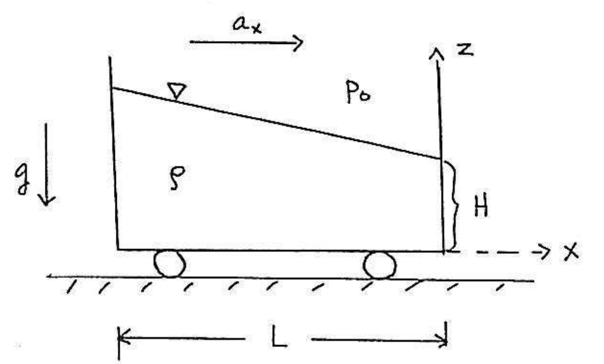
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: (735) 93555

EKSAMEN I FAG 61124 / 66031 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. VII
Mandag 6.mai 1996
Tid: kl. 0900 - 1300

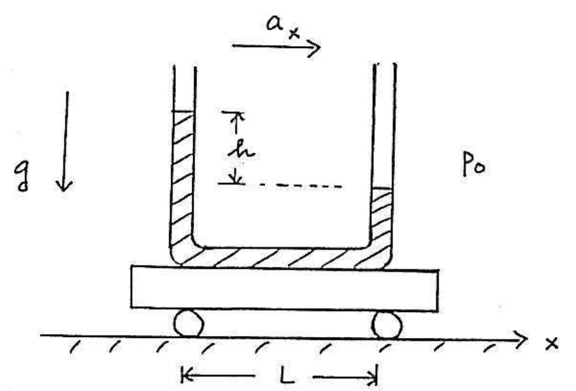
Hjelpemidler: B2- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU tillatt.
Bestemte trykte hjelpemidler tillatt:
Formelsamling i matematikk
Formelliste, vedheftet oppgavesettet

Oppgave 1



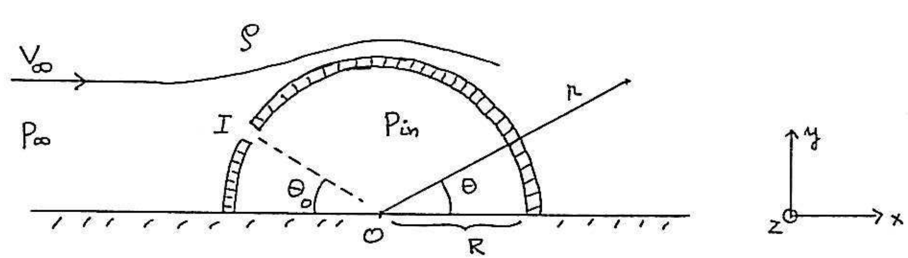
a) En vannvogn av lengde L akselereres langs x-aksen med konstant akselerasjon a_x. Vannets tetthet er ρ, atmosfæretrykket er p_0, og tyngdens akselerasjon er g. Finn trykket p(x,z) i vannet, idet du legger koordinatsystemet fast i vognen som vist på figuren. Vanndybden H ved x = 0 antas kjent.

b)



Et U-rør er delvis fylt av en væske. Røret er festet til en vogn som akselererer langs x-aksen med konstant akselerasjon a_x, og skal benyttes til å måle størrelsen av a_x. En leser av høydeforskjellen h i røret. Finn a_x som funksjon av g, h og L.

Oppgave 2



En igloo (snøhytte) har form av en halvsylinder med radius R. Se bort fra veggtykkelsen. Lufta antas friksjonsfri, med konstant tetthet ρ. Det blåser en vind på tvers mot iglooen, med opprinnelig hastighet V_∞ som vist på figuren. Legg origo i punktet O.

a) Hastighetspotensialet Φ for potensialstrømningen på utsiden ($r \geq R$) oppgis å ha formen

$$\Phi = V_\infty \left(r + \frac{k}{r} \right) \cos\theta \,,$$

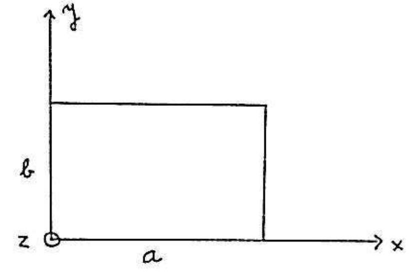
hvor k er en konstant. Bestem verdien av k. Finn også strømfunksjonen Ψ på utsiden.

b) Finn trykket $p(R, \theta)$ på utsiden av veggen. Inngangen til iglooen er markert med I på figuren. Her i oppgaven skal det antas at bredden av åpningen er meget liten i forhold til R.

Anta først at I ligger nede ved platået (vinkel $\theta_0 = 0$). Hva er da den vertikale nettokraft F_y på iglooen, per lengdeenhet i z-retningen? [Hint: Trykket p_{in} inne i iglooen er alltid lik trykket ved inngangen.]

c) Du finner at $F_y > 0$, slik at iglooen blir utsatt for en løftekraft. Når vinden er sterk, kan denne kraften true med å løfte hele iglooen til værs. En av eskimoene innser imidlertid at man kan unngå problemet ved å flytte inngangen et stykke opp på veggen, tilsvarende en vinkel $\theta_0 > 0$ på figuren. For hvilken verdi av θ_0 vil løftekraften F_y bli lik null?

Oppgave 3



En rektangulær tank med sidekanter a og b er fylt med vann opp til høyden d. Figuren viser tanken sett ovenfra. Horisontale akser er x og y. La z-aksen peke oppover, og la planet $z = 0$ falle sammen med vannspeilet når vannet er i ro.

Oppgaven i det følgende går ut på å analysere de mulige stasjonære svingemodene til den fria overflate i tanken.

a) Gi først en kort utledning av den kinematiske betingelse for den frie overflaten. Bruk denne, samt den dynamiske overflatebetingelse (Bernoullis ligning) til å utlede den frie overflatebetingelse for hastighetspotensialet Φ i lineær teori:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \,, \qquad z=0.$$

b) Hastighetspotensialet oppgis å ha formen

$$\Phi = f(x,y)\cosh k(z+d)\cos\omega t \ .$$

Forklar hvorfor funksjonen f(x,y) må oppfylle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0 \ .$$

Finn dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(k)$.

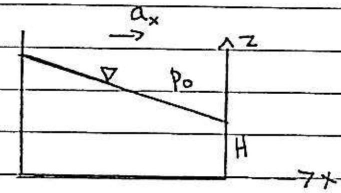
c) Anta at f(x,y) har formen

$$f = \cos px \cos qy \ ,$$

hvor p og q er konstanter. Betrakt de kinematiske grensebetingelsene ved tankens sidevegger, $x = 0,a$ og $y = 0,b$. Hvilke krav setter disse betingelsene på verdiene av p og q ? Finn de mulige verdiene av bølgetallet k samt vinkelfrekvensen ω.

61124 FLUIDMEKANIKK, FYSIKK, 6. mai 1996. (1)

Løsning Oppgave 1



a) Bevegelsesligning i det akselererte koordinatsystem:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{a} + \vec{g} \ ,$$ hvor $-\vec{a}$ er fiktivkraft per masseenhet. $\vec{a} = (a_x, 0, 0)$, $\vec{g} = (0, 0, -g)$

Skriver ligningen slik:

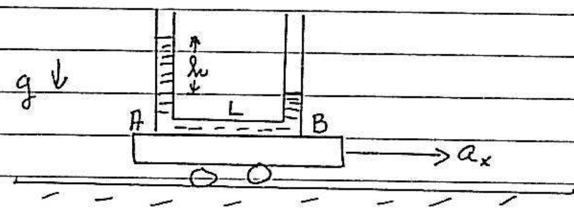
$\nabla\left(\frac{p}{\rho} + a_x x + gz\right) = 0 \ , \Rightarrow \ \frac{p}{\rho} + a_x x + gz = C$,

hvor C er en konstant, uavhengig av koordinatene x og z.

C bestemmes av at $p = p_0$ for $x = 0$, $z = H$:

$\frac{p_0}{\rho} + gH = C$. Altså $p(x,z) = p_0 - \rho a_x x - \gamma z + \gamma H$ (1)

b)



Av ligning (1) ovenfor er trykkforskjellen mellom punktene A og B

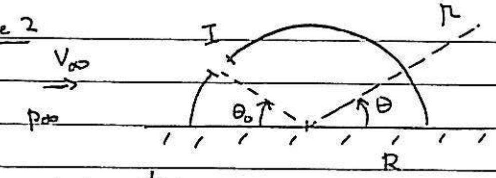
$$p_A - p_B = \rho a_x \cdot L.$$

Denne må balansere den statiske trykkforskjellen γh.

Altså $\rho a_x L = \rho g h$, $a_x = gh/L$

Svaret er uavhengig av væskens tetthet ρ.

Oppgave 2



a)

Av $\Phi = V_\infty(r + \frac{k}{r})\cos\theta$ finnes

$$V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = V_\infty(1 - \frac{k}{r^2})\cos\theta, \qquad V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -V_\infty(1 + \frac{k}{r^2})\sin\theta$$

Da $V_r = 0$ for $r = R$, følger $\underline{k = R^2}$

Strømfunksjonen Ψ finnes av

$$V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = V_\infty(1 - \frac{R^2}{r^2})\cos\theta,$$

$$\underline{\Psi = V_\infty(r - \frac{R^2}{r})\sin\theta}$$

b) For potensialstrømning er Bernoullis konstant den samme overalt.

Altså

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}V_\infty^2 = \frac{p(R,\theta)}{\rho} + \frac{1}{2}V_\theta^2(R,\theta).$$

Innsetting av $V_\theta(R,\theta) = -2V_\infty\sin\theta$ gir $\underline{p(R,\theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)}$

Hvis $\theta_0 = 0$:

$$p_{in} = p(R, \theta = \pi) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2.$$

Vertikalkraft per lengdeenhet $\underline{F_y} = \int_0^\pi [p_{in} - p(R,\theta)]\sin\theta \cdot R\,d\theta$

$$= 2\rho V_\infty^2 R\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta = 2\rho V_\infty^2 R\int_{-1}^1 (1-t^2)\,dt = \underline{\frac{8}{3}\rho V_\infty^2 R}$$

c)

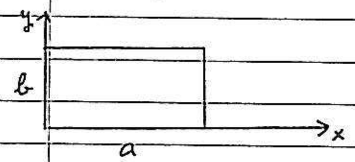
Med I i posisjon θ_0 blir $p_{in} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta_0)$

$$\Rightarrow F_y = \int_0^\pi \left\{\left[p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta_0)\right] - \left[p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)\right]\right\}\sin\theta \cdot R\,d\theta$$

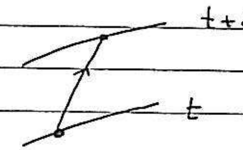
$$= 2\rho V_\infty^2 R\int_0^\pi (\sin^2\theta - \sin^2\theta_0)\sin\theta\,d\theta = 2\rho V_\infty^2 R\left(\frac{4}{3} - 2\sin^2\theta_0\right)$$

$F_y = 0$ for $\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\underline{\theta_0 = 54{,}7^\circ}$

Oppgave 3



a) Fri overflate ved tiden t og ved tiden $t + dt$:



En fluidpartikkel i overflaten ved t vil være i overflaten ved $t + dt$ også. Deriverer $\eta = \eta(x,y,t)$ langs partikkelens bane:

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ettersom partikkelen følger overflaten er $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$.

Da $D\eta/Dt = w$, følger den kinematiske betingelsen

$$\underline{\frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x}\Big|_{z=\eta} + v\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big|_{z=\eta} = w(\eta).}$$

Gjelder også i ikke-lineær teori

Bernoulli, fri overflate: $\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2}V^2(\eta) + \frac{p_0}{\rho} + g\eta = C.$

Velger $C = \frac{p_0}{\rho}$, slik at

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2}V^2(\eta) + g\eta = 0.$$

Lineær approksimasjon:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad z = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad z = 0.$$

Herav følger den frie overflatebetingelse:

$$\underline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0.}$$

Oppgave 3 b

Inkompressibilitet $\nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2 \Phi = 0$ gir, ved innsetting av $\Phi = f(x,y)\cosh k(z+d)\cos\omega t$, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0. \qquad (1)$$

Regner ut

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 f \cosh k(z+d)\cos\omega t$$

$$g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = gkf \sinh k(z+d)\cos\omega t.$$

Sett $z = 0$. Fri overflatebetingelse gir

$$-\omega^2 f\cosh kd\cos\omega t + gkf\sinh kd\cos\omega t = 0$$

$$\underline{\omega^2 = gk\tanh kd}.$$ Samme som for propagerende bølger.

c)

Innsetting av $f = \cos px\cos qy$ gir

$$\Phi = \cos px\cos qy\cosh k(z+d)\cos\omega t.$$

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -p\sin px\cos qy\cosh k(z+d)\cos\omega t$$

$$v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -q\cos px\sin qy\cosh k(z+d)\cos\omega t.$$

Må ha $u = 0$ for $x = 0, a$, og $v = 0$ for $y = 0, b$.

$\Rightarrow \sin pa = 0, \quad \sin qb = 0$

Altså $p = m\pi/a, \quad q = n\pi/b$, m og n hele tall.

Av (1) følger $p^2 + q^2 = k^2$.

Tillatte verdier av k altså

$$k = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$, med tilhørende vinkelfrekvens

$$\underline{\omega = \sqrt{gk\tanh kd}}$$