Chapter 11. Review questions

Fourier rekker: Hvis f er periodisk med periode $2L$, stykkevis kontinuerlig og integrerbar på $(-L, L)$, så er

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

bortsett fra der f ikke er kontinuerlig. Her er

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, \mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

11. rev. 21 Finn generell løsning til ODE'en

$$y'' + \omega^2 y = r(t), \qquad \omega \notin \mathbb{Z} \tag{0.1}$$

der

$$r(t) = 3t^2, \qquad -\pi < t < \pi,\ r(t + 2\pi) = r(t).$$

Løsning:
Vi ser at r er jevn, så

$$r(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

der

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L r(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{\pi}\int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t \\
&= \pi^2, \\
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L r(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{6}{\pi}\int_0^\pi t^2\cos nt\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{6}{\pi}\left(\Big|_0^\pi t^2\frac{\sin nt}{n} - \frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin nt\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{12}{n\pi}\int_0^\pi t\sin nt\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{12}{n\pi}\left(-\Big|_0^\pi t\frac{\cos nt}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nt\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{12}{n\pi}\left(-\pi\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\Big|_0^\pi \frac{\sin nt}{n}\right) \\
&= 12\frac{(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$r(t) = \pi^2 + 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nt}{n^2}.$$

Vi ser nå på ODE'ene

$$\begin{aligned}
y_0'' + \omega^2 y_0 &= \pi^2 \\
y_n'' + \omega^2 y_n &= (-1)^n 12\frac{\cos nt}{n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{0.2}$$

Ettersom (0.1) er lineær, forventer vi at summen $y_p := \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ av løsningene $y_0, y_1, \ldots$ til (0.2) tilfredsstiller (0.1). Dette er fordi

$$\begin{aligned}
y_p'' + \omega^2 y_p &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n'' + \omega^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(y_n'' + \omega^2 y_n\right) \\
&= \pi^2 + 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nt}{n^2} \\
&= r(t).
\end{aligned}$$

Altså er y_p er en partikulær løsning. Vi vet at den generelle løsningen til (0.1) er gitt ved

$$y = y_h + y_p$$

der, åpenbart,

$$y_h = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

er en homogen løsning for alle konstanter a og b.

Vi vet også at løsningene til (0.2) er på formen

$$y_n = A_n\cos nt + B_n\sin nt.$$

Ved å substituere dette inn i (0.2), får vi ligningene

$$\begin{aligned} \omega^2 A_0 &= \pi^2, \qquad n = 0, \\ (\omega^2 - n^2)(A_n\cos nt + B_n\sin nt) &= (-1)^n 12\frac{\cos nt}{n^2}, \qquad n = 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Dvs. $A_0 = \pi^2/\omega^2$, $B_n = 0$ og

$$A_n = (-1)^n\frac{12}{n^2(\omega^2 - n^2)}.$$

(merk at vi har antatt at $\omega^2 - n^2 \neq 0$.)

Dermed er partikulærløsningen gitt ved

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos nt + B_n\sin nt \\ &= \frac{\pi^2}{\omega^2} + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(\omega^2 - n^2)}\cos nt \end{aligned}$$

og den generelle løsningen til (0.1) er dermed

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= a\cos\omega t + b\sin\omega t + \frac{\pi^2}{\omega^2} + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(\omega^2 - n^2)}\cos nt, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Chapter 11.4

$\boxed{\text{11.4:2}}$ Finn det trigonometriske polynomet på formen

$$F_N(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$$

slik at kvadratfeilen med

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi$$

på intervallet $(-\pi, \pi)$ blir minst mulig. Finn feilen for $N = 1, 2, 3, 4, 5$.

Løsning:
Vi vet at koeffisientene som minimerer $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-F(x))^2\,\mathrm{d}x$ er Fourier-koeffisientene til f. Ettersom f er odde, finner vi at $A_n = 0$ og

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\Big|_0^\pi x\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\pi\frac{(-1)^n}{n} + 0\right) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Dvs.

$$x = f(x) \approx F_N(x) = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

på $(-\pi,\pi)$.

Feilen er gitt ved

$$\begin{aligned}
E_N &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x - \pi\left(2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right) \\
&= 2\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x - \pi\sum_{n=1}^{N}b_n^2 \\
&= \frac{2}{3}\pi^3 - 4\pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = 4\pi\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
E_1 &= 4\pi\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) \\
&\approx 8.10, \\
E_2 &= 4\pi\left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - 1/4\right) \\
&\approx 4.96, \\
E_3 &= 4\pi\left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - 1/4 - 1/9\right) \\
&\approx 3.57, \\
E_4 &= 4\pi\left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - 1/4 - 1/9 - 1/16\right) \\
&\approx 2.78, \\
E_5 &= 4\pi\left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - 1/4 - 1/9 - 1/16 - 1/25\right) \\
&\approx 2.28.
\end{aligned}$$

$\boxed{11.4{:}3}$ Finn det trigonometriske polynomet på formen

$$F_N(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

slik at kvadratfeilen med

$$f(x) = |x|, \qquad -\pi < x < \pi$$

på intervallet $(-\pi, \pi)$ blir minst mulig. Finn feilen for $N = 1, 2, 3, 4, 5$.

Løsning:
Vi vet at koeffisientene som minimerer $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F(x))^2 \,\mathrm{d}x$ er Fourier-koeffisientene til f. Ettersom f er jevn, finner vi at $B_n = 0$,

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |x| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\pi^2 = \frac{\pi}{2}$$

og

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\Big|_0^{\pi} x \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{1}{n} \Big|_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \right) \\
&= \frac{2}{n^2 \pi} \left((-1)^n - 1 \right) \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi}, & n \text{ odde} \\ 0, & n \text{ jevn.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dvs.

$$|x| = f(x) \approx F_N(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{(N+1)/2} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

for N odde og $F_N = F_{N-1}$ for N jevn.

Feilen er gitt ved

$$\begin{aligned}
E_N &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x - \pi \left(2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right) \\
&= 2 \int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x - \pi \left(\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{(N+1)/2} a_{2n-1}^2 \right), \quad N \text{ odd} \\
&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{(N+1)/2} \frac{1}{(2n-1)^4} \\
&= \frac{16}{\pi} \left(\frac{\pi^4}{96} - \sum_{n=1}^{(N+1)/2} \frac{1}{(2n-1)^4} \right)
\end{aligned}$$

og $E_N = E_{N-1}$ for N jevn. Dette gir

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{16}{\pi}\left(\frac{\pi^4}{96} - 1\right) \\
&\approx 0.0748, \\
E_2 &= E_1, \\
E_3 &= \frac{16}{\pi}\left(\frac{\pi^4}{96} - 1 - 1/3^4\right) \\
&\approx 0.01187, \\
E_4 &= E_3, \\
E_5 &= \frac{16}{\pi}\left(\frac{\pi^4}{96} - 1 - 1/3^4 - 1/5^4\right) \\
&\approx 0.00373.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{11.4:13}}$ Vis at

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}.$$

Løsning:
Dette følger fra oppgaven over: Ettersom $E_N \to 0$ når $N \to \infty$, må

$$\frac{\pi^4}{96} - (1 + 1/3^4 + 1/5^4 + \cdots) = 0.$$

$\boxed{\text{11.4:9 utg.9}}$ Finn den komplekse Fourier-rekker til

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi,\ f(x + 2\pi) = f(x).$$

Løsning:
Fra oppgave 11.4.2 er

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

der $b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$. Vi ønsker å finne de komplekse koeffisientene c_n slik at

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Skriv

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}).$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
e^{inx} &= \cos nx + i \sin nx \\
e^{-inx} &= \cos nx - i \sin nx,
\end{aligned}$$

så dermed må $c_0 = 0$ og

$$b_n \sin nx = (c_n + c_{-n}) \cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx.$$

Dvs. $c_n = -c_{-n}$ og

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = 2ic_n.$$

Dette gir $c_n = \frac{b_n}{2i} = -i\frac{b_n}{2} = i\frac{(-1)^n}{n}$ og Fourier-rekken

$$f(x) = i \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}.$$

Chapter 11.7

$\boxed{\text{11.7:1}}$ Vis at

$$\int_0^\infty \frac{\cos xw + w \sin xw}{1+w^2}\,\mathrm{d}w = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \pi/2, & x = 0 \\ \pi e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

(obs! Skrivefeil i boken. Det må være $\mathrm{d}w$, ikke $\mathrm{d}x$.)

Løsning:
Definér funksjonen f på $\mathbb{R}$ ved $f(x) = \pi e^{-x}$ for $x \geq 0$ og $f(x) = 0$ for $x < 0$. Da er f lik sitt Fourier-integral for alle x bortsett fra diskontinuiteten i $x = 0$. Dvs

$$f(x) = \int_0^\infty \big(A(w) \cos wx + B(w) \sin wx\big)\,\mathrm{d}w, \qquad x \neq 0.$$

Nå er

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos wt\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \cos wt\,\mathrm{d}t \\ &= \Big|_{s=1} \int_0^\infty e^{-st} \cos wt\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}\left\{\cos wt\right\}(1) \\ &= \Big|_{s=1} \frac{s}{s^2+w^2} \\ &= \frac{1}{1+w^2}, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
B(w) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wt\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-t}\sin wt\,\mathrm{d}t \\
&= \bigg|_{s=1}\int_{0}^{\infty} e^{-st}\sin wt\,\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}\left\{\sin wt\right\}(1) \\
&= \bigg|_{s=1}\frac{w}{s^2+w^2} \\
&= \frac{w}{1+w^2}.
\end{aligned}$$

I $x=0$ vil verdien av integralet være gjennomsnittet av grenseverdiene fra høyre og venstre. Dvs.

$$\int_0^\infty A(w)\,\mathrm{d}w = \frac{\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 0+} f(x)}{2} = \frac{0+\pi}{2}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\cos xw + w\sin xw}{1+w^2}\,\mathrm{d}w &= \int_0^\infty \big(A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\big)\,\mathrm{d}w \\
&= \begin{cases} f(x), & x\neq 0 \\ \pi/2, & x=0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & x<0 \\ \pi/2, & x=0 \\ \pi e^{-x}, & x>0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Chapter 11.9

Fourier-transformasjonen til f er funksjonen $\hat{f}$ definert ved

$$\hat{f}(w) := \mathcal{F}\left\{f\right\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{\text{11.9:5}}$ Finn Fourier-transformasjonen til

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & |x|<a, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{x} e^{-iwx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{(1-iw)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-iw)} \Big|_{-a}^{a} e^{(1-iw)x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-iw)} (e^{(1-iw)a} - e^{-(1-iw)a}).
\end{aligned}$$

$\boxed{11.9{:}7}$ Finn Fourier-transformasjonen til

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} x e^{-iwx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \Big|_{0}^{a} x \frac{e^{-iwx}}{iw} + \frac{1}{iw} \int_{0}^{a} e^{-iwx}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{iw} a e^{-iwa} - \frac{1}{(iw)^2} \Big|_{0}^{a} e^{-iwx} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i}{w} a e^{-iwa} + \frac{1}{w^2} (e^{-iwa} - 1) \right) \\
&= \frac{(iaw+1)e^{-iwa} - 1}{\sqrt{2\pi} w^2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{11.9{:}9}$ Finn Fourier-transformasjonen til

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{0} -xe^{-iwx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} xe^{-iwx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} xe^{iwx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} xe^{-iwx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} x(e^{iwx} + e^{-iwx})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} x \cos wx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\Big|_0^1 x\frac{\sin wx}{w} - \frac{1}{w} \int_0^1 \sin wx\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin w}{w} + \frac{1}{w^2} \Big|_0^1 \cos wx \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin w}{w} + \frac{\cos w - 1}{w^2} \right).
\end{aligned}$$