Vektorräume

Affine Unterräume
Ein Affiner Unterraum ist ein Unterraum mit verschiebung r_0

$\Gamma = r_0 + U$

$\dim(\Gamma) = \dim(U)$

Affiner UR, durch vorgegebene Punkte
geg: $\vec{r_0} \dots \vec{r_d} \in \mathbb{R}^n$

Lös: $\Gamma = \vec{r_0} + \Gamma[\vec{r_1}-\vec{r_0}, \dots \vec{r_d}-\vec{r_0}]$

$\dim(\Gamma) \leq d$

Skalarprodukt Eigenschaften
(S_1) $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$

(S_2) $\langle a, b+c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle$

(S_3) $\langle a, tb\rangle = t\langle a, b\rangle$

(S_4) $\langle a, a\rangle \geq 0$; $\langle a, a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0_v$

Hessesche Form von Hyperebene Γ
Normalvektor $\vec{n}$: $\vec{n} \perp \Gamma$

Positionsvektor $\vec{p}$: $p \in \Gamma$

$\langle \vec{r}, \vec{n}\rangle = \vec{p}$

Methode kleinster Quadrate / Ausgleichspolynom
ges: Gleichung mit geringstem Fehler für Punkte im Raum

1. Als A Matrix darstellen

$A\vec{x} = \vec{b}$ (A: Parameter, $\vec{x}$: x der P, $\vec{b}$: $\vec{y}$ der P)

2. $\boxed{A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}}$

Hauptsatz über Lineare Gleichungssysteme
$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$\Gamma = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$

$U = \{\vec{r} \mid A\vec{r} = \vec{0}\}$

1. $\dim(U) = n - rg(A)$
2. $\Gamma \neq \emptyset \Leftrightarrow rg(A) = rg(A, \vec{b})$
3. $\Gamma \neq \emptyset \wedge r_0 \in \Gamma \rightarrow \Gamma = \vec{r_0} + U$

Norm Eigenschaften (Länge)
(N_1) $\|\vec{a}\| \geq 0$

(N_2) $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$

(N_3) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \leq \langle a, b\rangle \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$

Orthogonale Projektion
$proj(\vec{x} : U) = \vec{r_F}$

Orthonalsystem, Orthonormalbasis
M: Orthonormalsystem, wenn alle $\vec{a} \perp$ zueinander und alle $\|\vec{a}\| = 1$

M ist Orthonormalbasis, wenn M ONS und M Basis von U

wenn $M = \{\vec{b_1} \dots \vec{b_m}\}$

$\vec{x} = a_1\vec{b_1} + \dots + a_m\vec{b_m} \Leftrightarrow a_i \langle \vec{x}, \vec{b_i}\rangle$

Lagebeziehung von 2 af-UR
Parallelität: $\vec{r_1} + U \parallel \vec{r_2} + V \Leftrightarrow U \subseteq W \vee V \subseteq U$

Identisch: $\vec{r_1} + U = \vec{r_2} + V \Leftrightarrow U = W \wedge \vec{r_1} \in \vec{r_2} + V$

Schnittpunkte:

Lösungsansatz: $\Gamma_1 = \Gamma_2 \rightarrow$ führt zu inhomogenen LGS

Ansonsten Parameterform von Γ_1 in Parameterfreie Form Γ_2 einsetzen!

Winkel zwischen Vektoren
$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$

Abstände:
Punkt–Punkt → trivial

Punkt – af UR: Lotfusspunkt Verfahren:
1. Parameterdarstellung von Γ

Basis $\{\vec{a_1} \dots \vec{a_d}\}$ wählen

$\vec{r} = r_0 + t_1\vec{a_1} \dots t_d\vec{a_d}$

$A := (\vec{a_1} \dots \vec{a_d})$ $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix}$

$d(\vec{r_F}, \vec{r_0}) = d(\Gamma, r_0)$

2. Orthogonales Komplement

$U^\perp := \{\vec{x} \mid \vec{x} \perp U\}$

$x \perp \vec{a_1} \dots \vec{a_d}$

3. $\Gamma' = \vec{r_1} + U^\perp = r_1 + \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^T\vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid A^T\vec{r} = \vec{b}\}$

4. Schnittpunkt $\Gamma, \Gamma' = \vec{r_F}$

Wenn man die Basis hat

$r_f = proj(\vec{x} : U) = \langle \vec{x}, \vec{b_1}\rangle \cdot \vec{b} + \dots + \langle \vec{x}, \vec{b_m}\rangle \vec{b_m}$

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren
geg: Basis: $\{\vec{a_1}, \dots \vec{a_m}\}$

Lös: ONB $\{\vec{b_1} \dots \vec{b_m}\}$

$\vec{b_1} = \frac{1}{\|\vec{a_1}\|} \cdot \vec{a_1}$

$\vec{c_{r+1}} = \vec{a_{r+1}} - \sum_{i=1}^{r} \langle \vec{a_{r+1}}, \vec{b_i}\rangle \vec{b_i}$

$\vec{b_{r+1}} = \frac{1}{\|\vec{c_{r+1}}\|} \cdot \vec{c_{r+1}}$

Determinante
$\det((a)) = a$

$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - cb$

$\det(E) = 1$

Laplace:
Nach Zeile entwickeln und mit durchgestrichenen Werten um $(-1)^{i+j}$ mult

Dreieckmatrizen
$\det\begin{pmatrix} x & a & b \\ 0 & y & c \\ & & z \end{pmatrix} = x \cdot y \cdot z \rightarrow$ diagonale multi

$\det(Diag) = Diag_{11} \cdot Diag_{22} \cdot Diag_{nn}$

Gaußop:
$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = -\det\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\right)$

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Volumen im nD Raum:
Volumen eines Spannkörpers entspricht seiner Vektormatrix

Cramersche Regel
Lös: $A\vec{x} = \vec{b}$

$x_i = \frac{\det((\vec{a_1} \dots \vec{a_{i-1}}\ \vec{b} \dots \vec{a_n}))}{\det(A)}$

Orthogonale Matrizen
A orthogonal $\Leftrightarrow A \cdot A^T = E$

Eigenschaften

$A^T = A^{-1}$ (beide auch orthogonal)

$\langle A\vec{x_1}, A\vec{x_2}\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$

$\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$

$\det(A) = \pm 1$

Lineare Abbildungen
I $\alpha \cdot L(x) + \beta L(y) = L(\alpha x + \beta y)$

Lineare Gleichung $L(x) = b \rightarrow$ homogen $\rightarrow b = 0$

$U = \{x \in V, L(x) = 0\}$ U UR von V

Γ $\{x \in V, L(x) = b\}$ Γ affiner UR von V

Darstellung mit Matrix
$L(x) = M\vec{x}$

oder Vektor

$L(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + \dots x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$

aquiv

Bestimmung von M beim Basiswechsel
geg: $A = (\vec{a_1} \dots \vec{a_n})$ inv Matrix

bilder $L(a_i)$

$\hookrightarrow M = L(A) \cdot A^{-1}$

Komposition Lin. Abbildungen möglich

$L(f(\vec{x})) = M \circ N \circ \vec{x}$

Dreh, Spiegel, oder Drehspiegelmatrix
eine Orth Matrix in linearer Abbildung ist

1. Drehung $\Leftrightarrow \det(A) = +1$
2. Spiegelung $\Leftrightarrow \det(A) = -1 \wedge A^T = A$
3. Drehspiegelung $\Leftrightarrow \det(A) = -1 \wedge A^T \neq A$

Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen
$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ ges: $\lambda, \vec{x}$ für geg A

$\boxed{0 = \det(A - \lambda E)}$ ← Formel für λ

EV: $\vec{x}$ EV von $A \Leftrightarrow \exists \lambda: \vec{x} \in E(A, \lambda)$

Einfach $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$ Lösen

geometrische Vielfalt wird beim Vektor beachtet

algebraische bei der determinante

Quadratische Formen
ein Ausdruck heißt Quadratische Form in $\vec{x}$, wobei A ein Quad. Matrix mit $A^T = A$ ist

a) $\vec{x}^T A \vec{x}$

Lineare Koordinatentransformation
Standardbasis: $\vec{x} = \vec{x_1} \cdot \vec{e_1} + \dots + \vec{x_n} \cdot \vec{e_n}$ → Neue Basis $\vec{x} = u_1 \cdot \vec{b_1} \dots u_n \vec{b_n}$ ($u_1 \dots u_n$) sind Koordinaten zur Basis b

Transformationsgleichung: $T = (\vec{b_1} \dots \vec{b_n}) \rightarrow \boxed{\vec{x} = T \cdot \vec{u}}$

Affine Abbildungen
$F(x) = M\vec{x} + \vec{b}$ → Lineare Abb. mit Verschiebung

Affines Koordinatensystem
(Punkt, Basis) Standard: $0; \vec{e_1}, \dots \vec{e_n}$

Neues System: $\vec{x} = \vec{r_0} + u_1\vec{b_1} \dots u_n\vec{b_n}$

$\vec{x} = r_0 + T\vec{u}$ $T = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_n})$

$\vec{u} = T^{-1}(\vec{x} - \vec{r_0})$

Hauptachsentransformation
geg: Quadratische Gleichung

ges: Basis welche sich zum zeichnen eignet

Lös: 1. Matrix Vektor Form: $ax^2 + cxy + by^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k$

2. EV und EW von A bestimmen

Die EV als Normalvektoren sind $\vec{b_1}, \dots \vec{b_n} \rightarrow T = (\vec{b_1} \dots \vec{b_n})$

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

4. transformierte Gleichung:

$\vec{u}^T D \vec{u} = k$ mit $D = T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

Begriffe:
Erzeugendensystem: Menge an Vektoren um alle Vektoren in UR darzustellen

Basis: Minimales Erzeugendensystem

Lineare Hülle: Menge aller Linearkombinationen eines geg. Vektors

Lin UR: Teilmenge von Vektorraum, der selbst wieder UR ist

Funktione in mehreren Variablen

Def: $\underline{x} = (x_1 \dots x_n)$, $f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

$\nearrow$ Argumente $\quad \nearrow$ Funktionswert

$\text{graph}(f) = \{ (\underline{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \underline{x} \in D_f, x_{n+1} = f(\underline{x}) \}$

$\hookrightarrow$ Höhenprofil im n-D Raum

Niveaumengen
$N_c(f) = \{ \underline{x} \in D_f \mid f(\underline{x}) = c \}$

Tangentialraum
$x_{n+1} = f(\underline{a}) + f_{x_1}(\underline{a}) + \dots + f_{x_n}(\underline{a})$

Schnittkurve von f
geg: $f(\underline{x})$, $\underline{a}$
Lös: $x_i \in D \subseteq \mathbb{R} \to f(a_1, \dots x_i, \dots a_n)$
$\to$ sind n Funktionen

Punktmengen in $\mathbb{R}^n$
$|\underline{a} - \underline{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots}$
$U_\varepsilon := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon \}$

Def: $\underline{a}$ innes P $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(\underline{a}) \subseteq D$

$\underline{a}$ Randpunkt $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon \cap D \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset$

∂D ist Menge aller Randpunkte von D

$\text{int}(D)$ Menge alles inneren Punkte von D

D offen $\Leftrightarrow \partial D \cap D = \emptyset$

D abgeschlossen $\Leftrightarrow \partial D \subseteq D$

Grenzwerte und Stetigkeit

$\lim_{k \to \infty} \underline{x}^k = \underline{a} \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \|\underline{x}^k - a\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} x_i^k = a_i$

$f(x)$ stetig $\Leftrightarrow f(x_1), \dots$ stetig

Taylorpolynom

$T(\underline{x}) = f(\underline{a}) + df(\underline{a}, dx) + \dots d^n f(\underline{a}, d^n x)$

Ableitungen höheres Ordnung

- Ableitungsreihenfolge nicht wichtig: $f_{xy} = f_{yx}$

$f''(x) = f_{xx} + 2 f_{xy} + f_{yy}$

$d^k f = d(d^{k-1} f)$

Ableitung

$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big\}$ Ableitung nach Variable

$\text{grad} f(\underline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) \right)$

$df(\underline{x}, d\underline{x}) = \langle \text{grad} f(\underline{x}), d\underline{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\underline{x})\, dx_i$

$\Delta f(\underline{x}, d\underline{x}) := f(\underline{x} + d\underline{x}) - f(\underline{x})$

Richtungsableitung nach $\underline{v}$:
$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) := \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \text{grad} f, \underline{v} \rangle$
Steigung in v Richtung

Kettenregel

geg: $f(\underline{x})$; $g_1(\underline{u}), \dots g_n(\underline{u})$

$H(u_1, \dots u_m) = f(g_1(\underline{u}), \dots g_n(\underline{u}))$

$\frac{\partial H}{\partial u_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u_k}$

$= \text{grad} f \cdot \begin{pmatrix} x_{1 u_k} \\ \vdots \\ x_{n u_k} \end{pmatrix} = \text{grad} f \cdot \begin{pmatrix} g_{1 u_k} \\ \vdots \\ g_{n u_k} \end{pmatrix}$

Implizite Funktionen

geg: $F(x, y) = c$ mit $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

Lösung $F(x_0, y_0) = c$

$\forall x \in I, \forall y \in J \quad F(x, y) = c \Leftrightarrow y = g(x)$

$g := I \to J$, $g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$

Relatives Fehler

$R(x, y) = \dots$

$dx = \dots$

$dy = \dots$

$x = \dots$

$y = \dots$

$\frac{dx}{x}$ calc $\Big\}$ Relativ Fehler

$\frac{dy}{y}$ calc

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{dx}{R} + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{dy}{R}$$

Hessematrix

$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\underline{x}) & \cdots & f_{x_n x_1}(\underline{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1 x_n}(\underline{x}) & \cdots & f_{x_n x_n}(\underline{x}) \end{pmatrix}$

H_f ist symmetrisch

$d^2 f(\underline{x}) = d\underline{x}\, H_f(\underline{x})\, d\underline{x}^T$

$f(\underline{x} + d\underline{x}) = f(\underline{x}) + df(\underline{x}, d\underline{x}) + \frac{1}{2} d^2 f(\underline{x}, d\underline{x}) + R(\underline{x}, d\underline{x})$

Quad. Approximation

geg: $f(\underline{a})$, $\text{grad} f(\underline{a})$, $H_f(\underline{a})$

ges: $f(\underline{x})$ für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$

Lös: $f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \langle \text{grad} f(\underline{a}), d\underline{x} \rangle + \frac{1}{2} d\underline{x}\, H_f(\underline{a})\, d\underline{x}^T$

Positiv/Negativ Definite Matrizen

$\underline{u} S \underline{u}^T = \begin{cases} > 0 \\ \geq 0 \\ < 0 \\ \leq 0 \end{cases}$ so ist S $\begin{cases} \text{positiv def} \\ \text{positiv semidef} \\ \text{negativ def} \\ \text{negativ semidef} \end{cases}$

Eigenwertkriterium:

S $\begin{cases} \text{positiv def} \\ \text{positiv semidef} \\ \text{negativ def} \\ \text{negativ semidef} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{alle EW} > 0 \\ \geq 0 \\ < 0 \\ \leq 0 \end{cases}$

Det-kriterium

S positiv def $\Leftrightarrow \det(S^{(k)}) > 0 \ \forall k = 1 \dots n$

negativ def $\Leftrightarrow \det(S^{(k)}) \begin{cases} < 0 \text{ für ungerade } k \\ > 0 \text{ für gerade } k \end{cases}$

Lokale Extremwerte von f auf D

I $\text{grad} f(\underline{x}) = \underline{0} \to$ Extremwertverdächtig

II $H_f(\underline{a})$ positiv def: lok. Minimum
$H_f(\underline{a})$ negativ def: lok. Maximum

Spezialfall bei $n = 2$

a) $\left.\begin{array}{l} \det(H_f(\underline{a})) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a}$ lokales Min

b) $\left.\begin{array}{l} \det(H_f(\underline{a})) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a}$ lokales Max

c) $\det(H_f(\underline{a})) < 0 \Rightarrow$ keine Extremstelle

d) $\det(H_f(\underline{a})) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Globale Extremwerte

Vor: D abgeschlossen $\wedge$ D beschränkt

I lokale min und max finden.

II Rand von f
Nebenbedingung für den Rand entwerfen
Extremwerte für NBs finden

III Auswerten für glob min/max

Extremwertgleichungen mit NB

geg: $f: D_f \to \mathbb{R}$
$g: D_g \to \mathbb{R}$
$D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\underline{x}) = 0 \}$

ges: Lokale/globale Extremwerte von f in D

Lös:

a) I $g(\underline{x}) = 0$ nach einer Var auflösen
$x_n = h(x_1 \dots x_{n-1})$

II $\tilde{f}(x_1 \dots x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1 \dots x_{n-1}))$

III alle lokalen Extremstellen von $\tilde{f}$ sind auch Extremstellen auf f in D

b) Parametisieren von D
finde Parameter t sodass
$D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\underline{x}) = 0 \} = \{ (x, y), x = l(t), y = j(t) \mid t \in K \}$

Dann $\tilde{f}(t) = f(l(t), \dots, j(t))$
$\tilde{f}'(t) = 0$ ist auch Extremstelle von f in D

c) Multiplikation von Langrange

I $L(x_1, \dots, x_n, \lambda) := f(x_1 \dots x_n) + \lambda\, g(x_1 \dots x_n)$

II $L_{x_1} = f_{x_1} + \lambda g_{x_1} \overset{!}{=} 0$

$\vdots$

$L_{x_n} = f_{x_n} + g_{x_n} \overset{!}{=} 0$

$L_\lambda = g \overset{!}{=} 0$

Dann sind die $\underline{x}$ Extremwertverdächtig, für die das obige Gleichungssystem gilt

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Problem:
geg: Zusammenhang zwischen $y, y', \dots$
ges: y

Ähnlichkeitsdiffgleichungen

$$y' = h\left(\frac{y}{t}\right)$$

$$z = \frac{y}{t} \quad y = z \cdot t \quad y' = z' \cdot t + z$$

$$y' = h(z)$$

$$z' t + z = h(z)$$

$$z' = \frac{1}{t}(h(z) - z)$$

Lineare Gleichungssysteme

$$\vec{F} : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Ein Gleichung der Form heißt gew. Differentialgleichung (DGL)

$$F(t, y, y', y'', \dots) = 0$$

Die höchste Auftretene Ableitungsordnung heißt Ordnung der DGL
Ein Fkt $y: I \to \mathbb{R}$ heißt explizite Lösung der DGL wenn y auf I n-mal diffbar und

$$F(t, y(t), y'(t) \dots) = 0$$

Exakte DGL

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' &= 0 \\ P(x,y)dx + Q(x,y)\,dy &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} dF &= Pdx + Qdy \\ F(x,y) &= C \end{aligned}$$

Lsg: $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ ← Bedingung

$$F_x = P \Rightarrow F = \int F_x\, dx = \int P(x,y)\,dx = \tilde{P}(x,y) + c(y)$$

$$F_y = Q \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial y}\left(\tilde{P}(x,y) + c(y)\right) = Q(x,y)$$

$$\tilde{P}_y + c'(\cancel{x}) = Q$$

$$c'(y) = Q(x,y) - \tilde{P}_y(x,y)$$

Lineare DGLs 1. Ordnung

1. $y' + a(t)y = 0$
   Lösen durch Trennung der Variablen
   $y_h = ce^{A(t)}$
2. $y_s = c(t) \cdot y_h(t)$
   $y_s' = c'(t) y_h + c(t) y_h'$
   Einsetzen in $y_s' + a(t) y_s = b(t)$
   $c'(t) = b(t) : y_h$
   $c(t) = \int c(t)\, dt$
3. $y_{in} = y_h + y_s$

Eulersches Polygonzugverfahren

geg: AWP $y' = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h$$

Lineare DGLs

$$y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots a_0 y = b$$

1. Lösen der homogenen allg. Gl.

$$y = e^{\lambda}$$

$$y^n \dots a_0 y = 0$$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots = 0$$

$\lambda \to$ berechnet, $y_{allg} = c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2} + \dots$

Beim Komplexen: $\lambda_{2/1} = a \pm bi$

$$y_1 = e^{at} \cdot \cos bt + e^{at} \sin bt$$

2. a) Variieren der Konstanten

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Lösung von $c_1(y), \dots$ mit Cramscher Regel

b) spezielle Ansätze

y_s = spezieller Ansatz
Einsetzen: $y_s'' - 2y_s' - 3y_s$

3) $y_{in} = y_{allg} + y_s$

DGL mit getrennten Variablen

geg: $y' = g(t) \cdot h(y)$
ges: y
Lös: $y' = g(t) \cdot h(y)$

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y)$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(t)\,dt$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t)\,dt \Longrightarrow$$ nach y umstellbar => 1 Konstante

Sonderlösungen:
$h(y) = 0$
↓
sind konstant

Eulersche Diffgleichungen

$$t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + a_0 y = b(t)$$

1. Allgemeine Lösung (homogen)

$$y = t^{\lambda} \quad y^{(n)} = \frac{\lambda!}{(\lambda - n)!} t^{\lambda - n}$$

mit den Nullstellen λ $a_{n-1}, \dots$ herausfinden

Fall 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell: $y_1 = t^{\lambda_1} \quad y_2 = t^{\lambda_2}$

Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2$ reell: $y_1 = t^{\lambda_1} \quad y_2 \quad t^{\lambda_2} \cdot \ln(t)$

Fall 3: $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta i \quad y_1 = t^{\alpha} \cos(\beta \ln t) \quad y_2 = t^{\alpha} \sin(\beta \ln t)$

2. Erst in Normalform bringen indem man durch höchste Potenz von t teilt

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

3. $y_{in} = y_{allg} + y_s$