ELEMENTÆR UTLEDNING AV FLUIDMEKANIKKENS GRUNNLIGNINGER

Iver Brevik

Energi- og prosessteknikk
NTNU

2011

FORORD

Hensikten med dette lille kompendiet er å gi en utledning av grunnligningene i fluidmekanikken uten å benytte et tungt formelapparat. Vanligvis vil en se i lærebøkene at utledningene bygger på Reynolds' transport-teorem. Det er en elegant og fullstendig metode i og for seg, men erfaringsmessig noe tøft for studenter i 2. årskurs. Grunnligningene kan utledes (iallfall sannsynliggjøres) på noe enklere vis.

Grundigere utledninger kan en finne f. eks. i Frank M. White, "Fluid Mechanics". Dette er en teknologisk bok.

Andre bøker, skrevet mer spesielt for fysikere men også mer avansert matematisk, er

L.D. Landau & E.M. Lifshitz, "Fluid Mechanics" (Pergamon 1987).

P.K. Kundu & I.M. Cohen, "Fluid Mechanics" (Elsevier 2004)

B. Lautrup, "Physics of Continuous Matter", 2nd. ed. (2011).

—

Første utgave av dette kompendiet kom i 2010.
I 2011-utgaven er noen mindre trykkfeil rettet opp.
Kapitlene 8–10 er nye.

1. GRUNNLAG. KONTINUUMSMODELLEN

Et fluid er en fellesbetegnelse på væske (liquid) og gass. Teorien hviler på kontinuumshypotesen (- modellen), som betyr at vi kan se på systemet som et "utsmurt" system, karakterisert ved massetetthet ρ med dimensjon $[\rho] = kg/m^3$. Hypotesen gjelder over et stort skalaområde. Selvfølgelig gjelder den ikke for atomære skalaer, men den gjelder ofte for sub-mikron dimensjoner slik at vi kan benytte fluiddynamikk på væskedråper med radius $a \lesssim 1\,\mu m$ $(1\,\mu m = 10^{-6}\,m)$.

En benytter ofte fluiddynamikk på store systemer også. Vår galakse inneholder $\sim 200 \cdot 10^9$ stjerner, og det er minst $200 \cdot 10^9$ galakser ialt. Så i kosmologisk sammenheng er det fullt legitimt å betrakte vår galakse som ett massepunkt!

Hastigheten til et fluidelement med volum $\delta\mathcal{V} = \delta x\, \delta y\, \delta z$ skal vi kalle $\vec{V}$. Dens komponenter kalles (u, v, w). Altså i kartesiske koordinater

$$\vec{V} = \vec{i}\,u + \vec{j}\,v + \vec{k}\,w, \qquad (1.1)$$

hvor $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ er enhetsvektorene i (x,y,z) retning. Generelt er $\vec{V}$ tidsavhengig, $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z,t)$ eller $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r},t)$. Stasjonær strømning når $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r})$.

Vi trenger ofte nabla-operatoren, ∇. Som kjent er den i kartesiske koordinater gitt ved

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \, . \qquad (1.2)$$

Dette er en operator, ikke et tall. Ved å ta skalarproduktet av ∇ og $\vec{V}$ fås

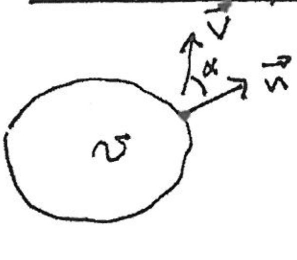
$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \, . \qquad (1.3)$$

Dette er divergensen til $\vec{V}$, en skalar størrelse, et tall.

Vi trenger også curl til $\vec{V}$, en vektor. Vi skal skrive den slik: $\nabla \times \vec{V}$. Komponentene er

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \vec{V})_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\
(\nabla \times \vec{V})_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\
(\nabla \times \vec{V})_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \, .
\end{aligned} \qquad (1.4)$$

<u>Gauss' integrasjonsteorem:</u> Betrakt en vilkårlig lukket integrasjonsflate, med utover-rettet normal $\vec{n}$



(lengden $|\vec{n}|$ av $\vec{n}$ er altså lik 1).

Skalarproduktet av $\vec{V}$ og $\vec{n}$ på overflaten A er $\vec{V} \cdot \vec{n} = V \cos\alpha$. Ved integrasjon av $\nabla \cdot \vec{V}$ over volumet $\mathcal{V}$ vil ifølge Gauss

$$\int_{\text{VOLUM}} \nabla \cdot \vec{V}\, \delta\mathcal{V} = \oint_{\text{OVERFLATE}} (\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA \, . \qquad (1.5)$$

<u>Bevegelsesligningene</u> til fluidet kan jo ikke være noe annet enn Newtons 2. lov,

$$\vec{F} = m\vec{a} , \qquad (1.6)$$

hvor $\vec{F}$ er kraften (dimensjon $[\vec{F}] = N$) og $\vec{a}$ er akselerasjonen ($[a] = m/s^2$). I fluidmekanikken er det vanlig å skrive akselerasjonsleddet på venstre side, og dessuten betrakte én masseenhet av fluidet. Herav $\vec{F} \to \vec{f}$, hvor $\vec{f}$ er krafttettheten ($[\vec{f}] = N/m^3$), og massen $m \to \rho$ ($[\rho] = kg/m^3$). Vi får dermed

$$\rho\vec{a} = \vec{f} . \qquad (1.7)$$

På vårt trinn vil vi ta i betraktning følgende 3 bidrag til krafttettheten $\vec{f}$:

1) Trykkraft, $\vec{f}_{PRESS}$ (benytter engelske subscripts).
Hvis trykket omkring et volumelement er forskjellig i forskjellige retninger, vil det oppstå en resulterende trykkraft på elementet.

2) Tyngdekraft, $\vec{f}_{GRAV}$. Den kan vi skrive opp med én gang,

$$\vec{f}_{GRAV} = \rho\vec{g} , \qquad (1.8)$$

hvor $\vec{g} = (0, 0, g_z) = (0, 0, -g)$ med
$g = +9,81 \ m/s^2$ er tyngdens akselerasjon.
(z-aksen regnes konvensjonelt positiv oppover.)

3) Viskøs kraft, $\vec{f}_{VISC}$, fra fluidets viskositet eller seighet.

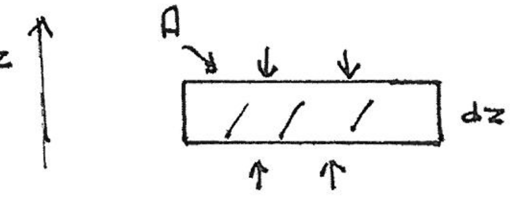
Så langt altså

$$\rho \vec{a} = \vec{f}_{PRESS} + \vec{f}_{GRAV} + \vec{f}_{VISC}. \qquad (1.9)$$

Vi vil komme tilbake til uttrykkene for $\vec{f}_{PRESS}$ og $\vec{f}_{VISC}$ senere.

Først skal vi imidlertid behandle tilfellet hydrostatikk, $\vec{V} = 0$.

2. STATIKK



Betrakt et skiveformet element av et fluid i ro, f.eks. atmosfæren hvor $\rho = \rho(z)$. Tverrsnitt er A, høyden er dz. Trykket p er kraft fra omgivelsene, per enhet av tverr-snittet. Dimensjon altså $[p] = N/m^2 \equiv Pa$. Kraft på elementets underside er $p \cdot A$, mens kraft på oversiden er $(p+dp)\cdot A$. Resulterende kraft $pA - (p+dp)A$ i retning oppover må ved likevekt balansere tyngdekraften $\rho g A\, dz$ i retning nedover:

$$-A \cdot dp = \rho g A \cdot dz,$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\frac{dp}{dz} = -\rho g} \qquad (2.1)$$

Vi ser at $p = p(z)$, p er uavhengig av x og y.

Viktig setning i hydrostatikken:

Trykket p er det samme i samme horisontale plan, for en og samme væske.

Fra (2.1) ser en at krafttettheten kan skrives på vektorform som en gradient:

$$\underline{\vec{f}_{PRESS} = -\nabla p.} \qquad (2.2)$$

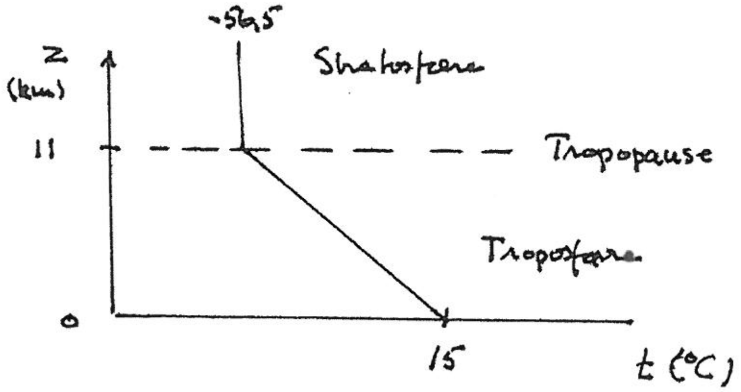
Merk at p er en skalar størrelse, ikke en vektor.

Atmosfæren

Standardatmosfæren er en fast, ideell atmosfære, som kan tjene som referanse og likevel gi et rimelig bilde av virkeligheten i de fleste tilfeller. Temperaturen ved havoverflaten i standardatmosfæren er definert som

$$t_0 = 15\,^\circ C, \quad \text{dvs.} \quad T_0 = t_0 + 273 = 288\,K.$$

Av mest interesse er troposfæren, som strekker seg opp til høyden $z = 11$ km. Temperaturen $T(z)$ i troposfæren avtar lineært med høyden.



Tropopausen ligger i (det tilnærmede) knekkpunkt. På oversiden av knekkpunktet ligger standard stratosfære, hvor temperaturen settes lik $t = -56,5\,^\circ C$ opp til ca 20 km høyde.

Temperaturfallet i troposfæren er 6,5 grader per km:

$$T(z) = T_0 - Bz, \tag{2.3}$$

hvor

$$B = 0{,}0065\ K/m.$$

Tilstandsligningen i aerodynamikken skrives vanligvis slik:

$$p = \rho R T. \qquad (2.4)$$

Dette betyr at vi betrakter én masseenhet, med volum $1/\rho$. Videre er R den <u>spesifikke</u> gasskonstant:

$$R = 287 \ \frac{J}{K \cdot kg}.$$

Merk at (2.4) medfører at $\frac{p}{\rho T}$ = KONSTANT.
Ofte nyttig å skrive tilstandsligningen slik:

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0}, \qquad (2.5)$$

hvor indeks 0 refererer til havoverflaten, $z = 0$.

Trykkvariasjonen $p = p(z)$ i stratosfæren finnes ved å gå tilbake til (2.1) og sette inn $\rho = p/RT$:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}\,dz = -\frac{g}{R(T_0 - Bz)}\,dz$$

Denne kan nå integreres:

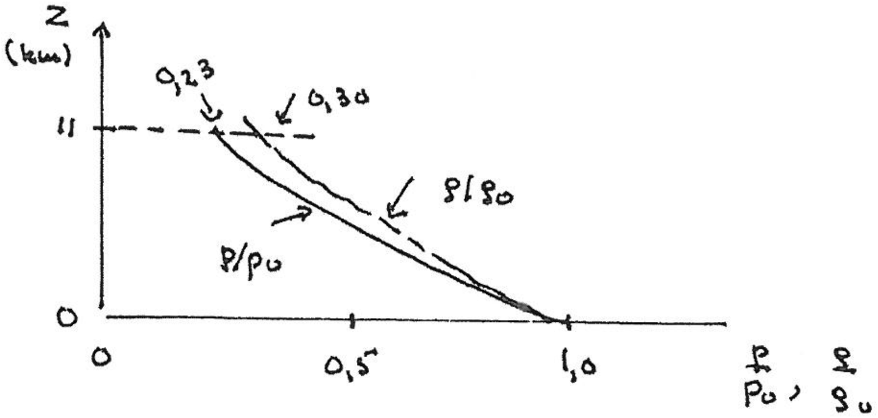
$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R}\int_0^z \frac{dz}{T_0 - B\cdot z}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{p}{p_0} = \frac{g}{RB}\ln\frac{T}{T_0} = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/RB},$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5{,}26}. \qquad (2.6)$$

Ved å benytte (2.5), $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T} \cdot \frac{p}{p_0}$, finnes da det tilsvarende tetthetsforhold,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{4,26} . \qquad (2.7)$$



Inkompressibelt fluid

Da innføres ofte symbolet γ, "spesifikk tyngde",

$$\gamma = \rho g = \text{KONSTANT}.$$

Dimensjon $[\gamma] = \mathrm{Pa/m}$. Ligning (2.1) gir

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma , \qquad (2.8)$$

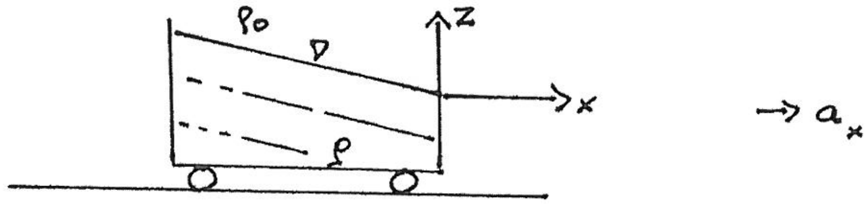
som ved integrasjon gir

$$p_2 - p_1 = -\gamma\,(z_2 - z_1) \qquad (2.9)$$

3. KONSTANT AKSELERASJON

Slike tilfeller kan ofte behandles enkelt ved bruk av hydrostatikk.

Linear akselerasjon



Betrakt en vogn med vann, i uniform akselerasjon $\vec{a} = a_x \vec{i}$ i x-retning.

Bevegelsesligning, sett fra lab-systemet:

$$\rho \vec{a} = -\nabla p + \rho \vec{g} . \qquad (3.1)$$

Del på ρ og flytt akselerasjonsleddet over til høyre:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} - \vec{a} . \qquad (3.2)$$

Benytter nå følgende "knep":

Betrakt (3.2) som bevegelsesligningen i det medfølgende koordinatsystem, hvor forholdene er statiske. Da er det riktig at venstre side av (3.2) (akselerasjonsleddet) er lik null. På høyre side opptrer de kjente kreftene $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ per masseenhet fra trykk, pluss gravitasjonskraften $\vec{g}$. Siste ledd $-\vec{a}$ i (3.2) er imidlertid en ny, fiktiv, kraft, forårsaket av akselerasjonen.

Ligning (3.2) kan enkelt integreres:

$\rho = \text{KONST} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right).$

Da $\nabla z = \vec{k}$ blir $\vec{g} = -g\vec{k} = -g\nabla z = -\nabla(gz).$

Da $\nabla x = \vec{i}$ blir $\vec{a} = a_x\vec{i} = a_x \cdot \nabla x = \nabla(a_x \cdot x).$

$\Rightarrow \quad 0 = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) - \nabla(gz) - \nabla(a_x \cdot x)$, eller

$\nabla\left(\frac{p}{\rho} + gz + a_x \cdot x\right) = 0$, som gir

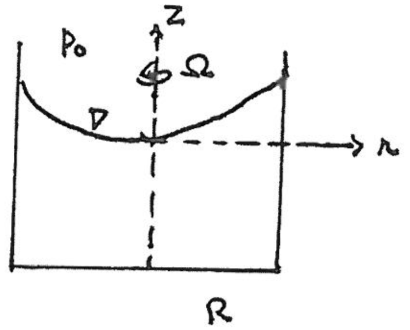
$$\underline{\frac{p}{\rho} + gz + a_x \cdot x = C \text{ , en konstant.}} \qquad (3.3)$$

Verdien av C avhenger av problemet. Hvis origo legges som på figuren, slik at $p = p_0$ for $x = z = 0$, blir $C = p_0/\rho$.

Isobarer, $p =$ KONSTANT, krever ifg. (3.3) at

$$\underline{gz + a_x \cdot x = \text{KONSTANT}} \qquad (3.4)$$

Uniform rotasjon



Roterende kar med radius R.

Vinkelfrekvens Ω.

Ser på fluidet i det medfølgende roterende system, hvor sentrifugalkraften per masseenhet er $r\Omega^2\vec{e}_r$.

$\vec{e}_r \equiv \hat{r}$ er enhetsvektoren radielt utover.

Ettersom akselerasjonen av fluidet i det roterende system er null, blir bevegelsesligningen

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + r\Omega^2\vec{e}_r \qquad (3.5)$$

SOM FØR FIKTIV KRAFT

Integrasjon av ligningen:

Som før er $\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$, $\vec{g} = -\nabla(gz)$.

Da $\nabla r^2 = 2r\nabla r = 2r\vec{e}_r$, blir $r\vec{e}_r = \frac{1}{2}\nabla r^2$, altså

$$r\Omega^2\vec{e}_r = \frac{1}{2}\Omega^2\nabla r^2 = \nabla\left(\frac{1}{2}r^2\Omega^2\right).$$

Da blir (3.5)

$$0 = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) - \nabla(gz) + \nabla\left(\frac{1}{2}r^2\Omega^2\right), \text{ eller}$$

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} + gz - \frac{1}{2}r^2\Omega^2\right) = 0, \text{ som gir}$$

$$\underline{\frac{p}{\rho} + gz - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 = C, \text{ en konstant.}} \qquad (3.6)$$

Hvis $p = p_0$ ved $z = r = 0$ som på figuren, blir $C = \frac{p_0}{\rho}$.

Isobarer, p = KONSTANT, når $gz - \frac{1}{2}r^2\Omega^2$ = KONSTANT, eller

$$\underline{z = \frac{1}{2g}r^2\Omega^2 + \text{KONSTANT}}$$

4. EULERS LIGNING

Vi skal nå se på de sentrale bevegelsesligningene, i lab-systemet. Den første av dem er Eulers ligning, som forutsetter at fluidets viskositet er neglisjerbar.

Vi begynner med

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}. \qquad (4.1)$$

Det som gjenstår er å uttrykke $\vec{a}$ ved de deriverte av $\vec{V}$. Generelt er

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \qquad (4.2)$$

1-dimensjonal bevegelse:

x - akse

Se først på det enkle tilfelle hvor fluidet beveger seg langs x-aksen. Hastigheten i punkt A er $u_A = u(t,x)$, mens hastigheten i punkt B er $u_B = u(t+\Delta t, x+\Delta x)$. Hastighetsforskjell altså $\Delta u = u_B - u_A = u(t+\Delta t, x+\Delta x) - u(t,x)$. Tar grensen $\Delta t \to dt$, $\Delta x \to dx$ og utvikler til 1. orden:

$$u(t+dt, x+dx) = u(t,x) + dt\,\frac{\partial u}{\partial t} + dx\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad du = dt\,\frac{\partial u}{\partial t} + dx\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

Dividerer med dt, og benytter $\frac{du}{dt} = a_x$, $\frac{dx}{dt} = u$.

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (4.3)$$

3-dimensjonal bevegelse:

Antar nå at hastighetskomponenten u er avhengig av alle 3 koordinater x, y, z i tillegg til tiden:

$$u = u(t, x, y, z).$$

Utvikler til 1. orden slik som før:

$$u(t+dt, x+dx, y+dy, z+dz) = u(t,x,y,z) + dt\frac{\partial u}{\partial t} + dx\frac{\partial u}{\partial x} + $$
$$+ dy\frac{\partial u}{\partial y} + dz\frac{\partial u}{\partial z}, \Rightarrow$$

$$du = dt\frac{\partial u}{\partial t} + dx\frac{\partial u}{\partial x} + dy\frac{\partial u}{\partial y} + dz\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Dividerer med dt og benytter $\frac{du}{dt} = a_x$, $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (4.4)$$

Dette gjelder for alle komponenter, slik at vi kan erstatte u med den fulle hastighet $\vec{V}$:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}. \qquad (4.5)$$

Dette er det generelle uttrykk for $\vec{a}$. Men det kan skrives på mer kompakt form ved å utnytte nabla-operatoren, ∇.

Ta produktet av $\vec{V}$ og ∇:

$$\vec{V}\cdot\nabla = (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k})\cdot(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) =$$
$$= u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (4.6)$$

Dette er en <u>operator</u>. Hvis den anvendes på hastigheten $\vec{V}$, fås

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}. \qquad (4.7)$$

Dette er jo det samme som de 3 siste leddene i (4.5).
Altså kan vi generelt skrive

$$\underline{\vec{a} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}.} \qquad (4.8)$$

Uttrykt som $\vec{a} = \vec{a}_{LOCAL} + \vec{a}_{CONV}$,

ser vi at $\vec{a}_{LOCAL} \equiv \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ er den lokale hastighets-endringen i fast posisjon x, y, z, mens

$\vec{a}_{CONV} \equiv (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$ er den konvektive hastighets-endring ved at fluidelementet beveger seg fra punkt A til B.

Ligning (4.1) blir nå

$$\underline{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}} \qquad (4.9)$$

Dette er Eulers ligning.

Verdt å huske:

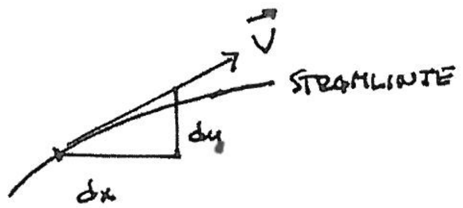
Ligningen forutsetter null (neglisjerbar) viskositet.
Ellers ingen spesielle begrensninger. Ligningen tillater kompressibelt fluid, derfor nyttig for gasser.
Heller intet krav på $\nabla\times\vec{V}$.

5. BERNOULLIS LIGNING

Ett av de mest nyttige teoremer i hydrodynamikken ble oppdaget av Daniel Bernoulli i 1738. Bernoullis ligning uttrykker energibalanse for en ikke-viskøs væske. Vi trenger først å definere begrepet strømlinjer.

Strømlinjer

Vi antar stasjonær strømning. En strømlinje er definert ved at dens tangent har samme retning som hastigheten i punktet.



Ser på 2 dimensjoner, x og y.

Strømlinjens deriverte er lik $\frac{dy}{dx}$. Det er jo det samme som forholdet $\frac{v}{u}$ mellom hastighetskomponentene.

Altså

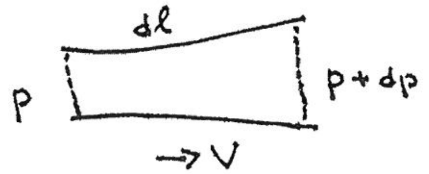
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad . \tag{5.1}$$

Hvis $u = u(x,y)$ og $v = v(x,y)$ er kjente funksjoner, kan strømlinjebildet $y = y(x)$ finnes av (5.1) ved integrasjon.

For en stasjonær strømning er strømlinjene det samme som banelinjene (path lines). Banelinjer er de baner som fluidpartiklene følger.

Bernoullis ligning

En enkel utledning er som følger:



Betrakt et tynt strømrør, med tverrsnitt A. Elementets hastighet er V. Trykkraft på elementets venstre side er pA, og på høyre side $-(p+dp)A$ (endringen i A fra venstre til høyre side er neglisjerbar). Netto trykkraft i strømrørets lengderetning altså $-A \cdot dp$, som ifølge Newtons 2. lov må være lik massen $\rho A \cdot dl$ av elementet multiplisert med akselerasjonen dV/dt:

$$-A \cdot dp = \rho A dl \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{dp}{\rho} = dl \cdot \frac{dV}{dt} = V \cdot dV$$

Integrerer langs strømlinjen, og antar ρ konstant:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \text{KONSTANT}. \qquad (5.2)$$

Konstanten kan ha forskjellig verdi fra strømlinje til strømlinje. Ligningen skrives ofte slik:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{KONSTANT}. \qquad (5.3)$$

Hvis tyngdekraften inkluderes, får en

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{KONSTANT}. \qquad (5.4)$$

Betyr: Energibalanse langs strømlinjen.

Bernoulli fra Eulers ligning

Ved stasjonær strømning blir Eulers ligning

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}.$$

Fra før er $\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$ (inkompressibel strømning), og

$$\vec{g} = -\nabla(gz).$$

Trenger en vektorligning:

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \nabla\left(\tfrac{1}{2}V^2\right) - \vec{V}\times\vec{\zeta}, \qquad (5.5)$$

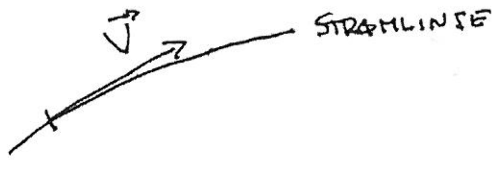
hvor virvlingen (vorticity) er

$$\vec{\zeta} = \nabla\times\vec{V}. \qquad (5.6)$$

Kan nå skrive Euler slik:

$$\nabla\left(\tfrac{1}{2}V^2\right) - \vec{V}\times\vec{\zeta} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) - \nabla(gz) \qquad (5.7)$$

Ta differensialet av denne ligningen langs strømlinjen:



Bidraget fra $\vec{V}\times\vec{\zeta}$ blir null, fordi dette kryssproduktet er ortogonalt til strømlinjen.
Igjen:

$$d\left(\tfrac{1}{2}V^2\right) = -d\left(\frac{p}{\rho}\right) - g\,dz$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{KONSTANT}$ langs strømlinje,

som før.

Viktig spesialtilfelle: Virvling $\vec{\zeta} = 0$

I dette tilfelle er det likegyldig om vi betrakter en strømlinje eller ikke; bidraget fra leddet $\vec{V} \times \vec{\zeta}$ blir simpelthen null. Derfor, for curl-fri strømning gjelder Bernoulli mellom to <u>vilkårlige</u> punkter.

Eksempel

Gitt en 2-dimensjonal strømning i horisontalplanet. Benytter plane polarkoordinater r og θ. Strømningen består av 2 deler:

I indre område er asimutal hastighet

$$V_\theta = r\omega \,, \quad r \leq r_0 \,, \quad \omega \text{ konstant}, \tag{5.8}$$

mens i ytre område er

$$V_\theta = \frac{A}{r} \,, \quad r > r_0 . \tag{5.9}$$

[Strømningen (5.9) kalles en naturlig virvel.]

Vi bestemmer først konstanten A ved at V_θ må være kontinuerlig ved $r = r_0$:

$$r_0 \omega = A / r_0 \,, \qquad \underline{A = r_0^2 \omega}$$

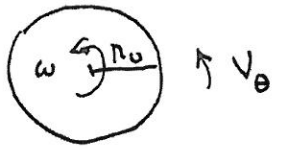
VIRVLING

$$r < r_0: \quad \zeta_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \omega) = 2\omega ,$$

$$r > r_0: \quad \zeta_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{A}{r}\right) = 0 .$$

Altså diskontinuerlig virvling ved $r = r_0$.

[Generelt er $(\nabla \times \vec{V})_z = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(r V_\theta) - \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial V_r}{\partial \theta}$]



Naturlig derfor å starte med Bernoulli i ytre område. Velger $r = \infty$ som referansepunkt.

For $r > r_0$ kan vi skrive direkte:

$$p(r) + \frac{1}{2}\rho V_\theta^2(r) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho \underbrace{V_\theta^2(\infty)}_{0} .$$

$$\therefore \quad \underline{p(r) = p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{r_0^4 \omega^2}{r^2}} \quad , \quad r > r_0 .$$

For $r < r_0$ må vi benytte Euler:

$$-\frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

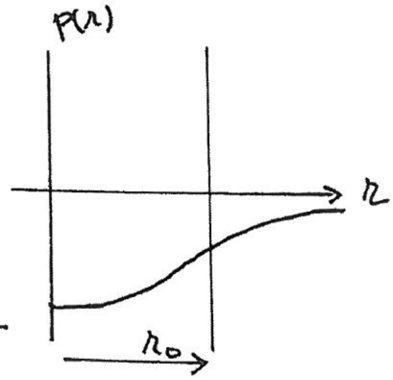
Innsetting av $V_\theta = r\omega$ gir $p(r) = \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 + C$.

Trykket er kontinuerlig ved $r = r_0$:

$$\frac{1}{2}\rho r_0^2 \omega^2 + C = p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{r_0^4 \omega^2}{r_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad C = p_\infty - \rho r_0^2 \omega^2 \text{ , og}$$

$$\underline{p(r) = \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 - \rho r_0^2 \omega^2 + p_\infty , \quad r \le r_0}$$



*

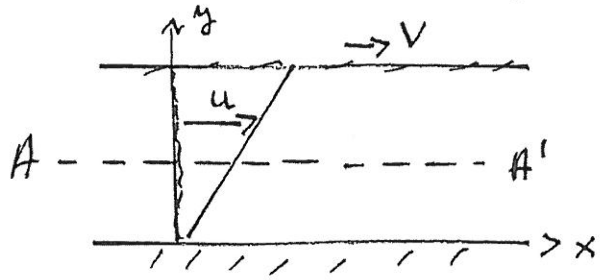
Merk forutsetningene for Bernoulli:

Ligningen gjelder langs en strømlinje for en stasjonær, inkompressibel, tapsfri (ikke-viskøs) væske.

Hvis i tillegg væsken er curl-fri, $\nabla \times \vec{V} = 0$, gjelder Bernoulli mellom vilkårlige punkter i væsken.

6. FRIKSJON, NAVIER-STOKES' LIGNING

Friksjon kalles i fluidmekanikken for viskositet (viscosity).



Effekten diskuteres enklest ved å se på den såkalte Couette-strømningen. Figuren viser en 2-dimensjonal strømning mellom 2 plater. Nedre plate ligger i ro, mens øvre plate beveger seg med konstant hastighet V i x-retningen. I mellomrommet er horisontal fluidhastighet $u = u(y)$.

Jo seigere væsken er, jo større kraft må en utøve på øvre plate for å opprettholde hastigheten V. Betrakt et vilkårlig fiktivt horisontalt snitt AA' i væsken: Væsken på oversiden beveger seg litt fortere enn på undersiden. På AA' virker derfor en horisontal kraft som virker imot bevegelsen. Kraft per flateenhet kalles skjærspenningen (shear stress). Standardsymbolet er τ. Benevningen for τ er den samme som for trykket p, nemlig $[\tau] = N/m^2 = Pa$. Skjærspenningen blir åpenbart større for økende verdier av hastighetsgradienten du/dy. Enkleste mulighet er å anta at

τ og du/dy er proporsjonale:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} . \qquad (6.1)$$

Dette er Newtons friksjonslov. Konstanten μ, den dynamiske viskositet, har dimensjon

$$[\mu] = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Heftbetingelsen (no-slip condition):

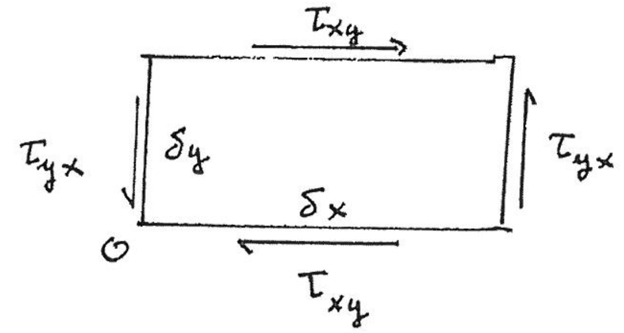
Ved en fast overflate er væskens hastighet i forhold til overflaten lik null. Ved nedre overflate altså $u(0) = 0$; ved øvre flate hvor $y = h$ er $u(h) = V$.

En fri overflate er ikke i stand til å oppta skjærspenninger, altså

$$\tau\Big|_{\text{OVERFLATE}} = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{\text{OVERFLATE}} = 0. \qquad (6.2)$$

Navier–Stokes' ligning

Vi betrakter det mer generelle tilfelle hvor en viskøs væske er i vilkårlig bevegelse. Anta 2-dimensjonal strømning som før. Figuren neste side viser et fiktivt fluidelement med de tangensielle kreftene (skjærspenningene) inntegnet.



$\tau_{yx} = \tau_{xy}$

Notasjonen er generell: τ_{xy} er kraften i x-retning når sidens normalvektor peker i y-retning, osv.

La punktet O i venstre nedre hjørne ha koordinatene x, y. Horisontal kraft mot høyre på elementets øvre kant er $\tau_{xy}(y+\delta y)\cdot\delta x\,\delta z$, hvor δz er utstrekningen inn i planet. Tilsvarende er horisontal kraft mot venstre på elementets nedre kant $\tau_{xy}(y)\cdot\delta x\,\delta z$. Resulterende kraft på elementet i x-retning altså ($\delta V = \delta x\,\delta y\,\delta z$):

$$f_{visc,x}\cdot\delta V = \tau_{xy}(y+\delta y)\cdot\delta x\,\delta z - \tau_{xy}(y)\cdot\delta x\,\delta z.$$

1. ordens Taylorutvikling av τ_{xy}:

$$\tau_{xy}(y+\delta y) = \tau_{xy}(y) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\cdot\delta y \qquad (6.3)$$

$$\Rightarrow \quad f_{visc.,x}\cdot\delta V = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\cdot\delta V$$

Ligning (5.1) tilsvarer i denne notasjon

$$\tau_{xy} = \mu\cdot\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (6.4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

Det gir

$$f_{visc,x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \qquad (6.5)$$

Vi generaliserer: Den viskose kraftetthet $\vec{f}_{visc}$ er på formen

$$\vec{f}_{visc} = \mu \cdot R \cdot \vec{V} , \qquad (6.6)$$

hvor operatoren R er rotasjonsinvariant, dvs. uavhengig av orienteringen til aksene x, y, z. Fra (6.5) ser vi at den naturlige utvidelsen av $\partial^2/\partial y^2$ er

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 . \qquad (6.7)$$

Altså generelt

$$\underline{\vec{f}_{visc} = \mu \nabla^2 \vec{V} .} \qquad (6.8)$$

Alle ledd i den generelle bevegelsesligning (1.9) er nå kjent:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = - \nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} , \qquad (6.9)$$

eller

$$\underline{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} ,} \qquad (6.10)$$

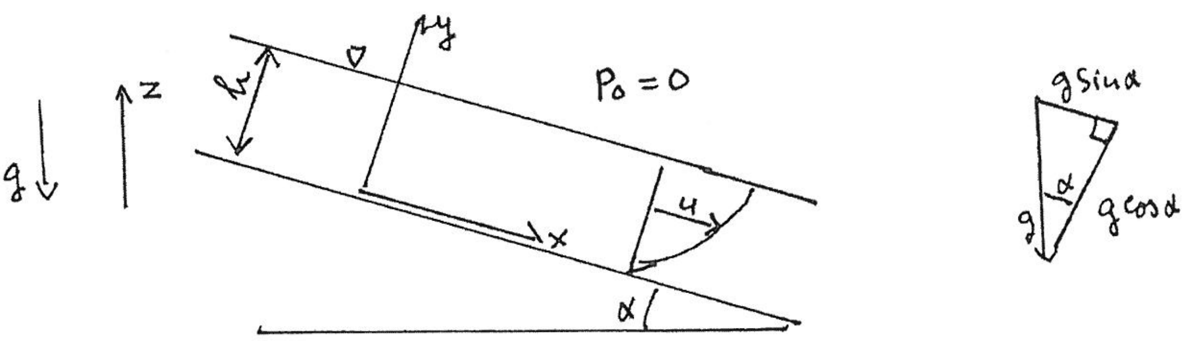
hvor $\nu = \mu / \rho$ er den kinematiske viskositet ($[\nu] = m^2/s$).
(6.10) er Navier-Stokes' ligning.

Merk forutsetningene for N-S ligningen:

- μ er konstant (Newtonsk væske)
- ρ er konstant (inkompressibel væske). Det mer generelle tilfelle med kompressibel væske behandles f.eks. i Landau-Lifshitz: Fluid Mechanics.

Men ligningen stiller ikke krav til $\nabla \times \vec{V}$.

Eksempel: Væskefilm på skråplan



Filmens tykkelse er h. Legger aksene som vist, med x-aksen langs skråplanet. Antar stasjonære forhold. Strømningen opprettholdes av tyngden alene.

p må være uavhengig av x-posisjonen, altså $p = p(y)$.
u er likedan, altså $u = u(y)$.

Ingen akselerasjon, $\vec{a} = 0$.

Sett atmosfæretrykket $p_0 = 0$.

N-S, x-retning:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{0} + g_x + \nu \nabla^2 u \tag{6.11}$$

N-S, y-retning:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \underbrace{\nabla^2 v}_{0} \tag{6.12}$$

Her er $g_x = g\sin\alpha$, $g_y = -g\cos\alpha$, $\nabla^2 u = \frac{d^2u}{dy^2}$.

Altså

$$0 = g\sin\alpha + \nu\frac{d^2u}{dy^2} \tag{6.13}$$

$$\underline{0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\alpha.} \tag{6.14}$$

Av (6.14) er

$$p = -\rho g y \cos\alpha + C,$$

og da $p = p_0 = 0$ for $y = h$ følger

$$\underline{p = \rho g h\left(1 - \frac{y}{h}\right)\cos\alpha.} \tag{6.15}$$

Av (6.13) er $\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{g}{\nu}\sin\alpha$,

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = -\frac{gy}{\nu}\sin\alpha + C_1 .$$

Da $\tau(h) = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=h} = 0$ følger $C_1 = \frac{gh}{\nu}\sin\alpha$

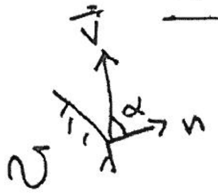
$$u = -\frac{gy^2}{2\nu}\sin\alpha + \frac{gh}{\nu}\cdot y\sin\alpha + C_2$$

$u = 0$ for $y = 0$ gir $C_2 = 0$.

$\Rightarrow$

$$\underline{u = \frac{gh}{\nu}y\left(1 - \frac{y}{2h}\right)\cdot\sin\alpha.} \tag{6.16}$$

7. KONSERVERINGSLIGNINGER

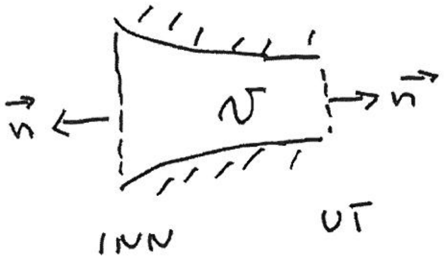


Betrakt et vilkårlig volum $\mathcal{V}$ med overflate A. $\vec n$ er enhetsnormalen utover ($|\vec n| = 1$).

Strømtettheten (massefluksfeltet) er $\rho \vec V$.

Masse per tidsenhet gjennom overflateelement dA er

$\rho V \cos\alpha = \rho \vec V \cdot \vec n$.



Anta at $\mathcal{V}$ har en INN-seksjon og en UT-seksjon. Da er massefluks ut:

$$\dot m_{UT} = \int_{UT} \rho \vec V \cdot \vec n \, dA \quad \text{, og} \qquad (7.1)$$

massefluks inn:

$$\dot m_{INN} = -\int_{INN} \rho \vec V \cdot \vec n \, dA. \qquad (7.2)$$

Netto massetilførsel inn:

$$\dot m_{INN} - \dot m_{UT} = -\int_{INN} \rho \vec V \cdot \vec n \, dA - \int_{UT} \rho \vec V \cdot \vec n \, dA =$$

$$= -\oint \rho \vec V \cdot \vec n \, dA = -\int \nabla \cdot (\rho \vec V) \, d\mathcal{V}.$$

Økningen i masse kan alternativt skrives som (7.3)

$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$. Altså

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec V) \right] d\mathcal{V} = 0 \qquad (7.4)$$

Da $\mathcal{V}$ er vilkårlig, må integranden være null:

$$\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec V) = 0.} \qquad (7.5)$$

Dette er kontinuitetsligningen på differensiell form.

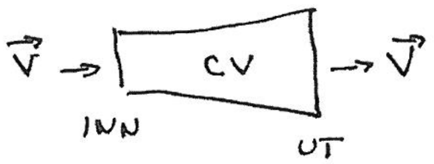
For inkompressibelt fluid, ρ konstant, gir (7.5) at

$$\nabla\cdot\vec{V} = 0. \qquad (7.6)$$

Vi tester for inkompressibilitet simpelthen ved å regne ut $\nabla\cdot\vec{V}$.

Impulsbalansen

Betrakt stasjonær, ikompressibel, strømning.



Vi skriver summen av alle krefter som virker på fluidet inne i kontrollvolumet (CV) på formen $\sum\vec{F}$. Da impulsen til vannet (fluidet) inne i CV ikke endres med tiden, må $\sum\vec{F}$ være lik impulsfluksen $\dot{\vec{M}}_{UT}$ av vannet ut av CV, minus impulsfluksen $\dot{\vec{M}}_{INN}$ inn i CV.

(= massefluksstetthet)

Figur side 28: Impulstetthet er $\rho\vec{V}$. Impulsflukstettheten er ρV^2. Impulsflukstettheten langs normalen $\vec{n}$ er $\rho V^2 \cos\alpha = \rho V(\vec{V}\cdot\vec{n})$.

Vektorform: $\rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})$.

Den totale impulsfluks ut dermed

$$\dot{\vec{M}}_{UT} = \oint_{UT} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA \,. \qquad (7.7)$$

Tilsvarende defineres impulsfluks inn:

$$\dot{\vec{M}}_{INN} = -\oint_{INN} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA. \qquad (7.8)$$

Impulsbalansen blir dermed

$$\underline{\sum \vec{F} = \dot{\vec{M}}_{UT} - \dot{\vec{M}}_{INN}} \qquad (7.9)$$

<u>Energibalansen</u>

Stasjonær, inkompressibel strømning som ovenfor.

Start med Bernoulli:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2. \qquad (7.10)$$

Denne forutsatte intet arbeid, og intet tap.

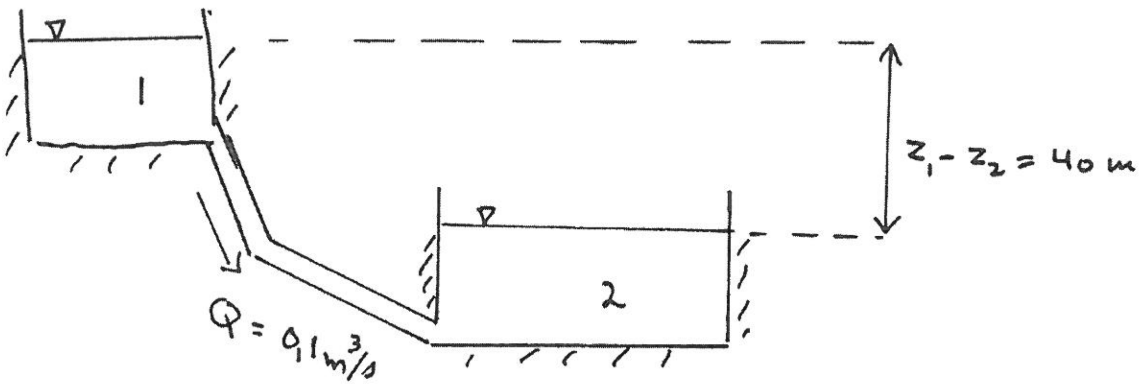
(7.10) kan generaliseres:

La w_s være nyttig arbeid (shaft work) per masseenhet, og skriv friksjonstapet som $g \cdot h_f$, hvor h_f kalles friksjonshøyden (head loss).

Da blir energibalansen

$$\underline{\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 + w_s + g \cdot h_f.} \qquad (7.11)$$

Eksempel : Strømning mellom to åpne basseng.



a) Energiligning $1 \rightarrow 2$, ved fri strømning mellom bassengene:

$$\cancel{\frac{p_1}{\rho}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}V_1^2}_{\simeq 0} + g z_1 = \cancel{\frac{p_2}{\rho}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}V_2^2}_{\simeq 0} + g z_2 + \underbrace{w_s}_{0} + g h_f$$

$\Rightarrow$ $\underline{h_f} = z_1 - z_2 = \underline{40\ m.}$ Friksjonshøyde er lik geometrisk høydeforskjell.

Merk:

Energitap per masseenhet $g h_f$

—— " —— volumenhet $\rho g h_f$

—— " —— tidsenhet $\rho g h_f \cdot Q$

b) Anta at samme vannmengde pumpes opp fra 2 til 1. Hva er pumpeeffekten?

Energiligning $2 \rightarrow 1$:

$$\frac{p_2}{\rho} + \tfrac{1}{2}V_2^2 + g z_2 = \frac{p_1}{\rho} + \tfrac{1}{2}V_1^2 + g z_1 + w_s + g h_f.$$

$$\Rightarrow \quad -w_s = g(z_1 - z_2) + g h_f.$$

Neglisjerer tap i pumpen $\Rightarrow$ $h_f = 40\,m$ som før selv om strømningen er reversert.

$$\therefore \quad \frac{-w_s}{g} = 40\,m + 40\,m = 80\ m.$$

Pumpeeffekt $\underline{P} = \rho \cdot (-w_s) \cdot Q = 10^3 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 0{,}1\ W = \underline{80\,kW}$

8. STRØMFUNKSJONEN ψ

De vektorielle grunnligningene – Euler eller Navier-Stokes – kan være vanskelige å løse. Derfor ønskelig å erstatte vektorligningene med skalare ligninger, dersom det er mulig. Der er to skalare funksjoner i bruk: strømfunksjonen ψ og hastighetspotensialet ϕ.

Vi skal i dette kapitlet betrakte ψ. Anta at strømningen er todimensjonal og stasjonær. I kartesiske koordinater altså $\psi = \psi(x,y)$.

Anta videre at strømningen er inkompressibel, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. Vanligvis vil ψ bli benyttet bare i slike tilfelle. Med $\vec{V} = (u, v)$, vil hastighetskomponentene u og v være gitt som

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (8.1)$$

Disse uttrykkene definerer strømfunksjonen ψ i kartesiske koordinater. Merk at ψ ikke er entydig bestemt: en kan la $\psi \to \psi +$ KONSTANT uten at det har noen innvirkning på u og v.

Ligningene (8.1) oppfyller kontinuitetsligningen automatisk:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Sammenheng mellom ψ og virvlingen $\vec{\zeta} \equiv \nabla\times\vec{V}$:

Av interesse er ζ_z, komponenten av $\vec{\zeta}$ vinkelrett på bevegelsesplanet. Regner ut

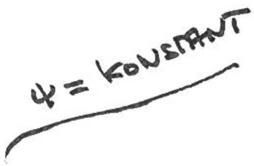
$$\zeta_z = (\nabla\times\vec{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\nabla^2\psi$$

Altså

$$\underline{\nabla^2\psi = -\zeta_z} \qquad (8.2)$$

i kartesiske koordinater (men dette er ikke en vektorligning, gyldig i alle koordinater!).

Geometrisk tydning av ψ



Betrakt en kurve hvor strømfunksjonen $\psi(x,y)$ er konstant, dvs. $d\psi = 0$ langs kurven. Dvs.

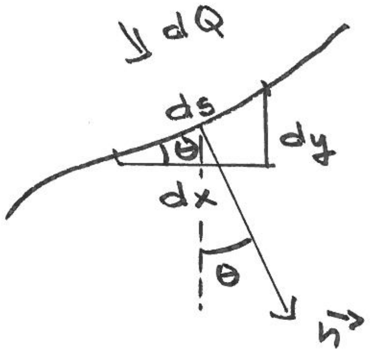
$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0.$$

$$\Rightarrow: \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi} = -\frac{\partial\psi/\partial x}{\partial\psi/\partial y} = \frac{v}{u}, \text{ ifølge } (8.1).$$

Men $\frac{v}{u}$ er jo det samme som vinkelkoeffisienten dy/dx for strømlinjen; se (5.1).

Altså: $\psi =$ KONSTANT langs en strømlinje i <u>stasjonær strømning.</u>

Sammenheng mellom ψ og volumgjennomstrømning Q



Betrakt et linjeelement ds på en strømlinje. Hastighetsvektor $\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v$, hvor $\vec{i}$ og $\vec{j}$ er enhetsvektorene i x og y retning.

Av figuren: $dx = ds \cdot \cos\theta$

$dy = ds \cdot \sin\theta$

Normalvektor $\vec{n}$ til linjeelementet er

$$\vec{n} = \vec{i}\sin\theta - \vec{j}\cos\theta.$$

Volumstrøm dQ gjennom ds er $dQ = \vec{V}\cdot\vec{n}\,ds$, dvs

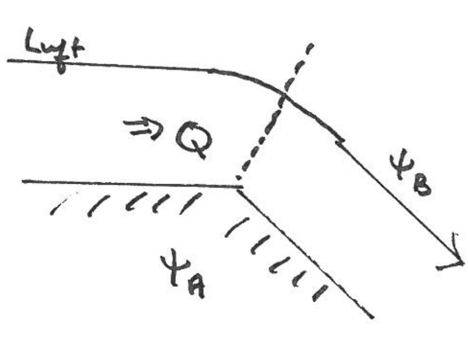
$$dQ = (\vec{i}u + \vec{j}v)\cdot(\vec{i}\sin\theta - \vec{j}\cos\theta)\,ds = u\underbrace{\sin\theta\,ds}_{dy} - v\underbrace{\cos\theta\,ds}_{dx}$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi$$

Det betyr at volumstrømmen Q_{12} mellom to strømlinjer 1 og 2 er

$$\underline{Q_{12}} = \int_1^2 \vec{V}\cdot\vec{n}\,ds = \int_1^2 d\psi = \underline{\psi_2 - \psi_1}$$

Eksempel: Flyvinge



$$Q = \psi_B - \psi_A$$

[Matematisk sidebemerkning: Definisjonsligningene $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$ betyr at en innfører det såkalte vektorpotensial, vanligvis kalt $\vec{A}$. Her er $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, 0, \psi)$. Hastigheten følger som $\vec{V} = \nabla\times\vec{A}$.]

*

Med plane polarkoordinater (r, θ) blir definisjonsligningene slik:

$$\underline{V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}}$$

Som for kartesiske koordinater oppfylles kontinuitetsligningen automatisk:

$$\underline{\nabla\cdot\vec{V}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} = \underline{0} .$$

Også i disse koordinatene oppfylles ligningen

$$\underline{\nabla^2\psi = -\zeta_z}, \qquad (8.3)$$

slik som i (8.2).

Altså: Strømfunksjonen kan anvendes også for en viskøs strømning. Ofte er det nyttig i praksis.

Sammenheng mellom $\vec{\zeta}$ og rotasjonshastighet $\vec{\omega}$ for et fluidelement

Anta at et fluidelement roterer med konstant vinkelhastighet $\vec{\omega}$ om origo. Elementets hastighet $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Ta curl til dette uttrykket:

$$\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \underbrace{\nabla \cdot \vec{r}}_{3} - \vec{r} \underbrace{\nabla \cdot \vec{\omega}}_{0} + \underbrace{(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{\omega}}_{0} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{r}$$

Anta rotasjonen foregår om z-aksen. Ta z-komponent av ligningen:

$$\left[\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right]_z = 3\omega_z - \omega_z \frac{\partial z}{\partial z} = 3\omega_z - \omega_z = 2\omega_z$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\omega_z = \tfrac{1}{2} \zeta_z = \tfrac{1}{2} (\nabla \times \vec{V})_z}$$

9. HASTIGHETSPOTENSIALET ϕ

Vi forutsetter igjen todimensjonal, stasjonær strømning. I kartesiske koordinater altså $\phi = \phi(x,y)$.

Anta at strømningen er curl-fri,

$$\nabla \times \vec{V} = 0. \qquad (9.1)$$

Ettersom curl grad $\equiv 0$ er det da mulig å sette

$$\underline{\vec{V} = \nabla\phi} \qquad (9.2)$$

Kurver ϕ = KONSTANT kalles ekvipotensialkurver. De er nivåflater, på samme måte som gravitasjonspotensialet $\phi_{GRAV} = gz$ er en nivåflate.

Bruk av ϕ bare i tilfelle hvor viskositeten er null (neglisjerbar). Hvis $\mu \neq 0$ vil det med én gang oppstå virvling.

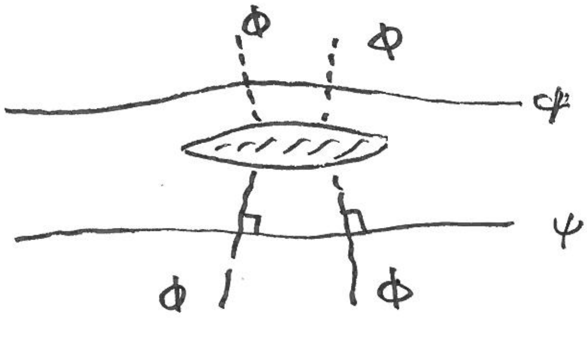
Ekvipotensiallinjer er ortogonale til strømlinjene:

Anta ρ konstant. Langs en linje ϕ = KONSTANT er $d\phi = 0$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 0, \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_\phi = -\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y} = -\frac{u}{v}.$$

For en strømlinje ψ = KONSTANT har vi fra før

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_\psi = \frac{v}{u}. \qquad \text{Produktet} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_\phi \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_\psi = -1.$$



Kurveskarene altså ortogonale.

10. POTENSIALSTRØMNING

Anta et fluid som er todimensjonalt, stasjonært, og ikke-viskøst.

Teorien forutsetter

1) inkompressibelt fluid, $\nabla\cdot\vec{V}=0$,

og

2) Rotasjonsfritt (curl-fritt) fluid, $\nabla\times\vec{V}=0$.

*

En kan nå starte fra 2), som gjør det mulig å innføre ϕ via $\vec{V}=\nabla\phi$. Da vil 1) føre til $\nabla\cdot\vec{V}=\nabla^2\phi=0$. Herav

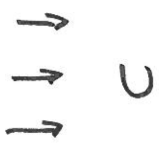
$$\underline{\nabla^2\phi=0,\quad \text{Laplaces ligning}} \qquad (10.1)$$

Alternativt kan en starte fra 1), som gjør det mulig å innføre ψ via $u=\partial\psi/\partial y$, $v=-\partial\psi/\partial x$. Ettersom $\nabla^2\psi=-\zeta_z$, vil dette medføre Laplaces ligning igjen:

$$\underline{\nabla^2\psi=0} \qquad (10.2)$$

Merk at (10.2), såvel som (10.1), hviler på <u>både</u> 1) <u>og</u> 2).

Enkleste eksempel er uniform strømning U i x-retning:

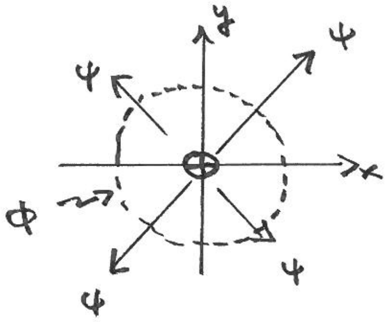


$$\phi=Ux$$

$$\psi=Uy$$

Singulariteter.

Linjekilde /sluk i origo



Singularitet plassert i origo. Kilden (et tynt rør) plassert i z-aksen. Ser bare på én lengdeenhet i z-retning.

Radiell hastighet $\underline{V_r = \frac{m}{r}}$ $m>0$: KILDE, $m<0$: SLUK

Hvis Q er volumstrøm ut, er $V_r = \frac{Q}{2\pi r}$

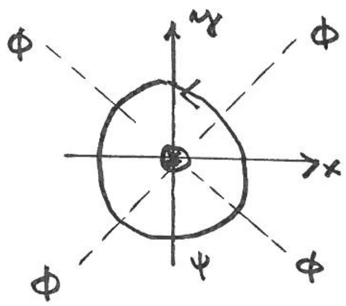
Av
$$\left.\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{m}{r} \\ V_\theta &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \end{aligned}\right\}$$
finnes $\underline{\psi = m\cdot\theta,\quad \phi = m\cdot\ln r}$

Hastighetskomponenter:

$$u = V_r\cos\theta = m\cdot\frac{x}{r^2} = \frac{mx}{x^2+y^2}$$

$$v = V_r\sin\theta = m\cdot\frac{y}{r^2} = \frac{my}{x^2+y^2}$$

Linjevirvel i origo



Asimutal hastighet $\underline{V_\theta = \frac{K}{r}}$ [$K>0$ på figuren.]

Av
$$\left.\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 \\ V_\theta &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \end{aligned}\right\}$$
finnes $\psi = -K\cdot\ln r$, $\underline{\phi = K\cdot\theta}$

Virvling: $\underline{\zeta_z} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} = \underline{0}$. FRI VIRVEL.

Sirkulasjon: $\underline{\Gamma} \equiv \oint \vec{V}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} V_r\cdot r\,d\theta = V_\theta\cdot 2\pi r = \underline{2\pi K}$

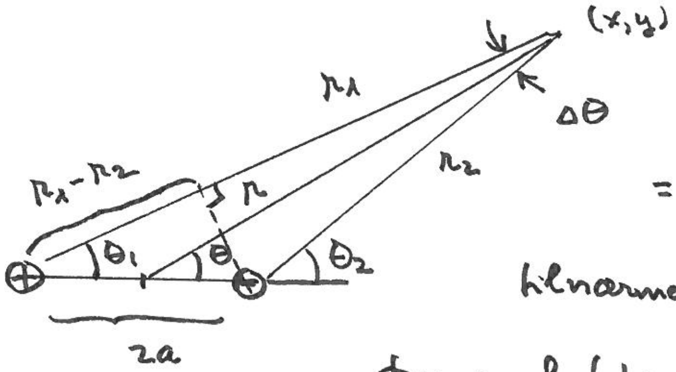
Dublett (dipol)

Anta kilde av styrke $+m$ i $(-a,0)$ og sluk av styrke $-m$ i $(a,0)$. La $a \to 0$ og $m \to \infty$ slik at dipolmomentet $\lambda = 2am$ holdes konstant.

Approksimativ behandling: Av $\phi_{KILDE} = m \ln r$

$\psi_{KILDE} = m \cdot \theta$, finnes for dipolen $\phi = m \ln r_1 - m \ln r_2$

$= m \ln \frac{r_1}{r_2}$. Av figuren er



tilnærmet $r_1 - r_2 = 2a\cos\theta \Rightarrow$

$$\phi = m \cdot \ln\left(1 + \frac{2a}{r}\cos\theta\right) \simeq m \cdot \frac{2a}{r}\cos\theta, \text{ fordi}$$

$\ln(1+x) \simeq x$ for små x.

Altså $\underline{\phi = \frac{\lambda}{r}\cos\theta}$ for dipolen.

Strømfunksjonen $\psi = m(\theta_1 - \theta_2)$.

Av figuren: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \simeq \frac{2a\sin\theta}{r}$ $\quad (r_1 \simeq r_2 \simeq r)$

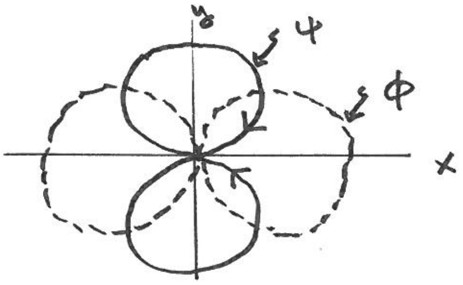
Altså $\psi = -\frac{2am}{r}\sin\theta$

$$\underline{\psi = -\frac{\lambda}{r}\sin\theta}$$

Hastighetskomponenter kan finnes f.eks. av ϕ:

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\lambda}{r^2}\sin\theta$$



Eksempel: Superposisjon av uniform strømning, dublett, og virvel

legger sammen strømfunksjonene for komponentene,

$$\psi_{UNIFORM} = U\cdot y = Ur\sin\theta,$$

$$\psi_{DUBLETT} = -\frac{\lambda}{r}\sin\theta,$$

$$\psi_{VIRVEL} = -K\cdot\ln r,$$

og får

$$\psi = \left(Ur - \frac{\lambda}{r}\right)\sin\theta - K\cdot\ln r.$$

Innfører en lengde a (radius) slik at $\underline{\lambda = U\cdot a^2}$.

Dessuten legges til en konstant i siste ledd slik at $-K\cdot\ln r \rightarrow -K\ln\frac{r}{a}$. Dette gir

$$\underline{\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta - K\cdot\ln\frac{r}{a}}$$

En ser at $\psi = 0$ når $r = a$, det vil si på overflaten av en sylinder sentrert i origo, med radius a.

På overflaten $r = a$ er $V_r(a,\theta) = 0$; sjekk:

$$\underline{V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta}, \text{ stemmer for } r = a,$$

Dessuten er

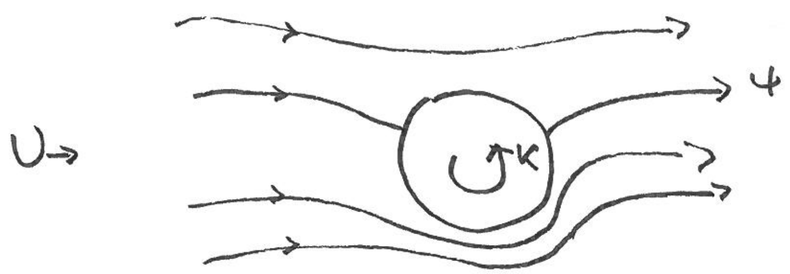
$$\underline{V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{K}{r}}.$$

På overflaten altså

$$\underline{V_\theta(a,\theta) = -2U\sin\theta + \frac{K}{a}}.$$

(Ingen heftbetingelse her!)

For moderate verdier av K (>0) blir strømningsbildet slik:

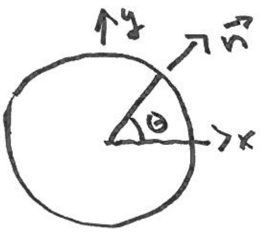


Bernoulli: Ettersom $\nabla\times\vec{V}=0$ kan Bernoulliligningen anvendes mellom vilkårlige punkter. Relaterer $r=\infty$ til et punkt på overflaten:

$$\frac{p_\infty}{\rho}+\frac{1}{2}U^2=\frac{p(a,\theta)}{\rho}+\frac{1}{2}\left[2U\sin\theta-\frac{K}{a}\right]^2$$

Gage-trykk $p(a,\theta)-p_\infty=p_G$ på overflaten altså

$$p_G(a,\theta)=\frac{1}{2}\rho U^2-\frac{\rho}{2}\left[4U^2\sin^2\theta-\frac{4KU}{a}\sin\theta+\frac{K^2}{a^2}\right]$$



Trykkraft på overflateelement $a\,d\theta$ (per enhet langs aksen) er $d\vec{F}=-p_G(a,\theta)\vec{n}\,a\,d\theta$.

Kraftkomponenter per lengdeenhet altså

$$\underline{F_x}=-\int_0^{2\pi}p_G(a,\theta)\,a\cos\theta\,d\theta=\underline{0}$$

og

$$F_y=-\int_0^{2\pi}p_G(a,\theta)\,a\sin\theta\,d\theta=-2\rho KU\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta}_{\pi}=-\rho U\cdot 2\pi K.$$

Da sirkulasjonen er $\Gamma=2\pi K$, fås

$$\underline{F_y=-\rho U\Gamma}$$ Kutta-Joukowskys teorem.