Universität Mannheim – Mikroökonomik A – FSS 2024

Aufgabenblatt 5

1. Studentin Klara plant für die Perioden $t = 0, 1$. Im Moment $(t = 0)$ besitzt sie kein Einkommen. Sie erwartet jedoch, nach dem Examen $(t = 1)$ ein sehr hohes Einkommen von $1M$ Euro zu verdienen. Klara will mit Hilfe einer Kreditaufnahme ihren Konsum optimal über die beiden Perioden verteilen. Der Zinssatz, zu dem sie Geld leihen kann, beträgt r.

   $y_0 = 0$

   $y_1 = 1M$

   Klaras Präferenzen über Bündel $c = (c_0, c_1)$ sind gegeben durch die Nutzenfunktion

$$u(c) \quad = \quad U(c_0) + \delta U(c_1),$$

   wobei $U(c_i) = \sqrt{c_i}$ gilt und $\delta \leq 1$ ein gegebener Diskontfaktor ist.

   (a) Schreiben Sie die Bedingungen erster Ordnung für Klaras optimales Bündel c^* auf.

   (b) Bestimmen Sie Klaras optimales Bündel c^*. (Ihre Antwort sollte eine Formel sein, die von r und δ abhängt.)

   (c) Nehmen Sie diesmal zusätzlich an, dass Klara sehr "ungeduldig" ist, d.h. ihr δ liegt nahe bei 0. Wird sie durch einen Anstieg der Zinssatzes r besser oder schlechter gestellt? Interpretieren Sie das Ergebnis.

   (d) Unter welcher Bedingung hinsichtlich r und δ wird Klara nach dem Examen mehr konsumieren als vorher, d.h. $c_1^* > c_0^*$? Interpretieren Sie ihre Bedingung.

   (e) Betrachten Sie eine Zinserhöhung von r auf einen Wert $r' > r$. Nehmen Sie an, dass diese unerwartet kommt, d.h. Klara hat bereits ihr c_0^* aus dem beim Zinssatz r optimalen Bündel konsumiert. Unter welcher Bedingung an r, r' und δ wird es zu einer Privatinsolvenz kommen? Zeigen Sie, dass es schon bei einer sehr kleinen unerwarteten Zinserhöhung zur Privatinsolvenz kommt, wenn Klara sehr ungeduldig ist.

a) Nutzenfkt: $u(c) = u(c_0) + \delta u(c_1)$
$= \sqrt{c_0} + \delta \sqrt{c_1}$

Budgetgesaden: $y_0 = c_0 + s$
$y_1 + s(1+r) = c_1 \xrightarrow{\text{umstellen}} s(1+r) = c_1 - y_1$
$s = \frac{c_1}{1+r} - \frac{y_1}{1+r}$

↓ zusammensetzen

$y_0 = c_0 + \frac{c_1}{1+r} - \frac{y_1}{1+r}$

$y_0 + \frac{y_1}{1+r} = c_0 + \frac{c_1}{1+r}$

↓ $y_0 = 0 \quad y_1 = 1$

$\frac{1}{1+r} = c_0 + \frac{c_1}{1+r}$

$f: \sqrt{c} \quad f': \frac{1}{2\sqrt{c}}$
$f: c^{\frac{1}{2}} \quad f': \frac{1}{2} c^{-\frac{1}{2}}$

BEO: Lagrange aufstellen: $\mathcal{L} = \sqrt{c_0} + \delta\sqrt{c_1} + \lambda\left(\frac{1}{1+r} - c_0 - \frac{c_1}{1+r}\right)$

Schritte
1. I) nach λ umstellen und in II) einsetzen
2. nach c_1 (oder c_0) umformen
3. c_1 (oder c_0) in III) einsetzen und auflösen
4. optimales c_0^* in c_1 einsetzen und optimales c_1 auflösen

b)
I) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_0} = \frac{1}{2\sqrt{c_0}} - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \qquad \frac{1}{2\sqrt{c_0}} = \lambda$

einsetzen

II) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = \frac{\delta}{2\sqrt{c_1}} - \frac{\lambda}{1+r} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \frac{\delta}{2\sqrt{c_1}} = \frac{\lambda}{1+r} \qquad \frac{\delta}{2\sqrt{c_1}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{c_0}}}{1+r} \qquad \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1}{2\sqrt{c_0}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{c_0}(1+r)}$

$\frac{1}{\delta} 2\sqrt{c_1} = 2\sqrt{c_0}(1+r) \quad |:2 \quad |\cdot\delta$

$\sqrt{c_1} = \delta\sqrt{c_0}(1+r) \quad |\,^2$

$c_1 = \delta^2 c_0 (1+r)^2$

III) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{1}{1+r} - c_0 - \frac{c_1}{1+r} \stackrel{!}{=} 0$

$\frac{1}{1+r} = c_0 + \frac{c_1}{1+r}$

einsetzen

$\frac{1}{1+r} = c_0 + \frac{\delta^2 c_0 (1+r)^{\cancel{2}}}{\cancel{1+r}}$

$\frac{1}{1+r+\delta^2(1+r)^2}$

$\frac{1}{1+r} = c_0 + \delta^2 c_0 (1+r)$

$\frac{1}{1+r} = c_0(1+\delta^2(1+r))$

$c_0 = \frac{1}{(1+r)(1+\delta^2(1+r))}$

$\boxed{c_0^* = \frac{1}{1+r+\delta^2(1+r)^2}}$

$\longrightarrow \quad c_1 = \delta^2 \frac{1}{1+r+\delta^2(1+r)^2}(1+r)^2$

$= \frac{1}{1(1+r)+\delta^2(1+r)(1+r)} = \frac{\delta^2(1+r)^2}{(1+r)(1+\delta^2(1+r))}$

$\boxed{c_1^* = \frac{\delta^2(1+r)}{1+\delta^2(1+r)}}$

c) Veränderung der Zinsrate r bei sehr niedrigem Diskontierungssatz δ
(sie gibt der Zukunft kaum Wert)

$u(c) = \sqrt{c_0} + \delta\sqrt{c_1}$

$\lim_{\delta \to 0} u(c) = \sqrt{c_0^*}$

$= \sqrt{\frac{1}{1+r}} = \frac{1}{\sqrt{1+r}}$

$= (1+r)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{d\,u(c)}{dr} = -\frac{1}{2}(1+r)^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 < 0$

→ steigt der Zinssatz verringert sich der Nutzen

Interpretation
Der Nutzen einer sehr ungeduldigen Konsumentin steigt und fällt mit dem Barwert ihres Einkommensstroms, da sie nur in der Gegenwart konsumieren will. Der Barwert eines beliebigen Einkommensstroms fällt mit dem Zinssatz.

d) $c_1^* > c_0^*$

$$\frac{\delta^2(1+r)^2}{(1+r)(1+\delta^2(1+r))} > \frac{1}{1+r+\delta^2(1+r)^2}$$ | der Nenner lässt sich rausmultiplizieren, da es auf beiden Seiten gleich ist.

$$\delta^2(1+r)^2 > 1 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\delta(1+r) > 1$$

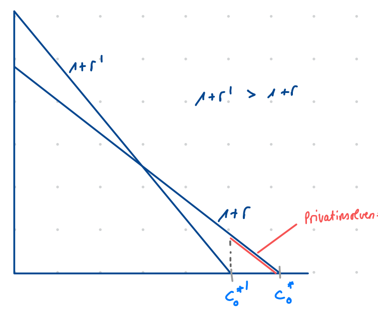
→ Die Konsumentin muss also hinreichend geduldig sein (δ hoch genug) oder der Zinssatz entsprechend hoch (es ist sehr lukrativ Geld zu sparen), damit $c_1^* > c_0^*$.

→ Bsp: Wenn $\delta = 0.9$ muss $r \approx 0{,}11$ sein um die Bedingung zu erfüllen

→ Je höher δ und r, desto mehr lohnt es sich mehr in $t=1$ zu konsumieren

e)

Erinnerung:
- Klara hat 0€ Einkommen in Periode 0.
- Für ihren Konsum in Periode 0 muss sie sich also aus ihrem Einkommen in $t=1$ Geld leihen.
- Leiht sie sich zu viel Geld weil sie annimmt der Zinssatz sei entsprechend niedrig hat sie evtl. Schwierigkeiten ihre Schulden zurückzuzahlen wenn die Zinsen steigen



Die Privatinsolvenz tritt ein, wenn

$$c_0^* > \frac{y_1}{1+r'} = \frac{1}{1+r'}$$ ⇒ Barwert Konsum > Barwert Einkommen

$$\frac{1}{1+r+\delta^2(1+r)^2} > \frac{1}{1+r'} \quad |^{-1}$$

$$1+r' > 1+r+\delta^2(1+r)^2 \quad |-1$$

$$r' > r+\delta^2(1+r)^2$$

→ wenn dies gilt geht Klara insolvent

→ sie konsumiert in $t=0$ mehr als sie später unter erhöhtem Zinssatz zurückzahlen kann

Fall: Klara ist sehr ungeduldig: $\delta \to 0$ $\quad c_0^* = \frac{1}{1+r} \quad c_1^* = 0$

wenn also $c_0^* > \frac{1}{1+r'}$ ist, wird sie insolvent sein

$\frac{1}{1+r} > \frac{1}{1+r'}$, da $r < r'$ wird sie insolvent und bei jeder Zinserhöhung von r wird sie insolvent

→ sie dürfte eigentlich maximal $\frac{1}{1+r'}$ konsumieren hat jedoch in $t=0$ schon mehr als das konsumiert.

2. Karl hat monotone Präferenzen über Konsumströme. Er plant seine Einkommensmöglichkeiten für die Perioden 0, 1 und 2. Er muss zwischen zwei möglichen Einkommenströmen wählen. Der eine Einkommenstrom, $(1, 0, 5)$, bringt sofort ein kleines Einkommen von 1 und in später Zukunft ein hohes Einkommen von 5. Der andere Einkommenstrom, $(0, 5, 0)$, bringt nur in der mittleren Zukunft ein hohes Einkommen von 5. Gibt es Zinssätze, für die Karl den Einkommenstrom $(0, 5, 0)$ bevorzugt? Wenn ja, welche?

→ Karl wird den Einkommenstrom mit dem höheren Barwert (Abdiskontierter Wert aus heutiger Sicht) wählen:

↳ $$y_0 + \frac{y_1}{1+r} + \frac{y_2}{(1+r)^2}$$

→ Der Barwert des Einkommenstroms $(0,5,0)$ ist größer, wenn gilt:

$$\frac{5}{1+r} > 1 + \frac{5}{(1+r)^2} \quad | \cdot (1+r)^2$$

$$5(1+r) > 1(1+r)^2 + 5$$

$$5 + 5r > 1 + 2r + r^2 + 5 \quad | -5 \; | -2r$$

$$3r > 1 + r^2$$

$$-r^2 + 3r - 1 > 0$$

$$r^2 - 3r + 1 < 0$$

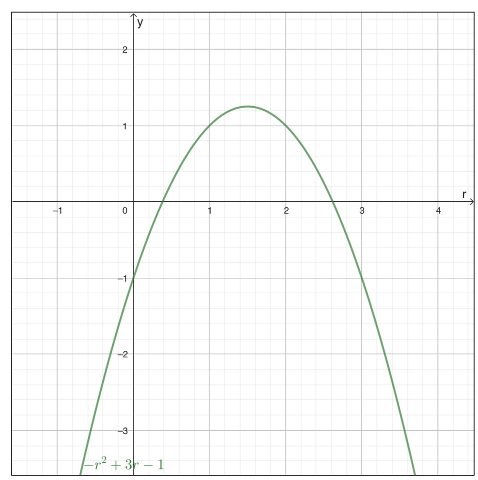
p-q Formel: $r_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 1}$

$r_1 = 2{,}618$

$r_2 = 0{,}382$

→ Wenn r: $r_1 < r < r_2$ gilt ist der Zweite Einkommenstrom optimal und hat aus heutiger Sicht den höheren Barwert

Graph



3. Betrachten Sie eine Edgeworth-Tauschwirtschaft mit den Nutzenfunktionen

optimal, wenn $x_1^A = 0{,}6\, x_2^A$

$$u^A(x_1^A, x_2^A) = \min(80x_1^A, 133x_2^A) \quad \text{und} \quad u^B(x_1^B, x_2^B) = \ln x_1^B + 9\ln x_2^B.$$

Die (Erst-)Ausstattungen sind $e^A = (e_1^A, e_2^A)$ und $e^B = (e_1^B, e_2^B)$ mit $e_1^A > 0$, $e_2^A > 0$, $e_1^B > 0$ und $e_2^B > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichts-Tauschrate. (Ihre Antwort sollte eine Formel sein, die von den Ausstattungen abhängt.) Wir werden die Lösung im nächsten Aufgabenblatt verwenden.

Nachfrage A:

u^A: Perfekte Komplemente

optimal, wenn $80 x_1^A = 133 x_2^A$

$x_1^A = \frac{133}{80} x_2^A$

Budgetgerade

$e^A = p_1 x_1^A + p_2 x_2^A$

Erstausstattung

$e^A = p_1 e_1^A + p_2 e_2^A$

→ Einsetzen $e^A = p_1 \frac{133}{80} x_2^A + p_2 x_2^A$

$e^A = x_2^A (1{,}66\, p_1 + p_2)$

$x_2^{*A} = \dfrac{e^A}{1{,}66\, p_1 + p_2}$ $\xrightarrow[\text{einsetzen}]{\text{in } x_1^A}$ $x_1^A = 1{,}66 \dfrac{e^A}{1{,}66\, p_1 + p_2} = \dfrac{e^A}{p_1 + 1{,}66^{-1} p_2} = \dfrac{e^A}{p_1 + 0{,}6\, p_2}$

→ Nachfrage eines A-Händlers
als Fkt. des Preise und der Erstausstattung

$$d^*(p_1, p_2, e_1^A, e_2^A) = \left(\frac{p_1 e_1^A + p_2 e_2^A}{p_1 + 0{,}6\, p_2} \,;\, \frac{p_1 e_1^A + p_2 e_2^A}{1{,}66\, p_1 + p_2} \right)$$

Nachfrage B: $u^B = \ln x_1^B + 9 \ln x_2^B$

$\mathcal{L} = \ln x_1^B + 9 \ln x_2^B + \lambda (e^B - p_1 x_1^B - p_2 x_2^B)$

$\frac{d\mathcal{L}}{dx_1^B} = \frac{1}{x_1^B} - \lambda p_1 \overset{!}{=} 0$ $\quad \frac{1}{x_1^B} = \frac{9}{x_2^B} \cdot \frac{p_1}{p_2}$ $\quad x_1^B = \frac{1}{9} x_2^B \frac{p_2}{p_1}$

$\frac{d\mathcal{L}}{dx_2^B} = \frac{9}{x_2^B} - \lambda p_2 \overset{!}{=} 0$ $\quad \frac{9}{x_2^B p_2} = \lambda$

$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = e^B - p_1 x_1^B - p_2 x_2^B \overset{!}{=} 0$

$e^B = p_1 \frac{1}{9} x_2^B \frac{p_2}{p_1} + p_2 x_2^B$

$e^B = x_2^B (\frac{1}{9} p_2 + p_2)$

$= \frac{10}{9} p_2 x_2^B$ $\quad x_2^{*B} = \dfrac{e^B}{\frac{10}{9} p_2} = \dfrac{9 e^B}{10\, p_2}$

$x_1^B = \frac{1}{9} \frac{9 e^B}{10\, p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = \frac{e^B}{10\, p_1}$

Budgetgerade

$e^B = p_1 x_1^B + p_2 x_2^B$

Erstausstattung

$e^B = p_1 e_1^B + p_2 e_2^B$

Nachfrage von B:

$d^*(p_1, p_2, e_1^B, e_2^B)$

$$= \left(\frac{p_1 e_1^B + p_2 e_2^B}{10\, p_1} \,;\, \frac{9(p_1 e_1^B + p_2 e_2^B)}{10\, p_2} \right)$$

→ In unerer Tauschwirtschaft wird immer alles verfügbare aufgeteilt:
(Markträumend)

Es muss also für ein bestimmtes Preisniveau $\frac{p_1^*}{p_2^*} = q$ gelten:

$$\text{Grundausstattung} = \text{Aggregirte Nachfrage}$$

$$e_1^A + e_1^B = \frac{p_1 e_1^A + p_2 e_2^A}{p_1 + 0{,}6 p_2} + \frac{p_1 e_1^B + p_2 e_2^B}{10 p_1}$$

Wir erweitern die Brüche auf beiden Seiten mit $\frac{1}{p_2}$ um q zu erhalten

$$= \frac{(p_1 e_1^A + p_2 e_2^A)\frac{1}{p_2}}{(p_1 + 0{,}6 p_2)\frac{1}{p_2}} + \frac{(p_1 e_1^B + p_2 e_2^B)\frac{1}{p_2}}{(10 p_1)\frac{1}{p_2}}$$

$$= \frac{\frac{p_1 e_1^A}{p_2} + \frac{\cancel{p_2} e_2^A}{\cancel{p_2}}}{\frac{p_1}{p_2} + \frac{0{,}6 \cancel{p_2}}{\cancel{p_2}}} + \frac{\frac{p_1 e_1^B}{p_2} + \frac{\cancel{p_2} e_2^B}{\cancel{p_2}}}{\frac{10 p_1}{p_2}}$$

$$e_1^A + e_1^B = \frac{e_1^A q + e_2^A}{q + 0{,}6} + \frac{e_1^B q + e_2^B}{10 q} \quad | \cdot 10q$$

$$10q\,(e_1^A + e_1^B) = \frac{(e_1^A q + e_2^A) \cdot 10q}{q + 0{,}6} + e_1^B q + e_2^B \quad | \cdot (q + 0{,}6)$$

Wir wollen ein optimales Preisverhältnis finden. Also stellen wir nach q um

$$(q + 0{,}6)\,10q\,(e_1^A + e_1^B) = 10q\,(e_1^A q + e_2^A) + (q + 0{,}6)(e_1^B q + e_2^B)$$

$$10q^2 (e_1^A + e_2^B) + 6q(e_1^A + e_1^B) = 10q^2 e_1^A + 10q e_2^A + e^B q^2 + q e_2^B + 0{,}6 e_1^B q + 0{,}6 e_2^B$$

$$10q^2 (e_1^A + e_2^B) - 10q^2 e_1^A - e_2^B q^2 = -16 q (e_1^A + e_1^B) + 10q e_2^A + q e_2^B + 0{,}6 e_1^B q + 0{,}6 e_2^B$$

$$q^2 \underbrace{(-9 e_2^B)}_{\alpha} + q \underbrace{(10 e_2^A + e_2^B - 6 e_1^A - 5{,}4 e_1^B)}_{\beta} + \underbrace{0{,}6 e_2^B}_{\gamma} = 0$$

→ abc - Formel: $q_{1/2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

→ Die + Lösung hat die Eigenschaft, $q < 0$ ↯
↳ weil $\alpha < 0$ & $\gamma > 0$ folgt: $\sqrt{\beta^2} < \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$
also wäre der Zähler positiv und der Nenner negativ, was zu einem negativen Preisverhältnis führen würde: ↯ (Preisverhältnis muss immer > 0 sein)

→ Die − Lösung ist die gesuchte Antwort