Løsningsforslag - Øving 10

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 14.3

$\boxed{1}$

$$\oint_C \frac{z^2}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}\,\mathrm{d}z$$

Kurven C innesluttер $z=-1$, men ikke $z=1$. Kan dermed bruke Cauhcys formel med

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1}$$
$$z_0 = -1$$

fordi $f(z)$ er analytisk innenfor C.

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z^2}{z^2-1}\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{z^2/(z-1)}{z+1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \frac{z^2}{z-1}\bigg|_{z=-1} \\ &= \underline{-\pi i}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $C: \quad |z+i| = 1.41$

$$|-1+i| = \sqrt{2} > 1.41$$
$$|1+i| = \sqrt{2} > 1.41$$

$\Longrightarrow$ $z=-1$ og $z=1$ på utsiden av $C \implies f(z)$ analytisk i $D = \{z : |z+1| \leq 1.41+\epsilon\}$

$$\Longrightarrow \oint_C f(z)dz = 0$$

$\boxed{11}$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+4}, \qquad C: 4x^2+(y-2)^2 = 4 \quad \text{mot klokka}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z+2i)}$$

$$4\cdot 0 + (2-2)^2 = 0 < 4 \implies z = 2i \quad \text{på innsiden av C}$$
$$4\cdot 0 + (-2-2)^2 = 16 > 4 \implies z = -2i \quad \text{på utsiden av C}$$

$\Longrightarrow$ $g(z) = \frac{1}{z+2i}$ analytisk i $\mathbb{C}\backslash\{-2i\}$

$$\Longrightarrow \oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{g(z)}{z-2i}dz = 2\pi i g(2i) = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{13}$

$$\oint_C \frac{z+2}{z-2}dz \qquad C: |z-1| = 2 \quad \text{mot urviseren}$$

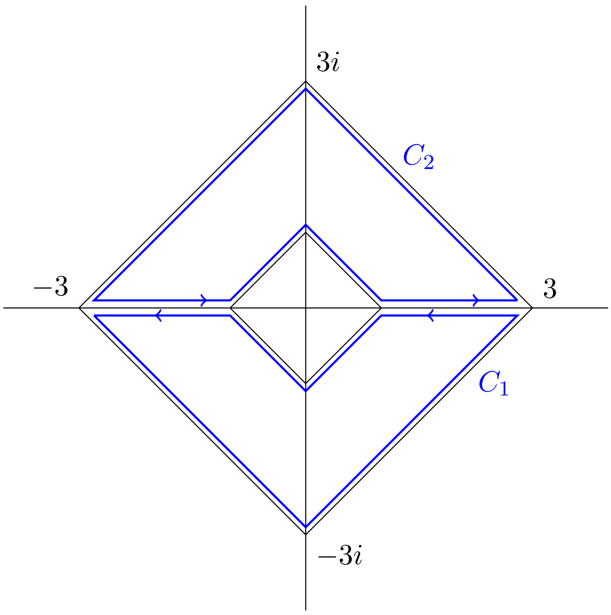
$$|2-i| = 1 < 2 \implies z = 2 \quad \text{på innsiden av C}$$

$g(z) = z + 2$ er analytisk i $\mathbb{C}$

$$\implies \oint_C \frac{z+2}{z-2}dz = \oint_C \frac{g(z)}{z-2}dz = 2\pi i g(2) = 2\pi i 4 = 8\pi i$$

$\boxed{18}$

$$\oint_C \frac{\sin z}{4z^2 - 8iz}dz = \oint \frac{\sin z}{4z(z-2i)}$$



Del mengden omsluttet av C inn i to enkeltsammenhengende mengder (se bildet).

$$f(z) = \frac{\sin z}{4z(z-2i)} \quad \text{er analytisk i } \mathbb{C}\backslash\{0, 2i\}, \text{ og } z = 0 \text{ på utsiden av } C_2$$

$$\implies \oint_C \frac{\sin z}{4z(z-2i)}dz \overset{14.2.1}{=} \oint_{C_2} \frac{\sin z}{4z(z-2i)}dz = \oint_{C_2} \frac{g(z)}{z-2i}dz$$

$$\overset{14.3.1}{=} 2\pi i g(2i) = 2\pi i \frac{\sin(2i)}{8i} = \frac{\pi}{4}\sin(2i)$$

$\boxed{20}$ Vis

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = 0 \qquad \forall \text{enkelt lukkede kurver C rundt } z_1, z_2$$

$\cdot)$ $z_1 \neq z_2$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = \oint_C \frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right)dz$$
$$= \frac{1}{z_1-z_2}\oint_C \left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right)dz = \frac{1}{z_1-z_2}(1-1) = 0$$

siden z_1, z_2 er på innsiden av C og $g(z) = 1$ er analytisk i $\mathbb{C}$.

$\cdot)$ $z_1 = z_2$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_1)^2}dz$$

Anta uten tap av generalitet at C er en sirkel med radius 1 rundt z_1
$\implies z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \to z(t) = z_1 + \cos t + i \sin t$

$$\implies \oint_C \frac{1}{(z-z_1)^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos t + i\sin t)^2} i(\cos t + i \sin t)dt$$
$$= i\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} = i\int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)dt = 0$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 14.4

$\boxed{3}$

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z, \qquad n = 1, 2, ...$$

Bruker formelen for den deriverte til analytiske funksjoner:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \qquad n = 1, 2, ...$$

(Formelen gjelder også for $n = 0$, og er da bare Cauchys integralformel).

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0)$$

med

$$f(z) = \mathrm{e}^{-z}$$
$$z_0 = 0$$

Deriverer $f(z)$:

$$f'(z) = -\mathrm{e}^{-z}$$
$$f''(z) = \mathrm{e}^{-z}$$
$$f^{(3)}(z) = -\mathrm{e}^{-z}$$
$$f^{(4)}(z) = \mathrm{e}^{-z}$$

$$=> \quad f^{(n-1)}(0) = (-1)^{n+1}$$

Dermed blir svaret

$$\underline{\oint_C \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!}(-1)^{n+1}}$$

$\boxed{9}$ C ellipse $16x^2 + y^2 = 1$ med uret
C^* ellipse $16x^2 + y^2 = 1$ mot uret.
$\implies$ $z = 0$ på innsiden av C^*.

$$\oint_C \frac{\tan(\pi z)}{z^2} dz = -\oint_{C^*} \frac{\tan(\pi z)}{z^2} dz$$

$\tan(\pi z)$ analytisk i $\mathbb{C}\backslash\{\text{nullpunkter for } \cos(\pi z)\}$

$$\begin{aligned}
&\cos(\pi z) = \cos(\pi x)\cosh(\pi y) - i\sin(\pi x)\sinh(\pi y) \\
&-\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4} \implies 1 \ge \cos(\pi x) \ge \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\implies \cos(\pi x)\cosh(\pi y) \ne 0 \forall z \text{ på innsiden av C} \\
&-1 \le y \le 1 \implies \cosh(\pi y) \ge 1 \\
&\implies \tan(\pi z)\text{analytisk på innsiden av } C + \epsilon
\end{aligned}$$

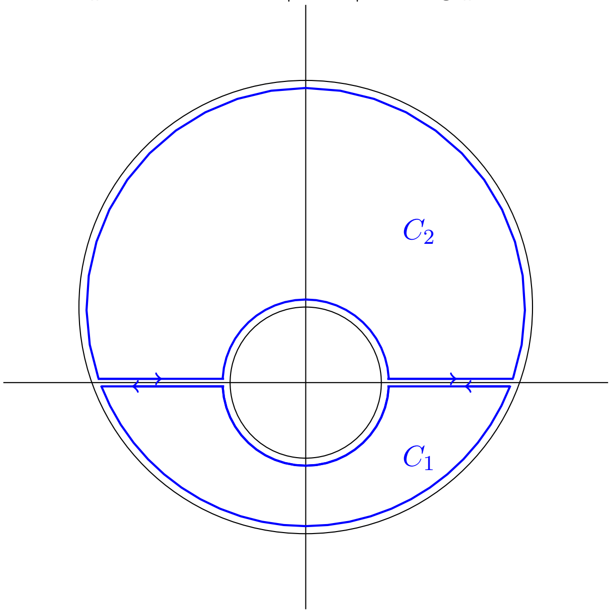
$$\oint_C \frac{\tan(\pi z)}{z^2} dz = -\oint_{C^*} \frac{\tan(\pi z)}{z^2} dz = -2\pi i (\tan(\pi z))'\Big|_{z=0} = -2\pi i \pi = -2\pi^2 i$$

der $(\tan z)' = 1 + \tan^2 z$

$\boxed{16}$

$$\oint_C \frac{e^{4z}}{z(z-2i)^2} dz \quad C : |z - i| = 3 \text{ mot uret, } |z| = 1 \quad \text{med uret}$$

$z = 0$ på innsiden av $|z - i| = 3$ og $|z| = 1$
$z = 2i$ på innsiden av $|z - i| = 3$ og på utsiden av $|z| = 1$



Vi deler opp mengden omsluttet av C i to enkeltsammenhengende mengder (se bildet).
$f(z) = \frac{e^{4z}}{z(z-2i)^2}$ er analytisk på innsiden av $C_1 + \epsilon$.
$g(z) = \frac{e^{4z}}{z}$ analytisk i $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $g'(z) = \frac{1}{z^2}(4e^{4z}z - e^{4z})$

$$\implies \oint_C \frac{e^{4z}}{z(z-2i)^2}dz = \oint_{C_2} \frac{e^{4z}}{z(z-2i)^2}dz = 2\pi i g'(2i) = 2\pi i \frac{1}{-4}(4e^{8i} \cdot 2i - e^{8i})$$
$$= -\frac{\pi i}{2}(8ie^{8i} - e^{8i}) = -\frac{\pi i}{2}e^{8i}(8i-1)$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 15.1

$\boxed{16}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(20+30i)^n}{n!}$$

$$\implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{20+30i}{n+1}\right| \to 0 \implies \text{konvergent}$$

$\boxed{18}$ Vi skal undersøke om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{i}{4}\right)^n$$

er konvergent. Vi studerer forholdet ρ_n gitt ved

$$\rho_n = \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{(n+1)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}$$

når n går mot ∞. Denne grensen er $\frac{1}{4}$. Så rekken konvergerer.

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 15.2

$\boxed{5}$

$$\sum a_n z^{2n} = \sum a_n (z^2)^n \implies \text{Konvergent for } |z^2| < R$$
$$\implies \text{Konvergent for } |z| < \sqrt{R} \implies \text{Konvergensradius } \sqrt{R}$$

$\boxed{13}$ Senteret til rekken er $z_0 = -i$

Rekken er ikke på formen $\sum a_n(z-z_0)^n$, og om den skrives om til den formen, vil de fleste av termene bli lik 0, så Cauchy-Hadamard kan ikke brukes.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 16^n (z+i)^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (16(z+i)^4)^n$$

er en geometrisk rekke, og den vil konvergere dersom

$$|16(z+i)^4| < 1$$

eller

$$|z+i| < \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}$$

Dermed blir konvergensradiusen

$$\underline{\underline{R = \frac{1}{2}}}$$

$\boxed{15}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} (z-2i)^n$$

Kvotientkriterium:

$$\begin{aligned}\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \frac{4^n (n!)^2}{4^{n+1}((n+1)!)^2} |z-2i| &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{4(n+1)^2} |z-2i| \\ &= \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n+1} |z-2i| \to |z-2i| < 1\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Konvergensradius 1, sentrum $2i$.