Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1 Høst 2014

Løsningsforslag — Øving 08

$\boxed{3.6.7}$ Vi husker at definisjonene på $\sinh x$, $\cosh x$ og $\tanh x$ er

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}. \end{aligned}$$

Videre vet vi at e og ln er inverse funksjoner, slik at

$$e^{\ln x} = x \quad \text{og} \quad e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Vi kan nå forenkle uttrykkene:

a)

$$\sinh \ln x = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} = \frac{x - \frac{1}{x}}{2} = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

b)

$$\cosh \ln x = \frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} = \frac{x^2 + 1}{2x}.$$

c)

$$\tanh \ln x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{x^2-1}{2x}}{\frac{x^2+1}{2x}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

d)

$$\frac{\cosh \ln x + \sinh \ln x}{\cosh \ln x - \sinh \ln x} = \frac{\frac{x^2+1}{2x} + \frac{x^2-1}{2x}}{\frac{x^2+1}{2x} - \frac{x^2-1}{2x}} = \frac{2x^2}{2} = x^2.$$

$\boxed{4.2.22}$ Gitt $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, har vi at $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Newtons metode er da gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_n^{-\frac{2}{3}}} = x_n - 3x_n = -2x_n.$$

Med $x_0 = 1$, får vi at

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -8, \quad x_4 = 16.$$

Vi ser at løsningen oscillerer og divergerer vekk fra den riktige løsningen $x = 0$. Vi ser også at vi kan uttrykke x_n eksplisitt som funksjon av n,

$$x_n = (-2)^n = \begin{cases} -2^n & \text{for odde } n, \\ 2^n & \text{for like } n. \end{cases}$$

Det betyr at

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty.$$

Newtons metode fungerer altså ikke på denne funksjonen. Dette gjelder uansett hvilken startverdi vi velger.

Observer at $f(x)$ har en knekk i $x = 0$, slik at $f'(x)$ ikke er definert her. Derfor gjelder ikke Teorem 2 side 227 i boka på denne funksjonen.

5.3.8 Vi er gitt funksjonen $f(x) = 1 - x$. Vi deler intervallet $[0,2]$ inn i n like store underintervall $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 0,1,\ldots,n$, med størrelse $\Delta x = \frac{2}{n}$, og der $x_i = i\Delta x = \frac{2i}{n}$. Mengden av punkter $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ er nå en *partisjon*, P_n, av intervallet $[0,2]$. Siden $f(x)$ er en synkende funksjon for alle x, har vi at minimum av f på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ er $l_i = x_i$, og tilsvarende at maksimum på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ er $u_i = x_{i-1}$. Den nedre Riemann-summen for f og P_n er nå gitt ved (se Definisjon 2 side 300 i boka)

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i) \\ &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n} = 2 - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= 2 - \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = 2 - \frac{2n^2 + 2n}{n^2} = -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Her har vi blant annet brukt summeringsreglene (a) og (b) i Teorem 1, side 291 i boka. På tilsvarende måte kan vi finne et uttrykk for den øvre Riemann-summen,

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 - x_{i-1}) \\ &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2(i-1)}{n} = 2 - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= 2 - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = 2 - \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n} \\ &= 2 - \frac{2n^2 + 2n}{n^2} + \frac{4}{n} = -\frac{2}{n} + \frac{4}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Vi ser at

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = 0.$$

Dette betyr at

$$\int_0^2 (1 - x)\mathrm{d}x = 0.$$

<u>Kommentar:</u> Hvorfor impliserer $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = L$ at integralet eksisterer?

Fra definisjonen på et bestemt integral (Definisjon 3, side 302 i boka) har vi at f er integrerbar på $[a,b]$ dersom det bare finnes et tall I slik at for alle partisjoner P av $[a,b]$, så har vi at

$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P). \tag{1}$$

Vi må altså vise at denne betingelsen gjelder. La P være en vilkårlig partisjon av $[a,b]$. Vi kan da finne en uniform partisjon P_{n^*} som er like fin eller finere enn P ved å velge n^* stor nok. Da vet i at

$$L(f,P_{n^*}) \geq L(f,P).$$

Dette gjelder også i grensen $n \to \infty$, slik at

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \geq L(f,P).$$

Siden P er vilkårlig, vil denne ulikheten gjelde for alle P. Tilsvarende kan vi vise at

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) \leq U(f,P),$$

for alle P. Ved å sette sammen disse ulikhetene har vi at

$$L(f,P) \leq \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = L = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) \leq U(f,P),$$

for alle P. Siden betingelsen (1) skal gjelde for alle partisjoner P, også P_n for alle n, må vi kreve at $I = L$ for at den skal være tilfredsstilt. Ingen andre valg av I vil oppfylle (1). Vi har altså vist at f er integrerbar på $[a,b]$ med

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = L$$

når $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = L$.

5.4.2 I denne oppgaven bruker vi spesielt linearitet i det bestemte integralet og additivitet av integrasjonsintervaller (se punktene (c) og (d) i Teorem 3 side 106 i boka), henholdsvis

$$\int_a^b Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{for alle konstanter } A,$$

og

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vi starter med å dele opp hvert ledd i integraler over intervallene [0,1], [1,2] og [2,3],

$$\begin{aligned}
\int_0^2 3f(x)\,\mathrm{d}x &= 3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x,\\
\int_1^3 3f(x)\,\mathrm{d}x &= 3\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x,\\
-\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x &= -2\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x,\\
-\int_1^2 2f(x)\,\mathrm{d}x &= -2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Hvis vi summerer alle bidragene til intervallene over [0,1] står vi igjen med

$$3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

For intervallet [1,2] står vi igjen med

$$3\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Til slutt, for intervallet [2,3] står vi igjen med

$$3\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dersom vi nå summerer alle disse leddene står vi igjen med

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uttrykket i oppgaven kan altså forenkles til integralet av $f(x)$ over intervallet [0,3].

5.5.36 Vi skal finne gjennomsnittsverdien til f over $[-2{,}2]$. Den er gitt som (se Definisjon 4 side 309 i boka)

$$\bar{f} = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$$

Vi vet at $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ er den antideriverte til $f(x)$ siden $F'(x) = \mathrm{e}^{3x} = f(x)$. Fra analysens fundamentalteorem (*The Fundamental Theorem of Calculus*, side 311 i boka) følger det at

$$\begin{aligned}\bar{f} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\left(F(2) - F(-2)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{6} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-6}\right)\\ &= \frac{1}{12}\left(\mathrm{e}^{6} - \mathrm{e}^{-6}\right) = \frac{1}{6}\sinh(6) \approx 33{,}619.\end{aligned}$$

5.6.16 Vi bruker substitusjon, og lar $u = x^3$. Da har vi at $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Innsatt i integralet får vi nå at

$$I = \int \frac{x^2}{2+x^6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x^2}{3(2+x^6)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}.$$

Vi ser nå at $u = x^3$ var et godt valg fordi vi står igjen med en enklere integrand som kun er avhengig av u. Vi gjenkjenner integranden, $\frac{1}{2+u^2}$, som den antideriverte til $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$ (se punkt 16 øverst side 318 i boka). Altså har vi at

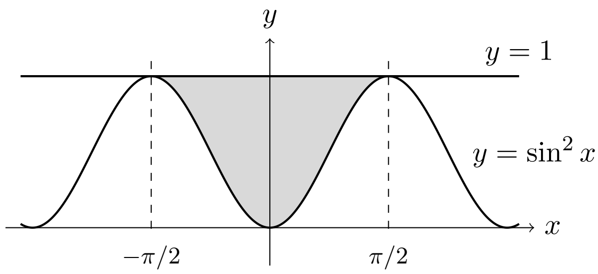
$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Vi setter så inn igjen for u, og får at

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{6} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x^3}{2}\right) + C.$$

Husk at vi enkelt kan undersøke om vi har regnet riktig ved å derivere svaret og se om vi da ender opp med integranden.

$\boxed{5.7.18}$ Vi skisserer først kurvene og finner området vi skal finne arealet av:



Vi er altså ute etter arealet, A, mellom kurvene $y = 1$ og $y = \sin^2 x$, se det skraverte feltet i figuren over. Disse kurvene skjærer hverandre i $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Da er

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Vi har her brukt at $1 - \sin^2 x$ er en like funksjon slik at integralet over intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ er lik to ganger intergralet over intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Videre gjenkjenner vi det første integralet som arealet av rektangelet gitt av linjene $y = 0$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{\pi}{2}$, mens det andre integralet er arealet under kurven $y = \sin^2 x$ mellom $x = -\frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{\pi}{2}$. Det første integralet kan vi enkelt evaluere, mens for det andre bruker vi at $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ og at $\int \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

$$\begin{aligned}
A &= 2\,x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \\
&= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{6.1.4}$ Vi skal evaluere det ubestemte integralet

$$I = \int (x^2 - 2x)\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x.$$

Vi starter med å dele opp integralet i to,

$$I = \int x^2\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x - 2\int x\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x.$$

La oss først se på integralet $I_2 = \int x\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$. Vi bruker delvis integrasjon og følger notasjonen side 333 i boka. La $U = x$ og $\mathrm{d}V = \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$, slik at $\mathrm{d}U = \mathrm{d}x$ og $V = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$. Vi har nå at

$$\begin{aligned} I_2 = \int x\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \int U\mathrm{d}V = UV - \int V\mathrm{d}U \\ &= x\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx} - \int \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{kx} + \tilde{C} \\ &= \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\left(x - \frac{1}{k}\right) + \tilde{C}. \end{aligned}$$

For å evaluere $I_1 = \int x^2\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$ bruker vi samme metode, men nå setter vi $U = x^2$ og $\mathrm{d}V = \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$, slik at $\mathrm{d}U = 2x\,\mathrm{d}x$ og $V = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$. Dette gir

$$\begin{aligned} I_1 = \int x^2\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \int U\mathrm{d}V = UV - \int V\mathrm{d}U \\ &= x^2\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx} - \int \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2}{k}\int x\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2}{k}I_2 \\ &= \frac{x^2}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2}{k}\cdot\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\left(x - \frac{1}{k}\right) - \frac{2}{k}\tilde{C} \\ &= \frac{x^2}{k}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2x}{k^2}\mathrm{e}^{kx} + \frac{2}{k^3}\mathrm{e}^{kx} - \frac{2}{k}\tilde{C} \\ &= \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\left(x^2 - \frac{2x}{k} + \frac{2}{k^2}\right) - \frac{2}{k}\tilde{C}. \end{aligned}$$

Vi summerer nå sammen de to integralene og får

$$\begin{aligned} I = I_1 - 2I_2 &= \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\left(x^2 - \frac{2x}{k} + \frac{2}{k^2} - 2x + 2\frac{1}{k}\right) - \frac{2}{k}\tilde{C} + \tilde{C} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k^3}\left(k^2x^2 - 2kx + 2 - 2k^2x + 2k\right) + C \\ &= \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k^3}\left(k^2(x-1)x - 2k(x-1) + 2\right) + C. \end{aligned}$$

I utregningene over har vi satt $C = -\frac{2}{k}\tilde{C} + \tilde{C}$.

Husk at vi enkelt kan undersøke om vi har regnet riktig ved å derivere svaret og se om vi da ender opp med integranden.