1. Berechnen Sie die Kostenfunktion für die folgenden Produktionsfunktionen (Ihre Antwort sollte für jeden Fall zu einem Ausdruck führen, der von den Input-Preisen $p_1$ und $p_2$ abhängt).

   (a) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$.
   (b) $f(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$.
   (c) $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$.
   (d) $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$
   (e) $f(x_1) = \ln(x_1)$ für alle $x_1 > 1$ und $f(x_1) = 0$ für alle $x_1 \leq 1$.

   Machen Sie Skizzen der Kostenfunktionen, indem Sie die Input-Preise $p_1 = 4$ und $p_2 = 1$ annehmen.

   Welche der Kostenfunktionen haben eine eindeutige effiziente Betriebsgröße $\check{q}$? Berechnen Sie diese.

a) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$

Faktornachfrage: (Kostenminimierung in der langen Frist)

$d(p_1, p_2, q) = (q, \frac{q}{2})$

$\rightarrow$ unabhängig von den Preisen
(wegen perfekter Komplemente fkt.)

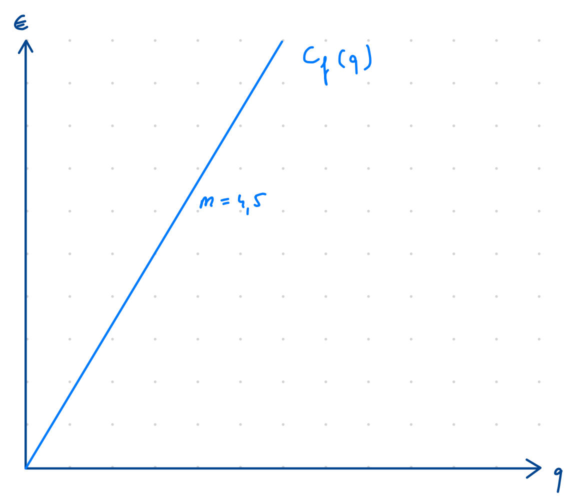
Kostenfunktion:

$C_f(q) = p_1 q + p_2 \frac{q}{2}$ $\rightarrow$ Kosten für q Einheiten des Finalen Gutes

$\rightarrow$ Gegebene Preise einsetzen

$p_1 = 4 \quad p_2 = 1 \qquad C_f(q) = 4q + 1\frac{q}{2} = 4{,}5q$

$\rightarrow$ Durchschnittliche Kosten $\quad DK(q) = \frac{C_f(q)}{q} = \frac{p_1 q + p_2 \frac{q}{2}}{q} = p_1 + \frac{p_2}{2} = 4{,}5$ $\rightarrow$ min überall
Konstant (unabhängig von q)




$\rightarrow$ jede Menge $q \geq 0$ ist eine effiziente Betriebsgröße

$\rightarrow$ Es gibt keine eindeutige effiziente Betriebsgröße

b) $f(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$

Faktornachfrage:

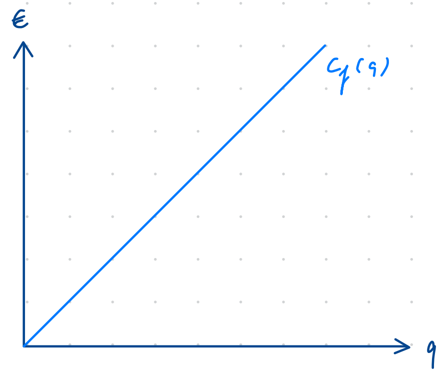
→ es ist immer kostenminimierend entweder Gut 1 oder Gut 2 zu produzieren

$$d(p_1, p_2, q) \begin{cases} (0, q) & \text{wenn } p_1 \geq p_2 \\ (q, 0) & \text{wenn } p_1 \leq p_2 \end{cases}$$

Kostenfunktion:

$$C_f(q) = \begin{cases} p_2 q & \text{wenn } p_1 \geq p_2 \\ p_1 q & \text{wenn } p_1 \leq p_2 \end{cases} \Rightarrow C_f(q) = \min\{p_1, p_2\} q$$

→ Preise einset : $C_f(q) = \min\{\overset{p_1}{4}, \overset{p_2}{1}\} q = q$




$$DK(q) = \frac{C_f(q)}{q} = \min\{p_1, p_2\} = 1$$

→ Konstant

→ jede Menge $q \geq 0$ ist eine effiziente Betriebsgröße

→ Es gibt keine eindeutige effiziente Betriebsgröße

c) $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

Bsp $\frac{0,4}{4}$ $\frac{1}{1}$

kaufe nur

$p_1 = p_2 \Rightarrow x_2$

$p_2 > 2p_1 \Rightarrow x_1$

$p_2 < 2p_1 \Rightarrow x_2$

Faktornachfrage:

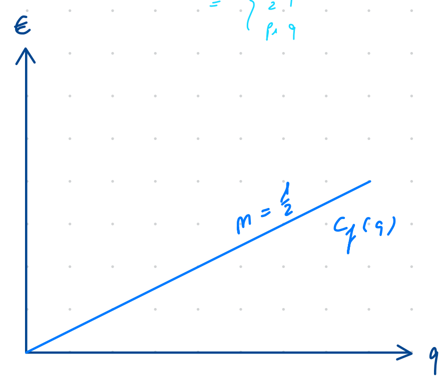
$$d(p_1, p_2, q) = \begin{cases} (0, \frac{q}{2}) & \text{wenn } p_2 < 2p_1 \\ (q, 0) & p_2 > 2p_1 \\ \{(x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 = q\} & p_2 = 2p_1 \end{cases}$$

Kostenfunktion:

$$C_f(q) = \begin{cases} p_2 \frac{q}{2} & \text{wenn } p_2 < 2p_1 \\ p_1 q & \text{wenn } p_2 \geq 2p_1 \end{cases} \Rightarrow C_f(q) = \min\{p_1, \frac{p_2}{2}\} q = \frac{1}{2} q$$

$= \begin{cases} \frac{p_2}{2} q \\ p_1 q \end{cases}$

$\min\{4, \frac{1}{2}\} q$




$$DK(q) = \frac{C_f(q)}{q} = \frac{\frac{1}{2} q}{q} = \frac{1}{2}$$

→ Konstant

→ jede Menge $q \geq 0$ ist eine effiziente Betriebsgröße

→ Es gibt keine eindeutige effiziente Betriebsgröße

d) $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$

Faktornachfrage:

$$d(p_1, p_2, q) = \left( \sqrt{q^3 \frac{p_2}{p_1}}, \sqrt{q^3 \frac{p_1}{p_2}} \right)$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

$x^{a^b} = x^{a \cdot b}$

$\sqrt{a b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{p_2^{\frac{1}{2}}}{p_1^{\frac{1}{2}}} = p_2^{\frac{1}{2}} \cdot p_1^{-\frac{1}{2}}$

Kostenfunktion:

$$c_f(q) = p_1 \overbrace{\sqrt{q^3 \frac{p_2}{p_1}}}^{x_1} + p_2 \overbrace{\sqrt{q^3 \frac{p_1}{p_2}}}^{x_2}$$

$$= p_1 \, q^{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} + p_2 \, q^{3^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= p_1 \cdot p_1^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot p_2^{\frac{1}{2}} + p_2 \cdot p_2^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot p_1^{\frac{1}{2}}$$

$$= p_1^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} p_1^{\frac{1}{2}}$$

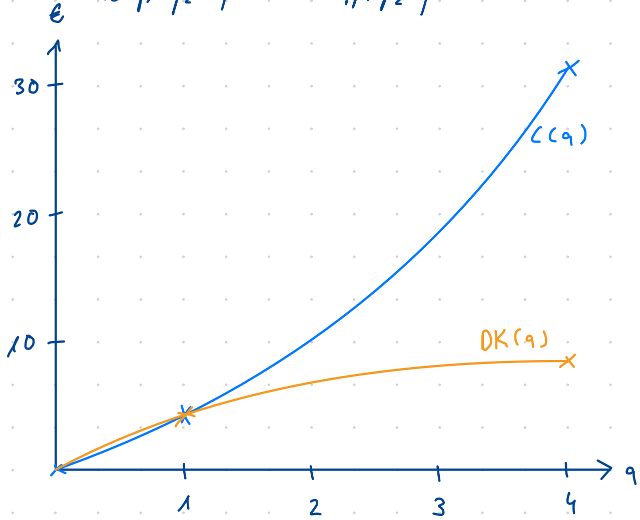
$$= 2 p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{p_1 p_2 q^3}$$

$\xrightarrow{\text{Preise einsetzen}}$ $c_f(q) = 2\sqrt{4}\sqrt{q^3} = 4 q^{\frac{3}{2}}$

Punkte: $C(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

$C(1) = 4 \rightarrow (1, 4)$

$C(4) = 32 \rightarrow (4, 32)$




$DK(q) = \frac{c_f(q)}{q} = 4 q^{\frac{1}{2}}$

$DK(0) = 0$

$DK(1) = 4$

$DK(4) = 8$

min $DK(q)$: $\frac{\partial DK(q)}{\partial q} = 2 q^{-\frac{1}{2}} = 0$

$q = 0$

$\rightarrow$ Eindeutige effiziente Betriebsgröße: $\check{q} = 0$

e)

$f(x_1) = \ln(x_1)$ für alle $x_1 > 1$ und $f(x_1) = 0$ für alle $x_1 \leq 1$

$\rightarrow$ I = 1 Input

$\rightarrow$ Berechne die Produktionsfkt $f^{-1}(q)$ bei beliebigem $q > 0$ berechnen

$x_1 = f^{-1}(q) \iff f(x_1) = q \Rightarrow \ln(x_1) = q \quad | \exp$

$x_1 = \exp(q)$

$\Rightarrow f^{-1}(q) = \exp(q)$

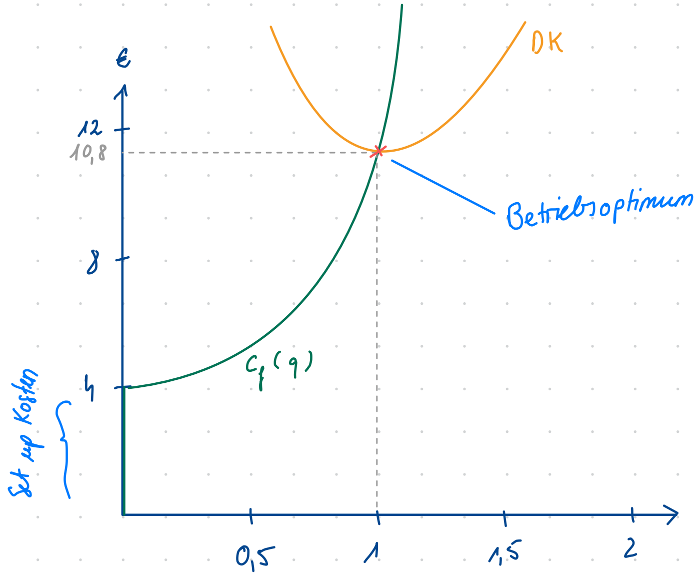
Kostenfunktion:

$$c_f(q) = \begin{cases} 0 & \text{falls } q = 0 \\ p_1 \exp(q) & \text{falls } q > 0 \end{cases} \quad \xRightarrow[p_1 = 4]{} \quad c_f(q) = \begin{cases} 0 & \text{if } q = 0 \\ 4 \exp(q) & \text{if } q > 0 \end{cases}$$

$c_f(0) = 0$

$c_f(0{,}01) = 4$

$c_f(1) = 10{,}873$




$$DK = \frac{c_f(q)}{q} = \frac{p_1 \exp(q)}{q}$$

$\rightarrow$ wir müssen das Minimum von DK finden:

$$DK'(q) = p_1 \frac{\exp(q) \cdot q - \exp(q)}{q^2} \overset{!}{=} 0$$

wenn $q > 1 \longrightarrow DK'(q) > 0$
$q < 1 \longrightarrow DK'(q) < 0$

DK ist im Intervall $(0, 1]$ strikt fallend
$[1, \infty)$ strikt steigend

Min DK: $q = 1$

$\check{q} = 1$ ist das eindeutige Betriebsoptimum

2. Betrachten Sie für jede der untenstehenden Kostenfunktionen die Durchschnittskostenfunktion und skizzieren Sie diese. Bestimmen Sie jeweils den Bereich der Outputmengen, so dass in dem Bereich der für diese Outputmengen eingesetzten Inputkombinationen die Skalenerträge der zu Grunde liegenden Produktionsfunktion wachsend, fallend bzw. konstant sind (nehmen Sie dabei an, dass immer einer der drei Fälle eintritt).

(a) $C(q) = q^{3/4}$,

(b) $C(q) = \begin{cases} (100-q)q & \text{falls } q < 45, \\ 55q, & \text{falls } q \geq 45, \end{cases}$

(c) $C(q) = q^3 - 15q^2 + 125q$,

(d) $C(q) = q^{5/4}$.

a) $C(q) = q^{3/4}$ $\quad DK(q) = \frac{q^{3/4}}{q} = q^{-\frac{1}{4}}$

$DK'(q) = -\frac{1}{4} q^{-\frac{5}{4}} < 0$ $\longrightarrow$ Durchschnittskosten sind strikt fallend

strikt fallende DK ($DK'(q) < 0$) $\Rightarrow$ Skalenerträge müssen zunehmend sein $\Rightarrow$ Bereich der Outputmengen: $[0, \infty)$

b) $C(q) = \begin{cases} (100-q)q & \text{falls } q < 45 \\ 55q & \text{falls } q \geq 45 \end{cases}$

$DK(q) = \frac{C(q)}{q} = \begin{cases} 100-q & \text{falls } q < 45 \\ 55 & \text{falls } q \geq 45 \end{cases}$ $\qquad DK'(q) = \begin{cases} -1 & q < 45 \\ 0 & q \geq 45 \end{cases}$

$\longrightarrow$ strikt fallend im Bereich $(0, 45)$
konstant $[45, \infty)$

Skalenerträge $\begin{cases} \text{zunehmend im Bereich } & q < 45 \\ \text{konstant } \text{-''-} & q \geq 45 \end{cases}$

c)

$$C(q) = q^3 - 15q^2 + 125q$$

$$DK(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 15q + 125$$

$$DK'(q) = 2q - 15 \overset{!}{=} 0$$

$$2q = 15 \qquad q = 7{,}5$$

überprüfe: Wann ist $DK'(q)$ positiv, wann negativ

fallend im Bereich $q < 7{,}5$
wachsend -"- $q > 7{,}5$

Skalenerträge sind
zunehmend im Bereich $q < 7.5$
abnehmend im Bereich $q > 7.5$

d)

$$C(q) = q^{\frac{5}{4}} \qquad DK(q) = \frac{C(q)}{q} = q^{\frac{1}{4}} \qquad DK'(q) = \frac{1}{4}q^{-\frac{3}{4}} > 0$$

→ strikt wachsend

→ optimale Betriebsmenge = 0

→ Skalenerträge sind abnehmend

3. Betrachten Sie Produktionen mit $I = 1$ Input. Skizzieren Sie wie in Kapitel 7B, Folie 9, eine Produktionsfunktion $f$, die dazugehörende Kostenfunktion $C_f$ und die dazugehörigenden Funktionen $GK$ und $DK$. (Für die Produktionsfunktion soll $f(0) = 0$ gelten und sie soll strikt wachsend sein, sobald $f(x_1) > 0$.)

(a) Fertigen Sie Skizzen an für einen Fall, in dem $f$ keine Setup-Kosten beeinhaltet und das Grenzprodukt erst wachsend ist und dann fallend.

(b) Fertigen Sie Skizzen an für einen Fall, in dem $f$ Setup-Kosten beeinhaltet und das Grenzprodukt (im Bereich der strikt positiven Outputmengen) immer fallend ist.

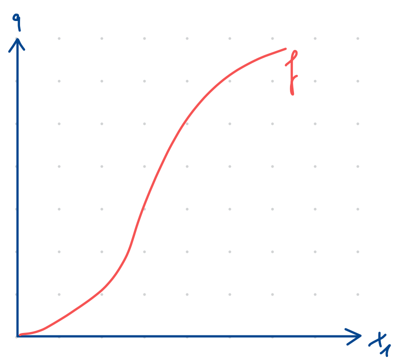
Markieren Sie jeweils das Betriebsoptimum.

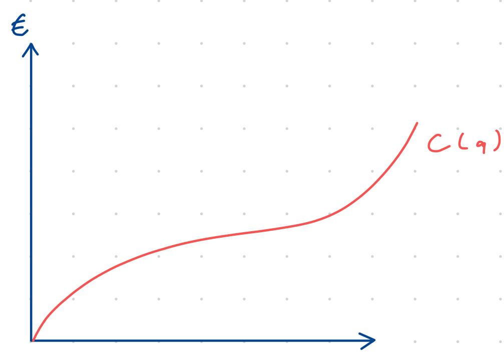
a)

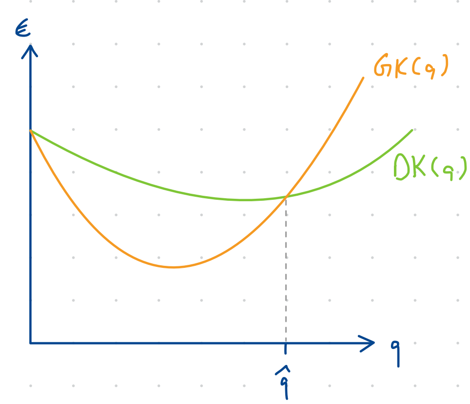
GK beginnen auf der gleichen Höhe wie DK

→ weil keine Set-up Kosten

$$\lim_{q \to 0} DK(q) = \lim_{q \to 0} \frac{C(q)}{q} = \underbrace{\lim_{q \to 0} \frac{C(q) - C(0)}{q - 0}}_{\text{Def: Ableitung}} = GK(0)$$




Grenzprodukt erst wachend dan fallend

Optimal wenn $GK(q) = DK(q)$

b)