NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

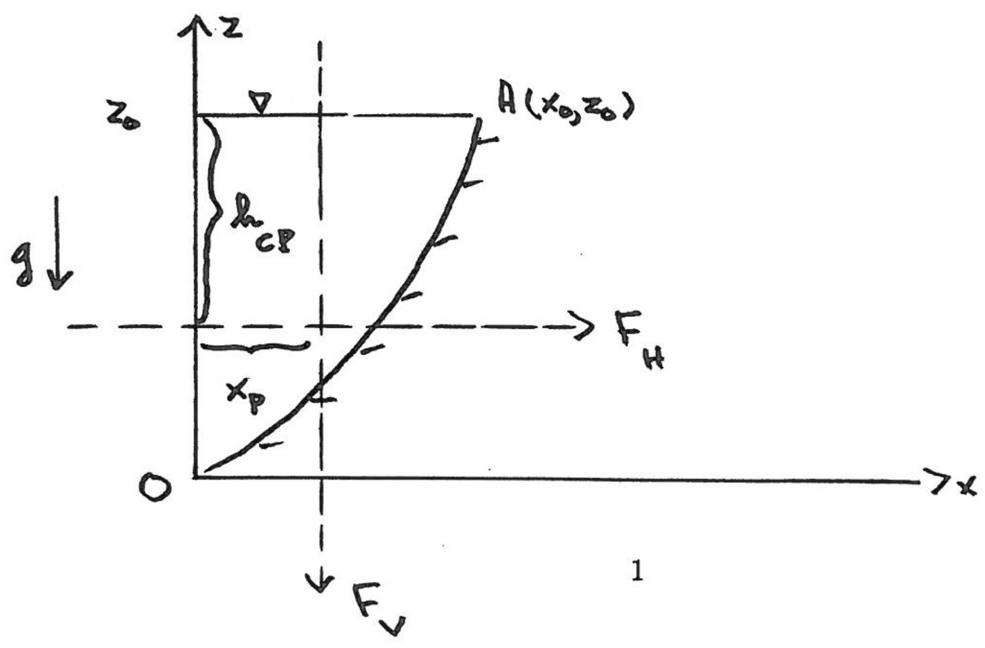
Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555/ 9950 1795
Antall sider: 4, pluss 4 sider formelliste.
Hver oppgave teller likt under sensuren.

EKSAMEN I FAG TEP4105 FLUIDMEKANIKK FOR FAK. NT (FYSIKK OG MATEMATIKK) OG FAK. IME (TEKNISK KYBERNETIKK)

Onsdag 8. desember 2010
Tid: 1500 - 1900
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller innen 8. januar 2011

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i samsvar med NTNU's regler. Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk. Formelliste, vedheftet oppgavesettet.

Oppgave 1



Figuren viser utsnitt av en betong-dam som holder vann i et basseng. Bassenget er helt fullt, opp til høyden z_0. Den krumme flaten AO har en eksponensiell form,

$$z = K(e^{x/x_0} - 1),$$

hvor K er en kjent konstant,

$$K = \frac{z_0}{e-1}, \quad e = 2,718...$$

Toppunktet A har koordinatene (x_0, z_0). Bredden av dammen (inn i papirplanet) er b. Se bort fra atmosfæretrykket, og sett $g = 10$ m/s^2.

a) Finn den horisontale kraft F_H som virker fra vannet på dammen, og finn dybden h_{CP} av trykksentret.

b) Finn den vertikale kraft F_V på dammen.

c) Finn avstanden x_p ut til angrepslinjen for F_V (se figuren).

Oppgitt: Treghetsmomentet for en rektangulær flate med bredde b og høyde z_0 omkring y-aksen (inn i planet) gjennom centroiden er

$$I_{yy} = \frac{1}{12} b z_0^3.$$

Ubestemt integral

$$\int x e^{x/x_0} dx = x_0^2 (\frac{x}{x_0} - 1) e^{x/x_0}$$

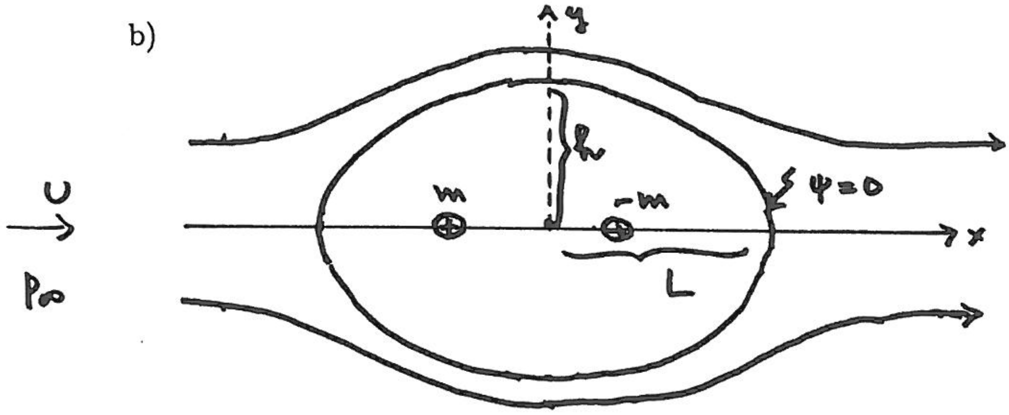
Oppgave 2

Gitt en potensialstrømning sammensatt av følgende tre komponenter:
en uniform strømning U i x-retning;
en kilde av styrke m i punktet $(-a, 0)$;
et sluk av styrke $-m$ i punktet $(a, 0)$.

a) Vis at strømfunksjonen ψ kan i kartesiske koordinater skrives slik:

$$\psi(x, y) = Uy + m \arctan \frac{y}{x+a} - m \arctan \frac{y}{x-a}$$

b)



Figuren viser den lukkede oval (Rankines oval) som adskiller den ytre strømning fra den indre. Ovalen kan tenkes erstattet av en fast flate. På denne flaten er strømfunksjonen $\psi = 0$. Ovalens halvakser er L og h. Se i det følgende bare på den ytre strømning. Se bort fra tyngden.

Finn den horisontale hastighetskomponent $u(x, y)$ i et vilkårlig punkt, og finn herav verdien av L uttrykt ved a, m og U.

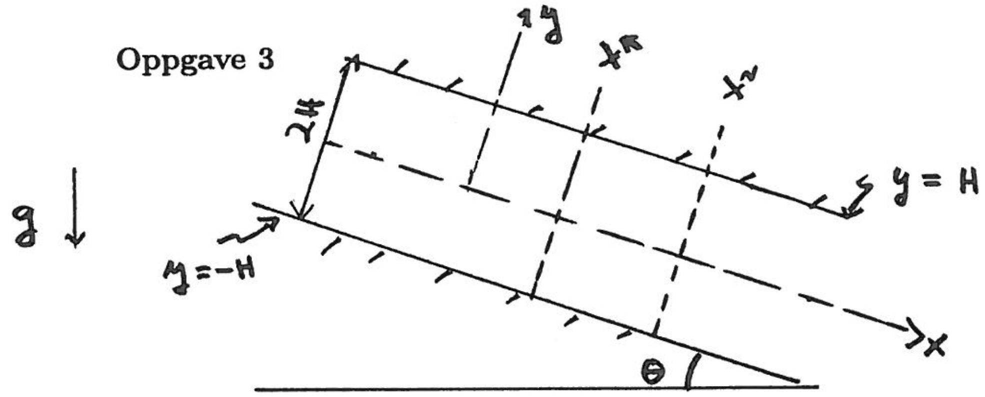
c) Anta i det følgende at halvaksen h er en kjent størrelse (den skal ikke regnes ut). Finn trykket p i punktet $(0, h)$ uttrykt ved h, trykket p_∞ i den uniforme strømning, tettheten ρ, samt de gitte størrelsene ovenfor.

d) Hvor stor er den totale horisontale kraft F_x som strømningen utøver mot ovalen? Begrunn svaret.

Oppgitt:

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Oppgave 3



Gitt en stasjonær, fullt utviklet, viskøs og inkompressibel strømning mellom to parallelle plan. Planenes helningsvinkel er θ. Avstanden mellom planene er $2H$. Væskens dynamiske viskositet er μ, tyngdens akselerasjon er g. Regn med én lengdeenhet inn i planet. Legg koordinatsystemet som på figuren. Væsken er utsatt for en trykkgradient $\partial p/\partial x$ i x-retningen.

a) Hastigheten u i x-retningen avhenger bare av y, $u = u(y)$. Sett opp Navier-Stokes' ligning i x- og y-retning, og vis herav at hastighetsprofilet kan skrives på formen

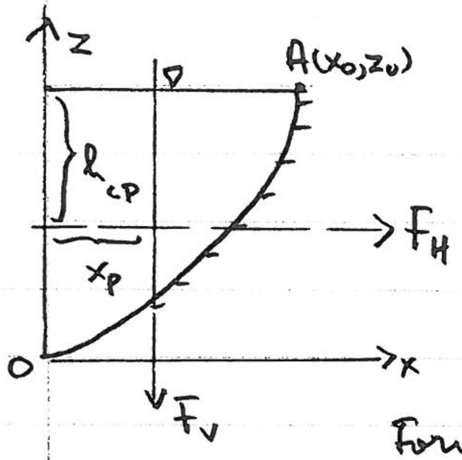
$$u(y) = u_{max}\left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right), \tag{1}$$

hvor u_{max} er maksimal hastighet midt i kanalen ($y = 0$).

b) Finn volumstrømmen Q, ut ifra ligning (1). Hvor stor må trykkgradienten $\partial p/\partial x$ være for å drive en gitt strøm Q gjennom kanalen? Uttrykk svaret ved $\gamma = \rho g$, μ og Q, samt de kjente størrelser θ og H.

c) Betrakt en lengde $\Delta L = x_2 - x_1$ av kanalen, beliggende mellom to snitt x_1 og x_2. La h_f betegne friksjonshøyden for denne lengden. La $\Delta z = z_1 - z_2$ bety den positive høydeforskjell, og la tilsvarende $\Delta p = p_1 - p_2$. Finn h_f uttrykt ved skjærspenningen τ_w ved veggene, samt de andre kjente størrelser.

Løsning Oppgave 1



a) $F_H = \gamma h_{cG} \cdot A_x$ ifølge formel.

Her er $h_{cG} = \frac{1}{2} z_0$, mens horisontalt projisert areal er $A_x = b z_0$. Det gir

$$\underline{F_H = \frac{1}{2}\gamma b z_0^2}$$

Formel $\xi_{cp} - \xi_{cG} = \frac{I_{yy}}{\xi_{cG} \cdot A}$ gir her, for det horisontalt projiserte areal, $h_{cp} - h_{cG} = \frac{I_{yy}}{h_{cG} \cdot A_x}$

Da $h_{cG} = \frac{1}{2} z_0$, $I_{yy} = \frac{1}{12} b z_0^3$, $A_x = b z_0$, få

$$\underline{h_{cp}} = \frac{1}{2} z_0 + \frac{1}{6} z_0 = \underline{\frac{2}{3} z_0}$$

b) $F_V = \gamma \mathcal{V}$, hvor volumet finnes ved integrasjon:

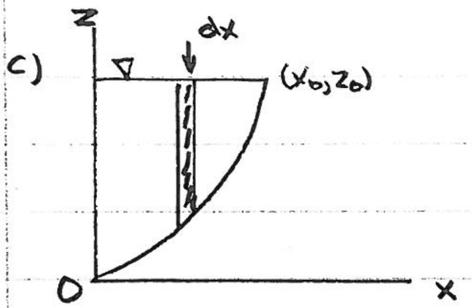
$\mathcal{V} = b \int x \cdot dz$. Her er $dz = \frac{k}{x_0} e^{x/x_0} \cdot dx$, altså

$$\mathcal{V} = \frac{kb}{x_0} \int_0^{x_0} x e^{x/x_0} dx = \frac{kb}{x_0} \cdot x_0^2 \cdot \Big|_0^{x_0} \left(\frac{x}{x_0} - 1\right) e^{x/x_0} = kbx_0 .$$

Altså

$$\underline{F_V} = \underline{\gamma k b x_0} = \underline{\frac{\gamma b x_0 z_0}{e-1}}$$

c)



Deler opp arealet i striper, hver stripe av bredde dx.

Tar kraftmomentet om origo:

$$M = \gamma b \int x(z_0 - z)\,dx = \gamma b \int_0^{x_0} x\left[z_0 - K(e^{x/x_0} - 1)\right]dx$$

$$= \gamma b \left\{ (z_0 + K)\cdot \tfrac{1}{2}x_0^2 - K \int_0^{x_0} x e^{x/x_0}\,dx \right\}$$

$$= \gamma b \left\{ (z_0 + K)\cdot \tfrac{1}{2}x_0^2 - K\cdot x_0^2 \cdot \underbrace{\Big|_0^{x_0}\left(\tfrac{x}{x_0} - 1\right)e^{x/x_0}}_{1} \right\}$$

$$= \gamma b \cdot \tfrac{1}{2}x_0^2 \left\{ z_0 + K - 2K \right\} = \tfrac{1}{2}\gamma b x_0^2 (z_0 - K).$$

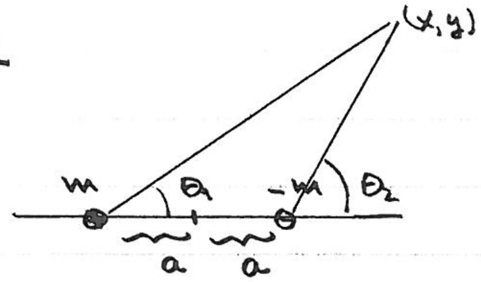
Alternativt kan M skrives som $M = F_V \cdot x_p$.

Altså

$$x_p = \frac{1}{F_V}\cdot \tfrac{1}{2}\gamma b x_0^2 (z_0 - K) = \frac{\tfrac{1}{2}\gamma b x_0^2 (z_0 - K)}{\gamma K b x_0}$$

$$\underline{x_p = \tfrac{1}{2}x_0\left(\frac{z_0}{K} - 1\right) = \tfrac{1}{2}x_0(e - 2)}$$

Løsning Oppgave 2



a)

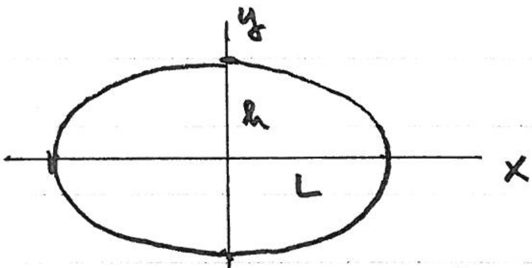
$\psi = U \cdot y + m\theta_1 - m\theta_2$ ifølge formelark. Det gir her

$$\psi = Uy + m \cdot \arctan\frac{y}{x+a} - m \cdot \arctan\frac{y}{x-a}$$

b) $u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$. Da $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$ blir

$$u = U + \frac{m}{1+\frac{y^2}{(x+a)^2}} \cdot \frac{1}{x+a} - \frac{m}{1+\frac{y^2}{(x-a)^2}} \frac{1}{x-a}$$

$$u = U + m\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} - m\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}$$



Ved $x = \pm L$ er $u = 0$ (Stagnasjonspunkter).

Altså $0 = U + \dfrac{m}{L+a} - \dfrac{m}{L-a}$

$$U(L^2 - a^2) = m(L+a) - m(L-a) = 2ma$$

$$L^2 = a^2 + \frac{2ma}{U} = a^2\left(1 + \frac{2m}{Ua}\right)$$

$$L = a\sqrt{1 + \frac{2m}{Ua}}$$

c) Trykket p i (0, h) finnes av Bernoulli:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = p + \frac{1}{2}\rho u^2(0,h) \text{ , hvor}$$

$$u(0,h) = U + \frac{2ma}{a^2+h^2} .$$

Altså $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho \left[U + \frac{2ma}{a^2+h^2}\right]^2$

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 + \frac{2ma}{U(a^2+h^2)}\right]^2$$

$$= p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - 1 - \frac{4ma}{U(a^2+h^2)} - \frac{4m^2a^2}{U^2(a^2+h^2)^2}\right]$$

$$\underline{p = p_\infty - \frac{2\rho Uma}{a^2+h^2}\left[1 + \frac{ma}{U(a^2+h^2)}\right]}$$

d) $F_x = 0$. Det følger av symmetrien:
Kan f.eks. legge inn to snitt, ett snitt foran ovalen (INN) og ett snitt etter (UT). Da impulsfluksene er like, $\dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN} = 0$, er kraften på vannet i CV (mellom snittene) lik null. Da er også kraften på ovalen lik null.

Løsning Oppgave 3

a) Navier-Stokes: $(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu\nabla^2\vec{V}$

x-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \nu\frac{d^2u}{dy^2}$ ①

y-retning: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\theta$ ②

Av ②: $\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma\cos\theta$, $p = -\gamma y\cos\theta + f(x)$ $\Rightarrow$

$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x)$, uavhengig av y.

Da blir ①:

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta}_{\text{Avhenger av } x} = \underbrace{\mu\frac{d^2u}{dy^2}}_{\text{Avhenger av } y}$$

Altså er

$$K \equiv \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$$ konstant, uavhengig av x og y.

Løsning av $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{K}{\mu}$ på formen

$$u = \frac{K}{2\mu}y^2 + C_1 y + C_2$$

Heftbetingelse ved $y = \pm H$:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{K}{2\mu}H^2 + C_1 H + C_2 \\ 0 &= \frac{K}{2\mu}H^2 - C_1 H + C_2 \end{aligned}\right\} \quad C_1 = 0,\ C_2 = -\frac{K}{2\mu}H^2.$$

$\Rightarrow$

$$\underline{u(y) = u_{max}\left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right)}, \text{ hvor } \underline{u_{max} = -\frac{K}{2\mu}H^2}$$

b) Volumfluks per lengdeenhet inn i planet er

$$\underline{Q} = \int_{-H}^{H} u\,dy = 2u_{max}\int_{0}^{H}\left(1-\frac{y^2}{H^2}\right)dy = \underline{\frac{4}{3}H u_{max}}$$

Setter inn $u_{max} = -\frac{K}{2\mu}H^2$, og får $Q = -\frac{2KH^3}{3\mu}$, eller

$K = -\frac{3\mu}{2H^3}\cdot Q$. Og da $K = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta$ får

$$-\frac{3\mu}{2H^3}Q = \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\sin\theta\ , \quad \underline{\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma\sin\theta - \frac{3\mu}{2H^3}\cdot Q}$$

c) Energiligning

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2\right) + w_s + g\cdot h_f$$

$V_1 = V_2$, slik at

$$h_f = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} \qquad ①$$

Impulsligning $\sum F_x = \dot{M}_{UT} - \dot{M}_{INN} = 0$.

Summerer kreftene:

$$\sum F_x = \underset{\text{TRYKK}}{\Delta p\cdot 2H} + \underset{\text{TYNGDE}}{\gamma\cdot(2H\,\Delta L)\sin\theta} - \underset{\text{FRIKSJON}}{\tau_w\cdot 2\cdot\Delta L} = 0$$

⸪ $2H\cdot\Delta p + 2\gamma H\cdot\Delta z - 2\tau_w\,\Delta L = 0$

Setter inn $\Delta z = h_f - \Delta p/\gamma$ fra ①, og får

$$2H\cdot\cancel{\Delta p} + 2\gamma H\left(h_f - \cancel{\frac{\Delta p}{\gamma}}\right) - 2\tau_w\cdot\Delta L = 0$$

$$\underline{h_f = \frac{\tau_w\cdot\Delta L}{\gamma\cdot H}}$$