Øving 5, løsningsskisse.
Potensiell energi, kondensatorer, kapasitans.

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver.

a) C. I horisontal retning (tiltrekning neg. ladn.) overskuddskraft mot venstre. I vertikal retning (frastøtning pos. ladn.) overskuddskraft nedover. Totalt ned til venstre.

b) **B.** To ledere som er i kontakt har samme potensial.

c) **B.** På samme måte som et legeme med null starthastighet faller i gravitasjonsfeltet fra f.eks. jorda, dvs. beveger seg i retning lavere potensiell energi, vil en ladet partikkel med null starthastighet bevege seg i retning lavere potensiell energi i et elektrisk felt.
Andre mulige svar for den negative ladningen: 1) i retning høyere potensial V, 2) i samme retning som kraft $\vec{F}$ eller 3) i motsatt retning av $\vec{E}$, men disse var ikke gitt som mulige flervalg.

d) **D.** Tiltrekking når ei kule ladd og andre uladd (polarisering av ladning på uladd kule gir tiltrekning). Det er altså ikke nødvendig at begge må være ladd, slik at A eller E ikke er rett svar. Materialet i kulene uten betydning.

e) **B**. Med punktladningspotensialet $V(r) = kq/r$ får vi $r = k\dfrac{q}{V} = 8,99 \cdot 10^9\,\mathrm{Vm/C} \cdot \dfrac{10 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{50\,\mathrm{V}} = 1,8\,\mathrm{m}\,.$

Oppgave 2. Potensiell energi.

a) Det er flere måter å regne ut dette, og viser her tre ulike måter:

UTREGNING A: Setter inn én og én ladning og beregner energi for hver:

1. ladning $-Q$ settes inn fritt.
2. ladning Q mot V_{21} (pot. ved ladn. 2 pga. ladn. 1): $U_2 = V_{21} \cdot Q = k\dfrac{-Q}{a} \cdot Q.$
3. ladning Q mot $V_{31} + V_{32}$ (pot. ved ladn. 3 pga. ladn. 1 og 2): $U_3 = (V_{31} + V_{32}) \cdot Q = \left(k\dfrac{-Q}{a} + k\dfrac{Q}{\sqrt{2}a}\right) \cdot Q.$
4. ladning $-Q$ mot $V_{41} + V_{42} + V_{43}$: $U_4 = (V_{41} + V_{42} + V_{43}) \cdot Q = \left(k\dfrac{-Q}{\sqrt{2}a} + k\dfrac{Q}{a} + k\dfrac{Q}{a}\right) \cdot (-Q).$

Totalt:

$$U = U_2 + U_3 + U_4 = k\left(-4\frac{Q^2}{a} + 2\frac{Q^2}{\sqrt{2}a}\right) \tag{1}$$

$$= k\frac{Q^2}{a}\left(-4 + \sqrt{2}\right) = 8,99 \cdot 10^9\ \mathrm{Jm/C^2} \cdot \frac{(9,0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C})^2}{0,050\,\mathrm{m}} \cdot (-2,586) = -37,7\ \mathrm{J} = \underline{-38\ \mathrm{J}}\,. \tag{2}$$

UTREGNING B: Total potensiell energi for et system med punktladninger er

$$U = \sum_{i<j} k\,\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \qquad \left(k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

der summen går over alle par av ladninger Q_i og Q_j i innbyrdes avstand r_{ij}. Like ladninger $j = i$ summeres ikke og hvert par summeres bare én gang, derfor $\sum_{i<j}$. I vårt tilfelle er alle ladninger like store i absoluttverdi. Vi har 4 par med motsatt fortegn i innbyrdes avstand $a = 0,050$ m og 2 par (diagonalt) med likt fortegn i innbyrdes avstand $\sqrt{2}a$. Dermed får vi:

$$U = k\left(-4\frac{Q^2}{a} + 2\frac{Q^2}{\sqrt{2}a}\right) = k\frac{Q^2}{a}\left(-4 + \sqrt{2}\right),$$

som over.

UTREGNING C: Bruke potensial i ferdig oppbygd ladningssammensetning og bruke formelen: $U = \dfrac{1}{2}\sum_i V_i Q_i$. Her er V_1 potensialet ved ladning 1 pga. de tre andre ladningene: $V_1 = k\left(\dfrac{Q}{a} + \dfrac{Q}{a} + \dfrac{-Q}{\sqrt{2}a}\right)$ osv. Forenkling $V_4 = V_1$, $V_3 = V_2$ og $Q_1 = Q_4 = -Q$ og $Q_2 = Q_3 = Q$ gir

$$U = \frac{1}{2}\left[2V_1(-Q) + 2V_2 Q\right] = \frac{1}{2}k\left[2\left(\frac{Q}{a} + \frac{Q}{a} + \frac{-Q}{\sqrt{2}a}\right)(-Q) + 2\left(\frac{-Q}{a} + \frac{-Q}{a} + \frac{Q}{\sqrt{2}a}\right)Q\right] = k\left(-4\frac{Q^2}{a} + 2\frac{Q^2}{\sqrt{2}a}\right),$$

som over.

I energiberegninger i det videre anbefales den mest generelle utregningen C, med $\frac{1}{2}\sum_i V_i Q_i \to \frac{1}{2}\int V \mathrm{d}Q$ for kontinuerlige ladningsfordelinger.

b) Punktladningene Q_1 og Q_2 flyttes ikke, så innbyrdes potensiell energi for dette paret trenger vi ikke å bry oss om fordi den endres ikke når den tredje ladningen (elektronet) flyttes. Vi må regne ut potensiell energi som skyldes vekselvirkningen mellom elektronet og de to fastliggende ladningene, henholdsvis før og etter forflytningen. Alternativt kan vi regne ut potensialet fra ladningene Q_1 og Q_2 i punktene A og B, hhv V_A og V_B, og deretter endringen i potensiell energi, $\Delta U = U_B - U_A = -eV_B - (-e)V_A = -e(V_B - V_A)$. Potensialet i avstand r fra en punktladning Q er

$$V(r) = k\frac{Q}{r} \qquad \left(k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

dvs. Coulombpotensialet. De aktuelle avstandene her er $r_{1\mathrm{A}} = r_{2\mathrm{B}} = 0{,}600$ m (fra Q_1 til A og fra Q_2 til B) og $r_{1\mathrm{B}} = r_{2\mathrm{A}} = \sqrt{0,600^2 + 0,800^2}\,\mathrm{m} = 1,000\,\mathrm{m}$ (fra Q_1 til B og fra Q_2 til A). Dermed:

$$V_A = k\frac{Q_1}{r_{1\mathrm{A}}} + k\frac{Q_2}{r_{2\mathrm{A}}} \qquad \text{og} \qquad V_B = k\frac{Q_1}{r_{1\mathrm{B}}} + k\frac{Q_2}{r_{2\mathrm{B}}}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = kQ_1\left(\frac{1}{r_{1\mathrm{B}}} - \frac{1}{r_{1\mathrm{A}}}\right) + kQ_2\left(\frac{1}{r_{2\mathrm{B}}} - \frac{1}{r_{2\mathrm{A}}}\right)$$

Her er

$$Q_1 = 120\cdot 10^{-9}\mathrm{C}, \quad Q_2 = -90\cdot 10^{-9}\mathrm{C}, \quad \left(\frac{1}{r_{2\mathrm{B}}} - \frac{1}{r_{2\mathrm{A}}}\right) = 0,6667\,\mathrm{m}^{-1} \quad \text{og} \quad \left(\frac{1}{r_{1\mathrm{B}}} - \frac{1}{r_{1\mathrm{A}}}\right) = -0,6667\,\mathrm{m}^{-1}$$

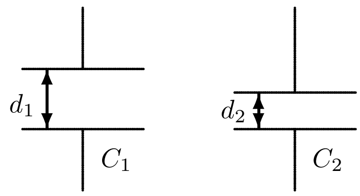
som gir

$$\Delta V = -8,99\cdot 10^9\ \mathrm{Vm/C}\cdot(90+120)\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\cdot 0,6667\,\mathrm{m}^{-1} = -1259\ \mathrm{V}$$

og endelig

$$\underline{\Delta U = -e\cdot\Delta V = 1,26\ \mathrm{keV}}\,.$$

Oppgave 3. Tastatur.



Kapasitans før: $C_1 = \epsilon_0\dfrac{A}{d_1} \quad \left(= 8,85\,\mathrm{pF/m}\cdot\dfrac{50\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{0,600\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 0,738\,\mathrm{pF}\right).$

Endring i kapasitans: $\Delta C = C_2 - C_1 = \epsilon_0 A\left(\dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{d_1}\right)$.

Løser med hensyn på d_2:

$$d_2 = \frac{1}{\dfrac{\Delta C}{\epsilon_0 A} + \dfrac{1}{d_1}} = \frac{1}{\dfrac{0,300\,\mathrm{pF}}{8,85\,\mathrm{pF/m}\cdot 50\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} + \dfrac{1}{0,600\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}} = 0,4266\,\mathrm{mm}.$$

Det vil si at tasten må trykkes ned:

$$\Delta d = d_1 - d_2 = \underline{0,17\,\mathrm{mm}}.$$

Alternativ løsningsmetode:
Dividerer $C_1 = \epsilon_0\dfrac{A}{d_1}$ med $C_2 = \epsilon_0\dfrac{A}{d_2}$ og får

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad \Rightarrow d_2 = d_1\frac{C_1}{C_2} = 0,600\cdot 10^{-3}\mathrm{m}\,\frac{0,738\,\mathrm{pF}}{(0,738+0,300)\,\mathrm{pF}} = 0,4266\,\mathrm{mm}.$$

Et helt tilsvarende system brukes som akselerometer i utløsermekansmen for sikkerhetsputer i biler.

Oppgave 4. Elektronisk blits.

a) Energi som lagres i kondensatoren for et blink:

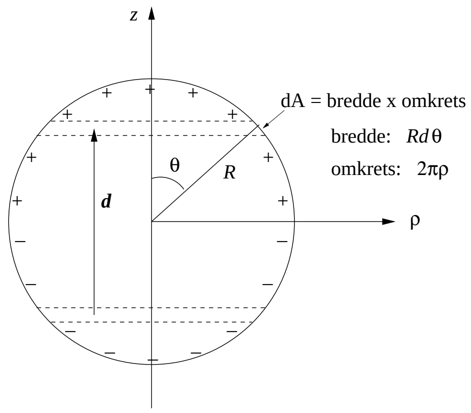
$$U = \frac{P \cdot t}{0,95} = \frac{600\,\mathrm{W} \cdot 0,01\,\mathrm{s}}{0,95} = 6,32\,\mathrm{J} = \underline{6,3\,\mathrm{J}}.$$

b) Energi lagret på kondensatoren er $U = \frac{1}{2}CV^2$, som løst mhp. spenningen V gir

$$V = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,32\,\mathrm{J}}{0,8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{F}}} = 126\,\mathrm{V} = \underline{0,13\,\mathrm{kV}}.$$

Blitser drives av batterier, f.eks. 4 x 1,5 V = 6,0 V. Spenningen må altså mangedobles ved en såkalt spenningsmultiplikator i blitsen (som for enkelte blitser gir en pipelyd med økende frekvens).

Oppgave 5. Dipolmoment halvkuler.



Deler kulas overflate opp i par av infinitesimale ringer i like stor avstand fra sentrum og hver med radius ρ, omkrets $2\pi\rho$ og infinitesimal bredde $R\ \mathrm{d}\theta$. Posisjonen til den positivt ladde ringen er gitt ved θ. Arealet til hver ring blir $\mathrm{d}A = (2\pi\rho) \cdot (R\,\mathrm{d}\theta)$, der $\rho = R\sin\theta$.

De to smale ringene har

innbyrdes avstand	$\vec{d} = 2z\ \hat{\mathbf{k}} = 2R\cos\theta\ \hat{\mathbf{k}}$
ladning	$\pm\mathrm{d}q = \pm\sigma\,\mathrm{d}A = \pm\sigma \cdot (2\pi\rho) \cdot (R\,\mathrm{d}\theta) = \pm\sigma \cdot (2\pi R\sin\theta) \cdot (R\,\mathrm{d}\theta)$
dipolmoment	$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{d}\,\mathrm{d}q = 2R\cos\theta\,\sigma \cdot (2\pi R\sin\theta) \cdot (R\,\mathrm{d}\theta)\ \hat{\mathbf{k}} = 4\pi R^3\sigma\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\ \hat{\mathbf{k}}$

Kulas totale dipolmoment bestemmes ved integrasjon over alle par av ringer fra $\theta = 0$ til $\pi/2$:

$$\vec{p} \;=\; \int_{\mathrm{kula}} \mathrm{d}\vec{p} = \int_0^{\pi/2} 4\pi R^3\sigma\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\ \hat{\mathbf{k}} = 4\pi R^3\sigma\ \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}\ \hat{\mathbf{k}} = \underline{2\pi R^3\sigma\,\hat{\mathbf{k}}}\,.$$

Legg merke til at vi gjerne har to mulige (ekvivalente) strategier når dipolmomentet til et system (her: med kontinuerlig ladningsfordeling) skal beregnes. Vi skriver $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{r}\,\mathrm{d}q$ og

1) lar $\vec{r}$ angi posisjonen til ladningselementet dq og integrerer over *hele* ladningsfordelingen, eller
2) lar $\vec{r}$ angi avstandsvektoren mellom "symmetrisk lokaliserte" ladningselementer $-\mathrm{d}q$ og $+\mathrm{d}q$ og integrerer kun over *halve* ladningsfordelingen (typisk den positive halvdelen).

I denne oppgaven fungerte strategi 2) fint, siden vi har en "passende" symmetri. Dersom vi ikke har en passende symmetri, må vi bruke strategi 1).

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 30. jan. 15.