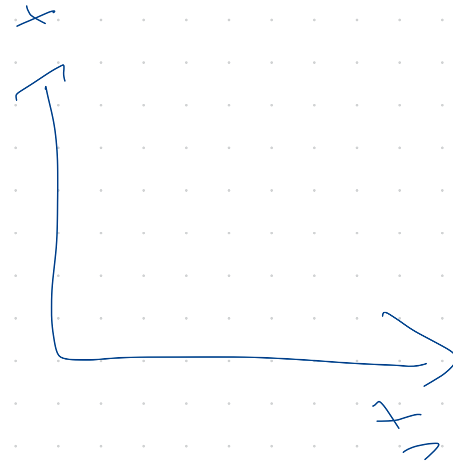
1. Herr I konsumiert zwei perfekt teilbare Güter: Schokoladencreme (Gut 1) und Espresso (Gut 2). Der Entscheidungsraum ist $X = [0, \infty)^2$. Herrn Is Präferenzen werden durch die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$ repräsentiert.

es können nur positive Mengen konsumiert werden

   (a) Beschreiben Sie für jedes Bündel y die Indifferenzkurve, die durch y geht, als eine Funktion $g_y(x_1)$. Skizzieren Sie die Indifferenzkurven durch den Punkt $(1, 5)$ in einem Koordinatensystem.

   (b) Ist Herrn Is Präf.relation monoton? Ist Herrn Is Präf.relation konvex?



   (c) Berechnen Sie einen mathematischen Ausdruck für die Grenzrate der Substitution von Gut 2 für Gut 1 an einer beliebigen Stelle $y = (y_1, y_2)$. Machen Sie dies auf zweierlei Wegen: indem Sie die Funktion g_y benutzen und indem Sie die Grenznutzenformel benutzen.

   (d) Nehmen Sie an, dass Herr I das Bündel $(1, 5)$ besitzt. Frau J hat ihre eigene Präferenzrelation. Sie besitzt ein Bündel, bei dem ihre Grenzrate der Substitution von Gut 2 für Gut 1 gleich -2 ist. Gibt es zwischen Herrn I und Frau J einen Gütertausch, der beide besser stellt? Ändert sich Ihre Antwort, falls Herr I das Bündel $(5, 5)$ besitzt?

a) Indifferenzkurve $g_y(x_1)$: Bündel aus $(x_1, g_y(x_1))$, die der Konsument gleich gut findet, wie das Bündel y

$$\mu(x_1, g_y(x_1)) = \mu(y) \quad \forall x_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x_1 + 1)(g_y(x_1) + 1) = \mu(y)$$

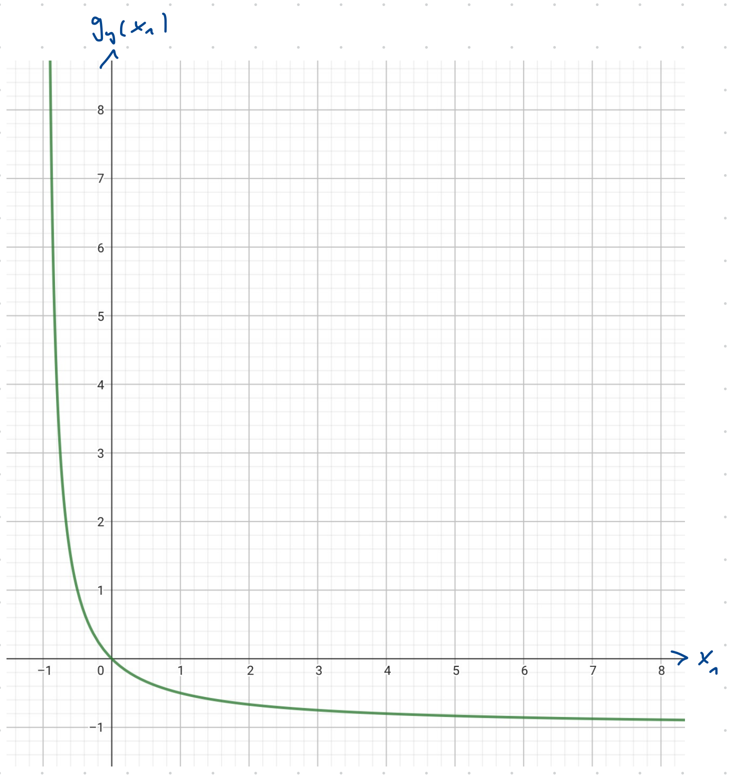
$$x_1 g_y(x_1) + x_1 + g_y(x_1) + 1 = \mu(y)$$

nach $g_y(x_1)$ auflösen

$$\underbrace{x_1 g_y(x_1) + g_y(x_1)}_{} = \mu(y) - 1 - x_1$$

$$g_y(x_1)(x_1 + 1) = \mu(y) - 1 - x_1$$

$$g_y(x_1) = \frac{\mu(y) - 1 - x_1}{x_1 + 1}$$



fixiere $\mu(y)$ bei 1

$$g_y(0) = 0$$

b)

$$u(x_1, x_2) = (x_1+1)(x_2+1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1$$

Monotonität

$$\frac{du(x_1, x_2)}{dx_1} = x_2 + 1 > 0 \quad \forall\, x_2 > 0$$

$$\frac{du(x_1, x_2)}{dx_2} = x_1 + 1 > 0 \quad \forall\, x_1 > 0$$

in Aufgabenstellung steht:
$X = [0, \infty)$ → daher müssen x_1 & x_2 immer positiv sein

→ Wenn sich x_1 oder x_2 erhöhen wird auch $u(x_1, x_2)$ größer
→ Präferenzen sind monoton

Konvexität

$$\frac{du(x_1, x_2)^2}{d^2 x_1} = 0 = \frac{du(x_1, x_2)^2}{d^2 x_2}$$

→ quasi konkave Nutzenfunktion
<=> konvexe Präferenzen ✓

c)

1. Weg: Ableitung der Indiffkurve um die GRS zu berechnen:

$$g_y(x_1) = \frac{u(y) - 1 - x_1}{x_1 + 1}$$

$$g_y'(x_1) = -\frac{u(y)}{(x_1+1)^2}$$

$$GRS_{12}(y) = g_y'(y_1)$$

$$= -\frac{u(y)}{(y_1+1)^2}$$

$$= -\frac{\cancel{(y_1+1)}(y_2+1)}{\cancel{(y_1+1)}(y_1+1)}$$

$$= -\frac{y_2+1}{y_1+1}$$

2. Weg:

$$GRS_{12} = -\frac{\frac{du(x_1, x_2)}{dx_1}}{\frac{du(x_1, x_2)}{dx_2}} = -\frac{1 + x_2}{1 + x_1}$$

$$GRS = -\frac{1+5}{1+1} = -\frac{6}{2}$$

$$= -3$$

d) A: Herr I: $GRS_{12}(1,5) = -3$

$\frac{\text{Schokolade}}{\text{Espresso}}$

↳ Herr I ist bereit für eine zusätzliche Einheit Schoggi etwa 3 Einheiten Espresso aufzugeben

B: Herr I: $GRS_{12}(5,5) = -1$

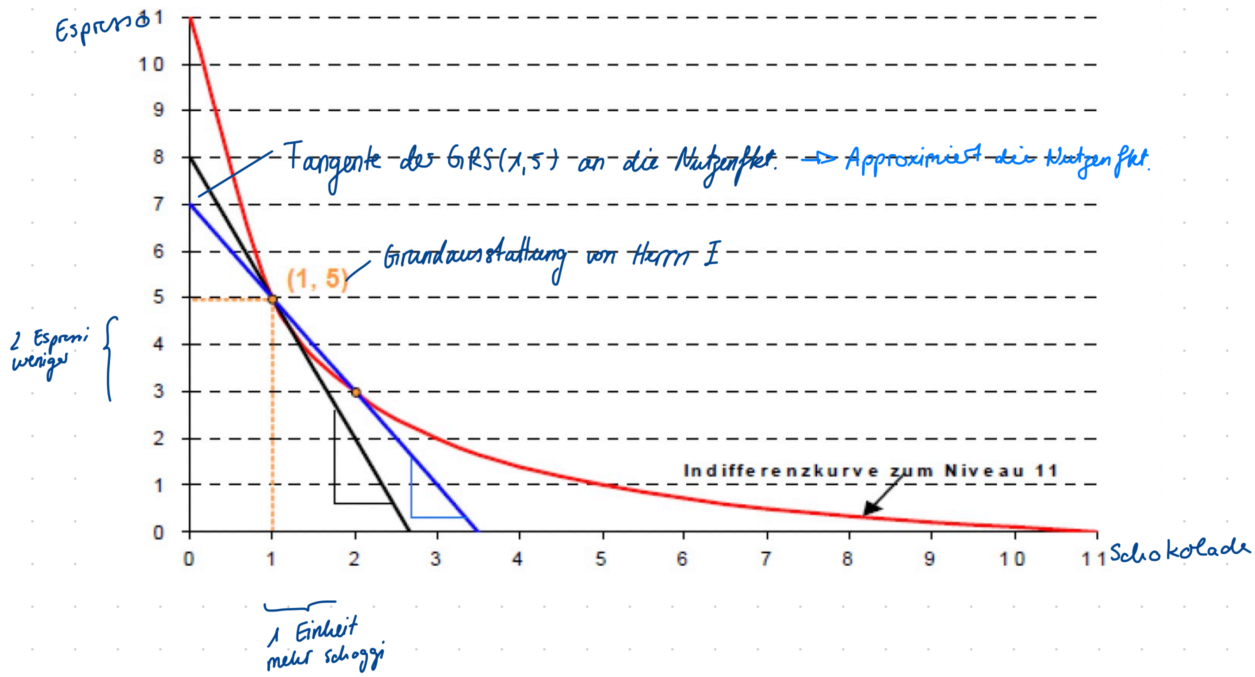
↳ Herr I ist bereit für eine Einheit Schokolade etwa eine Einheit Espresso aufzugeben

Frau J: $GRS_{12} = -2$

↳ bereit für 1 Einheiten x_1 2 Einheiten x_2 aufzugeben

2. Indifferenzkurven (4)

2.5 Tausch in (1, 5)



Fachliche Formulierung: Bei einer marginalen (unendlich kleinen) Änderung ist Herr I bereit zum Gütertausch bei einem Tauschverhältnis von 3 Einheiten Espresso auf 1 Einheit Schokolade zu verzichten

wichtig: →

Jeder Tausch zu einer Rate, die für den Konsumenten (Herrn I) strikt günstiger als die GRS ist, stellt den Konsumenten strikt besser, *wenn der Tausch nur klein genug ist*

→ Also ist für Herrn I ein Tausch von Vorteil, bei dem er entweder eine Einheit Schokolade bekommt, dafür aber *weniger* als 3 Einheiten Espresso abgeben muss oder ein Tausch bei dem er 1 Einheit Schokolade abgeben muss dafür aber *mehr* als 3 Einheiten Espresso bekommt

Tausch Herr I vs. Frau J

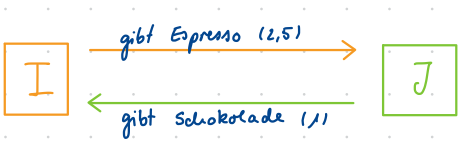
(marginal anhand der ggb. Güterbündel betrachtet)

A: $GRS_{12}(1,5) = -3$

→ zusätzlicher Espresso ist für J wertvoller als I

→ zusätzliche Schokolade ist für I wertvoller als J

↳ Also kann ein kleiner marginal Handel statt finden, bei dem



B: $GRS_{12}(5,5) = -1$

→ zusätzlicher Espresso ist für I wertvoller als J

→ zusätzliche Schokolade ist für J wertvoller als I

↳ Es findet ein umgekehrter Handel statt:

2. Egon denkt über die Länge seiner Sommerferien nach. Seine Zahlungsbereitschaft für x_1 (perfekt teilbare) Tage am Strand des Mittelmeers ist $\sqrt{x_1 + 9} - 3$ (gemessen in 1.000 EUR).

   (a) Nehmen Sie quasilineare Präferenzen an und spezifizieren Sie Egons Nutzenfunktion als Geldäquivalent.

   (b) Bestimmen Sie Egons marginale Zahlungsbereitschaft für zusätzliche Ferientage als eine Funktion der Feriendauer x_1. Ist Egons Präferenzrelation monoton? Ist sie konvex?

   (c) Skizzieren Sie Egons Indifferenzkurve durch den Punkt $(16, 0)$.

Egons Zahlungsbereitschaft: $u(x_1) = \sqrt{x_1 + 9} - 3$

a) Quasilineare Präferenzen

$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$ $\quad \rightarrow \quad u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + 9} - 3 + x_2$

b) Ableitung $\sqrt{x}$: $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ Kettenregel $u' = h' \cdot t'$ $\quad$ $h = \sqrt{t}$, $t = x_1 + 9$ $\quad$ $h' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $t' = 1$

$(x)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$

Marginale Zahlungsbereitschaft: Ableitung nach x_1

$$\frac{du(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + 9}} = (2\sqrt{x_1+9})^{-1} = \frac{1}{2}(x_1 + 9)^{-\frac{1}{2}}$$

$\rightarrow$ wenn sich x_1 um 1 erhöht erhöt sich der Nutzen $u(x_1, x_2)$ um $\frac{1}{2\sqrt{x_1+9}}$

Monoton, weil $\dfrac{du(x_1, x_2)}{dx_1} > 0 \quad \forall x_1$

Konvexe Präferenzen?

① Überprüfung der Nutzenfkt.

$$\frac{du(x_1, x_2)^2}{d^2 x_1} = -\frac{1}{4}(x_1 + 9)^{-\frac{3}{2}} < 0$$ $\rightarrow$ Konkav für $x_1 > 0$

② Regel: (quasi) konkave Nutzenfunktion $\Leftrightarrow$ konvexe Präferenzen (gilt immer)

$\hookrightarrow$ also sind die Präferenzen konvex

c) Indifferenzkurve: Alle möglichen Kombinationen des Güterbündels x_1 & x_2, bei dem der Nutzen gleich ist.

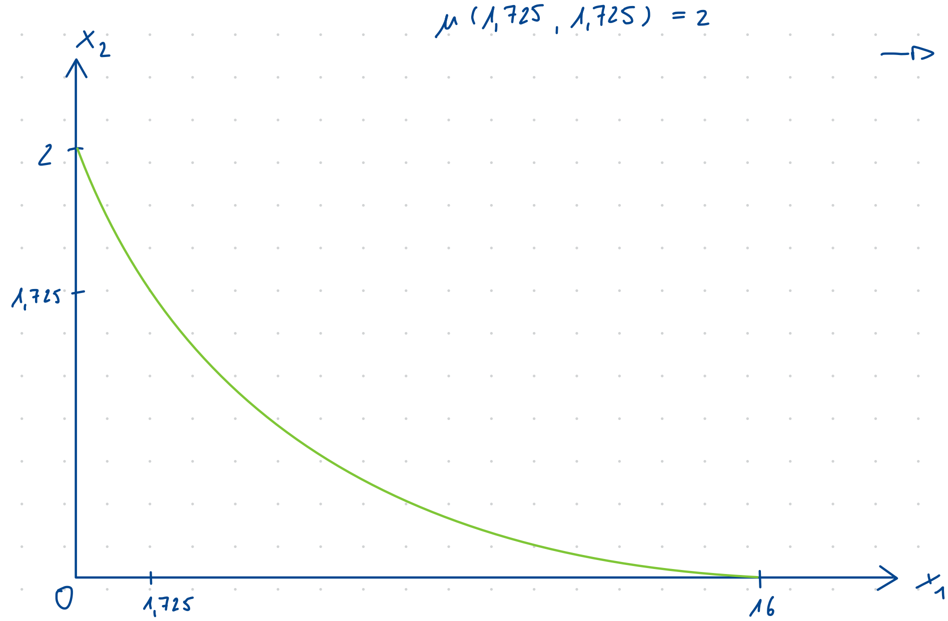
$y = (16, 0)$

$u(16, 0) = \sqrt{16 + 9} - 3 + 0 = 2$

$u(0, 2) = \sqrt{0 + 9} - 3 + 2 = 2$

$u(1{,}725, 1{,}725) = 2$

$\rightarrow$ gesucht: alle Punkte bei denen der Nutzen 2 ist



3. Nehmen Sie an, Sie beobachten, dass ein Konsument über Bündel (x_1, x_2) mit $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ die folgenden Indifferenzkurven hat. In jedem Punkt $z = (0, z_2)$ wird die Indifferenzkurve durch die Funktion $g_z(x_1) = z_2 - \frac{x_1}{z_2}$ für alle x_1 beschrieben. Nehmen Sie an, dass der Konsument monotone Präferenzen hat.

   (a) Zeichnen Sie die Indifferenzkurven durch die Punkte $(0, 1/3)$, $(0, 2/3)$, $(0, 1)$, $(0, 4/3)$ und $(0, 5/3)$.

   (b) Können Sie in Worten erklären, welche Art von Präferenzen hier modelliert werden?

$Z = (0, z_2)$

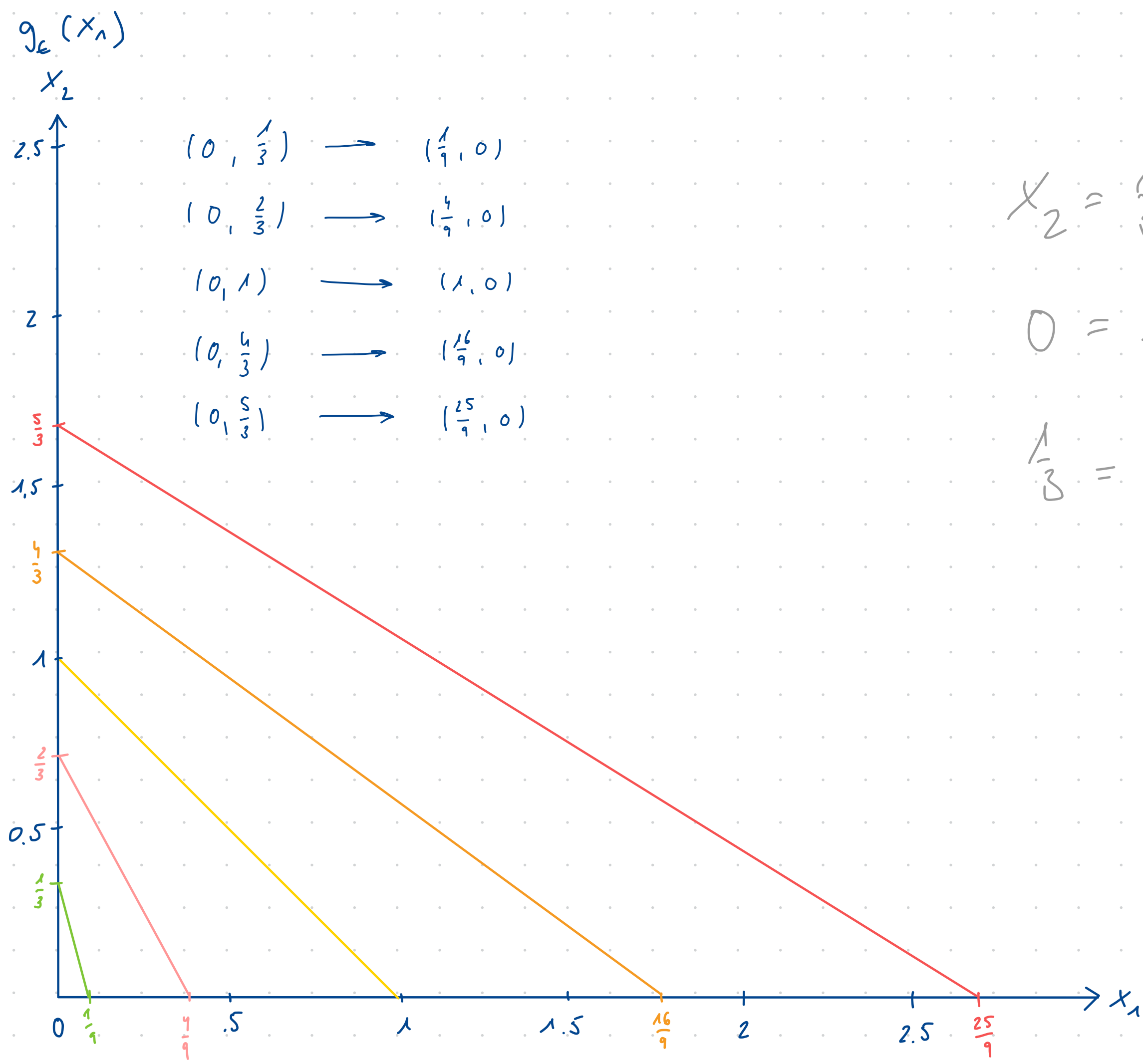
Ziel: Nullstelle auf der x_1-Achse:

Indifferenzkurve: $g_z(x_1) = z_2 - \frac{x_1}{z_2} \xrightarrow[\text{nach } x_1]{\text{umstellen}} -g_z(x_1) + z_2 = \frac{x_1}{z_2}$

$x_1 = (-g_z(x_1) + z_2)\, z_2 \quad (g_z(x_1) = 0)$

$x_1 = z_2^2$

Punkt $z = (0, \frac{1}{3})$



$x_2 = \frac{1}{3} - 3x_1$

$0 = \frac{1}{3} - 3x_1$

$\frac{1}{3} = 3x_1 \qquad x_1 = \frac{1}{9}$

b) Entlang jeder Indifferenzkurve sind Güter wie perfekte Substitute.
Aber je mehr der Konsument von beiden Gütern konsumiert, desto wertvoller wird Gut 2 relativ zu Gut 1

Bsp.: Gut 1: Staples: z.B. Reis, Kartoffeln
Gut 2: Luxus Güter: z.B Fleisch, Fisch
→ wenig Geld: Mehr Konsum von Gut 1
mehr Geld: Mehr Konsum von Gut 2