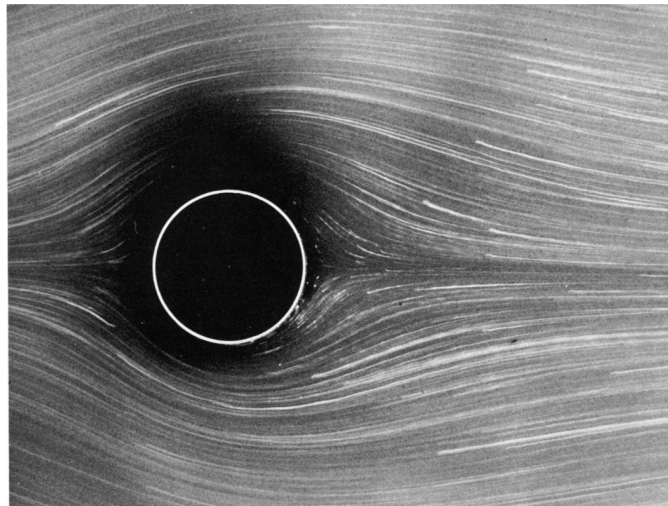


ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK NTNU

KOMPENDIUM I FLUIDMEKANIKK

Elementær utledning av fluidmekanikkens grunnligninger



Skrevet av:
Iver Håkon BREVIK

TEX-et av:
Sigbjørn Løland BORE

Siste endring: 19. august 2012

Innhold

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 1 | Forord | 2 |
| 2 | Grunnlag | 3 |
| 2.1 | Kontinuumsmodellen | 3 |
| 2.2 | Gauss' integrasjonsteorem | 3 |
| 2.3 | Bevegelsesligningene til et fluid | 4 |
| 3 | Statikk | 5 |
| 3.1 | Atmosfæren | 5 |
| 3.2 | Inkompressibelt fluid | 7 |
| 4 | Konstant Akselerasjon | 8 |
| 4.1 | Lineær akselerasjon | 8 |
| 4.2 | Uniform rotasjon | 9 |
| 5 | Eulers ligning | 10 |
| 5.1 | 1-dimensjonal bevegelse | 10 |
| 5.2 | 3-dimensjonal bevegelse | 10 |
| 6 | Bernoullis Ligning | 12 |
| 6.1 | Strømlinjer | 12 |
| 6.2 | Bernoullis ligning | 12 |
| 6.3 | Bernoulli fra Eulers ligning | 13 |
| 7 | Friksjon, Navier- Stokes Ligning | 16 |
| 7.1 | Heftbetingelsen(no-slip condition) | 16 |
| 7.2 | Navier- Stokes' ligning | 16 |
| 8 | Konserveringsligninger | 19 |
| 8.1 | Impulsbalansen | 19 |
| 8.2 | Energibalansen | 20 |
| 9 | Strømfunksjonen ψ | 22 |
| 9.1 | Sammenhengen mellom ψ og virvling $\zeta \equiv \nabla \times \mathbf{V}$: | 22 |
| 9.2 | Geometrisk tydning av ψ | 22 |
| 9.3 | Sammenheng mellom ψ og volumfunksjonen Q | 23 |
| 9.4 | Sammenhengen mellom ζ og rotasjonshastigheten ω for et fluidelement | 24 |
| 10 | Hastighetspotensialet ϕ | 25 |
| 10.1 | Ekvipotensiallinjer er ortogonale til strømlinjer | 25 |
| 11 | Potensialstrømning | 26 |
| 11.1 | Singulariteter | 26 |
| 12 | Det komplekse potensial | 31 |
| 12.1 | Strømning gjennom en åpning | 36 |
| 12.2 | Strømning omkring en sylinder | 38 |
| 12.3 | Blasius' teorem | 40 |
| 12.4 | Kutta-Joukowski teoremet | 41 |
| A | Formelliste basert på White, Fluid mechanics | 42 |

1 Forord

Hensikten med dette lille kompendiet er å gi en utledning av grunnligningene i fluidmekanikken uten å benytte et tungt formelapparat. Vanligvis vil en se i lærebøkene at utledningene bygger på Reynolds' transportteorem. Det er en elegant og fullstendig metode i og for seg, men noe tøff for studenten i 2. årskurs.

Grundigere utledninger kan en for eksempel finne i Frank M. White, "Fluid Mechanics". Dette er en teknologisk bok.

Andre bøker, skrevet mer spesielt for fysikere, men også mer avansert matematisk, er

- L. D. Landau & Lifshitz, "Fluid Mechanics" (Pengamon 1987)
- P. K. Kundu I.M. Cohen, "Fluid Mechanics" (Elsevier 2004)
- B. Lautrup, "Physics of Continuous Matter", 2nd ed. (2011)

Første utgave av dette kompendiet kom i 2010. I 2011- utgaven er noen mindre trykkfeil rettet opp og kapitlene 8–10 lagt til. I 2012- utgaven har det håndskrevne kompendiet blitt skrevet inn på data ved bruk av L^AT_EX, dette for å gjøre kompendiet mer lesbart for studenten.

Noen få ord om tegnsettingen i kompendiet:

- Skalare størrelser blir alltid angitt i italic (kursiv), for eksempel *a*.
- Vektorer blir alltid angitt den med tykk skrift, for eksempel **a**.
- Enheter blir angitt med normal skrift (roman), for eksempel $[g] = \text{m/s}^2$.
- For å markere at en størrelse er konstant brukes "KONSTANT". Vær oppmerksom på at denne notasjonen ofte brukes flere ganger i samme avsnitt uten at det nødvendigvis er samme konstant det er snakk om.
- Referanser til ligninger markeres med parentes, for eksempel ligning (3.1).
- Referanser til figurer markeres uten parentes, for eksempel figur 3.1.
- Enhetsvektorer (vektorer med lengde 1) markeres med hat, for eksempel ***n***.

2 Grunnlag

2.1 Kontinuumsmodellen

Et fluid er en fellesbetegnelse på væske (liquid) og gass. Teorien bygger på kontinuumshypotesen (–modellen), som betyr at vi kan se på systemet som et “utsmurt” system, karakterisert ved massetetthet¹ ρ . Hypotesen gjelder over et stort skalaområde. Selvfølgelig gjelder den ikke for atomære skalaer, men den gjelder ofte for sub–mikron dimensjoner slik at vi kan benytte fluiddynamikk på væskekuler med radius $a \lesssim 1 \mu\text{m}$ (10^{-6} m).

En benytter ofte fluiddynamikk på store systemer også. Vår galakse inneholder $\sim 200 \cdot 10^9$ stjerner, og det er minst $200 \cdot 10^9$ i alt. Så i kosmologisk sammenheng er det fullt legitimt å betrakte vår galakse som ett massepunkt!

Hastigheten til et fluidelement med volum $\delta\mathcal{V} = \delta x \delta y \delta z$ skal vi kalle \mathbf{V} . Dens komponenter kalles (u, v, w) . Altså i kartesiske koordinater

$$\mathbf{V} = \hat{\mathbf{i}}u + \hat{\mathbf{j}}v + \hat{\mathbf{k}}w, \quad (2.1)$$

hvor $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ er enhetsvektorene i (x, y, z) retning. Generelt er \mathbf{V} tidsavhengig, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$ eller $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. Strømningen er stasjonær dersom $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$. Vi trenger ofte nabla–operatoren, ∇ . Som kjent er den i kartesiske koordinater gitt ved

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \quad (2.2)$$

Dette er en operator, ikke et tall. Ved å ta skalarproduktet av ∇ og \mathbf{V} fås

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.3)$$

Dette er divergensen til \mathbf{V} , en skalar størrelse, et tall.

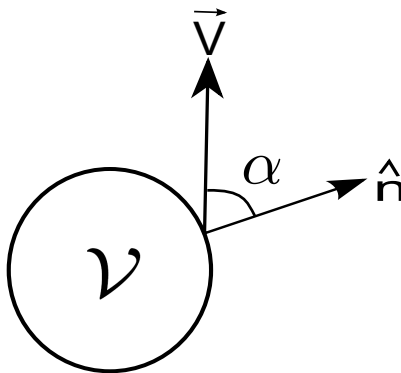
Vi trenger også *curl* til \mathbf{V} , en *vektor*. Vi skal skrive den slik: $\nabla \times \mathbf{V}$. Komponentene er

$$(\nabla \times \mathbf{V})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.4a)$$

$$(\nabla \times \mathbf{V})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.4b)$$

$$(\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.4c)$$

2.2 Gauss’ integrasjonsteorem



Figur 2.1: Integrasjonsoverflate.

¹ $[\rho] = \text{kg}/\text{m}^3$

Betrakt en vilkårlig lukket integrasjonsflate (se figur 2.1), med utoverrettet enhetsnormal $\hat{\mathbf{n}}$ (lengden av $|\hat{\mathbf{n}}|$ av $\hat{\mathbf{n}}$ er altså lik 1). Skalarproduktet av \mathbf{V} og $\hat{\mathbf{n}}$ på overflaten A er $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = V \cos \alpha$. Ved integrasjon av $\nabla \cdot \mathbf{V}$ over volumet \mathcal{V} vil i følge Gauss

$$\boxed{\int_{\text{VOLUM}} \nabla \cdot \mathbf{V} d\mathcal{V} = \oint_{\text{OVERFLATE}} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA} \quad (2.5)$$

2.3 Bevegelsesligningene til et fluid

Bevegelsesligningene kan jo ikke være noe annet enn Newtons 2. lov,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.6)$$

hvor \mathbf{F} er kraften² og \mathbf{a} er akselerasjonen³. I fluidmekanikken er det vanlig å skrive akselerasjonsleddet på venstre side, og dessuten betrakte én masseenhets av fluidet. Altså $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{f}$, hvor \mathbf{f} krafttettheten⁴, og massen $m \rightarrow \rho$. Vi får dermed

$$\rho\mathbf{a} = \mathbf{f}. \quad (2.7)$$

På vårt trinn vil vi ta i betraktning følgende tre bidrag til krafttettheten \mathbf{f} :

- 1) *Trykkraft*⁵, $\mathbf{f}_{\text{PRESS}}$. Hvis trykket omkring et volumelement er forskjellig i forskjellige retninger, vil det oppstå en resulterende trykkraft på elementet.
- 2) *Tyngdekraft*, \mathbf{f}_{GRAV} . Den kan vi skrive opp med én gang,

$$\mathbf{f}_{\text{GRAV}} = \rho\mathbf{g} \quad (2.8)$$

Hvor $\mathbf{g} = (0, 0, g_z) = (0, 0, -g)$ med $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ er tyngdens akselerasjon⁶.

- 3) *Viskøs kraft*, \mathbf{f}_{VISC} , fra fluidets viskositet eller seighet.

Så langt altså

$$\rho\mathbf{a} = \mathbf{f}_{\text{PRESS}} + \mathbf{f}_{\text{GRAV}} + \mathbf{f}_{\text{VISC}}. \quad (2.9)$$

Vi vil komme tilbake til uttrykkene for $\mathbf{f}_{\text{PRESS}}$ og \mathbf{f}_{VISC} senere. Først skal vi imidlertid behandle tilfellet hydrostatikk, $\mathbf{V} = 0$.

² $[\mathbf{F}] = \text{N}$.

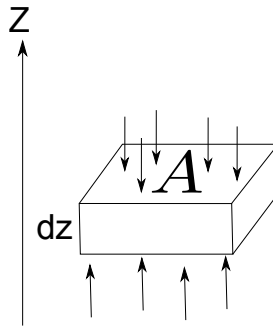
³ $[\mathbf{a}] = \text{m/s}^2$

⁴ $[f] = \text{N/m}^3$

⁵Vi benytter her engelske subskripts.

⁶Z-aksen regnes konvensjonelt positiv oppover.

3 Statikk



Figur 3.1: Skisse av et skiveformet fluidelement.

Betrakt et skiveformet element av et fluid i ro, for eksempel atmosfæren, hvor $\rho = \rho(z)$. Oppsettet er som vist i figur 3.1. Vi har et fluidelement med tverrsnitt A , høyden er dz . Trykket⁷ p er en kraft fra omgivelsene, per enhet av tverrsnittet. Kraft på undersiden er $p \cdot A$, mens kraft på oversiden er $(p + dp) \cdot A$. Resulterende kraft $p \cdot A - (p + dp) \cdot A$ i retning oppover må ved likevekt balansere tyngdekraften $\rho g A dz$ i retning nedover:

$$\begin{aligned} -A \cdot dp &= \rho g A \cdot dz, \\ \Downarrow \\ \frac{dp}{dz} &= -\rho g \end{aligned} \quad (3.1)$$

Vi ser fra ligning (3.1) at $p = p(z)$, p er uavhengig av x og y . Viktig setning i hydrodynamikken:

- Trykket p er det samme i samme horisontale plan, for en og samme væske.

Fra (3.1) ser en at krafttettheten kan skrives på vektorform som en gradient:

$$\mathbf{f}_{\text{PRESS}} = -\nabla p \quad (3.2)$$

Merk at p er en skalar størrelse, ikke en vektor.

3.1 Atmosfæren

Standardatmosfæren er en fast, ideell atmosfære, som kan tjene som referanse og likevel gi et rimelig bilde av virkeligheten i de fleste tilfeller. Temperaturen ved havoverflaten i standardatmosfæren er definert som $t_0 = 15^\circ\text{C}$, det vil si $T_0 = t_0 + 273 = 288\text{ K}$. Av størst interesse er troposfæren, som strekker seg opp til høyden $z = 11\text{ km}$. Temperaturen $T(z)$ i troposfæren avtar lineært med høyden. Tropopausen ligger i (det tilnærmede) knutepunktet. På oversiden av knutepunktet ligger standard stratosfære, hvor temperaturen settes lik $t_0 = -66,5^\circ\text{C}$ opp til ca 20 km høyde.

Temperaturfallet i troposfæren er ca 6,5 K per km:

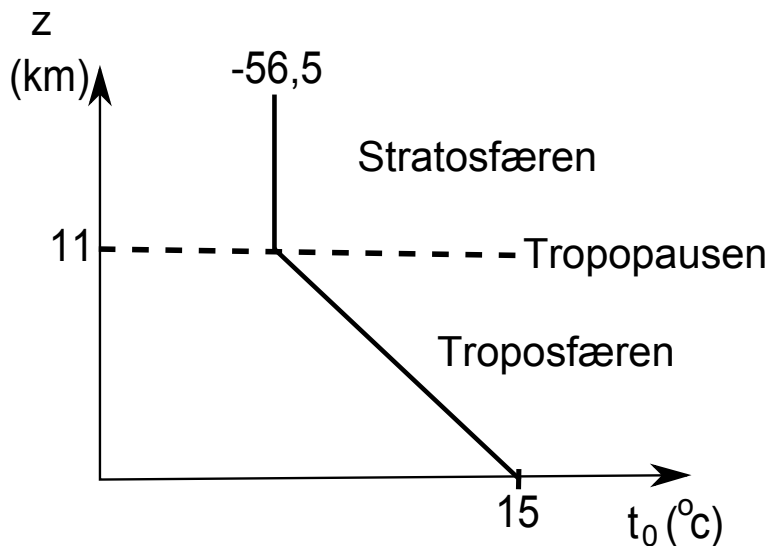
$$T(z) = T_0 - Bz, \quad (3.3)$$

hvor $B = 0,0065\text{ K/m}$.

Tilstandsligningen i aerodynamikken skrives vanligvis slik:

$$p = \rho RT. \quad (3.4)$$

⁷ $[p] = \text{N/m}^2 \equiv \text{Pa}$



Figur 3.2: Graf over hvordan temperaturen varierer med høyde i de ulike lagene av atmosfæren.

Dette betyr at vi betrakter én masseenheter, med volum $1/\rho$. Videre er R den *spesifikke* gasskonstant, som i SI-enheter er gitt ved $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{K kg}}$. Merk at ligning (3.4) medfører at

$$\frac{p}{\rho T} = \text{KONSTANT}. \quad (3.5)$$

Ofte er det nyttig skrive ligning (3.5) slik:

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0}, \quad (3.6)$$

hvor indeks 0 refererer til havoverflaten, $z = 0$.

Trykkvariasjonen $p = p(z)$ i stratosfæren finnes ved å gå tilbake til ligningen (3.1) og sette inn for ligning (3.4) og (3.3):

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dz = -\frac{g}{R(T_0 - Bz)} dz. \quad (3.7)$$

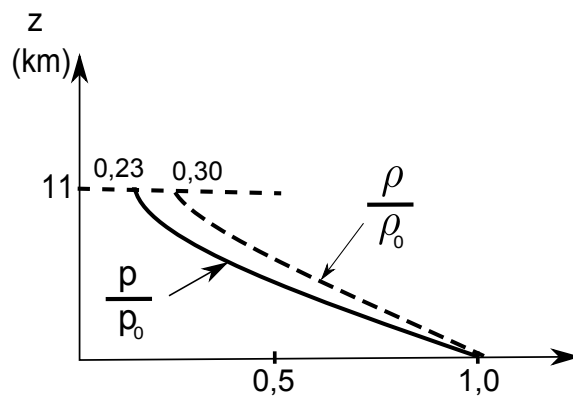
Denne ligningen kan nå integreres:

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} &= -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T_0 - Bz'} \\ \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} &= \frac{g}{RB} \ln \frac{T}{T_0} = \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{RB}} \\ \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5.26}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ved å benytte ligning (3.6), finnes da det tilsvarende tetthetsforhold

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{4.26}, \quad (3.9)$$

skissert i figur 3.3.



Figur 3.3: Graf over hvordan trykket og tettheten varierer med høyde i troposfæren.

3.2 Inkompressibelt fluid⁸

Når en har inkompressible fluider innføres ofte symbolet γ , *spesifikk tyngde*⁹,

$$\gamma = \rho g = \text{KONSTANT.} \quad (3.10)$$

Ligning (3.1) gir

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma, \quad (3.11)$$

som ved integrasjon gir

$$p_2 - p_1 = -\gamma (z_2 - z_1). \quad (3.12)$$

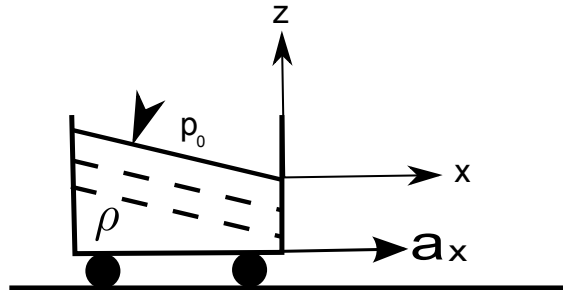
⁸Med et inkompressibelt fluid menes et fluid med konstant volum. Væsker kan som oftest approksimeres som inkompressible, mens gasser er som oftest kompressible, da volumet avhenger av trykket.

⁹ $[\gamma] = \text{Pa/m}$

4 Konstant Akselerasjon

Slike tilfeller kan ofte behandles enkelt ved bruk av hydrostatikk.

4.1 Lineær akselerasjon



Figur 4.1: Illustrasjon av en vogn med vann som utsettes for uniform akselerasjon i x -retning.

Betrakt vognen i figur 4.1. Bevegelsesligning, sett fra lab-systemet:

$$\rho \mathbf{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (4.1)$$

Del på ρ og flytt akselerasjonsleddet over til høyre:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} - \mathbf{a} \quad (4.2)$$

Benytter nå følgende “knep”: Betrakt ligning (4.2) som bevegelsesligningen i det medfølgende koordinatsystem, hvor forholdene er statiske. Da er det riktig at venstre side av ligning (4.2) (akselerasjonsleddet) er lik null. På høyre side opptrer de kjente kreftene $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ per masseenhed fra trykk, pluss gravitasjonskraften \mathbf{g} . Siste ledd $-\mathbf{a}$ i (4.2) er imidlertid en ny, fiktiv, kraft, forårsaket av akselerasjonen.

Ligning (4.2) kan enkelt integreres:

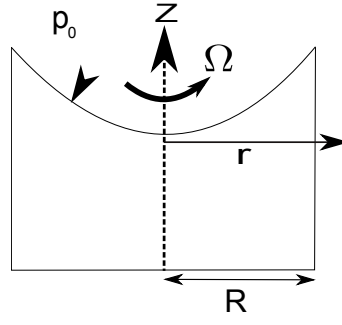
$$\rho = \text{KONSTANT} \implies \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right). \quad (4.3)$$

Da $\nabla z = \hat{\mathbf{k}}$ blir $\vec{g} = -g \nabla z = -\nabla(gz)$. Da $\nabla x = \hat{\mathbf{i}}$ i blir $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} = a_x \cdot \nabla x = \nabla(a_x \cdot x)$. Disse relasjonene sammen med ligning (4.2) gir

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla(gz) - \nabla(a_x \cdot x), \text{ eller} \\ \nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz + a_x \cdot x \right) &= 0, \text{ som gir} \\ \boxed{\frac{p}{\rho} + gz + a_x \cdot x = C, \text{ en konstant}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Verdien av konstanten C vil avhenge av problemet. Hvis origo legges som på figur 4.1, slik at $p = p_0$ for $x = z = 0$, blir $C = \frac{p_0}{\rho}$. Isobarer, $p = \text{KONSTANT}$, betyr ifølge ligning (4.4) at

$$\boxed{gz + a_x \cdot x = \text{KONSTANT}} \quad (4.5)$$



Figur 4.2: Illustrasjon av et uniformt roterende kar med radius R , vinkelfrekvens Ω og et ytre trykk p_0 . Avstanden fra sentrum angis med symbolet r .

4.2 Uniform rotasjon

Ser på fluidet i figur 4.2 i det medfølgende roterende system¹⁰, hvor sentrifugalkraften per masseenhed er $r\Omega^2\hat{\mathbf{e}}_r$. Ettersom akselerasjonen av fluidet i det roterende system er null, blir bevegelsesligningen

$$0 = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}}_{\text{Som før}} + \underbrace{r\Omega^2\hat{\mathbf{e}}_r}_{\text{Fiktiv kraft}}. \quad (4.6)$$

Integrasjon av ligning (4.6): Som før er

$$\frac{1}{\rho} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad g = -\nabla(gz).$$

Da $\nabla r^2 = 2r\hat{\mathbf{e}}_r$, blir $r\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{2}\nabla r^2$, altså $r\Omega^2\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{2}\Omega^2\nabla r^2 = \nabla \left(\frac{1}{2}r^2\Omega^2 \right)$. Da blir ligning (4.6)

$$0 = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla(gz) + \nabla \left(\frac{1}{2}r^2\Omega^2 \right), \text{ eller} \\ \nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 \right) = 0, \text{ som gir}$$

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + gz - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 = C, \text{ en konstant}} \quad (4.7)$$

Hvis $p = p_0$ ved $z = r = 0$ som i figur 4.2, blir $C = \frac{p_0}{\rho}$. Isobaren, $p = \text{KONSTANT}$, når $gz - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 = \text{KONSTANT}$, eller

$$\boxed{z = \frac{1}{2g}r^2\Omega^2 + \text{KONSTANT}} \quad (4.8)$$

¹⁰ $\hat{\mathbf{e}}_r \equiv \hat{\mathbf{r}}$ er enhetsvektoren radielt utover.

5 Eulers ligning

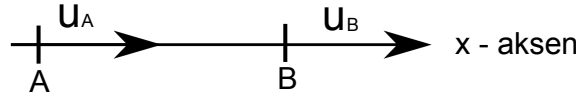
Vi skal nå se på de sentrale bevegelsesligningene, i lab-systemet. Den første av dem er Eulers ligning, som forutsetter at fluidets viskositet er neglisjerbart. Vi begynner med

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (5.1)$$

Det som gjenstår er å uttrykke \mathbf{a} ved den deriverte av \mathbf{V} . Generelt er

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

5.1 1-dimensjonal bevegelse



Figur 5.1: Illustrasjon av 1-dimensjonal bevegelse ved punktene A og B .

Se først på det enkle tilfellet i figur 5.1, hvor fluidet beveger seg langs x -aksen. Hastigheten¹¹ i punkt A er $u_A = u(t, x)$, mens hastigheten i punkt B er $u_B = u(t + \Delta t, x + \Delta x)$. Hastighetsforskjell altså $\Delta u = u_B - u_A = u(t + \Delta t, x + \Delta x) - u(t, x)$. Tar grensen $\Delta t \rightarrow dt$, $\Delta x \rightarrow dx$ og utvikler til 1. orden:

$$\begin{aligned} u(t + dt, x + dx) &= u(t, x) + dt \frac{\partial u}{\partial t} + dx \frac{\partial u}{\partial x} \\ &\Downarrow \\ du &= dt \frac{\partial u}{\partial t} + dx \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Divider med dt , og benytter $\frac{du}{dt} = a_x$, $\frac{dx}{dt} = u$. Dette gir

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5.3)$$

5.2 3-dimensjonal bevegelse

Anta nå at hastighetskomponenten u er avhengig av alle 3 koordinatene¹² x , y og z i tillegg til tiden: $u = u(t, x, y, z)$. Utvikler til 1.orden slik som før:

$$\begin{aligned} u(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz) &= u(t, x, y, z) + dt \frac{\partial u}{\partial t} + dx \frac{\partial u}{\partial x} + dy \frac{\partial u}{\partial y} + dz \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \implies du &= dt \frac{\partial u}{\partial t} + dx \frac{\partial u}{\partial x} + dy \frac{\partial u}{\partial y} + dz \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

Divider med dt og benytter $\frac{du}{dt} = a_x$, $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$ og $\frac{dz}{dt} = w$:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (5.4)$$

¹¹ u er x -komponenten av fluidhastigheten \mathbf{V} .

¹²Vi ser fortsatt på samme komponent, men nå er komponenten også avhengig av y - og z -koordinater.

Dette gjelder for alle komponentene, slik at vi kan erstatte u med den fulle hastighet \mathbf{V} :

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}. \quad (5.5)$$

Dette er det generelle uttrykk for \mathbf{a} . Men det kan skrives på mer kompakt form ved å utnytte nabla-operatoren, ∇ . Ta produktet

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla &= (\hat{\mathbf{i}}u + \hat{\mathbf{j}}v + \hat{\mathbf{k}}w) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dette er en *operator*. Hvis den anvendes på hastigheten \mathbf{V} , fås

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}. \quad (5.7)$$

Dette er jo det samme som de tre siste leddene i (5.5). Altså kan vi generelt skrive

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}.} \quad (5.8)$$

Uttrykt som $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{LOCAL}} + \mathbf{a}_{\text{CONV}}$, ser vi at $\mathbf{a}_{\text{LOCAL}} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ er den lokale hastighetsendringen i fast posisjon x , y og z , mens $\mathbf{a}_{\text{CONV}} \equiv (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ er den konvektive hastighetsendringen ved at fluidet beveger seg fra punkt A til B . Ligning (5.1) blir nå

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}} \quad (5.9)$$

Dette er *Eulers ligning*. Verdt å huske:

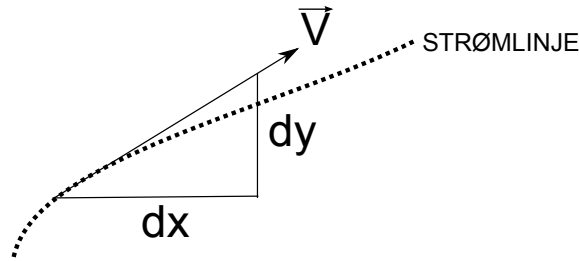
Ligningen forutsetter null (neglisjerbar) viskositet. Ellers ingen spesielle begrensninger. Ligningen tillater kompressibelt fluid, derfor nyttig for gasser. Heller intet krav på $\nabla \times \mathbf{V}$.

6 Bernoullis Ligning

Et av de mest nyttige teoremene i hydrodynamikken ble oppdaget av Daniel Bernoulli i 1738. Bernoullis ligning uttrykker energibalanse for en ikke-viskøs væske. Vi trenger først å definere begrepet strømlinjer.

6.1 Strømlinjer

Vi antar stasjonær strømning. En strømlinje er definert ved at dens tangent har samme retning som hastigheten i punktet. Strømlinjens deriverte er lik $\frac{dy}{dx}$. Det er jo det samme som forholdet $\frac{v}{u}$ mellom hastig-



Figur 6.1: Strømlinje i 2 dimensjoner, x og y .

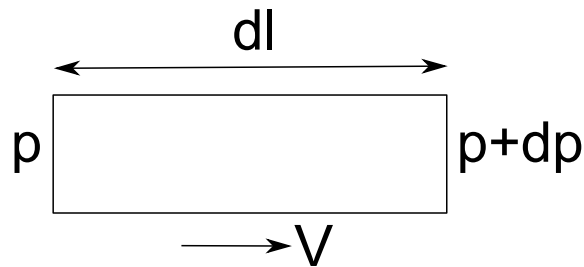
hetskomponentene. Altså

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}} \quad (6.1)$$

Hvis $u = u(x, y)$ og $v = v(x, y)$ er kjente funksjoner, kan strømlinjebildet $y = y(x)$ finnes av (6.1) ved integrasjon. For en stasjonær strømning er strømlinjene det samme som banelinjene (path lines). Banelinjer er de baner som fluidpartiklene følger.

6.2 Bernoullis ligning

En enkel utledning er som følger: Vi betrakter strømningsrøret i figur 6.2. Trykkraft på elementets venstre



Figur 6.2: Tynt strømningsrør med tverrsnitt A , hvor fludelementets hastighet er V .

side er pA , og på høyre side $-(p + dp)A$ (endringen i A fra venstre til høyre side er neglisjerbar). Netto trykkraft i strømrørets lengderetning altså $-A \cdot dp$, som ifølge Newtons 2. lov må være lik massen $\rho A \cdot dl$ av elementet multiplisert med akselerasjonen $\frac{dV}{dt}$:

$$\begin{aligned} -A \cdot dp &= \rho A dl \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \\ \implies -\frac{dp}{\rho} &= dl \cdot \frac{dV}{dt} = V \cdot dV \end{aligned}$$

Integrerer langs strømlinjen, og antar ρ konstant¹³:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \text{KONSTANT.} \quad (6.2)$$

Konstanten kan ha forskjellig verdi fra strømlinje til strømlinje. Ligning (6.2) skrives ofte slik:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{KONSTANT.} \quad (6.3)$$

Hvis tyngdekrefter inkluderes, får en

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{KONSTANT.} \quad (\text{Bernoullis ligning})$$

Betyr: Energibalanse langs strømlinjer.

6.3 Bernoulli fra Eulers ligning

Ved stasjonær strømning blir Eulers ligning

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}.$$

Fra før¹⁴ er $\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right)$, og $\mathbf{g} = -\nabla (gz)$. Trenger en vektorligning:

$$\nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 \right) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\zeta}, \quad (6.4)$$

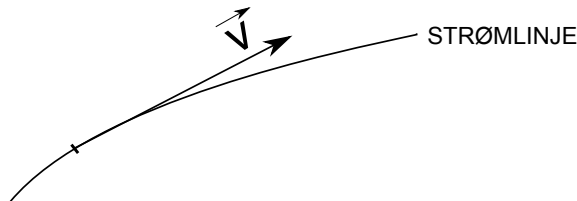
hvor virvlingen (vorticity) er

$$\boldsymbol{\zeta} \equiv \nabla \times \mathbf{V}. \quad (6.5)$$

Kan nå skrive Euler slik:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} V^2 \right) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\zeta} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla (gz) \quad (6.6)$$

Ta differensialet av denne ligningen langs strømlinjen: Bidraget fra $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\zeta}$ blir null, fordi dette kryssproduktet



Figur 6.3: Strømlinje.

er ortogonalt til strømlinjen. Igjen:

$$\begin{aligned} d \left(\frac{1}{2} V^2 \right) &= -d \left(\frac{p}{\rho} \right) - g dz \\ \Rightarrow \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + g z &= \text{KONSTANT} \end{aligned}$$

langs en strømlinje, som før.

¹³Dette er det samme som å anta at fluidet er inkompressibelt.

¹⁴Dette tilsvarer antagelsen om inkompressibelt fluid.

Viktig spesialtilfelle: Virvling $\zeta = 0$ I dette tilfellet er det likegyldig om vi betrakter en strømlinje eller ikke; bidraget fra leddet $\zeta = 0$ blir simpelthen null. Derfor, for curl-fri strømning gjelder Bernoulli mellom to *vilkårlige* punkter.

Eksempel 6:

Gitt en 2-dimensjonal strømning i horisontalplanet. Benytter plane polarkoordinater r og θ . Strømningen består av 2 deler: I indre område er asimutal hastighet

$$V_\theta = r_0\omega, \quad r \leq r_0, \quad \omega \text{ konstant},$$

mens i ytre område er¹⁵

$$V_\theta = \frac{A}{r}, \quad r > r_0.$$

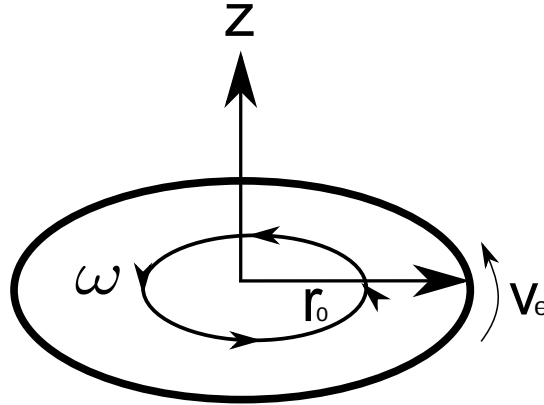
Vi bestemmer først konstanten A ved at V_θ må være kontinuerlig ved $r = r_0$:

$$r_0\omega = \frac{A}{r_0}, \quad A = r_0^2\omega \quad (6.7)$$

Virvling er gitt ved:

$$\begin{aligned} r < r_0 : \quad \zeta_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2\omega) = 2\omega, \\ r > r_0 : \quad \zeta_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{A}{r} \right) = 0. \end{aligned}$$

Altså diskontinuerlig virvling ved¹⁶ $r = r_0$. Naturlig derfor å starte med Bernoulli i ytre område.



Figur 6.4: Indre område av strømning i horisontalplanet.

Velger $r = \infty$ som referansepunkt. For $r > r_0$ kan vi skrive direkte:

$$p(r) + \frac{1}{2}\rho V_\theta^2(r) = p_\infty + \underbrace{V_\theta^2(\infty)}_0 \text{ gir at}$$

$$p(r) = \frac{1}{2}\rho\omega^2(r^2 - r_0^2) + p_\infty, \text{ for } r > r_0$$

For $r \leq r_0$ må vi benytte Euler:

$$-\frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

¹⁵Strømningen (6.3) kalles en naturlig virvel

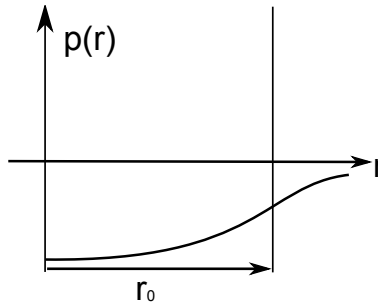
¹⁶Generelt er $(\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta}$.

Innsetting av $V_\theta = r\omega$ gir $p(r) = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + C$. Trykket er kontinuerlig ved $r = r_0$:

$$\frac{1}{2}\rho r_0^2\omega^2 + C = p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{r_0^4\omega^2}{r_0^2}$$

$$\implies C = p_\infty - \rho r_0^2\omega^2, \text{ og}$$

$$p(r) = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \rho r_0^2\omega^2 + p_\infty, \text{ for } r \leq r_0$$

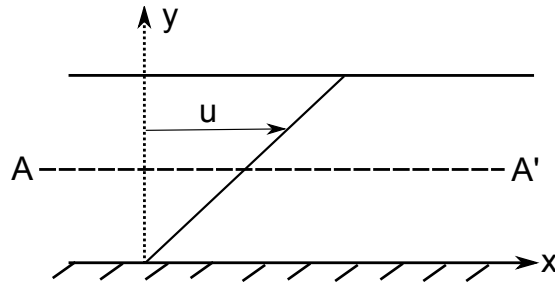


Figur 6.5: Graf over trykket som funksjon av r .

Merk forutsetninger for Bernoulli: Ligninger gjelder langs en strømlinje for en stasjonær, inkompressibel, tapsfri (ikke-viskøs) væske. Hvis I tillegg væsken er curl-fri, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, gjelder Bernoulli mellom vilkårlige punkter i væsken.

7 Friksjon, Navier- Stokes Ligning

Friksjon kalles i fluidmekanikken for viskositet (viscosity). Effekten diskuteres enklest ved å se på den såkalte



Figur 7.1: 2–dimensjonal strømning mellom to plater. Nedre plate ligger i ro, mens øvre plate beveger seg med konstant hastighet V i x -retningen. I mellomplanet er horisontal fluidhastighet $u = u(y)$.

Couette-strømningen, illustrert i figur 7.1.

Jo seigere væsken er, jo større kraft må en utøve på øvre flate for å opprettholde hastighet V . Betrakt et vilkårlig fiktivt horisontalt snitt AA' i væsken: Væsken på oversiden beveger seg litt fortere enn på undersiden. På AA' virker derfor en horisontal kraft imot bevegelsen. Kraft per flateenhet kalles skjærspenningen (shear stress). Standardsymbolet¹⁷ er τ . Skjærspenningen blir åpenbart større for økende verdier av hastighetsgradienten $\frac{du}{dy}$. Enkleste mulighet er å anta at τ og $\frac{du}{dy}$ er proporsjonale:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (7.1)$$

Dette er Newtons friksjonslov. Konstanten μ , den dynamiske viskositet, har dimensjon

$$[\mu] = \text{Pa s}$$

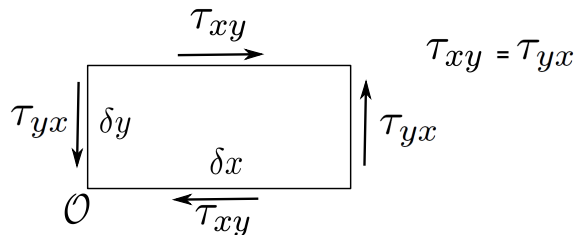
7.1 Heftbetingelsen(no-slip condition)

Ved en fast overflate er væskens hastighet i forhold til overflaten lik null. Ved nedre overflate altså $u(0) = 0$; ved øvre flate hvor $y = h$ er $u(h) = V$. En fri overflate er ikke i stand til å oppta skjærspenninger, altså

$$\tau \Big|_{\text{OVERFLATE}} = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{\text{OVERFLATE}} = 0. \quad (7.2)$$

7.2 Navier- Stokes' ligning

Vi betrakter det mer generelle tilfelle hvor en viskøs væske er i vilkårlig bevegelse. Anta 2–dimensjonal strømning som før.



Figur 7.2

¹⁷Benevnningen for τ er den samme som for trykket p , nemlig $[\tau] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$

Notasjonen er generell: τ_{xy} er kraften i x-retning når sidens normalvektor peker i y-retning, osv. La punktet \mathcal{O} i venstre nedre hjørne av figur 7.2 ha koordinatene x, y . Horisontal kraft mot høyre på elementets øvre kant er $\tau_{xy}(y + \delta y) \cdot \delta x \delta z$, hvor δz er utstrekningen inn i planet. Tilsvarende er horisontal kraft mot venstre på elementets nedre kant $\tau_{xy}(y) \cdot \delta x \delta z$. Resulterende kraft på elementet i x-retning altså ($\delta \mathcal{V} = \delta x \delta y \delta z$):

$$f_{\text{VISC},x} \cdot \delta \mathcal{V} = \tau_{xy}(y + \delta y) \cdot \delta x \delta z - \tau_{xy}(y) \cdot \delta x \delta z.$$

1. ordens Taylorutvikling av τ_{xy} :

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y + \delta y) &= \tau_{xy}(y) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot \delta y \\ &\Downarrow \\ f_{\text{VISC},x} \cdot \delta \mathcal{V} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot \delta \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Ligning (6.1) tilsvarende i denne notasjon

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \implies \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Det gir

$$f_{\text{VISC},x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (7.4)$$

Vi generaliserer: Den viskøse krafttettheten \mathbf{f}_{VISC} er på formen

$$\mathbf{f}_{\text{VISC}} = \mu \cdot \mathcal{R} \cdot \mathbf{V}, \quad (7.5)$$

Hvor operatoren \mathcal{R} er rotasjonsinvariant, det vil si uavhengig av orienteringen til aksene x, y og z . Fra (7.4) ser vi at den naturlige utvidelsen av $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ er

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \nabla^2.$$

Altså generelt

$$\boxed{\mathbf{f}_{\text{VISC}} = \mu \nabla^2 \mathbf{V}} \quad (7.6)$$

Alle ledd i den generelle bevegelsesligning (2.9) er nå kjent:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (7.7)$$

eller

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}} \quad (\text{Navier-Stokes ligning})$$

Hvor $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$ er den kinematiske viskositet¹⁸.

Merk forutsetningene for N-S ligningene:

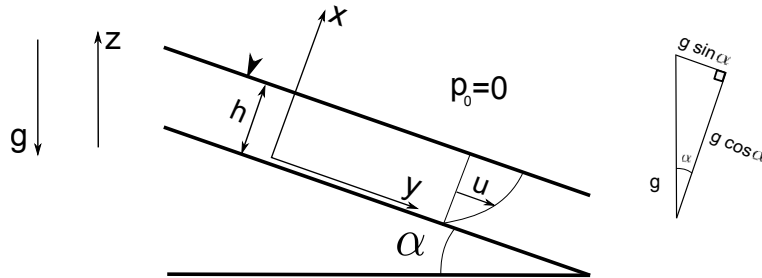
- μ er konstant (newtonsk væske).
- ρ er konstant (inkompressibel væske).

Det mer generelle tilfellet med kompressibel væske behandles for eksempel i Laundau-Lifshitz: Fluid Mechanics. Ligningen stiller derimot intet krav til $\nabla \times \mathbf{V}$.

¹⁸ $[\nu] = \text{m}^2/\text{s}$

Eksempel 7: Væskefilm på skråplan

Filmens tykkelse er h . Aksene er som vist i figur 7.3, med x-akse langs skråplanet. Antar stasjonære forhold. Strømningen opprettholdes av tyngden alene. p må være uavhengig av x-posisjon¹⁹, altså $p = p(y)$. u er likedan, altså $u = u(y)$. Ingen akselerasjon, $\mathbf{a} = 0$. Sett atmosfæretrykket $p_0 = 0$.



Figur 7.3: Væskefilm på et skråplan.

$$\text{N-S, x-retning: } 0 = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0} + g_x + \nu \nabla^2 u.$$

$$\text{N-S, y-retning: } 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \underbrace{\nabla^2 v}_{=0}.$$

Her er $g_x = g \sin \alpha$, $g_y = g \cos \alpha$, $\nabla^2 u = \frac{d^2 u}{dy^2}$. Altså

$$0 = g \sin \alpha + \nu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (7.8)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \alpha. \quad (7.9)$$

Av (7.9) er

$$p = -\rho g y \cos \alpha + C,$$

og da $p = p_0 = 0$ for $y = h$ følger

$$p = \rho g h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cos \alpha.$$

Av (7.8) er $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g}{\nu} \sin \alpha$,

$$\implies \frac{du}{dy} = -\frac{gy}{\nu} \sin \alpha + C_1.$$

Da $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0$ følger $C_1 = \frac{gh}{\nu} \sin \alpha$

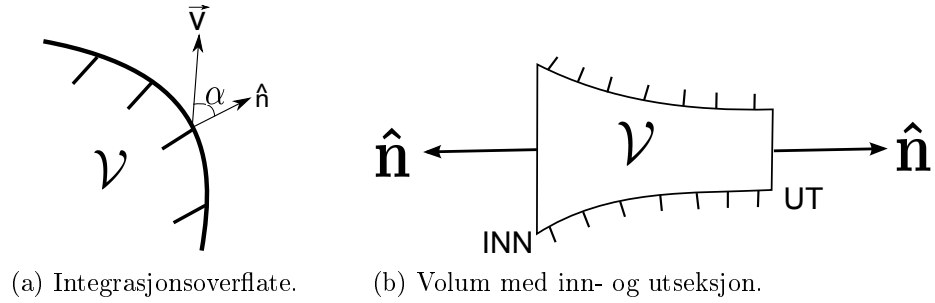
$$u = -\frac{gy}{2\nu} \sin \alpha + \frac{gh}{\nu} \cdot y \sin \alpha + C_2$$

$$u = 0 \text{ for } y = 0 \text{ gir } C_2 = 0$$

$$\implies u = \frac{gh}{\nu} y \left(1 - \frac{y}{2h}\right) \cdot \sin \alpha.$$

¹⁹Dette fordi fluidet drives av gravitasjon alene (intet ytre trykk).

8 Konserveringsligninger



Figur 8.1

Betrakt et vilkårlig volum \mathcal{V} med overflate A , slik som i figur 8.1a. $\hat{\mathbf{n}}$ er enhetsnormal utover ($|\hat{\mathbf{n}}| = 1$). Strømtettheten (masseflukstettheten) er $\rho \mathbf{V}$. Masse per tidsenhet gjennom overflateelementet dA er $\rho V \cos \alpha = \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Anta at \mathcal{V} har en INN-seksjon og en UT-seksjon. Da er

$$\text{massefluks ut: } \dot{m}_{\text{INN}} = - \int_{\text{INN}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (8.1)$$

$$\text{massefluks inn: } \dot{m}_{\text{UT}} = \int_{\text{UT}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (8.2)$$

Netto massetilførsel inn:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{INN}} - \dot{m}_{\text{UT}} &= - \int_{\text{UT}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA - \int_{\text{INN}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \\ &= \oint \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = - \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Økningen i masse kan alternativt skrives som $\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$. Altså

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (8.4)$$

Da \mathcal{V} er vilkårlig, må integranden være null:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0} \quad (8.5)$$

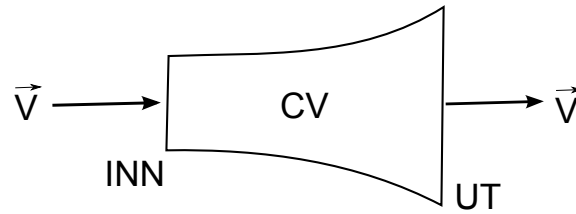
Dette er kontinuitetsligningen på differensiell form. For inkompressibel fluid, ρ konstant, gir (8.5) at

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{V} = 0} \quad (8.6)$$

Vi tester for inkompressibilitet simpelthen ved å regne ut $\nabla \cdot \mathbf{V}$.

8.1 Impulsbalansen

Betrakt stasjonær, inkompressibel, strømning. Vi skriver summen av alle kreftene som virker på *fluidet* inne i kontrollvolumet (CV) på formen $\sum \mathbf{F}$. Da impulsen til vannet (fluidet) inne i CV ikke endres med tiden, må $\sum \mathbf{F}$ være lik impulsfluksen $\dot{\mathbf{M}}_{\text{UT}}$ av vannet ut av CV, minus impulsfluksen $\dot{\mathbf{M}}_{\text{INN}}$ inn i CV.



Figur 8.2: Kontrollvolum.

Figur 8.1a: Impulstetthet²⁰ er $\rho \mathbf{V}$. Impulsflukstetthet er ρV^2 . Impulsflukstetthet langs normalen $\hat{\mathbf{n}}$ er

$$\rho V^2 \cdot \cos \alpha = \rho V (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}).$$

Vektorform: $\rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}})$. Den totale impulsfluks ut dermed

$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{UT}} = \oint_{\text{UT}} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA. \quad (8.7)$$

Tilsvarende defineres impulsfluks inn:

$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{INN}} = \oint_{\text{INN}} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA. \quad (8.8)$$

Impulsbalansen blir dermed

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{M}}_{\text{UT}} - \dot{\mathbf{M}}_{\text{INN}}} \quad (8.9)$$

8.2 Energibalansen

Stasjonær, inkompressibel strømming som ovenfor. Start med Bernoulli:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2. \quad (8.10)$$

Denne forutsetter intet arbeid og intet tap. (8.10) kan generaliseres: La w_s være nyttig arbeid (shaft work) per masseenhet, og skriv friksjonstapet som $g \cdot h_f$, hvor h_f kalles friskjonshøyden (head loss). Da blir energibalansen

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2 + w_s + g \cdot h_f. \quad (8.11)$$

Eksempel: Strømming mellom to åpne basseng

a) Energiligning 1→2, ved fri strømming mellom bassengene:

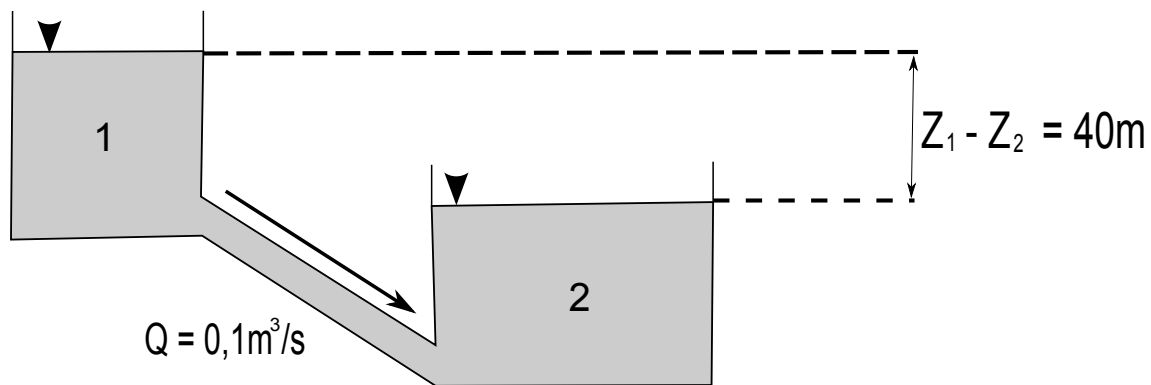
$$\frac{p_1}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2} V_1^2}_{\simeq 0} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2} V_2^2}_{\simeq 0} + g z_2 + \underbrace{w_s}_{=0} + g h_f$$

$$\Rightarrow h_f = z_1 - z_2 = \underline{\underline{40 \text{ m}}}. \text{ Friksjonshøyde er lik geometrisk høydeforskjell.}$$

Merk:

- Energital per masseenhet: $g h_f$
- Energital per volumenhet: $\rho g h_f$
- Energital per tidsenhet: $\rho g h_f \cdot Q$

²⁰Også kjent som masseflukstetthet.



Figur 8.3: To åpne basseng tilknyttet hverandre med et rør.

b) Anta at samme vannmengde pumpes opp fra 2 til 1. Hva er pumpeeffekten?

Energiligning $2 \rightarrow 1$:

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 + w_s + gh_f.$$

$$\implies -w_s = g(z_1 - z_2) + gh_f.$$

Neglisjerer tap i pumpen $\implies h_f = 80\text{ m}$ som før selv om strømingen er reversert. Gir at:

$$\frac{w_s}{g} = 40\text{ m} + 40\text{ m} = 80\text{ m}.$$

$$\text{Pumpeeffekt } \underline{P} = \rho \cdot (-w_s) \cdot Q = 10^3 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 0,1\text{ W} = \underline{\underline{80\text{ kW}}}$$

9 Strømfunksjonen ψ

De vektorielle grunnligningene – Euler eller Navier–Stokes – kan være vanskelige å løse. Derfor ønskelig å erstatte vektorligningene med skalare ligninger, dersom det er mulig. Det er to skalare funksjoner i bruk: strømfunksjonen ψ og hastighetspotensialet ϕ .

Vi skal i dette kapitlet betrakte ψ . Anta at strømmingen er todimensjonal og stasjonær. I kartesiske koordinater altså, $\psi = \psi(x, y)$. Anta videre at strømmingen er inkompressibel, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ (Vanligvis vil ψ bli benyttet bare i slike tilfeller). Med $\mathbf{V} = (u, v)$, vil hastighetskomponentene u og v være gitt som

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y}} \quad (9.1a)$$

$$\boxed{v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}} \quad (9.1b)$$

Disse uttrykkene definerer strømfunksjonen²¹ ψ i kartesiske koordinater. Merk at ψ ikke er entydig bestemt: En kan ha $\psi \rightarrow \psi + \text{KONSTANT}$ uten at det har innvirkning på u og v . Ligningene (9.1) oppfyller kontinuitetsligningen *automatisk*:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

9.1 Sammenhengen mellom ψ og virvling $\zeta \equiv \nabla \times \mathbf{V}$:

Av interesse er ζ_z , komponenten av ζ vinkelrett på bevegelsesplanet. Regner ut

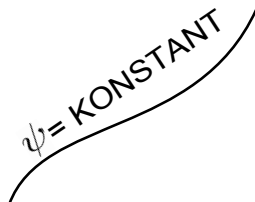
$$\zeta_z = (\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\nabla^2 \psi$$

Altså

$$\boxed{\nabla^2 \psi = -\zeta_z} \quad (9.2)$$

i kartesiske koordinater²².

9.2 Geometrisk tyding av ψ



Figur 9.1: Kurve til strømfunksjonen ψ .

Betrakt en kurve som i figur 9.1 hvor strømfunksjonen $\psi(x, y)$ er konstant, det vil si $d\psi = 0$ langs kurven. Det vil si

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0.$$

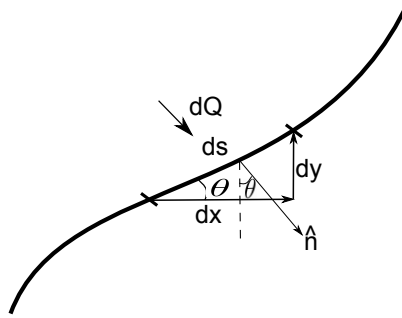
$$\text{Det gir } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = \frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = \frac{v}{u}, \text{ ifølge (9.1).}$$

²¹Matematisk sidebenevning: Definisjonsligningene (9.1) betyr at en innfører det såkalte vektorpotensial, vanligvis kalt \mathbf{A} . Her er $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, 0, \psi)$. Hastigheten følger som $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$.

²²Dette er *ikke* en vektorligning, gyldig i alle koordinater!

Men $\frac{v}{u}$ er jo det samme som vinkelkoeffisientene $\frac{dx}{dy}$ for strømlinjer, se (6.1). Altså: $\psi = \text{KONSTANT}$ langs en strømlinje i *stasjonær strømning*.

9.3 Sammenheng mellom ψ og volumfunksjonen Q



Figur 9.2: Differensielt linjeelement og differensiell volumstrøm.

Betrakt et linjeelement ds på en strømlinje. Hastighetsvektoren $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{i}}u + \hat{\mathbf{j}}v$, hvor $\hat{\mathbf{i}}$ og $\hat{\mathbf{j}}$ er enhetsvektor i x- og y-retning. Av figur 9.2:

$$\begin{aligned} dx &= ds \cdot \cos \theta, \\ dy &= ds \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

Normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ til linjeelementet er

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}} \sin \theta - \hat{\mathbf{j}} \cos \theta.$$

Volumelementet dQ gjennom ds er $dQ = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, det vil si

$$\begin{aligned} dQ &= (\hat{\mathbf{i}}u + \hat{\mathbf{j}}v) \cdot (\hat{\mathbf{i}} \sin \theta - \hat{\mathbf{j}} \cos \theta) ds = \underbrace{u \sin \theta ds}_{dy} - \underbrace{v \cos \theta ds}_{dx} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi \end{aligned}$$

Det betyr at volumstrømmen Q_{12} mellom to strømlinjer 1 og 2 er

$$Q_{12} = \int_1^2 \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (9.3)$$

Med plane polarkoordinater (r, θ) blir definisjonsligningene slik:

$$\boxed{V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}} \quad (9.4)$$

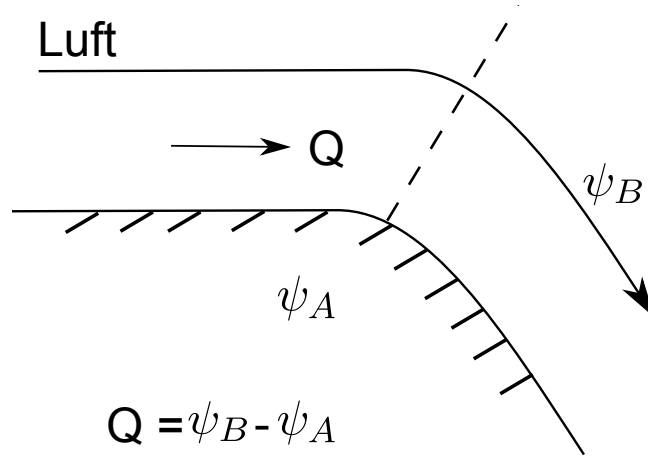
Som for kartesiske koordinater oppfylles kontinuitetsbetingelsen automatisk:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

Også i disse koordinatene oppfylles ligningen

$$\nabla^2 \psi = -\zeta_z,$$

slik som i ligning (9.2). Altså: Strømfunksjonen kan anvendes også for viskøs strømning. Ofte er det nyttig i praksis.



Figur 9.3: Eksempel: Luftstrømning rundt overflaten av en flyvinge.

9.4 Sammenhengen mellom ζ og rotasjons hastigheten ω for et fluidelement

Anta at et fluidelement roterer med konstant vinkelhastighet ω om origo. Elementets hastighet $\mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r}$. Ta curl til dette uttrykket:

$$\nabla \times (\omega \times \mathbf{r}) = \omega \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{r}}_{=3} - \mathbf{r} \underbrace{\nabla \cdot \omega}_{=0} + \underbrace{(\mathbf{r} \cdot \nabla) \omega}_{=0} - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{r} \quad (9.5)$$

Anta at rotasjonen foregår om z-aksen. Ta z-komponenten av ligningen:

$$[\nabla \times (\omega \times \mathbf{r})]_z = 3\omega_z - \omega_z \frac{\partial z}{\partial z} = 3\omega_z - \omega_z = 2\omega_z$$

\Downarrow

$$\boxed{\omega_z = \frac{1}{2}\zeta_z = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{V})_z} \quad (9.6)$$

10 Hastighetspotensialet ϕ

Vi forutsetter igjen 2-dimensjonal, stasjonær strømning. I kartesiske koordinater altså $\phi = \phi(x, y)$.

Anta at strømmingen er curl-fri,

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0.$$

Ettersom $\text{curl grad} \equiv 0$ er det mulig å sette

$$\boxed{\mathbf{V} = \nabla \phi} \quad (10.1)$$

Kurver $\phi = \text{KONSTANT}$ kalles ekvipotensialkurver. De er nivåflater, på samme måte som gravitasjonspotensialet $\phi_{\text{GRAV}} = gz$ er en nivåflate. Vi bruker ϕ bare i tilfeller hvor viskositeten er null (neglisjerbar). Hvis $\mu \neq 0$ vil det med én gang oppstå virvling.

10.1 Ekvipotensiallinjer er ortogonale til strømlinjer

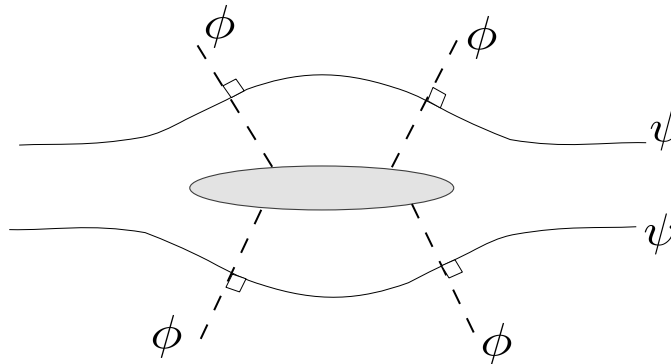
Anta ρ konstant. Langs en linje $\phi = \text{KONSTANT}$ er $d\phi = 0$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0, \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi} = -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} = -\frac{u}{v}.$$

For en strømlinje $\psi = \text{KONSTANT}$ har vi fra før

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = \frac{u}{v}. \quad \text{Produktet } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi} \cdot \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = -1.$$

Kurveskalarene altså ortogonale.



Figur 10.1: Strømningfunksjonen og hastighetspotensial rundt et elliptisk objekt.

11 Potensialstrømning

Anta et fluid som er todimensjonalt, stasjonært, og ikke-viskøst. Teorien forutsetter:

- 1) Inkompressibelt fluid, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.
- 2) Rotasjonsfritt (curl-fritt) fluid, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$.

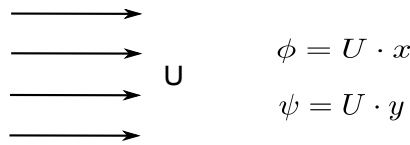
En kan nå starte fra 2), som gjør at det er mulig å innføre ϕ via $\mathbf{V} = \nabla \phi$. Da vil 1) føre til $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2 \phi = 0$. Altså

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0, \text{ Laplaces ligning.}} \quad (11.1)$$

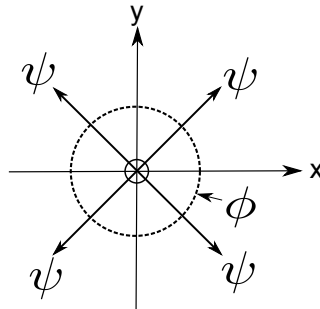
Alternativt kan en starte fra 1), som gjør det mulig å innføre ψ via $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Ettersom $\nabla^2 \psi$. Ettersom $\nabla^2 \psi = -\zeta_z$, vil dette medføre laplaces ligning igjen i

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (11.2)$$

Merk at (11.2), så vel som (11.1), hviler på både 1) og 2).



11.1 Singulariteter



Figur 11.1: Figuren viser strømning- og hastighetspotensialet rundt en linjekilde.

Linjekilde/sluk i origo: Singularitet plassert i origo som i figur 11.1. Kilden (et tynt rør) plassert i z -aksen. Ser bare på én lengdeenhet i z -retning. Radiell hastighet²³

$$V_r = \frac{m}{r} \begin{cases} m > 0 & \text{KILDE} \\ m < 0 & \text{SLUK} \end{cases} \quad (11.3)$$

Hvis Q er volumstrøm ut, er $V_r = \frac{Q}{2\pi r}$. Av

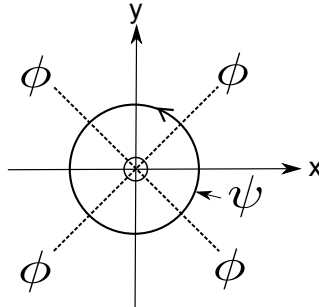
$$\left. \begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{r} \\ V_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \text{ finnes } \psi = m \cdot \theta, \phi = m \cdot \ln r. \quad (11.4)$$

²³Symbolet m står i denne konteksten ikke for masse, men for styrken til linjekilden/sluk.

Hastighetskomponentene:

$$u = V_r \cos \theta = m \cdot \frac{x}{r^2} = \frac{mx}{x^2 + y^2} \quad (11.5a)$$

$$v = V_r \sin \theta = m \cdot \frac{y}{r^2} = \frac{my}{x^2 + y^2} \quad (11.5b)$$



Figur 11.2: Figuren viser strømning- og hastighetspotensialet rundt en linjevirvel, med positiv virvelstyrke k .

Linjevirvel i origo Asimutal hastighet $V_\theta = \frac{k}{r}$. Av

$$\left. \begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ V_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \text{ finnes } \psi = -k \ln r \text{ og } \phi = m \cdot \theta. \quad (11.6)$$

$$\text{Virvling: } \zeta_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = \underline{0}. \quad \text{Fri virvel.}$$

$$\text{Sirkulasjon: } \underline{\Gamma} = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} V_\theta \cdot r d\theta = v_\theta \cdot 2\pi r = \underline{\underline{2\pi k}}$$

Dublett (dipol) Anta kilde av styrke $+m$ i $(-a, 0)$ og sluk av styrke $-m$ i $(a, 0)$, slik som i figur 11.3. La $a \rightarrow 0$ og $m \rightarrow \infty$ slik at dipolmomentet $\lambda = 2am$ holdes konstant. Approksimativ behandling: Av

$$\begin{aligned} \phi_{\text{KILDE}} &= m \ln r \text{ og} \\ \psi_{\text{KILDE}} &= m \cdot \theta, \end{aligned}$$

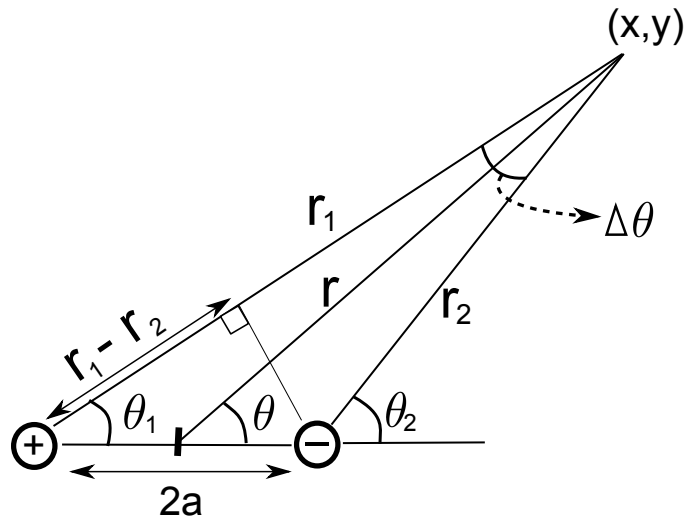
finnes for dipolen $\phi = m \ln r_1 - m \ln r_2 = m \ln \frac{r_1}{r_2}$. Av figur 11.3 er tilnærmet

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= 2a \cos \theta \\ \Rightarrow \phi &= m \cdot \ln \left(1 + \frac{2a}{r} \right) \cos \theta \simeq m \cdot \frac{2a}{r} \cos \theta, \end{aligned}$$

fordi $\ln(1+x) \simeq x$ for små x . Altså

$$\boxed{\phi = \frac{\lambda}{r} \cos \theta} \quad (11.7)$$

for dipolen.



Figur 11.3: Geometrisk skisse av en dipol bestående av en kilde og en sluk.

Strømfunksjonen $\psi = m(\theta_1 - \theta_2)$. Av figur 11.3: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{2a \sin \theta}{r}$ ($r_1 \simeq r_2 \simeq r$). Altså

$$\psi = -\frac{2am}{r} \sin \theta. \quad (11.8)$$

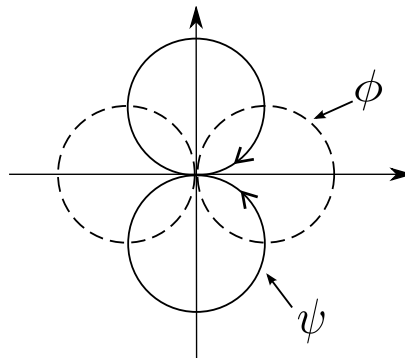
Ved innføre størrelsen $\lambda \equiv 2am$ kan vi skrive ligning (11.8) som

$$\boxed{\psi = -\frac{\lambda}{r} \sin \theta} \quad (11.9)$$

Hastighetskomponenten kan finnes for eksempel av ϕ :

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\lambda}{r^2} \cos \theta \quad (11.10a)$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\lambda}{r^2} \sin \theta \quad (11.10b)$$



Figur 11.4: Hastighet- og strømpotensialet rundt en dipol plassert i origo.

Eksempel: Superposisjon av uniform strømmning, dublett og virvel

Legger sammen strømfunksjonene for komponentene,

$$\begin{aligned}\psi_{\text{UNIFORM}} &= U \cdot y = Ur \sin \theta, \\ \psi_{\text{DUBLETT}} &= -\frac{\lambda}{r} \sin \theta, \\ \psi_{\text{VIRVEL}} &= -K \cdot \ln r,\end{aligned}$$

og får

$$\psi = \left(Ur - \frac{\lambda}{r} \right) \sin \theta - K \cdot \ln r.$$

Innfører en lengde a (radius) slik at $\lambda = U \cdot a^2$. Dessuten legges til en konstant i siste ledd slik at $-K \cdot \ln r \rightarrow -K \cdot \ln \frac{r}{a}$. Dette gir

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta - K \cdot \ln \frac{r}{a} \quad (11.11)$$

En ser at $\psi = 0$ når $r = a$, det vil si på overflaten av en sylinder i origo, med radius a . På overflaten $r = a$ er $V_r(a, \theta) = 0$, sjekk:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad \text{stemmer for } r = a,$$

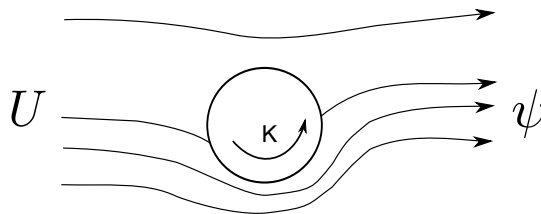
Dessuten er

$$V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{K}{r}.$$

På overflaten altså

$$V_\theta(a, \theta) = -2U \sin \theta + \frac{K}{a},$$

ingen heftbetingelser her! For moderate verdier av K (>0) blir strømningsbildet som i figur 11.5.



Figur 11.5: Strømningsbildet.

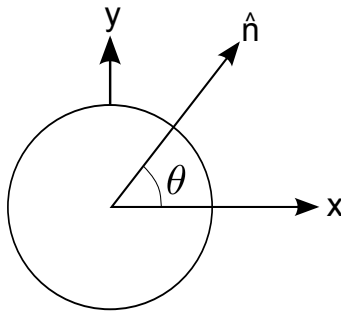
Bernoulli: ettersom $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ kan Bernoulliligningen anvendes mellom vilkårlige punkter. Relaterer $r = \infty$ til et punkt på overflaten:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 = \frac{p(a, \theta)}{\rho} + \frac{1}{2} \left[2U \sin \theta + \frac{K}{a} \right]^2 \quad (11.12)$$

Gage-trykk $p(a, \theta) - p_\infty = p_G$ på overflaten altså

$$p_G(a, \theta) = \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{\rho}{2} \left[4U^2 \sin^2 \theta - \frac{4KU}{a} \sin \theta + \frac{K^2}{a^2} \right] \quad (11.13)$$

Trykkraft på overflateelementet $a d\theta$. Kraftkomponenten per lengdeenhet altså



Figur 11.6: Overflateelement.

$$\underline{F_x} = - \int_0^{2\pi} p_G(a, \theta) a \cos \theta \, d\theta = \underline{0} \text{ og} \quad (11.14)$$

$$\underline{F_y} = - \int_0^{2\pi} p_G(a, \theta) a \sin \theta \, d\theta = -2\rho KU \underbrace{\int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta}_{=\pi} = \underline{\underline{-\rho U \cdot 2\pi K}}. \quad (11.15)$$

Da sirkulasjonen er $\lambda = 2\pi K$, fås

$$\boxed{F_y = -\rho U \Gamma} \quad (\text{Kutta—Joukowskis teorem})$$

12 Det komplekse potensial

Vi skal betrakte en tidsuavhengig potensialstrømning i to dimensjoner. Fluidet er friksjonsfritt (ideelt), og virvlingen $\zeta \equiv \nabla \times \mathbf{V} = 0$. I kartesiske koordinater er hastighetspotensialet $\phi = \phi(x, y)$ og strømfunksjonen $\psi = \psi(x, y)$. Som kjent er komponentene u og v av hastighetsvektoren \mathbf{V} gitt ved

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (12.1)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (12.2)$$

Dette er Cauchy-Riemanns ligninger i matematikken. Vi innfører den komplekse koordinaten z og dens komplekse konjugerte

$$z = x + iy, \quad (12.3a)$$

$$\bar{z} = x - iy \quad (12.3b)$$

Da ϕ og ψ tilfredsstiller Cauchy-Riemanns ligninger, vet vi at w er en analytisk (holomorf) funksjon av z overalt i planet hvor ϕ og ψ er definert. Funksjonen

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (12.4)$$

kalles ofte for det *komplekse potensial*.

Potensialet $w(x, y)$ har en veldefinert derivert,

$$\frac{dw}{dz} \equiv w'(z) \quad (12.5)$$

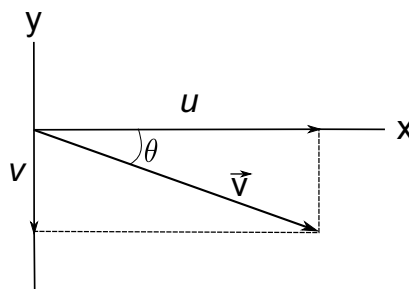
hvor $w'(z)$ er den samme uansett fra hvilken retning i planet vi regner den ut. Deriverer, for eksempel i x -retning:

$$w'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv. \quad (12.6)$$

Dette er den komplekse hastighet. Størrelse og argument for $w'(z)$ gir fart V og vinkel θ mellom \mathbf{V} og x -aksen:

$$w'(z) = V e^{-i\theta}, \quad (12.7)$$

hvor en enkelt ser fra figur 12.1 at θ er gitt ved

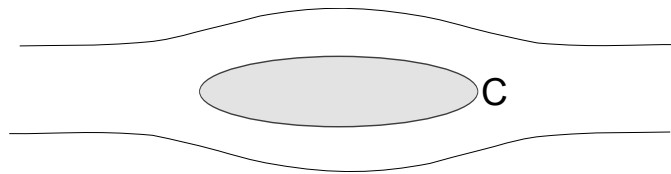


Figur 12.1: Illustrasjon av fartskomponentene til \mathbf{V} .

$$\tan \theta = \frac{v}{u}. \quad (12.8)$$

Anta så at en fast flate C som i figur 12.2, med potensialstrømning omkring (altså ingen friksjon). På overflaten må hastigheten være tangensiell, $\psi = \text{KONSTANT}$. Kan velge $\psi = 0$ på C blir altså

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \rightarrow \phi(x, y). \quad (12.9)$$

Figur 12.2: Strøming rundt en flate C .

Strømningsproblemet reduserer seg til å finne en analytisk funksjon $w(z)$ som er reell på randen av C . Benytter residyteoremet²⁴ på den komplekse hastighet:

$$\oint w'(z) dz = 2\pi i \sum_k A_k, \quad (12.10)$$

Hvor A_k er residuene til $w'(z)$. Vi har også

$$\begin{aligned} \oint_C w'(z) dz &= \oint_C (u - iv)(dx + i dy) \\ &= \underbrace{\oint_C (u dx + v dy)}_{=\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \equiv \Gamma, \text{ sirkulasjon}} + i \underbrace{\oint_C (u dy - v dx)}_{=\oint_C dQ = Q, \text{ volumgjennomstrømning}} \end{aligned} \quad (12.11)$$

Gjennom fast flate er $Q = 0$. Altså

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k = A_k. \quad (12.12)$$

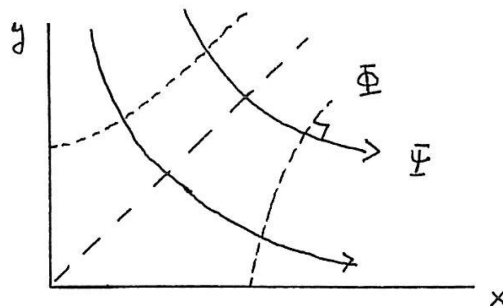
Alle residylene er i dette tilfellet imaginære.

Eksempel 12.A: $w = z^2$

Dette gir

$$\psi = x^2 - y^2, \quad \phi = 2xy. \quad (12.13)$$

Kurvene $\phi = \text{KONSTANT}$ og $\psi = \text{KONSTANT}$ skjærer hverandre ortogonalt.

Figur 12.3: Strømfunksjon og hastighetspotensial ved $w = z^2$.

²⁴Kort oppsummert sier residyteoremet at $f(z) = \sum_{-m} \frac{a_m}{(z-a)^m} + \phi(z) \implies \oint f(z) dz = 2\pi a_{-1} \cdot i$

Eksempel 12.B: Konstruksjon av w for en linjekilde

Hastighet- og strømpotensialet for en linjekilde er gitt ved

$$\phi = m \ln r \text{ og} \quad (12.14a)$$

$$\psi = m\theta. \quad (12.14b)$$

En får da at

$$w = m (\ln r + i\theta) = m \ln z. \quad (12.15)$$

Eksempel 12.C: Konstruksjon av w for en virvel

Hastighet- og strømpotensialet for en virvel er gitt ved

$$\phi = K \cdot \theta \text{ og} \quad (12.16a)$$

$$\psi = -K \ln r. \quad (12.16b)$$

En får da at

$$w = K (\theta - i \ln r) = -iK (\ln r + i\theta) = iK \ln z. \quad (12.17)$$

Uttrykt med sirkulasjonen $\Gamma = 2\pi K$ er w gitt ved

$$w = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (12.18)$$

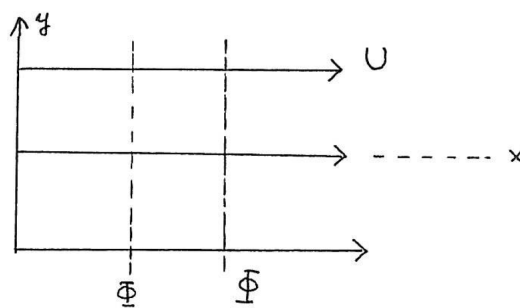
Noen eksempler hvor U er en hastighet og a en lengde.

Eksempel 12.D: $w = Uz$

Dette gir

$$\phi = Ux, \quad \psi = Uy. \quad (12.19)$$

Dette er homogen strømming (vist i figur 12.4).



Figur 12.4: Strømfunksjon og hastighetspotensial ved $w = Uz$.

Eksempel 12.E: $w = \frac{Ua^2}{z}$

Med $z = re^{i\theta}$:

$$\psi = -\frac{Ua^2}{r} \sin \theta = -\frac{Ua^2 y}{x^2 + y^2}. \quad (12.20)$$

Strømlinjer $\psi = \text{KONSTANT}$ når

$$\begin{aligned} \frac{y}{x^2 + y^2} &= \text{KONSTANT} \equiv \frac{1}{2y_0} \\ \Downarrow \\ x^2 (y - y_0)^2 &= y_0^2. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Innfører ny konstant λ (dipolstyrke) ved

$$\lambda = Ua^2 \quad (12.22)$$

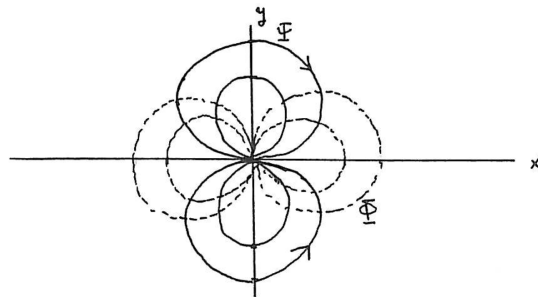
og får

$$\psi = -\lambda \frac{\sin \theta}{r}, \quad \phi = \lambda \frac{\cos \theta}{r}. \quad (12.23)$$

Dipolens dipolmoment er μ og er gitt ved

$$\mu = 2\pi\lambda. \quad (12.24)$$

Strøminingsbildet rundt en dipol er skissert i figur 12.5



Figur 12.5: Strømfunksjon og hastighetspotensial ved $w = \frac{Ua^2}{z}$.

Eksempel 12.F: $w = Ua \left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$

Antar at $0 < \alpha < \pi$. Vi får

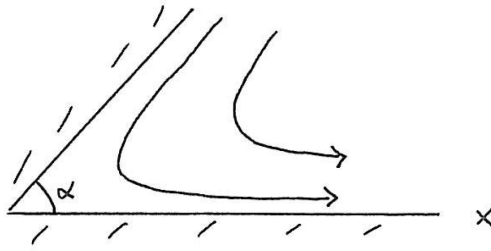
$$\phi = Ua \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}, \quad \psi = Ua \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} \quad (12.25)$$

Strømningsfunksjonen og hastighets potensialet til w er skissert i figur 12.6.

Stagnasjonspunkter: Disse er generelt gitt ved at $u = v = 0$, slik at den komplekse hastigheten $w'(z) = 0$. I det forrige eksempelet får en at stagnasjonspunktet bestemmes av

$$z^{\frac{\pi}{\alpha}-1} = 0. \quad (12.26)$$

Når $\alpha < \pi$, som forutsatt ovenfor, blir $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$, og stagnasjonspunktet blir i origo.



Figur 12.6: Strømfunksjon og hastighetspotensial ved $w = Ua^{\frac{z}{\alpha}}$.

Fart: Av ligning (12.7) fås farten V som

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \left| \frac{dw}{dz} \right| \equiv |w'(z)|. \quad (12.27)$$

Nå er

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= u - iv, \\ \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} &= \frac{d}{d\bar{z}} (\phi - i\psi) = \frac{\partial}{\partial x} (\phi - i\psi) = u + iv, \end{aligned} \quad (12.28)$$

slik at

$$\boxed{V^2 = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}} \quad (12.29)$$

Eksempel 12.G: $w = 2z + 3iz^2$

For å finne farten trenger en w' og $\overline{w'}$. w' er gitt ved

$$w' = \frac{dw}{dz} = 2 + i6z. \quad (12.30)$$

$\overline{w'}$ fås ved

$$\overline{w'} = \overline{\left(\frac{dw}{dz} \right)} = \overline{2 + i6z} = 2 - 6i\bar{z}. \quad (12.31)$$

En farten i andre er da gitt ved

$$\begin{aligned} V^2 &= (2 + 6iz)(2 - 6i\bar{z}) = 4 + 36 \underbrace{z\bar{z}}_{|z|^2} + 12i \underbrace{(z - \bar{z})}_{2\Im(z)} \\ &= 4 + 36(x^2 + y^2) - 24y, \end{aligned}$$

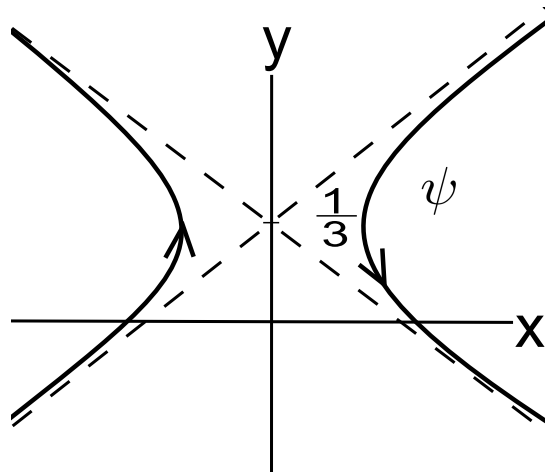
Stagnasjonspunkt når $w' = 0$. Det vil si

$$2 + 6iz = 0 \implies \begin{cases} z = \frac{i}{r} \\ \bar{z} = -\frac{i}{r} \end{cases}. \quad (12.32)$$

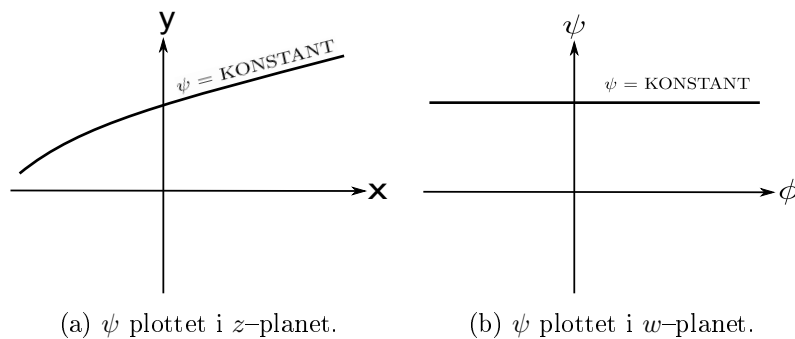
Ligning for strømlinjer finnes ved å la

$$\begin{aligned} \psi &= 2y + 3(x^2 - y^2) = 3a^2 + \frac{1}{3} \\ &\Downarrow \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{(y - \frac{1}{3})^2}{a^2} &= 1 \end{aligned} \quad (12.33)$$

Strømningsfunksjonen w er skissert i figur 12.7.

Figur 12.7: Strømfunksjon for $w = 2z + 3iz^2$.

Fundamentalt prinsipp for bruk av det komplekse potensial: Funksjonen $w(z)$ bestemmer avbildningen av z -planet på w -planet. Strømlinjene i z -planet avbildes som rette linjer, $\psi = \text{KONSTANT}$, parallelle med den reelle akse, i w -planet. Hvis en kan finne en hensiktsmessig avbildning mellom de to plan, vil dette ofte forenkle bestemmelsen av potensialene.



Figur 12.8

12.1 Strømning gjennom en åpning

Hvis $w = w(z)$, kan en i prinsippet invertere funksjonen og skrive $z = z(w)$. Noen ganger er dette nyttig.

La oss velge funksjonen $z = c \cosh w$, som kan skrives om på følgende vis

$$z = c \cosh w = c \cosh(\phi + i\psi) = \underbrace{c \cdot \cosh \phi \cos \psi}_{\text{Reell}} + \underbrace{ic \cdot \sinh \phi \sin \psi}_{\text{Imaginær}}.$$

Dermed er

$$x = c \cdot \cosh \phi \cos \psi, \quad (12.34a)$$

$$y = c \cdot \sinh \phi \sin \psi. \quad (12.34b)$$

Eliminerer ψ :

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \psi} = 1. \quad (12.35)$$

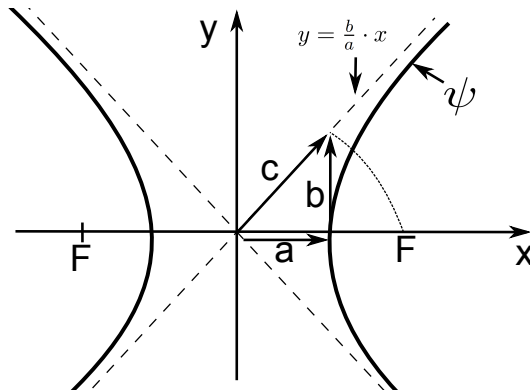
Kurvene $\psi = \text{KONSTANT}$ er hyperbler, med halvaksler $c \cos \psi$, $c \sin \psi$, og brennpunkter i $(c, 0)$ og $(-c, 0)$. Ved å sette

$$\begin{aligned} a &= c \cos \psi \text{ og} \\ b &= c \sin \psi, \end{aligned}$$

får vi ligning (12.35) på følgende form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (12.36)$$

Flaten i ligning (12.36) er skissert i figur 12.9. En kan anskueliggjøre strømmingen ved å se på den ved



Figur 12.9: Kurver med konstant ψ .

x -aksen: Fra ligning (12.35) får en på positiv x -akse

$$x = c \cos \psi \implies \psi = \arccos \frac{x}{c}. \quad (12.37)$$

y -komponenten v av farten \mathbf{V} , finnes ved

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{c} > 0. \quad (12.38)$$

Åpningen på x -aksen vil være der det er gjennomstrømning i y -retning. Gjennomstrømning krever reell v ulik null. En kan dermed tolke

$$-c < x < c \quad (12.39)$$

som en åpning, slik som i figur 12.10. Denne tolkningen kommer man også frem til på følgende måte: Velg en av hyperblene som faste flater. Vi får da et bilde av strømmingen gjennom åpningen (slik som i figur 12.11). Ta så grensen flat plate, som betyr at vertikal halvakse er null. Det betyr at $\psi = 0$ eller $\psi = \pi$. Vi får et bilde av en strømning gjennom en åpning av bredde $2c$ i en fast plate. Strømningbildet er urealistisk i kantene, fordi hastigheten går mot uendelig der. Viser dette, ved å regne ut

$$V^2 = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \quad (12.40)$$

På kantene $(c, 0)$ og $(-c, 0)$ finner vi nemlig, av

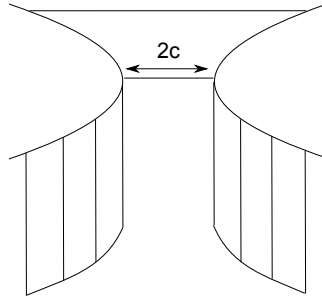
$$x = c \cosh \phi \cos \psi, \quad y = c \sinh \phi \sin \psi,$$

at

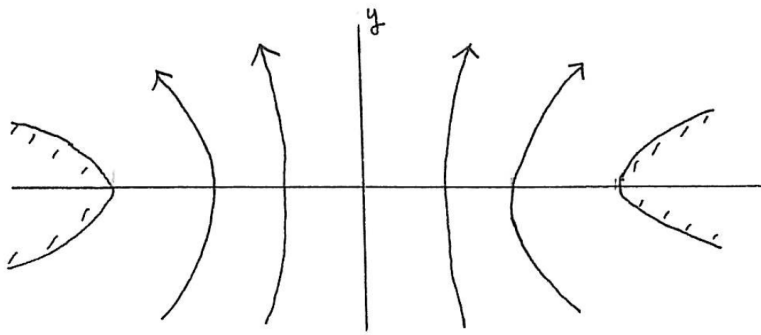
$$\pm 1 = \cosh \phi \cos \psi, \quad y = \sinh \phi \sin \psi \text{ og}$$

noe som gir $\phi = 0$, $\psi = 0$ eller π . Altså ved innsetting i ligning (12.40)

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} &= c^2 \sinh w \cdot \sinh \bar{w} = \frac{1}{2} c^2 [\cosh (w + \bar{w}) - \cosh (w - \bar{w})] \\ &= \frac{1}{2} c^2 [\cosh 2\phi - \cos 2\psi] = \frac{c^2}{2} (1 - 1) = 0, \text{ i.e., } V \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (12.41)$$



Figur 12.10: Eksempel på konfigurasjon for strømming gjennom en åpning.



Figur 12.11: Strømningbilde gjennom en åpning.

12.2 Strømning omkring en sylinder

Gitt det komplekse potensial

$$w(z) = V_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (12.42)$$

Det betyr

$$\phi = V_{\infty} \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad (12.43a)$$

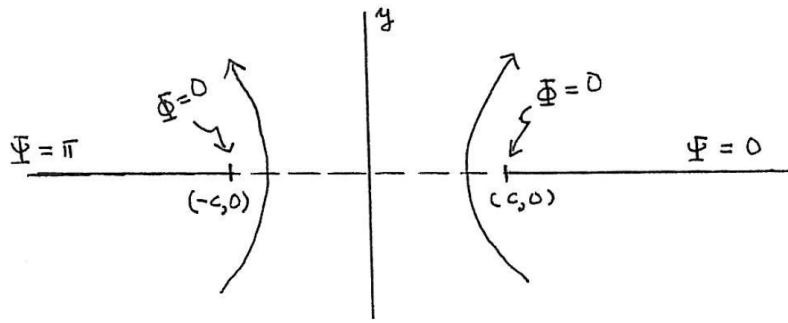
$$\psi = V_{\infty} \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta. \quad (12.43b)$$

Dette er kjent fra potensialteori tidligere. Det er her forutsatt at sentrum ligger i origo. Hvis sentrum ligger i $z = z_0$:

$$w(z) = v_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z - z_0} \right). \quad (12.44)$$

Virvel med *sirkulasjon* Γ omkring en sylinder er gitt ved ligningen

$$w(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}, \quad (12.45)$$



Figur 12.12: Strømningbilde gjennom en åpning i en plate.

som betyr

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \quad (12.46a)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}, \quad (12.46b)$$

når vi velger $\psi = 0$ på overflaten.

Kombinerer de to potensialene:

$$w(z) = V_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R}. \quad (12.47)$$

På overflaten, $z = Re^{i\theta}$, er

$$w(Re^{i\theta}) = 2V_{\infty}R \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \quad (12.48)$$

altså reell, slik at $\psi = 0$ på overflaten.

Stagnasjonspunktene finnes av $dw/dz = 0$. Av

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} = 0 \quad (12.49)$$

finnes

$$\frac{z}{R} = \frac{i\Gamma}{4\pi RV_{\infty}} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi RV_{\infty}} \right)^2}. \quad (12.50)$$

Antar at

$$\frac{\Gamma}{4\pi RV_{\infty}} < 1, \quad (12.51)$$

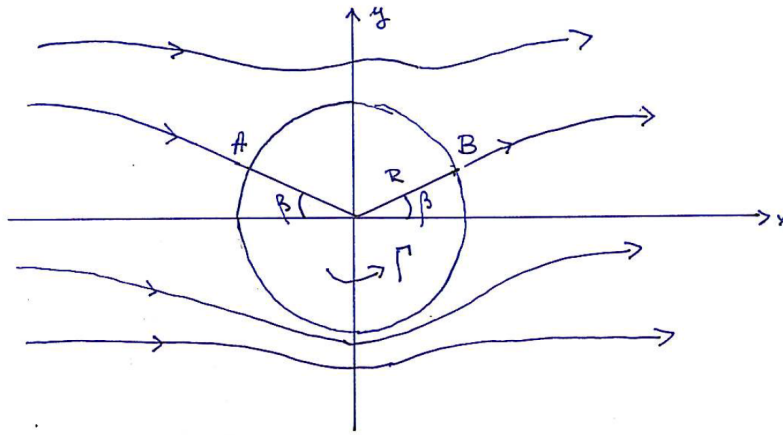
og innfører β slik at

$$\frac{\Gamma}{4\pi RV_{\infty}} = \sin \beta. \quad (12.52)$$

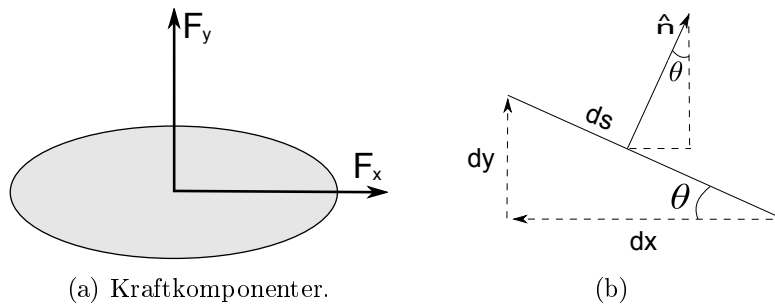
Stagnasjonspunktene er da gitt ved

$$\frac{z}{R} = i \sin \beta \pm \cos \beta. \quad (12.53)$$

Stagnasjonspunktene er A og B på figur 12.13.



Figur 12.13: Strømningbilde rundt en sylinder.



Figur 12.14

12.3 Blasius' teorem

En sylinder (ikke nødvendigvis med sirkulært tverrsnitt) er plassert i en uniform strømning. Kraftkomponentene er F_x og F_y (som i figur 12.14a). Ytre krefter, slik som gravitasjon, utelates. Kraften $d\mathbf{F}$ på et linjeelement ds i to dimensjoner er

$$d\mathbf{F} = -p\hat{\mathbf{n}} ds. \quad (12.54)$$

Fra figur 12.14b ser en at

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, \cos \theta), \quad (12.55)$$

$$dy = ds \sin \theta > 0, \quad (12.56)$$

$$dx = -ds \cos \theta < 0. \quad (12.57)$$

Komponentene til $d\mathbf{F}$ er da gitt ved

$$dF_x = -pn_x ds = -p dy \text{ og} \quad (12.58)$$

$$dF_y = -pn_y ds = p dx. \quad (12.59)$$

Dermed blir

$$d(F_x - iF_y) = -ip(dx - i dy) = -ip d\bar{z}. \quad (12.60)$$

Bernoullis ligning

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C_1 = \text{KONSTANT} \quad (12.61)$$

gir ettersom C_1 er uten betydning,

$$p \rightarrow -\frac{1}{2}\rho V^2 = -\frac{1}{2}\rho \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}. \quad (12.62)$$

På overflaten er $\psi = \text{KONSTANT}$, slik at $d\bar{w} = dw$ ($= d\psi$). Altså

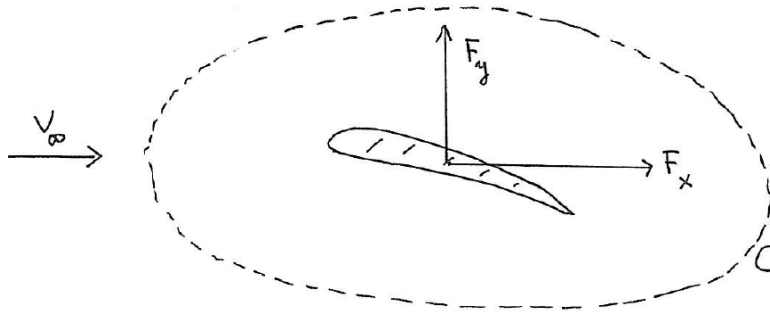
$$d(F_x - iF_y) = \frac{1}{2}i\rho \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \quad (12.63)$$

og dermed

$$\boxed{F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz} \quad (\text{Blasius' teorem})$$

12.4 Kutta–Joukowski teoremet

For store verdier av $|z|$ utvikles



Figur 12.15: Strømning rundt en flyvinge.

$$w'(z) = V_\infty + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots \quad (12.64)$$

$$w(z) = V_\infty z + A \ln z - \frac{B}{z} + \dots \quad (12.65)$$

Sammenligning med en enkel virvel,

$$w(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \text{ gir } A = -\frac{i\Gamma}{2\pi}. \quad (12.66)$$

Vi regner ut

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \left(V_\infty - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots\right)^2 = V_\infty^2 - \frac{i\Gamma V_\infty}{\pi z} + \frac{2V_\infty B - (\Gamma/2\pi)^2}{z^2} + \dots \quad (12.67)$$

Benytter så Blasius' teorem og legger integrasjonsveien C langt ute²⁵. Vi får da bidrag bare fra $1/z$ -leddet:

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho \underbrace{\oint_C \frac{dz}{z}}_{2\pi i} = i\rho V_\infty \Gamma. \quad (12.68)$$

Altså

$$F_y = -\rho V_\infty \Gamma, \quad (12.69)$$

som vi kjenner fra før.

²⁵Dette er tillatt, selv om det ikke er bevist her.

A Formelliste basert på White, Fluid mechanics²⁶

Overflatespenning

$$\Delta p = \Gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Strømlinjer

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Atmosfæren

$$\frac{p(z)}{p_0} = \left[\frac{T(z)}{T_0} \right]^{5,26}$$

Kraft på plane plater

$$F = \gamma h_{CG} A$$

$$\xi_{CP} = \xi_{CG} + \frac{I_{xx}}{\xi_{CG} A}$$

$$y_{CP} = \xi_{CG} - \xi_{CP}$$

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx}}{\xi_{CG} A} = -\frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{CG} A}$$

$$x_{CP} = -\frac{I_{xy}}{\xi_{CG} A} = -\frac{I_{xy} \sin \theta}{h_{CG} A}$$

Kraft på krumme flater

$$F_H = \gamma h_{CG} A_x$$

$$F_V = \gamma \mathcal{V}$$

Reynolds' transportteorem

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{SYST}} \phi d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \phi d\mathcal{V} + \int_{\text{CS}} \phi \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

Impulsligningen

$$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{M}}_{UT} - \dot{\mathbf{M}}_{INN}$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{UT} = \int_{UT} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{INN} = - \int_{INN} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA$$

Energiligning

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{CS} \rho \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

$$\hat{h} = \hat{u} + \frac{p}{\rho} \quad (\text{Spesifikk entalpi})$$

Mekanisk energiligning for inkompressibel strømning langs en strømlinje

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 \right) + w_s + gh_f$$

$$\hat{u}_2 - \hat{u}_1 = q + gh_f$$

Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{KONSTANT} \quad (\text{langs en strømlinje})$$

Kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

Euler

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

Navier–Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad \left(\nu = \frac{\mu}{\rho} \right)$$

Strømfunksjon ψ , kartesiske koordinater

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta_z \quad (\zeta = \nabla \times \mathbf{V})$$

Strømfunksjonen ψ , planpolare koordinater

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta_z \quad \left((\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

Hastighetspotensial ϕ

$$\mathbf{V} = \nabla \phi$$

²⁶Mange av formelene som er her utledes i forelesninger og ikke i kompendiet.

Singulariteter

$$\psi_{\text{kilde}} = m\theta, \quad \psi_{\text{kilde}} = m \ln r$$

$$\psi_{\text{virvel}} = -K \ln r, \quad \psi_{\text{virvel}} = K\theta$$

Sirkulasjon

$$\Gamma = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

Løft og drag

$$L = C_L \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot A, \quad D = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot A$$

Reynolds tall

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

Kutta-Joukowski

$$L = -\rho U \Gamma \quad (\text{per lengdeenhet})$$

Vannbølger (G.Moes kompendium)

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{ga}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx) \\ &= \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

Dispersjonsrelasjonen

$$\omega^2 = gk \tanh kd$$

Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{KONSTANT}$$

Kinematisk overflatebetingelse

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w \quad (\text{ved } z = \eta)$$

Dynamisk trykk

$$p_d = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Komplekst potensial

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Kompleks hastighet

$$w'(z) = u - iv = V e^{-i\theta}$$

Blasius' teorem

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$