Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

"Review Exercise 16", side 286

Vi lar $f(x) = \sin^2 x$. Taylor-polynomet av grad 6 til f om $x = 0$ er gitt som

$$P_6(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6.$$

Vi finner først de deriverte til f,

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin^2 x, && f(0) = 0,\\
&f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x, && f'(0) = 0,\\
&f''(x) = 2\cos 2x, && f''(0) = 2,\\
&f^{(3)}(x) = -4\sin 2x, && f^{(3)}(0) = 0,\\
&f^{(4)}(x) = -8\cos 2x, && f^{(4)}(0) = -8,\\
&f^{(5)}(x) = 16\sin 2x, && f^{(5)}(0) = 0,\\
&f^{(6)}(x) = 32\cos 2x, && f^{(6)}(0) = 32.
\end{aligned}$$

Vi har nå at

$$P_6(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 + \frac{32}{6!}x^6 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6.$$

Fra Taylors teorem vet vi at

$$f(x) = P_6(x) + \mathcal{O}(x^7).$$

Vi bruker dette til å evaluere grensen,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x - 3x^2 + x^4}{x^6} &= \lim_{x\to 0}\frac{3\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6\right) + \mathcal{O}(x^7) - 3x^2 + x^4}{x^6}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{15}x^6 + \mathcal{O}(x^7)}{x^6}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{15} + \mathcal{O}(x)\right) = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

"Challenging problem 2", side 330

a) Vi vet at

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b,\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b,
\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}\cos\left(\left(j+\tfrac{1}{2}\right)t\right)-\cos\left(\left(j-\tfrac{1}{2}\right)t\right) &= \cos(jt)\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)-\sin(jt)\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\\ &\quad -\left(\cos(jt)\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)+\sin(jt)\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right)\\ &= -2\sin(jt)\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right).\end{aligned}$$

Dermed har vi at

$$\sin(jt)=\frac{\cos\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)t\right)-\cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

Vi må kreve at $\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\neq 0$, det vil si at $\frac{t}{2\pi}$ ikke er et heltall. Hvis vi så summerer over $j=1,2,\ldots,n$ på begge sider får vi at

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sin(jt) &= \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\cos\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)t\right)-\cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right\}\\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n}\left\{\cos\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)t\right)-\cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t\right)\right\}}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.\end{aligned}$$

La oss se litt nærmere på summen i telleren ved å skrive ut noen av leddene,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left\{\cos\left(\left(j-\tfrac{1}{2}\right)t\right)-\cos\left(\left(j+\tfrac{1}{2}\right)t\right)\right\}\\ &\quad=\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)-\cos\left(\tfrac{3}{2}t\right)\right)+\left(\cos\left(\tfrac{3}{2}t\right)-\cos\left(\tfrac{5}{2}t\right)\right)+\left(\cos\left(\tfrac{5}{2}t\right)-\cos\left(\tfrac{7}{2}t\right)\right)\\ &\qquad+\ldots+\left(\cos\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right)-\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right)\right)\\ &\quad=\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)-\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right).\end{aligned}$$

Vi ser at alle leddene utenom det første og det siste kanselleres mot hverandre. Slike summer kaller vi gjerne teleskopsummer (se side 292–293 i boka). Vi har altså vist at

$$\sum_{j=1}^{n}\sin(jt)=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}t\right)-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

b) La $f(x)=\sin x$ og del intervallet $[0,\frac{\pi}{2}]$ opp i n like store intervaller, $[x_{i-1},x_i]$, der $x_i=i\frac{\pi}{2n}$ for $i=1,2,\ldots,n$. Størrelsen på hvert intervall er da $\Delta x=\frac{\pi}{2n}$. Vi har nå en partisjon, $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, av intervallet $[0,\frac{\pi}{2}]$. Hvis vi videre lar $c=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, kan vi sette opp en Riemann-sum,

$$R(f,P,c)=\sum_{j=1}^{n}f(c_j)\Delta x=\sum_{j=1}^{n}\sin(i\tfrac{\pi}{2n})\tfrac{\pi}{2n}.$$

Vi vet at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}R(f,P,c)$$

(se side 303–304 i boka). Vi setter så uttrykket vi fant i **a)** med $t = \frac{\pi}{2n}$ inn i uttrykket for Riemann-summen,

$$R(f,P,c) = \sum_{j=1}^{n} \sin\left(i\frac{\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{2n} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\frac{\pi}{2n}.$$

Legg merke til at $\frac{t}{2\pi} = \frac{1}{4n}$, det vil si ikke et heltall. Videre kan vi vise ved hjelp av addisjonsregelen for cosinus at

$$\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right).$$

Vi står da igjen med

$$R(f,P,c) = \frac{\pi}{4}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} + \frac{1}{n}\right).$$

Når vi nå skal evaluere $R(f,P,c)$ i grensen $n \to \infty$, bruker vi Taylor-polynomene til $\cos y$ og $\sin y$ om $y = 0$,

$$\begin{aligned} \cos y &= 1 - \frac{y^2}{2} + \mathcal{O}(y^4), \\ \sin y &= y + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned}$$

Med $y = \frac{\pi}{4n}$ får vi at

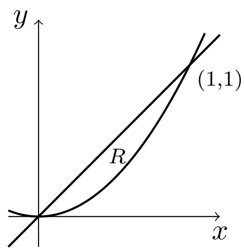
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R(f,P,c) &= \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \\ &= \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2}{2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\pi}{4n}\right)^4\right)}{n\left(\frac{\pi}{4n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\pi}{4n}\right)^3\right)\right)} \\ &= \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{\pi^2}{32n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{\pi}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{\pi}{4}\frac{4}{\pi} = 1. \end{aligned}$$

Vi har brukt at $\mathcal{O}\left(\frac{a}{n^p}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ for alle konstanter a (se *Big-O Notation* side 277 i boka).

Vi konkluderer oppgaven med å ha vist at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} R(f,P,c) = 1.$$

$\boxed{7.1.6}$ Vi tegner først opp området, R, i xy-planet som skal roteres om henholdsvis x- og y-aksen.



Vi lar så $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$. Disse skjærer hverandre i $(x, y) = (1,1)$.

a) Vi roterer R om x-aksen. Volumet av rotasjonslegemet (*Solids of Revolution*, side 393 i boka) er da gitt som

$$V = \underbrace{\pi \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x}_{V_1} - \underbrace{\pi \int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x}_{V_2} = \pi \int_0^1 \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) \, \mathrm{d}x.$$

Her tilsvarer V_1 og V_2 henholdsvis volumet som fremkommer ved å rotere området under $y = f(x)$ og $y = g(x)$ om x-aksen. Vi evaluerer så integralet,

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}.$$

b) Vi roter R om y-aksen. Nå bruker vi sylinderskallmetoden (*Cylindrical Shells*, side 396 i boka). Høyden til sylinderskallene blir her $f(x) - g(x)$, slik at

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 x\,(f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^1 x\left(x - x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

$\boxed{7.2.6}$ Tverrsnittet av legemet er en likesidet trekant med sider $\sqrt{x}$. Arealet av en likesidet trekant med sider s er $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$, slik at tverrsnittarealet til legemet er gitt som

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x.$$

Siden legemets utstrekning er fra $x = 1$ til $x = 4$, blir volumet

$$V = \int_1^4 A(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{\sqrt{3}}{4}x\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{2}x^2\Big|_1^4 = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(4^2 - 1^2\right) = \frac{15\sqrt{3}}{8}.$$

$\boxed{7.3.4}$ Lengden s til en kurve $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ er gitt som (se side 405 i boka)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Kurven vår er gitt som $y^2 = (x-1)^3$, så vi deriverer derfor implisitt,

$$\begin{aligned}
2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3(x-1)^2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{3(x-1)^2}{2y}, \\
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 &= \frac{9(x-1)^4}{4y^2} = \frac{9(x-1)^4}{4(x-1)^3} = \frac{9}{4}(x-1).
\end{aligned}$$

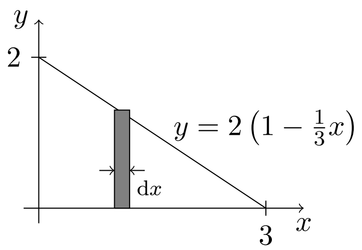
Legg merke til at $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ er definert for alle $x, y > 0$. Vi har nå at

$$\begin{aligned}
s &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x-1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \sqrt{\frac{9}{4}x - \frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{9x-5}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Vi lar så $u = 9x - 5$ slik at $\mathrm{d}u = 9\,\mathrm{d}x$ eller $\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\,\mathrm{d}u$. Integrasjonsgrensene blir $u_1 = 9 \cdot 1 - 5 = 4$ og $u_2 = 9 \cdot 2 - 5 = 13$.

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{18}\int_4^{13} u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{18}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{13} \\
&= \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 8\right) \approx 1{,}44.
\end{aligned}$$

$\boxed{7.4.6}$ Vi lar det lengste beinet ligge langs x-aksen og det korteste langs y-aksen. Tettheten til plata er da gitt som $\sigma(x) = 5x$. Det siste beinet i trekanten er gitt ved kurven $y = 2\left(1 - \frac{1}{3}x\right)$. Vi ser på et arealelement som vist på figuren under.



Arealelementet har areal $2\left(1 - \frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x$ og masse

$$\mathrm{d}m = \sigma(x) \cdot 2\left(1 - \tfrac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x = 10x\left(1 - \tfrac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x = 10\left(x - \tfrac{1}{3}x^2\right)\mathrm{d}x.$$

Vi finner den totale massen m ved å integrere over hele området, det vil si fra $x = 0$ til $x = 3$,

$$m = \int_0^3 10\left(x - \tfrac{1}{3}x^2\right)\mathrm{d}x = 10\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{9}x^3\right)\Big|_0^3 = 10\left(\tfrac{1}{2}3^2 - \tfrac{1}{9}3^3\right) = 15.$$

Momentet om $x = 0$ til arealelementet er gitt som arm ganger masse, altså

$$\mathrm{d}M_{x=0} = x\,\mathrm{d}m = 10\left(x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}x.$$

Vi integrerer og får at

$$M_{x=0} = \int_0^3 10\left(x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}x = 10\left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{12}x^4\right)\Big|_0^3 = 10\left(\tfrac{1}{3}3^3 - \tfrac{1}{12}3^4\right) = \frac{45}{2}.$$

Siden tettheten kun er avhengig av x, er tettheten konstant i arealelementet. Det betyr at y-koordinaten til sentroiden av arealelementet er midtpunktet, altså $\bar{y}_{\mathrm{d}m} = \left(1 - \tfrac{1}{3}x\right)$. Momentet om $y = 0$ til arealelementet er derfor gitt som

$$\begin{aligned}\mathrm{d}M_{y=0} = \bar{y}_{\mathrm{d}m}\,\mathrm{d}m &= \left(1 - \tfrac{1}{3}x\right)10\left(x - \tfrac{1}{3}x^2\right)\mathrm{d}x\\ &= 10\left(x - \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{9}x^3\right)\mathrm{d}x\\ &= 10\left(x - \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{1}{9}x^3\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vi integrerer og får at

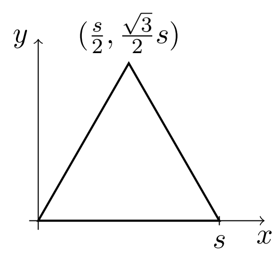
$$\begin{aligned}M_{y=0} &= \int_0^3 10\left(x - \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{1}{9}x^3\right)\mathrm{d}x\\ &= 10\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{9}x^3 - \tfrac{1}{36}x^4\right)\Big|_0^3\\ &= 10\left(\tfrac{1}{2}3^2 - \tfrac{2}{9}3^3 - \tfrac{1}{36}3^4\right) = \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

Vi finner til slutt massesenteret ved å dele på massen,

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{3}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{1}{2}.$$

Intuitivt ser dette riktig ut siden tettheten øker med x, slik at vi kan forvente at massesenteret ligger lenger ned til høyre enn sentroiden.

$\boxed{7.5.24}$ Vi lar den ene sidekanten til trekanten sammenfalle med x-aksen som vist på figuren under. Volumet vi er ute etter fremkommer ved å rotere trekanten om y-aksen.



Vi ønsker å bruke Pappus' teorem (side 421 i boka), og trenger da sentroiden $(\bar{x}, \bar{y})$ til trekanten. Vi husker at høyden til trekanten er $\frac{\sqrt{3}}{2}s$. På grunn av symmetri, er $\bar{x} = \frac{s}{2}$, mens y-koordinaten til sentroiden får vi ved å midle y-koordinatene til hjørnene (se side 420 i boka),

$$\bar{y} = \frac{0 + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}s}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}s.$$

Vi ser at avstanden, $\bar{r}$, fra sentroiden til rotasjonslinja $y = 0$ er lik $\bar{y}$. Videre er arealet til trekanten,

$$A = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}s \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2.$$

Volumet til rotasjonslegemet er nå

$$V = 2\pi\bar{r}A = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{6}s\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{\pi}{4}s^3.$$

Videre er lengden, l, til kurven som roteres lik $2s$. Overflatearealet til rotasjonslegemet er derfor

$$S = 2\pi\bar{r}l = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{6}s \cdot 2s = \frac{2\sqrt{3}}{3}s^2.$$