Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1 Høst 2014

Løsningsforslag — Øving 11

5.7.4 Vi observerer at både $y = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ og $y = |x|$ er like funksjoner. Det vil si at arealet til høyre for y-aksen er lik arealet til venstre for y-aksen. Vi ser derfor kun på området $x \geq 0$. For å finne skjæringspunktet til grafene, må vi løse ligningen

$$x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

For å løse denne bruker vi at $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi ser derfor at $x = 1$ er en løsning. Skjæringspunktet er altså i $(x, y) = (1{,}1)$.

Det er også mulig å løse ligningen ved å bruke fikspunktiterasjon. Vi velger da et startpunkt x_0, og itererer oss frem til løsningen ved hjelp av iterasjonsskjemaet

$$x_{n+1} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi x_n}{4}\right).$$

Alternativt kunne vi også ha brukt Newtons metode.

Vi finner nå arealet, A, ved å integrere differansen mellom de to kurvene fra $x = 0$ til $x = 1$, og deretter multiplisere med 2 for å få med arealet til venstre for y-aksen.

$$\begin{aligned}
A &= 2\int_0^1 \left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - x\right) \mathrm{d}x \\
&= 2\left(\sqrt{2}\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 \\
&= 2\left(\sqrt{2}\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{8}{\pi} - 1.
\end{aligned}$$

"Review Exercise 50", side 388

Vi skal evaluere integralet

$$I = \int x\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x.$$

Vi prøver med delvis integrasjon, se side 332–333 i boka. Vi følger notasjonen i boka, og setter $U = \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ og $\mathrm{d}V = x\,\mathrm{d}x$. Da er $V = \frac{1}{2}x^2$ og

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{x^2 + 9}\,\mathrm{d}x.$$

Integralet kan nå uttrykkes som

$$\begin{aligned} I = UV - \int V\,\mathrm{d}U &= \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2\frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{3}{2}\int\frac{x^2}{x^2+9}\,\mathrm{d}x + C. \end{aligned}$$

Vi står igjen med et nytt integral. Her er integranden en rasjonal funksjon der polynomordenen er lik for teller og nevner. Vi bruker derfor polynomdivisjon, og kan uttrykke integralet som

$$\int\frac{x^2}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int\left(1-\frac{9}{x^2+9}\right)\mathrm{d}x.$$

Vi husker fra tidligere i oppgaven at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{3}{x^2+9}.$$

Vi har derfor at

$$\int\frac{9}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 3\int\frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 3\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right),$$

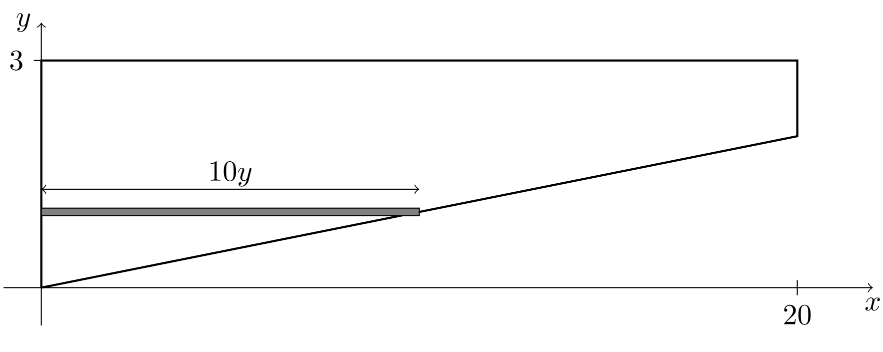
slik at

$$\int\frac{x^2}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = x - 3\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right).$$

Vi setter så dette inn i uttrykket for I ovenfor, slik at

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(x - 3\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) + C \\ &= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{3}{2}x + C \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+9\right)\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{3}{2}x + C. \end{aligned}$$

$\boxed{7.6.8}$ Vi tegner først opp et tverrsnitt av bassenget:



Vi har også tegnet inn et tynt volumelement i grått. Som vist på figuren har dette lengde $10y$ når $0 \leq y \leq 2$ og lengde $20\,\mathrm{m}$ når $2 \leq y \leq 3$. Bredden til bassenget er konstant lik $8\,\mathrm{m}$ og høyden til volumelementet er $\mathrm{d}y$. Volumet i m^3 til volumelementet blir derfor

$$\mathrm{d}V = \begin{cases} 8 \cdot 10y\,\mathrm{d}y = 80\,\mathrm{d}y, & 0 \leq y \leq 2, \\ 8 \cdot 20\,\mathrm{d}y = 160\,\mathrm{d}y, & 2 \leq y \leq 3. \end{cases}$$

Tyngden er gitt som $\mathrm{d}F = \rho g\,\mathrm{d}V$. Videre må volumelementet løftes $(3-y)\,\mathrm{m}$. Arbeidet som kreves er derfor gitt som

$$\mathrm{d}W = (3-y)\,\mathrm{d}F = (3-y)\rho g\,\mathrm{d}V = \begin{cases} 80\rho g y(3-y)\,\mathrm{d}y, & 0 \leq y \leq 2, \\ 160\rho g(3-y)\,\mathrm{d}y, & 2 \leq y \leq 3. \end{cases}$$

Dersom vi setter $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ og $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, får vi det totale arbeidet i N·m ved å integrere $\mathrm{d}W$ fra $y=0$ til $y=3$,

$$\begin{aligned} W = \int_{y=0}^{y=3} \mathrm{d}W &= \int_0^2 80\rho g y(3-y)\,\mathrm{d}y + \int_2^3 160\rho g(3-y)\,\mathrm{d}y \\ &= 80\rho g \int_0^2 (3y - y^2)\,\mathrm{d}y + 160\rho g \int_2^3 (3-y)\,\mathrm{d}y \\ &= 80\rho g \left(\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^2 + 160\rho g\left(3y - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_2^3 \\ &= 80\rho g\left(\frac{3}{2}2^2 - \frac{1}{3}2^3\right) + 160\rho g\left(3\cdot 3 - \frac{1}{2}3^2 - \left(3\cdot 2 - \frac{1}{2}2^2\right)\right) \\ &= 80\rho g\frac{10}{3} + 160\rho g\frac{1}{2} \\ &= \frac{1040}{3}\rho g = \frac{1040}{3}\cdot 1000\cdot 9{,}81 \approx 3{,}4\cdot 10^6. \end{aligned}$$

Det kreves altså et arbeid på omlag $3{,}4\cdot 10^6$ N·m for å løfte alt vannet ut av bassenget.

$\boxed{7.7.2}$ Antall databrikker som selges per uke er gitt ved $s(t) = t\mathrm{e}^{-t/10}$. Dette tilsvarer raten som varen blir solgt med. Antall varer T solgt det første året får vi da ved å integrere $s(t)$ fra $t=0$ til $t=52$.

$$T = \int_0^{52} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{52} t\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t.$$

Dette integralet løser vi ved delvis integrasjon. La $U = t$ og $\mathrm{d}V = e^{-t/10}\,\mathrm{d}t$. Da er $\mathrm{d}U = \mathrm{d}t$ og $V = -10e^{-t/10}$, slik at

$$\begin{aligned} \int t\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t = UV - \int V\,\mathrm{d}U &= t\left(-10e^{-t/10}\right) - \int\left(-10e^{-t/10}\right)\mathrm{d}t \\ &= -10t\mathrm{e}^{-t/10} + 10\int \mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t \\ &= -10t\mathrm{e}^{-t/10} + 10\left(-10\mathrm{e}^{-t/10}\right) + C \\ &= -10(t+10)\mathrm{e}^{-t/10} + C. \end{aligned}$$

Dette gir

$$T = -10(t+10)\mathrm{e}^{-t/10}\Big|_0^{52} = -10 \cdot 62\mathrm{e}^{-52/10} - (-10 \cdot 10) \approx 97.$$

Det blir altså solgt 97 databrikker det første året.

$\boxed{7.9.12}$ Den oppgitte ligningen er en førsteordens lineær differensialligning (se side 450 i boka). Vi bruker først metoden med integrerende faktor. Den integrerende faktoren er gitt som $\mathrm{e}^{\mu(x)}$ der $\mu(x)$ er integralet av faktoren foran y-leddet,

$$\mu(x) = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x.$$

Altså er den integrerende faktoren $\mathrm{e}^{2\ln x} = x^2$. Vi multipliserer begge sider av ligningen med dette uttrykket,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x^2 + 2yx = 1.$$

Vi gjenkjenner så venstre siden som den deriverte av x^2y, slik at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2y\right) = 1.$$

Vi integrerer begge sider med hensyn på x og får at

$$x^2y = x + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}.$$

En annen metode vi kan bruke er å sette $y = k(x)\mathrm{e}^{-\mu(x)}$, der $\mathrm{e}^{-\mu(x)} = x^{-2}$ er løsningen av det homogene ligningssystemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2y}{x} = 0.$$

Vi setter så uttryket for y inn i differensialligningen, og prøver å bestemme hva $k(x)$ må være for at $y = k(x)x^{-2}$ skal være en løsning.

$$\begin{aligned}
k'(x)x^{-2} + k(x)(-2)x^{-3} + 2k(x)x^{-3} &= \frac{1}{x^2} \\
k'(x)x^{-2} &= \frac{1}{x^2} \\
k'(x) &= 1 \\
k(x) &= \int \mathrm{d}x = x + C.
\end{aligned}$$

Dermed er løsningen gitt ved $y = (x+C)x^{-2} = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$. Dette er samme svar som når vi brukte den integrerende faktoren.

$\boxed{7.9.22}$ Vi bruker analysens fundamentalteorem (*The Fundamental Theorem of Calculus*, side 311–312 i boka) og deriverer begge sider av ligningen,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(y(x))^2}{1+x^2}.$$

Dette er en separabel førsteordens differensialligning. Vi skriver om slik at vi får alle ledd avhengig av y på venstre siden og alle ledd avhengig av x på høyre siden. Deretter integrerer vi begge sider.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
-\frac{1}{y} &= \tan^{-1} x + C \\
y &= \frac{-1}{\tan^{-1} x + C}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{18.3.2}$ Vi er gitt initialverdiproblemet

$$y' = x + y, \quad y(1) = 0.$$

La oss først bemerke at dette problemet har eksakt løsning $y_E = -(x+1) + 2e^{x-1}$. Denne løsningen kan finnes blant annet ved hjelp av metoden med integrerende faktor (side 450 i boka). Vi vil bruke denne til å finne feilen som de numeriske metodene gir.

La $f(x, y) = x + y$. Forbedret Eulers metode (eller Heuns metode; *Improved Euler method* side 1004 i boka) er gitt ved iterasjonsskjemaet

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h, \\
u_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(x_n + y_n), \\
y_{n+1} &= y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} = y_n + h\frac{x_n + y_n + x_{n+1} + u_{n+1}}{2}.
\end{aligned}
$$

I vårt tilfelle er startverdiene for iterasjonene $x_0 = 1$ og $y_0 = 0$.

a) Med $h = 0{,}2$ gir første iterasjon

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h = 1 + 0{,}2 = 1{,}2, \\
u_1 &= y_0 + h(x_0 + y_0) = 0 + 0{,}2(1 + 0) = 0{,}2, \\
y_1 &= y_0 + h\frac{x_0 + y_0 + x_1 + u_1}{2} = 0 + 0{,}2\frac{1 + 0 + 1{,}2 + 0{,}2}{2} = 0{,}24.
\end{aligned}
$$

De resterende iterasjonene er gjengitt i tabellen under.

n	x_n	u_n	y_n	$y_E - y_n$
0	1,000000	-	0,000000	0,000000
1	1,200000	0,200000	0,240000	0,002806
2	1,400000	0,528000	0,576800	0,006849
3	1,600000	0,972160	1,031696	0,012542
4	1,800000	1,558035	1,630669	0,020413
5	2,000000	2,316803	2,405416	0,031147

b) Med $h = 0{,}1$ får vi (dette bør gjøres på en pc)

n	x_n	u_n	y_n	$y_E - y_n$
0	1,000000	-	0,000000	0,000000
1	1,100000	0,100000	0,110000	0,000342
2	1,200000	0,231000	0,242050	0,000756
3	1,300000	0,386255	0,398465	0,001252
4	1,400000	0,568312	0,581804	0,001845
5	1,500000	0,779985	0,794894	0,002549
6	1,600000	1,024383	1,040857	0,003380
7	1,700000	1,304943	1,323147	0,004358
8	1,800000	1,625462	1,645578	0,005504
9	1,900000	1,990136	2,012364	0,006843
10	2,000000	2,403600	2,428162	0,008402

c) Med $h = 0{,}05$ får vi

n	x_n	u_n	y_n	$y_E - y_n$
0	1,000000	-	0,000000	0,000000
1	1,050000	0,050000	0,052500	0,000042
2	1,100000	0,107625	0,110253	0,000089
3	1,150000	0,170766	0,173529	0,000140
4	1,200000	0,239705	0,242609	0,000196
5	1,250000	0,314740	0,317793	0,000258
6	1,300000	0,396183	0,399393	0,000325
7	1,350000	0,484362	0,487736	0,000399
8	1,400000	0,579623	0,583170	0,000479
9	1,450000	0,682329	0,686058	0,000566
10	1,500000	0,792861	0,796781	0,000662
11	1,550000	0,911620	0,915741	0,000765
12	1,600000	1,039028	1,043360	0,000877
13	1,650000	1,175528	1,180082	0,000999
14	1,700000	1,321586	1,326374	0,001131
15	1,750000	1,477693	1,482726	0,001274
16	1,800000	1,644362	1,649653	0,001429
17	1,850000	1,822136	1,827698	0,001596
18	1,900000	2,011583	2,017430	0,001777
19	1,950000	2,213301	2,219448	0,001971
20	2,000000	2,427920	2,434382	0,002182

Oppsummert ser vi at approksimasjonen av $y(2)$ stadig blir bedre når vi minsker steglengden h. Feilen går som $\mathcal{O}(h^2)$. Det vil si at når vi halverer h vil feilen minske med en faktor omlag $\frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{18.3.16}}$ Vi er gitt en funksjon $\phi(x)$ med følgende egenskaper,

$$\begin{aligned} \phi(0) &= A \geq 0, \\ \phi'(x) &\geq k\phi(x) \quad \text{på } [0, X], \end{aligned}$$

der k og X er positive konstanter. Vi ønsker å vise at $\phi(x) \geq Ae^{kx}$ på $[0, X]$. Vi følger hintet og regner ut den deriverte til $\frac{\phi(x)}{e^{kx}}$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\phi(x)}{e^{kx}}\right) &= \frac{\phi'(x)e^{kx} - \phi(x)ke^{kx}}{e^{2kx}} \\ &= \frac{\phi'(x) - k\phi(x)}{e^{kx}}.\end{aligned}$$

Vi bruker så den andre betingelsen og får at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\phi(x)}{e^{kx}}\right) \geq \frac{k\phi(x) - k\phi(x)}{e^{kx}} = 0.$$

Dette betyr at $\frac{\phi(x)}{e^{kx}}$ er ikke-synkende på $[0, X]$. Altså må

$$\frac{\phi(x)}{e^{kx}} \geq \frac{\phi(0)}{e^0} = \phi(0) = A.$$

for alle $x \in [0, X]$. Ved å gange opp med e^{kx} på begge sider står vi igjen med ulikheten

$$\phi(x) \geq Ae^{kx},$$

som var det vi ønsket å vise.