Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet Institutt for matematiske fag	TMA4120 Matematikk 4K Høst 2015 **Løsningsforslag — Øving 1**

Litt om notasjon: Det er vanskelig å regne på Laplacetransformasjoner uten å misbruke notasjonen en smule. $\mathcal{L}$ er en operator der både input og output er **funksjoner**. Hvis f er en funksjon med verdi, f.eks., $f(t)$ for en $t \geq 0$, så er $\mathcal{L}\{f\}$ en funksjon med verdi, f.eks., $\mathcal{L}\{f\}(s)$ i punktet s. Likevel ofrer vi ofte korrekthet mot effektivitet. F.eks. forstår vi hva som menes med $\mathcal{L}\{f(t)\}$ selv om det egentlig ikke gir mening å evaluere $\mathcal{L}$ i **tallet** $f(t)$.

Bruken av bokstavene t og s som variabler er bare konvensjoner. Det er likevel greit og holde seg til denne konvensjonen slik at vi enklere forstår om det er snakk om en funksjon eller dens transformasjon – særlig når vi ikke er helt rigorøs i notasjonen.

$\boxed{\text{6:1:1}}$ Finn $\mathcal{L}\{f\}$ når

$$f(t) = 2t + 8.$$

Løsning:
Ved linearitet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{2t+8\} &= 2\mathcal{L}\{t\} + 8\mathcal{L}\{1\} \\ &= \frac{2}{s^2} + \frac{8}{s}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{6:1:8}}$ Finn $\mathcal{L}\{f\}$ når

$$f(t) = 1.5\sin(3t - \pi/2).$$

Løsning:
Ettersom $\sin(u - \pi/2) = -\cos u$, er

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f\} &= -1.5\mathcal{L}\{\cos 3t\} \\ &= -1.5\frac{s}{s^2+9}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{6:1:13}}$ Finn $\mathcal{L}\{f\}$ når

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 e^{-st}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{s}\Big|_0^1 e^{-st} + \frac{1}{s}\Big|_1^2 e^{-st} \\
&= -\frac{e^{-s}-1}{s} + \frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s} \\
&= \frac{e^{-2s}-2e^{-s}+1}{s} \\
&= \frac{(e^{-s}-1)^2}{s}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{6.1:23}}$ Vis at

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{F(s/c)}{c}$$

når $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ og $c > 0$ er en konstant.

Løsning:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(ct)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(ct)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{SUB: } \tau = ct \\
&= \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{c}F(s/c).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{6.1:30}}$ Finn $f(t)$ når

$$F(s) = \frac{4s+32}{s^2-16}.$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{4s+32}{s^2-16} \\
&= 4\frac{s}{s^2-4^2} + 8\frac{4}{s^2-4^2} \\
&= 4\mathcal{L}\{\cosh 4t\} + 8\mathcal{L}\{\sinh 4t\}.
\end{aligned}$$

Ettersom den inverse transformasjonen er lineær, får vi

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{4\mathcal{L}\{\cosh 4t\} + 8\mathcal{L}\{\sinh 4t\}\} \\ &= 4\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\cosh 4t\}\} + 8\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\sinh 4t\}\} \\ &= 4\cosh 4t + 8\sinh 4t. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{6.1:36}}$ s-shift: Finn Laplace-transformasjonen til

$$f(t) = \sinh t \cos t.$$

Løsning:
Vi skriver

$$\sinh t \cos t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}\cos t = \frac{1}{2}e^t \cos t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t.$$

Ettersom $G(s) := \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$ får vi ved thm. 2 at

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^t \cos t\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos t\right\} \\ &= \frac{1}{2}G(s-1) - \frac{1}{2}G(s+1) \\ &= \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

som videre kan forenkles til $\frac{s^2-2}{s^4+4}$.

$\boxed{\text{6.1:40}}$ s-shift: Finn den inverse Laplace-transformasjonen til

$$\frac{4}{s^2-2s-3}.$$

Løsning:

$$\begin{aligned} \frac{4}{s^2-2s-3} &= \frac{4}{(s-1)^2-4} \\ &= 2\frac{2}{(s-1)^2-4} \\ &= 2F(s-1) \end{aligned}$$

der $F(s) = \frac{2}{s^2-2^2} = \mathcal{L}\{\sinh 2t\}$. Dermed er

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2-2s-3}\right\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\{F(s-1)\} \\ &= 2e^t \sinh 2t \\ &= e^{3t} - e^{-t}. \end{aligned}$$

Samme resultat kan oppnås ved delbrøkoppspaltning av $\frac{4}{s^2-2s-3}$.

$\boxed{6.2{:}4}$ Løs IVP v.h.a. Laplace-transformasjon.

$$y'' + 9y = 10e^{-t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
y'' + 9y &= 10e^{-t} \\
&\Rightarrow \\
0 &= \mathcal{L}\left\{y'' + 9y - 10e^{-t}\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{y''\right\} + 9\mathcal{L}\left\{y\right\} - 10\mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} \\
&= s^2Y - sy(0) - y'(0) + 9Y - 10\frac{1}{s+1} \\
&= (s^2+9)Y - \frac{10}{s+1} \\
&\Rightarrow \\
Y(s) &= \frac{10}{(s+1)(s^2+9)} \\
&= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+9} - \frac{s}{s^2+9}, \qquad \text{delbrøkoppsp.} \\
&= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{3}{s^2+3^2} - \frac{s}{s^2+3^2} \\
&\Rightarrow \\
y(t) &= e^{-t} + \frac{1}{3}\sin(3t) - \cos(3t).
\end{aligned}$$

$\boxed{6.2{:}13}$ Løs shifted IVP v.h.a. Laplace-transformasjon.

$$y' - 6y = 0, \qquad y(-1) = 4.$$

Løsning:
La $v(t) := y(t-1)$. Da er $v' - 6v = 0$, $v(0) = 4$ og

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}\left\{v' - 6v\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{v'\right\} - 6\mathcal{L}\left\{v\right\} \\
&= sV - v(0) - 6V \\
&= (s-6)V - 4.
\end{aligned}$$

Dette gir $V(s) = \frac{4}{s-6}$ og dermed er $v(t) = 4e^{6t}$. Dvs.

$$y(t) = v(t+1) = 4e^{6(t+1)}.$$

$\boxed{6.3{:}11}$ Skissér grafen og finn Laplace-transformasjonen til

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \sin t, & \pi/2 < t < \pi, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Løsning:
Vi forsøker å skrive dette som summer på formen $f(t-a)u(t-a)$ der u er Heaviside-funksjonen:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \sin t\big(u(t-\pi/2) - u(t-\pi)\big)\\ &= \cos(t-\pi/2)u(t-\pi/2) + \sin(t-\pi)u(t-\pi)\end{aligned}$$

fordi $-\sin(t-\pi) = \sin t = \cos(t-\pi/2)$. Dermed er

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\tilde{f}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\cos(t-\pi/2)u(t-\pi/2)\right\} + \mathcal{L}\left\{\sin(t-\pi)u(t-\pi)\right\}\\ &= e^{-\pi s/2}\frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{6.3:15}}$ Finn, og tegn grafen til, $\tilde{f}(t)$ hvis

$$\mathcal{L}\left\{\tilde{f}\right\} = \frac{e^{-2s}}{s^6}.$$

Løsning:
Hvis $f(t) = t^5/5!$, så er $\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s^6} =: F(s)$. Dermed er

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^6}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}F(s)\right\}\\ &= f(t-2)u(t-2)\\ &= \begin{cases}\frac{(t-2)^5}{5!}, & t > 2,\\ 0, & \text{ellers.}\end{cases}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{6.3:24}}$ Løs IVP v.h.a. Laplace-transformasjon.

$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \qquad 0 = y(0) = y'(0)$$

der

$$r(t) = \begin{cases}1, & 0 < t < 1,\\ 0, & \text{ellers.}\end{cases}$$

Løsning:
Vi har at $r(t) = u(t) - u(t-1)$, så

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{L}\left\{y'' + 3y' + 2y - u(t) + u(t-1)\right\}\\ &= s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3(sY - y(0)) + 2Y - \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s}\\ &= (s^2+3s+2)Y - \frac{1-e^{-s}}{s}.\end{aligned}$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1-e^{-s}}{s(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} - e^{-s}\left(\frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}\right), \quad \text{delbrøkopps.}
\end{aligned}
$$

Altså

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\} \\
&= \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \left(\frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right)u(t-1).
\end{aligned}
$$