Proste grupe in drevesa

Jakob Pogačnik Souvent

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

7. maj 2022

Uvod

Definicija (Proste grupe)

Naj bo S množica. Za grupo F, ki vsebuje S Pravimo, da S ***prosto generira*** *F, če velja:*
Za vsako grupo G in vsako preslikavo $\varphi : S \longrightarrow G$ obstaja enolično določen homomorfizem $\overline{\varphi} : F \longrightarrow G$ ki razširi φ.

Uvod

Definicija (Proste grupe)

Naj bo S množica. Za grupo F, ki vsebuje S Pravimo, da S ***prosto generira*** *F, če velja:*
Za vsako grupo G in vsako preslikavo $\varphi : S \longrightarrow G$ obstaja enolično določen homomorfizem $\overline{\varphi} : F \longrightarrow G$ ki razširi φ.

Zgled

1. *Trivialna grupa je prosto generirana s prazno množico.*
2. *$\mathbb{Z}$ je prosto generirana z $\{1\}$, vendar ne z $\{2, 3\}$ ali z $\{2\}$.*
3. *$\mathbb{Z}_2$ ni prosto generirana.*

Motivacija

Motivacija

Izrek

Vsaka grupa je kvocientna grupa neke proste grupe.

Motivacija

Izrek

Vsaka grupa je kvocientna grupa neke proste grupe.

Izrek

Grupa je prosta natanko tedaj ko ima neko prosto delovanje na nepraznem drevesu.

Osnovne lastnosti

Osnovne lastnosti

Izrek (Enoličnost prostih grup)

Naj bo S množica. Potem do izomorfizma natančno obstaja največ ena grupa prosto generirana z S.

Osnovne lastnosti

Izrek (Enoličnost prostih grup)

Naj bo S množica. Potem do izomorfizma natančno obstaja največ ena grupa prosto generirana z S.

Izrek (Eksistenca prostih grup)

Naj bo S množica. Potem obstaja grupa, prosto generirana z S.

Izrek (Enoličnost prostih grup)

Naj bo S množica. Potem do izomorfizma natančno obstaja največ ena grupa prosto generirana z S.

Izrek (Eksistenca prostih grup)

Naj bo S množica. Potem obstaja grupa, prosto generirana z S.

Izrek

Naj bo F grupa, prosto generirana z S. Potem je S generator grupe F.

Konstrukcija

Trditev

Naj bo S množica.

1. *Množica okrajšanih besed $F_{red}(S)$ nad $S \cup \widehat{S}$ tvori grupo za operacijo kompozicije*
2. *Grupa $F_{red}(S)$ je prosto generirana z S.*

Grafi

Definicija (Cayleyev graf)

Naj bo S podmnožica, ki generira grupo G. ***Cayleyjev graf*** *G glede na generator S je graf $Cay(G,S)$ katerega množica vozlišč je množica G in katerega množica povezav je množica*

$$\{\{g, g\cdot s\} \mid g \in G, s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\},$$

kjer je $s\ \cdot$ označeno množenje v grupi G.

Definicija (Cayleyev graf)

*Naj bo S podmnožica, ki generira grupo G. **Cayleyjev graf** G glede na generator S je graf $Cay(G, S)$ katerega množica vozlišč je množica G in katerega množica povezav je množica*

$$\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G, s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\},$$

kjer je $s\,\cdot$ označeno množenje v grupi G.

Zgled

1. $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$
2. $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$
3. $Cay(\mathbb{Z}^2, \{(1, 0), (0, 1)\})$
4. $Cay(\mathbb{Z}_6, \{1\})$

Zgled

$Cay(F_{red}(S), S)$ kjer $S = \{a, b\}$

Zgled

$Cay(F_{red}(S), S)$ *kjer* $S = \{a, b\}$

Izrek (Cayleyev graf prostih grup)

Naj bo F *grupa, prosto generirana z* $S \subset F$*. Potem je graf* $Cay(F, S)$ *drevo (drevo je graf brez ciklov).*

Zgled

$Cay(F_{red}(S), S)$ kjer $S = \{a, b\}$

Izrek (Cayleyev graf prostih grup)

Naj bo F grupa, prosto generirana z $S \subset F$. Potem je graf $Cay(F, S)$ drevo (drevo je graf brez ciklov).

Opomba

Inverz v splošnem ne velja. Protiprimer: $Cay(\mathbb{Z}_2, \{1\})$.

Izrek (Obrat)

Naj bo G grupa in naj $S \subset G$ generira G. Dodatno naj velja:

$$\forall s, t \in S : s \cdot t \neq e.$$

Če je Cayleyev graf $Cay(G, S)$ drevo, potem S prosto generira G.

Delovanje

Definicija (Delovanje)

Naj bo G grupa, naj bo C kategorija in naj bo X objekt v C. ***Delovanje*** *grupe G na X v kategoriji C je homomorfizem grup $G \longrightarrow Aut_C(X)$.*

Prosto delovanje

Prosto delovanje

Definicija (Prosto delovanje na množici)

Naj grupa G deluje na množici X. Pravimo, da je delovanje ***prosto****, če velja:*

$$g \cdot x \neq x \quad \forall g \in G \setminus \{e\}, \forall x \in X$$

Prosto delovanje

Definicija (Prosto delovanje na množici)

Naj grupa G deluje na množici X. Pravimo, da je delovanje ***prosto****, če velja:*

$$g \cdot x \neq x \quad \forall g \in G \setminus \{e\}, \forall x \in X$$

Definicija (Prosto delovanje na grafu)

Naj bo $\rho : G \longrightarrow Aut(V, E)$ delovanje G na grafu (V, E). Pravimo, da je to delovanje ***prosto****, če velja:*

$$\forall v \in V : (\rho(g))(v) \neq v, \text{ in}$$
$$\forall \{v, v'\} \in E : \{(\rho(g))(v), (\rho(g))(v')\} \neq \{v, v'\}$$

za vsak $g \in G \setminus \{e\}$.

Prosto delovanje

Zgled

1. *Delovanje* $\mathbb{Z}$ *na* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *kot*

$$n \cdot z = e^{2\pi i \alpha n} z$$

   kjer $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. *Delovanje* $\mathbb{Z}$ *na* $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ *z (levim) seštevanjem.*

Prosto delovanje

Izrek

Naj bo G grupa in S neka množica ki generira G. Potem je delovanje G na $Cay(G, S)$ z levo translacijo

$$g \cdot v = gv$$

prosto natanko tedaj, ko S ne vsebuje nobenega elementa reda 2.

Definicija (Vpeto drevo delovanja)

Naj grupa G deluje na povezan graf X. ***Vpeto drevo delovanja*** *G na X je podgraf X ki je drevo in vsebuje natanko eno vozlišče vsake orbite delovanja G na vozlišča grafa.*

Izrek

Vsako delovanje grupe na povezanem grafu ima vpeto drevo delovanja.

Prosto delovanje na drevesu

Izrek

Grupa je prosta natanko tedaj ko ima neko prosto delovanje na nepraznem drevesu.