

## Løsningsforslag til øving 10

## Oppgave 1

a) Så lenge  $v_O = v_S = 0$ , spiller det ingen rolle om det blåser. Observatøren vil måle samme frekvens som kilden (S) sender ut. Riktig svar: B.

b) Veggen står i ro og ”observerer” bølgen som sendes ut av flaggermusen. Frekvensen  $f_V$  mottatt av veggen er

$$f_V = \frac{v}{v - v_F} f_F = \frac{340}{340 - 10} \cdot 100 \text{ kHz} = 103.03 \text{ kHz}.$$

Veggen reflekterer, dvs sender tilbake mot flaggermusen, en bølge med denne frekvensen. Nå er veggen en bølgekilde i ro, mens flaggermusen er en observatør i bevegelse, *mot* kilden (veggen). Dermed hører flaggermusen et ekko med frekvens

$$f_E = \frac{v + v_F}{v} f_V = \frac{350}{340} \cdot 103.03 \text{ kHz} \simeq 106 \text{ kHz}.$$

Riktig svar: B.

c) Her er sveveperioden  $T_s = 1 \text{ s}$ . Dermed er svevefrekvensen  $f_s = 1/T_s = 1 \text{ Hz}$ . Dette tilsvarer frekvensforskjellen mellom de to lydbølgene fra hhv stemmegaffelen (440 Hz) og pianoets A-streng. Du kan imidlertid ikke vite om A-strengen svinger med frekvens 439 Hz eller 441 Hz. Riktig svar: D.

d) To lydkilder som svinger i fase med samme frekvens gir konstruktiv interferens (max intensitet) dersom bølgene har en veilengdeforskjell lik et helt antall bølgelengder  $\lambda$ . Med avstand  $d$  mellom lydkildene og vinkel  $\theta$  mellom senterlinjen (med lengde 20 m; se figuren i oppgaven) og en linje fra (midtpunktet mellom) høyttalerne til observatøren, blir veilengdeforskjellen, med god tilnærming, lik  $d \sin \theta$ . Max intensitet høres derfor av dem som sitter slik til at  $\theta = 0$  eller

$$\theta = \arcsin(n\lambda/d),$$

med  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Destruktiv interferens (min intensitet) oppnås med veilengdeforskjell  $(n + 1/2)\lambda$ , og dermed av dem som sitter slik til at

$$\theta = \arcsin((n + 1/2)\lambda/d).$$

Med  $d = 1 \text{ m}$  og  $\lambda = v/f = 340/3400 = 0.1 \text{ m}$  har vi max intensitet i retningene  $\theta_{\max} = 0, \pm 5.7^\circ, \pm 11.5^\circ, \pm 17.5^\circ$  osv. Minimal intensitet har vi i retningene  $\theta_{\min} = \pm 2.9^\circ, \pm 8.6^\circ, \pm 14.5^\circ$  osv. Bjarne sitter ved  $\theta_B = 0$  og hører dermed max intensitet. Anne sitter ved  $\theta_A = \arctan(5.2/20) = 14.6^\circ$ , som er tilstrekkelig nær  $14.5^\circ$  til å fastslå at hun hører minimal intensitet. Camilla sitter ved  $\theta_C = \arctan(-3.0/20) = -8.5^\circ$ , så hun hører også minimal intensitet. Endelig har vi Dag som sitter ved  $\theta_D = \arctan(-6.3/20) = -17.5^\circ$ , så Dag hører max intensitet. Riktig svar: B.

## Oppgave 2

a) I forelesningene har vi utledet sammenhengene mellom amplituden  $A$  til innkommende bølge og amplitudene  $B$  og  $C$  til henholdsvis reflektert og transmittert bølge:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} A \\ C &= \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} A \end{aligned}$$

Her er  $\mu_2 = 90$  g/m masse pr lengdeenhet på den tunge delen av strengen,  $\mu_1 = 10$  g/m er masse pr lengdeenhet på den lette delen av strengen og  $A = 5$  mm. Innsetting av disse tallverdiene gir  $B = 2A/4 = 2.5$  mm og  $C = 2A/4 = 2.5$  mm.

b) Fra forelesningene har vi følgende uttrykk for midlere effekt transportert med den innkommende bølgen (også oppgitt i oppgaveteksten):

$$\begin{aligned}\overline{P}_i &= \frac{1}{2} v \mu_1 \omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{S/\mu_1} \mu_1 \omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{S \mu_1} \omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \cdot (10\pi)^2 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 \\ &= 2.5 \text{ mJ/s}\end{aligned}$$

Andel av effekten som reflekteres er gitt ved refleksjonskoeffisienten  $R = \overline{P}_r/\overline{P}_i$ :

$$R = \left( \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \right)^2 = 0.25 = 25\%$$

Resten blir transmittert:

$$T = 1 - R = 0.75 = 75\%$$

c) Utsvinget til venstre for skjøten i  $x = 0$  er:

$$\begin{aligned}y(x, t) &= y_i(x, t) + y_r(x, t) \\ &= A \left( \sin(kx - \omega t) + \frac{1}{2} \sin(kx + \omega t) \right) \\ &= A \left( \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin kx \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos kx \sin \omega t \right) \\ &= A \left( \frac{3}{2} \sin kx \cos \omega t - \frac{1}{2} \cos kx \sin \omega t \right)\end{aligned}$$

som er en sum av to stående bølger.

d) Uansett skjøtens posisjon kan vi velge  $\phi_i = 0$ . Fysikken kan ikke avhenge av hvor vi legger skjøten. Med andre ord: Dersom vi hadde en bestemt sammenheng mellom fasene til  $y_i$  og  $y_r$  med skjøten i  $x = 0$ , må vi fortsatt ha den samme bestemte sammenheng med skjøten i  $x = a$ . Det oppnår vi ved å velge  $\phi_r = -2ka$ . Da blir nemlig

$$y_i(a, t) = A \sin(ka - \omega t) = -A \sin(\omega t - ka)$$

og

$$y_r(a, t) = B \sin(ka + \omega t - 2ka) = B \sin(\omega t - ka)$$

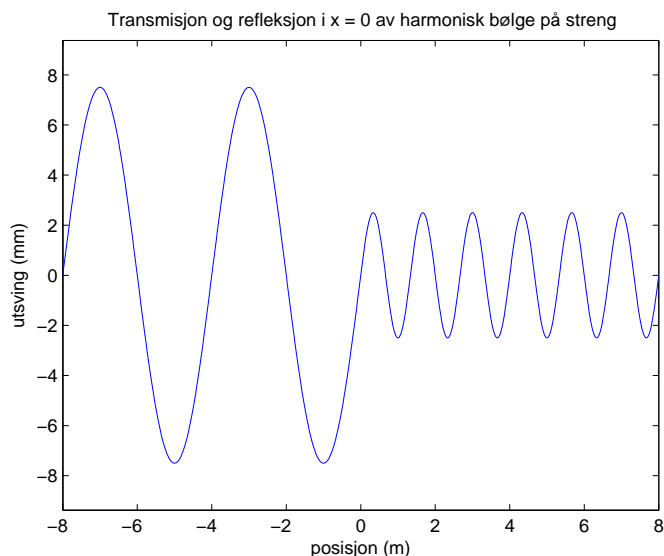
dvs

$$y_r(a, t) = -\frac{B}{A} y_i(a, t)$$

den samme sammenheng mellom  $y_r$  og  $y_i$  som vi hadde i  $x = 0$  med skjøten i  $x = 0$ , dvs enten  $y_r$  og  $y_i$  i fase (motsatt fortegn på  $B$  og  $A$ ) eller  $y_r$  og  $y_i$  i motfase (samme fortegn på  $B$  og  $A$ ) i skjøten. Mer generelt må vi, med skjøten i  $x = a$ , velge fasekonstanter slik at

$$\phi_r + \phi_i = -2ka$$

e) Her er en figur av sluttbildet av animasjonen:



### Oppgave 3

a) Hvis  $kD \ll 1$ , er  $\tanh kD \simeq kD$ , og  $\omega^2 \simeq gk \cdot kD = gD k^2$ , dvs  $\omega(k) = \sqrt{gD} k$ . Da er fasehastighet og bølgehastighet like store,  $v_f = v_g = \sqrt{gD}$ .

b) Med  $\lambda = 200$  km og  $D = 4$  km er  $kD = 2\pi D/\lambda = 2\pi \cdot 4/200 = 0.126$ , som er en god del mindre enn 1. Vi kan erstatte  $\tanh kD$  med  $kD$  ( $\tanh(0.1256637) = 0.1250064$ ), og vi har lineær dispersjon, med  $v_g = \sqrt{gD} = \sqrt{9.81 \cdot 4 \cdot 10^3} = 198$  m/s = 713 km/h. Med 200 km fra en bølgedal til den neste tar det en tid  $2 \cdot 10^5$  m / 198 m/s = 1009 s  $\simeq$  17 minutter for en hel bølgelengde å passere en gitt posisjon, f.eks et fiskefelt i nærheten. Hvis amplituden er ca 1 meter, vil en slik bølge ikke være merkbar for den som er ute på fiskefeltet.

c) Med dybden  $D$  minst 200 m og  $\lambda = 100$  m, blir  $kD = 2\pi D/\lambda = 2\pi \cdot 200/100 = 12.57$  eller større. Da kan vi trygt erstatte  $\tanh kD$  med 1:  $\tanh(4\pi) = 0.99999999975$ .... Dispersjonsrelasjonen blir  $\omega(k) = \sqrt{gk}$ , slik at gruppehastigheten er  $v_g = d\omega/dk = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi} = \sqrt{9.81 \cdot 100/8\pi} = 6.25$  m/s = 22.5 km/h. Det tar da bølgepakken  $200/22.5 \simeq 9$  timer å nå inn til land.

d) Gruppehastigheten avtar med kvadratroten av dybden  $D$ . Energitettheten i bølgen er proporsjonal med bølgehastigheten og (kvadratet av) amplituden. Hvis bølgehastigheten avtar mens energitettheten holder seg noenlunde konstant, vil amplituden bli stadig større. I verste fall kan resultatet bli en tsunami ("havnebølge"), med katastrofale ødeleggelser.