1. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = -e^{-7x}$.

   (a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

   (b) Berechnen Sie die Ableitung f'.

   (c) Nehmen Sie, dass Sie, beginnend bei $x = 0$, den Wert von x ein bischen verändern. Mit welcher Rate wird sich der Wert $f(x)$ ändern, pro Einheit der Änderung von x, im Grenzwert immer kleinerer Veränderungen? ↳: Definition einer Ableitung

   (d) Ist f konkav? Strikt konkav? Konvex? Strikt konvex?

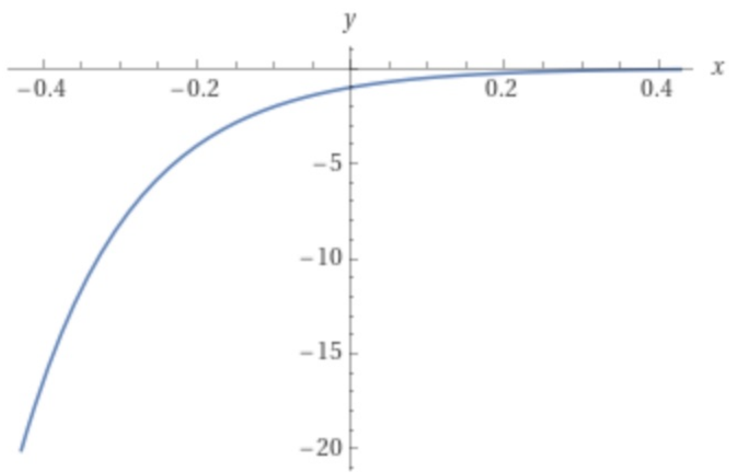
   (e) Bestimmen Sie die Inverse f^{-1}. Ist f^{-1} konkav? Strikt konkav? Konvex? Strikt konvex?

a)

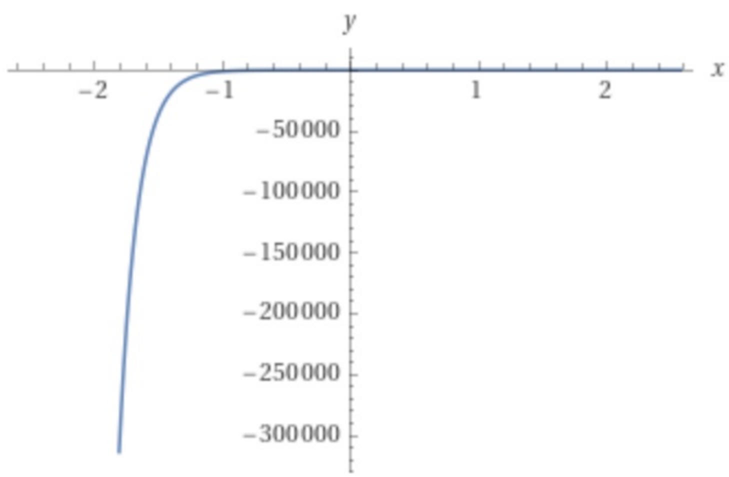
Input interpretation

plot	$f(x) = -\exp(-7x)$

Plots



(x from −0.4 to 0.4)



(x from −2.6 to 2.6)

b) $f(x) = -\exp(-7x)$

Kettenregel:
(Zerteile die Funktion und leite die einzelnen Teile ab)

$f'(x) = 7\exp(-7x)$

$f(g(x))$: $f(u) = -\exp(u)$ $\quad f'(u) = -\exp(u)$
$g(x) = -7x$ $\quad g'(x) = -7$

$f'(x) = f'(u)\cdot g'(x)$ $\qquad u := g(x)$

$$f'(x) = (-7)\cdot(-\exp(-7x)) = 7\exp(-7x)$$

c) Was ist gefragt?

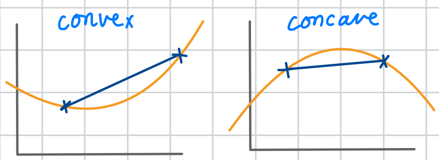
↳ Ableitung von f an der Stelle $x = 0$

$$f'(0) = 7\exp(-7\cdot 0) = 7\underbrace{\exp(0)}_{=1} = 7$$

Notiz zu Ableitungen

- Ableitungen geben die Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle (in unserem Fall „x“) an.
- Sie ermöglichen es die Beziehungen zwischen zwei Größen lokal näherungsweise als eine lineare Beziehung zu erfassen

d)



quasi-konkav if $f'' \leq 0$
" -konvex if $f'' \geq 0$

$f(x) = -\exp(-7x)$

$f'(x) = 7\exp(-7x)$

$f''(x) = -49\exp(-7x) < 0$

↳ strikt konkav

strikt weil immer <0 und nirgends ein Wendepunkt

die Funktion wird immer flacher

e) i) Inverse: $f(f^{-1}(\mu)) = \mu$

Schritt 1: einsetzen: $f(f^{-1}(\mu)) = -\exp(-7\underbrace{f^{-1}(\mu)}_{\text{vorher } x}) = \mu \quad | \cdot (-1)$

Schritt 2: nach μ auflösen: $\exp(-7 f^{-1}(\mu)) = -\mu \quad | \ln$

$$-7 f^{-1}(\mu) = \ln(-\mu) \quad | \cdot -\tfrac{1}{7}$$

$$f^{-1}(\mu) = -\tfrac{1}{7}\ln(-\mu)$$

$$f^{-1}(\mu) \in (-\infty, 0)$$

ii) $f'^{-1} = \frac{1}{7}\frac{1}{-\mu} = -\frac{1}{7}\mu^{-1}$

$f''^{-1} = \frac{1}{7}\mu^{-2} > 0 \rightarrow$ strikt konvex

(logisch weil Inverse)

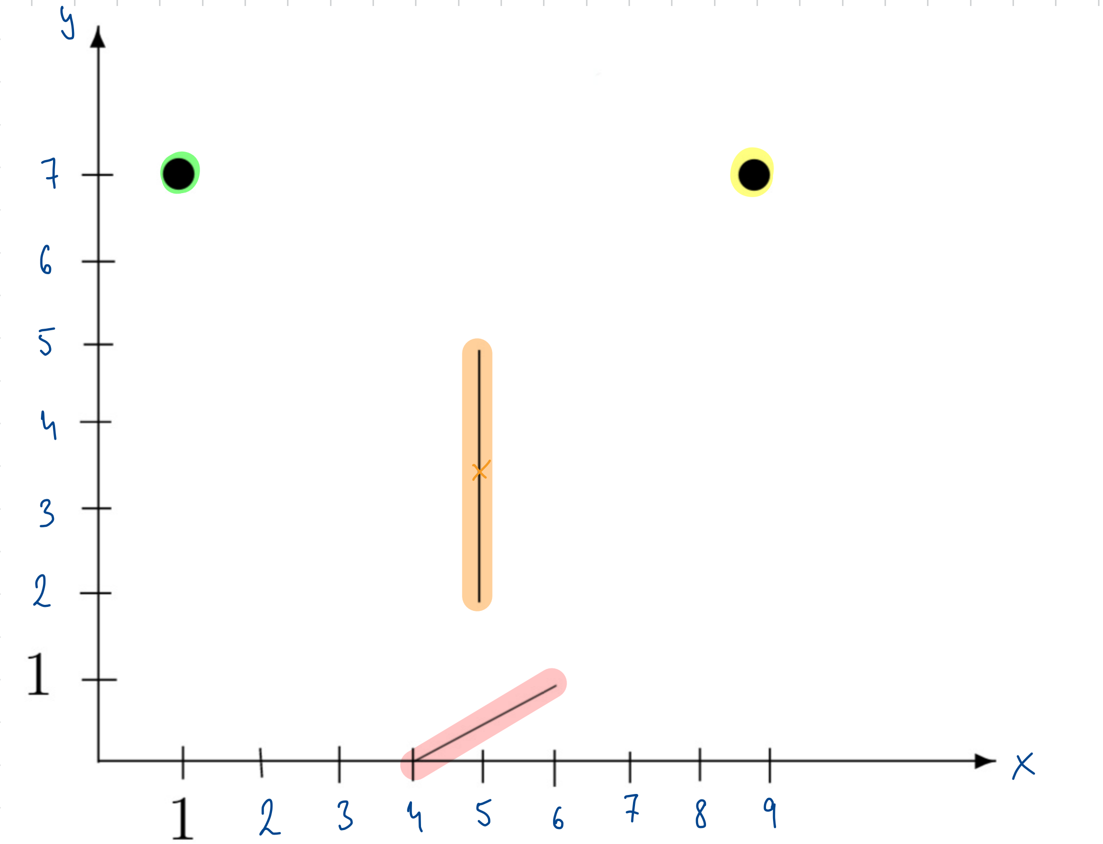
2. Skizzieren Sie in einem Diagramm folgendes. Zuerst die Vektoren (1, 7) und (9, 7). Als zweites die Menge der Konvexkombinationen der Punkte (4, 0) und (6, 1). Als drittes die Menge der Punkte $\{\lambda(5, 2) + (1 - \lambda)(5, 5) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Fröhlich oder traurig?

e.g. $\lambda = \frac{1}{2}$

$\{\frac{1}{2}(5,2) + \frac{1}{2}(5,5)\}$

$\{(2{,}5, 1) + (2{,}5, 2{,}5)\}$

$\{5, 3{,}5\}$



3. Welche der folgenden Mengen ist konvex? (Es reicht, die Antwort durch eine Skizze zu begründen.)

(a) $\{\lambda(5,2) + (1-\lambda)(5,5) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$,

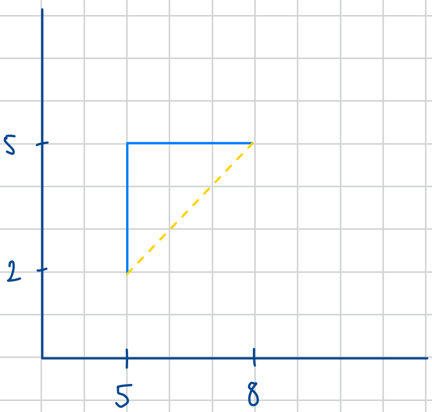
(b) $\{\lambda(5,2) + (1-\lambda)(5,5) | 0 \leq \lambda \leq 1\} \cup \{\lambda(5,5) + (1-\lambda)(8,5) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$,

(c) $\{(x_1, x_2) | x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \leq 4\}$.

a) (siehe oben) gerade senkrechte Linie

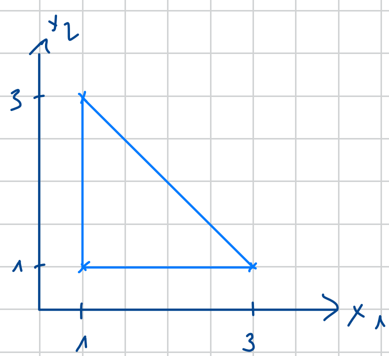
konvex ✓ (auch konkav)

b)



konvex ✗

c)



konvex ✓

4. Betrachten Sie die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ auf dem Definitionsbereich, der durch die Ungleichungen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ begrenzt wird.

(a) Skizzieren Sie in einem (x_1, x_2)-Diagramm die Höhenlinie durch den Punkt $(0, 0)$ und die Höhenlinie durch den Punkt $(4, 1)$. (Tipp: Zeichnen Sie nur einige wenige Punkt und interpolieren Sie dann.)

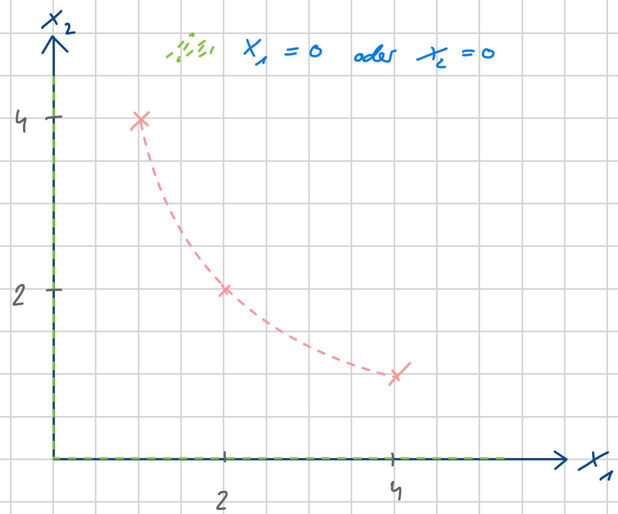
(b) Skizzieren Sie die Funktion $x \mapsto f(x, x)$ (for $x \geq 0$) in einem (x, y)-Diagramm.

(c) Können Sie sich vorstellen, wie der Graph der Funktion f aussieht in einem (x_1, x_2, y)-Diagramm?

(d) Bestimmen Sie eine Funktion $g(x_1)$ so, dass der Graph von g die Höhenlinie von f durch den Punkt $(4, 1)$ ist.

(e) * (zusätzliches Angebot, wird nicht in der Übung besprochen). Machen Sie die obigen Übungen mit anderen Funktionen wie z.B. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, $f(x_1, x_2) = x_1(x_2)^2$ oder den Funktionen in den unten stehenden Aufgaben.

a)



$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = 0 \cdot 0 = \underbrace{0}_{:= x_3}$

→ Welches sind Werte für x_1 und x_2 sodass $f(x_1, x_2) = 0$ ist

→ Antwort: Für jeden Wert bei dem entweder x_1 und/oder x_2 0 sind ist $f(x_1, x_2) = 0$

$f(x_1, x_2) = 4 \cdot 1 = 4$

$4 = x_1 x_2 \qquad x_1 = \frac{4}{x_2}$

$x_2 = \frac{4}{x_1}$

Bsp: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

$x_1 = 2$, $x_2 = 2$

$x_1 = 1$, $x_2 = 4$

b)

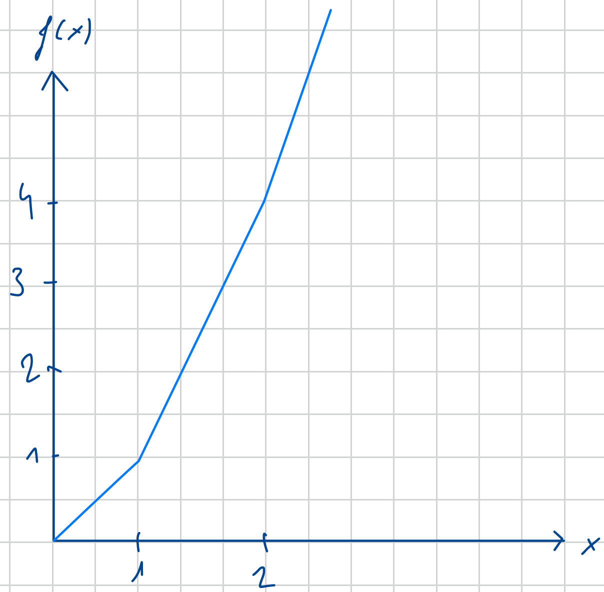
$x \mapsto f(x, x)$

for $x \geq 0$

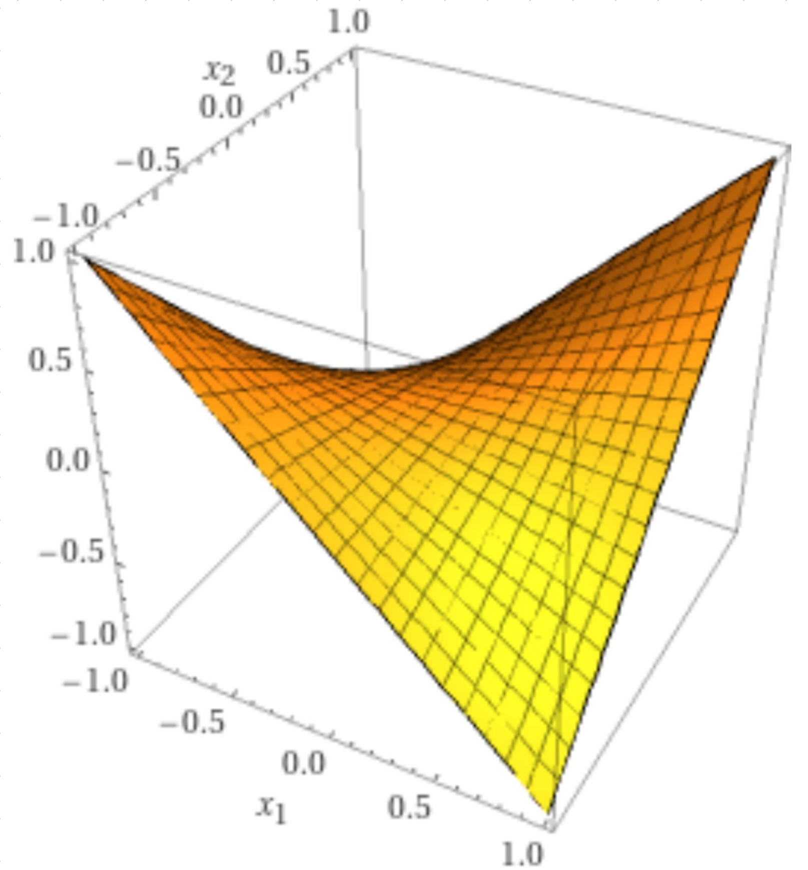
$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

$f(x, x) = x x = x^2$

$f(x) = x^2$



c)



d)

Bedingung: $f(x_1, g(x_1)) = f(4,1)$ für alle möglichen Werte von x_1.

→ Daraus folgt: $x_1 \underbrace{g(x_1)}_{\text{vorher } x_2} = 4$ → umstellen: $g(x_1) = \frac{4}{x_1}$

→ für jedes $x_1 > 0$ enthält die Höhenlinie einen Punkt mit dieser horizontalen Koordinate.

5. Welche der folgenden Funktionen ist/sind schwach wachsend, welche strikt wachsend, welche quasi-konkav? Betrachten Sie jeweils die Funktion auf dem Definitionsbereich $\{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$?

(a) $f(x_1, x_2) = 1$,

(b) $f(x_1, x_2) = x_1$,

(c) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1 x_2, 1\}$,

(d) $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2$.

a) $f(x_1, x_2) = 1$

$f(1, 2) = 1 = f(2, 1) = f(2, 2) = \dots = 1$

$\rightarrow$ schwach wachsend — quasi konkav ✓

nicht strikt wachsend — nicht strikt konkav

b) $f(x_1, x_2) = x_1$

strikt wachsend ✓ — quasi konkav ✓

c) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1 x_2, 1\}$

$\rightarrow$ Zwei verschiedene Funktionen:

$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \rightarrow \quad f(0{,}5, 1) = \min\{0{,}5, 1\} = 0{,}5$

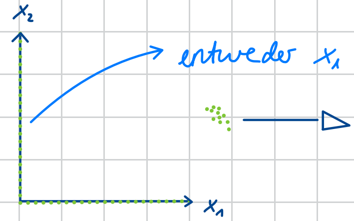
$f(x_1, x_2) = 1 \quad \rightarrow \quad f(3, 2) = \min\{3 \cdot 2, 1\} = 1$

$\rightarrow$ strikt wachsend
$\rightarrow$ schwach wachsend
} die ganze Funktion ist schwach wachsend

$\rightarrow$ quasi-konkav
$\rightarrow$ quasi-konkav
} quasi-konkav ✓

Punkt 0? $(x_1 \,\|\, x_2) = 0$

entweder x_1 oder x_2 sind 0

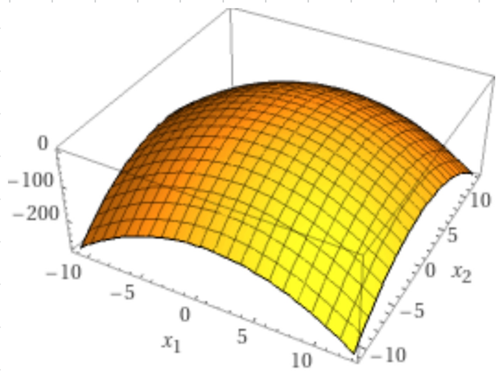


d)

$f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2$

$$\left.\begin{aligned} f(1,1) &= -(1-1)^2 - (1-1)^2 = 0 \\ f(2,1) &= -(2-1)^2 - (2-1)^2 = -2 \end{aligned}\right\} <$$

$\rightarrow$ nicht strikt wachsend
odr schwach



$\rightarrow$ quasi-konkav ✓

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 \\ &= -(x_1^2 + 1 - 2x_1) - (x_2^2 - 2x_2 + 1) \\ &= -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 2x_2 - 2 \end{aligned}$$

$f'_{x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 + 2$

$f''_{x_1}(x_1, x_2) = -2 < 0$ gleich für x_2 daraus folgt: funktion ist konkav

6. Bestimmen Sie die partiellen ersten Ableitungen der folgenden Funktionen, jeweils im Gebiet $\{(x_1, x_2) | x_1 > 0, x_2 > 0\}$:

   (a) $f(x_1, x_2) = c\ln(x_1) + d\ln(x_2)$, wobei $c > 0$ und $d > 0$ fest vorgegebene Parameter sind,

   (b) $f(x_1, x_2) = (x_1)^c(x_2)^d$, wobei $c > 0$ und $d > 0$ fest vorgegebene Parameter sind,

   (c) $f(x_1, x_2) = -\frac{1}{1+x_1} + x_2$,

   (d) $f(x_1, x_2) = e^{x_1 e^{x_2}}$.

   Tipp: Betrachten Sie f als eine Funktion einer einzigen Veränderlichen, x_1 oder x_2, und benutzen Sie die Ableitungsregeln einschließlich der Kettenregel für Funktionen einer Veränderlichen.

a) $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = c \cdot \dfrac{1}{x_1}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = d \cdot \dfrac{1}{x_2}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = c\, x_1^{c-1}\, x_2^{d}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^{c}\, d\, x_2^{d-1}$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$u(x_1) = -1 \qquad u' = 0$

$v(x_1) = 1 + x_1 \qquad v' = 1$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{-(-1)\cdot 1}{(1+x_1)^2} = \dfrac{1}{(1+x_1)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 1$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \underbrace{\exp(x_1 \exp(x_2))}_{u'} \cdot \underbrace{\exp(x_2)}_{g'}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \underbrace{\exp(x_1 \exp(x_2))}_{u'}\ \underbrace{x_1 \exp(x_2)}_{g'}$

Kettenregel

$u(g(x))$

$u'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ableitung

$\exp(x) : \exp(x)$

$\exp(\underbrace{a}_{\text{innere Ableitung: } a}x) : a\exp(ax)$