FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høst 2015.

Løsningsforslag til øving 4

Oppgave 1

For enatomig gass har vi $c_{pm} = 5R/2$ og $c_{Vm} = 3R/2$, slik at $\gamma = C_p/C_V = 5/3$. Langs adiabaten er det (pr definisjon) ingen varmeutveksling med omgivelsene, $Q_{ab} = 0$. Fra c til a er volumet konstant slik at det ikke utføres noe arbeid, $W_{ca} = 0$. Trykket økes, som betyr at temperaturen også øker. Altså øker gassens indre energi fra c til a, og denne energien må da komme fra tilført varme, dvs $Q_{ca} > 0$. Fra b til c komprimeres gassen (til halvt volum) ved konstant trykk ($p_c = p_b$). Det betyr at gassen har utført et negativt arbeid på omgivelsene, $W_{bc} < 0$. Det er videre klart at temperaturen i c er lavere enn i b, siden produktet pV er mindre i c enn i b (halvparten så stort). Følgelig er indre energi redusert fra b til c, og det er klart at $Q_{bc} = \Delta U_{bc} + W_{bc} < 0$, dvs varme avgitt til omgivelsene.

Virkningsgraden er pr definisjon lik forholdet mellom netto utført arbeid W og tilført varme Q_{ca},

$$\eta = \frac{W}{Q_{ca}} = \frac{Q_{ca} + Q_{bc}}{Q_{ca}},$$

der vi i siste overgang benyttet oss av at indre energi er en tilstandsfunksjon, slik at netto utført arbeid tilsvarer netto tilført varme. Her tilføres og avgis varme ved hhv konstant volum og konstant trykk, så vi har direkte

$$\begin{aligned} Q_{ca} &= C_V(T_a - T_c) = \frac{3}{2}nR(T_a - T_c), \\ Q_{bc} &= C_p(T_c - T_b) = -\frac{5}{2}nR(T_b - T_c). \end{aligned}$$

Vi har allerede slått fast at $p_bV_b = 2p_cV_c$ slik at $T_b = 2T_c$. Langs adiabaten har vi

$$T_aV_a^{\gamma-1} = T_bV_b^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_a = T_b\left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}\,T_b,$$

dvs $T_a = 2^\gamma T_c$. Virkningsgraden blir følgelig

$$\eta = 1 + \frac{Q_{bc}}{Q_{ca}} = 1 - \frac{5}{3}\frac{T_b - T_c}{T_a - T_c} = 1 - \frac{5}{3}\frac{T_b/T_c - 1}{T_a/T_c - 1} = 1 - \frac{5}{3}\frac{2-1}{2^{5/3} - 1} \simeq 0.23.$$

En Carnot-maskin som opererer mellom et varmt reservoar med temperatur T_a og et kaldt reservoar med temperatur T_c ville ha virkningsgraden

$$\eta_C = 1 - T_c/T_a = 1 - 2^{-5/3} \simeq 0.69,$$

som altså er maksimal teoretisk virkningsgrad.

Som nevnt i oppgaveteksten kan arbeidet bestemmes ved å integrere $p(V)dV$. Langs adiabaten må en da benytte seg av at pV^γ er konstant. Fra b til c blir arbeidet ganske enkelt $p_b(V_a - V_b)$. Dette gir totalt arbeid uttrykt ved p_bV_b, som med ideell gass tilstandsligning kan erstattes med nRT_b, og her kan nR uttrykkes ved γ og C_V. Men tilført varme vil, som ovenfor, i utgangspunktet være uttrykt ved T_a og T_c, så en kommer ikke utenom å uttrykke disse ved T_b, slik vi gjorde ovenfor.

Oppgave 2

Kraftverkets virkningsgrad er

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{W}{|Q_1| + W},$$

der Q_1 er avgitt varme som dumpes i elva. Oppgaven etterspør *effekter*, dvs energier pr tidsenhet, så la oss si at Q og W angir hhv varme og elektrisk energi (arbeid) pr tidsenhet, dvs varmeeffekt og elektrisk effekt. Vi løser ligningen ovenfor med hensyn på W og finner at kraftverket maksimalt kan levere en elektrisk effekt

$$W = \frac{\eta}{1-\eta}\,|Q_1| = \frac{0.4}{0.6} \cdot 1500\,\mathrm{MW} = 1000\,\mathrm{MW}.$$

Dette krever tilførsel av en varmeeffekt

$$Q_2 = W + |Q_1| = 2500\,\mathrm{MW}.$$

Vannets spesifikke varmekapasitet kan skrives som

$$c = \frac{|Q_1|}{\Delta T \cdot M},$$

og hvis $|Q_1|$ her representerer varme pr tidsenhet, med enheten J/s, må M tilsvare forbipassert masse vann pr tidsenhet, med enheten kg/s. Nødvendig vannføring for å begrense ΔT til 5 K blir derfor

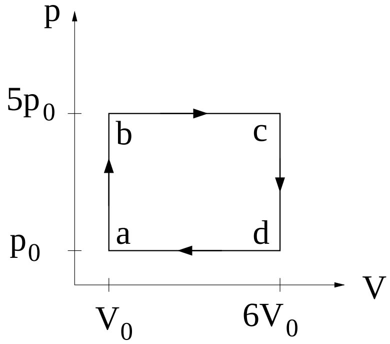
$$M = \frac{|Q_1|}{c \cdot \Delta T} = \frac{1500 \cdot 10^6\,\mathrm{J/s}}{4184\,\mathrm{J/kgK} \cdot 5\,\mathrm{K}} \simeq 71.7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/s} \simeq 72\,\mathrm{tonn/s}.$$

Oppgave 3
Hver variabel som inngår kvadratisk i energi-funksjonen gir et bidrag $1/2kT$ til indre energi U. Her er det to kvadratiske ledd for kinetisk energi, to kvadratiske ledd for svinge-energien til atomene i molekylet langs forbindelseslinjen mellom atomene i det to-atomige molekylet (kinetisk og potensiell energi), og ett kvadratisk ledd for rotasjonen rundt z-aksen. Tilsammen er det $2+2+1=5$ kvadratiske ledd, slik at $U = 5/2kT$ per molekyl. Entalpien er $H = U + pV = 7/2kT$ per partikkel. Da er $C_V = 5/2k$ og $C_p = 7/2k$. Dermed er $\gamma = 7/5$.
Oppgave 4

---

a) Et ideelt "Carnot-kjøleskap" holder konstant temperatur 4°C ("lavtemperaturreservoaret") i et kjellerrom der temperaturen er 13°C ("høytemperaturreservoaret"). Hva er kjøleskapets effektfaktor, dvs forholdet mellom varmen som trekkes ut av kjøleskapet og arbeidet som kjøleskapets motor må utføre? (Tips: For syklisk reversibel prosess er $\Delta S = 0$ og $\Delta U = 0$.)

$\varepsilon_K = |Q_1/W| = |Q_1/(Q_1+Q_2)|$. Vi bruker at $Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$, dvs $Q_2 = -Q_1T_2/T_1$, som innsatt i uttrykket for ε_K gir $\varepsilon_K = |T_1/(T_1 - T_2)| = 277/9 \simeq 31$.
D) Ca 31



b) Figuren viser en kretsprosess for et mol ideell gass, med $p_0 = 1$ atm og $V_0 = 5$ L. Omlag hvor stort arbeid utfører gassen pr syklus?

$W = 4p_0 \cdot 5V_0 = 20 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 10^4 = 10\,\text{kJ}$.
C) 10 kJ

---

c) Ranger temperaturene i de fire hjørnene av kretsprosessen i oppgave b.

T_a er minst, T_c er størst. Siden T er proporsjonal med pV, er $T_b/T_d = p_bV_b/p_dV_d = 5/6$, dvs $T_b < T_d$.

B) $T_a < T_b < T_d < T_c$

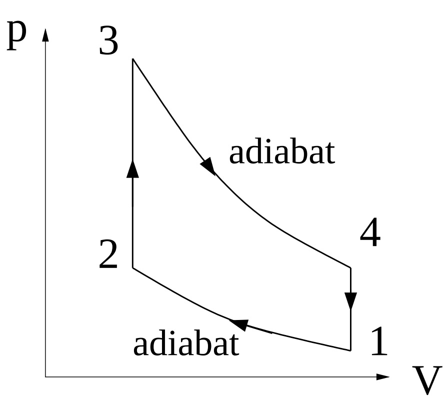
---

d) Dersom gassen i oppgave b hadde ekspandert isotermt fra tilstand b til en tilstand med trykk p_0, og deretter blitt komprimert ved konstant trykk tilbake til tilstand a og så varmet opp ved konstant volum til tilstand b osv, omtrent hvor stort arbeid ville gassen da ha utført pr syklus?

Siden $p_bV_b = 5p_0V_0$, har vi her en isoterm ekspansjon fra tilstand b til en tilstand med trykk p_0 og volum $5V_0$. Arbeidet blir dermed

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{V_0}^{5V_0} p\,dV - 4p_0V_0 = \int_{V_0}^{5V_0} \frac{5p_0V_0}{V}\,dV - 4p_0V_0 \\
&= 5p_0V_0 \ln 5 - 4p_0V_0 = 500 \cdot (5\ln 5 - 4) \\
&\simeq 2.0 \cdot 10^3 = 2.0\,\text{kJ}
\end{aligned}
$$

C) 2.0 kJ



e) Figuren viser en Otto–syklus, dvs en reversibel idealisering av en 4–takts bensinmotor. Temperaturen i hjørnene 1 – 4 er hhv $T_1 - T_4$. Hva kan du si om virkningsgraden η_O til denne prosessen, i forhold til størrelsen $1 - T_1/T_3$? (Tips: T_1 og T_3 er hhv prosessens minimale og maksimale temperatur.)

I denne syklusen er T_3 maksimal og T_1 minimal temperatur. Hvis dette hadde vært en Carnot-prosess mellom to varmereservoar ved temperaturer T_3 og T_1, ville virkningsgraden ha vært $\eta_C = 1 - T_1/T_3$. Otto-syklusen kan ikke ha så stor virkningsgrad, slik at $\eta_O < \eta_C$. ($\eta_O = 1 - T_4/T_3$.)

A) $\eta_O < 1 - T_1/T_3$

---

f) Bensin/luft–blandingen i oppgave e har varmekapasitet C_V (ved konstant volum). Hva blir da arbeidet utført av bensin/luft–blandingen pr syklus av Otto–prosessen?

$\Delta U = 0$ for hel syklus, slik at

$$W = Q_{23} + Q_{41} = C_V(T_3 - T_2) + C_V(T_1 - T_4) = C_V(T_1 - T_2 + T_3 - T_4).$$

C) $C_V(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$

---

g) Gassen utvider seg, så omdanning av varme til arbeid er ikke det eneste som skjer. Derfor er prosessen ikke i strid med 2. lov. B).
