$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

1. Betrachten Sie einen Konsumenten mit Perfekte-Substitute-Präferenzen. Lösen Sie für alle Preis-Budget-Situationen (p_1, p_2, Y) das Standard-Konsumentenproblem. Gehen Sie entlang der folgenden Schritte vor:

   (a) Warum sind die Bedingungen erster Ordnung notwendig und hinreichend für die Optimierung?

   (b) Schreiben Sie die Bedingungen erster Ordnung separat für drei Fälle auf: (i) Bündel im Inneren, (ii) Bündel auf der vertikalen Achse, und (iii) Bündel auf der horizontalen Achse.

   (c) Bestimmen Sie die optimalen Bündel. Unterscheiden Sie zwischen den drei Fällen "$p_1 < p_2$", "$p_1 = p_2$" und "$p_1 > p_2$".

$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Budgetgerade

$y = x_1 p_1 + x_2 p_2$

a) Bedingung erster Ordnung (FOC): 1. Ableitung = 0

-> hinreichend, da Präferenzrelation monoton & konvex sind

b)

optimale Allokation

i) innere Lösung: $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ => $\frac{p_1}{p_2} = 1$ oder $p_1 = p_2$

$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = y$

– es werden sowohl x_1 als auch x_2 konsumiert

ii) äußere Lösung A: $x_1^* = 0$ $x_2^* > 0$ => $\frac{p_1}{p_2} > 1$ oder $p_1 > p_2$

– es wird nur x_2 konsumiert

iii) äußere Lösung B: $x_1^* > 0$ $x_2^* = 0$ => $\frac{p_1}{p_2} < 1$ oder $p_1 < p_2$

– es wird nur x_1 konsumiert

c)

- Betrachten wir den Fall $p_1 < p_2$, es gilt: $\frac{p_1}{p_2} < 1$ also Fall iii)

  Wir wissen das immer gelten muss: $p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = y$,

  weil $x_2^* = 0$ gilt: $p_1 x_1^* = y$ -> umgeformt: $x_1^* = \frac{y}{p_1}$

  -> optimale Mengen von x_1 und x_2 sind: $(\frac{y}{p_1}, 0)$

- Analog Fall $p_1 > p_2$: $(0, \frac{y}{p_2})$

- Fall $p_1 = p_2 = p$ (i) es gilt: $p x_1 + p x_2 = y$ $x_1 + x_2 = \frac{y}{p}$

  $x_1^* = \frac{y}{p} - x_2^*$

  max $x_1^* = \frac{y}{p}$ min $x_1^* = 0$

  max $x_2^* = \frac{y}{p}$ min $x_2^* = 0$

  -> jede Mögliche ~~Menge~~ Menge von x_1 und/oder x_2 ist optimal und möglich, solange gilt: $x_1 + x_2 = \frac{y}{p}$

3. Betrachten Sie eine Konsumentin mit quasi-linearen Präferenzen. Die Konsumentin hat ein besonderes Geschmacksempfinden bezüglich Keksen. Das zweite Gramm Kekse bringt mehr Genuss als das erste, das dritte mehr als das zweite u.s.w. bis die Menge von 50g/Tag erreicht ist. Von dort an setzt das Sättigungsgefühl ein und jedes weitere Gramm bringt wieder weniger zusätzlichen Genuss. Wir modellieren die Konsumentin folgendermaßen. Ihre Zahlungsbereitschaft für Kekse (Gut 1, perfekt teilbar, gemessen in Einheiten von 100g/Tag) ist gegeben durch die Funktion

$$v(x_1) = \begin{cases} 4(x_1)^2, & \text{falls } x_1 \leq 1/2, \\ 3 - \frac{1}{x_1}, & \text{falls } x_1 > 1/2. \end{cases}$$

Im folgenden sind einige Indifferenzkurven der Konsumentin und eine Budgetgerade dargestellt:

(a) Zu welchem Preis p_1 und welchem Einkommen Y gehört die Budgetgerade?

(b) Sind die Bedingungen erster Ordnung hier hinreichend für ein Optimum?

(c) Bestimmen Sie den optimalen Kekskonsum in der Preis-Einkommen-Situation, die der angegebenen Budgetgerade entspricht.

$-\frac{1}{x_1} = -x_1^{-1}$

$-(-1)\, x_1^{-2}$

x_1^{-2}

$\frac{1}{x_1^2}$

a) Budgetgerade

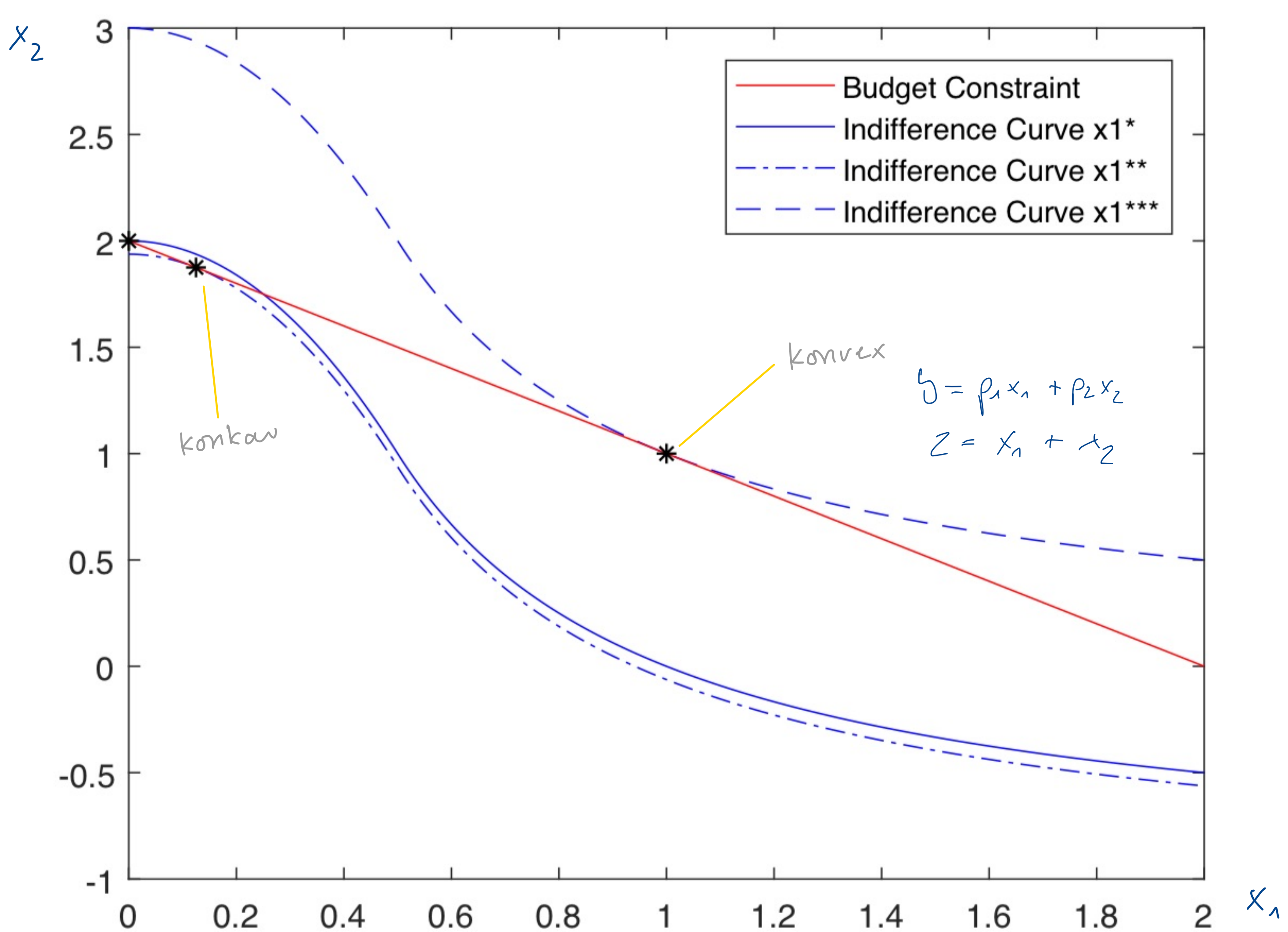
$y = x_1 p_1 + x_2 p_2$

↳ Funktion: $\underbrace{f(x_1)}_{x_2} = 2 - x_1$

Steigung $-\frac{p_1}{p_2} = -1$

$p_1 = p_2 = 1$

↳ $y = 2$ (Schnittpunkt mit beiden Achsen, preis = 1)



b)

↳ reicht nicht aus, weil Nutzenfunktion nicht konvex ist.

→ Alle 3 indiff-Kurven tangieren die Budgetgerade und wären laut erster Ordnung optimal

(IC x_1^* ist eine mögliche Randlösung)

→ Wir sehen aber klar: nur x_1^{***} ist optimal

c) Bedingung erster Ordnung:

$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$

Budgetgerade

$$\frac{du(x_1,x_2)}{dx_1} = \begin{cases} 8x_1 & \text{if } x_1 \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x_1^2} & \text{if } x_1 > \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \frac{du(x_1,x_2)}{dx_2} = 1$$

$y = x_1 + x_2 = 2$

$$L = u(x_1, x_2) + \lambda(2 - x_1 - x_2)$$

$$\frac{dL}{dx_2} = 1 - \lambda \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda = 1$$

$$\frac{dL}{dx_1} = \begin{cases} 8x_{1_{1/2}} - \lambda \overset{!}{=} 0 & \text{if } x_1 \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x_{1_{1/2}}^2} - \lambda \overset{!}{=} 0 & \text{if } x_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = 2 - x_1 - x_2 \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{cases} 8x_{1_{1/2}} \overset{!}{=} 1 & x_1 \overset{!}{=} \frac{1}{8} \rightarrow x_2 = 2 - \frac{1}{8} = 1{,}875 \\ \frac{1}{x_{1_{1/2}}^2} \overset{!}{=} 1 & x_{1_{1/2}}^2 \overset{!}{=} 1 \quad x_{1_{1/2}} = \pm 1 \end{cases}$$

(negative x nicht möglich)

↳ $x_{1_{1/2}} = 1 \quad x_2 = 2 - 1 = 1$

$2 = x_1 + x_2$

$x_2 = 2 - x_1$

→ Fazit: 2 Mögliche Allokationen (x_1, x_2) A: $(\frac{1}{8}, 1{,}875)$ B: $(1, 1)$

Bedingung 2. Ordnung

$$\frac{dL^2}{d^2x_1} = \begin{cases} 8 > 0 & \text{if } x_1 \le \frac{1}{2} \\ -2x_1^{-3} \le 0 & \text{if } x_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nutzen konvex / Präferenzen konkav

← fällt weg: kann nicht optimal sein

← Optimalitätsbedingung erfüllt

Nutzen konkav, Präferenzen konvex

$$\frac{dL^2}{d^2x_2} = 0 \le 0 \checkmark \qquad \frac{dL^2}{d^2\lambda} = 0$$

$f = \frac{1}{x_1^2} = x_1^{-2}$

$f' = -2x_1^{-3}$

→ Also ist das Bündel $(x_1, x_2) = (1, 1)$ optimal

4. Betrachten Sie eine Konsumentin, die eine "ideale Freizeitmenge" $\bar{l}$ hat mit $0 < \bar{l} < T$ (das bedeutet, dass sie idealerweise $T - \bar{l}$ Stunden arbeiten möchte). Ihre Präferenzen im Freizeit-Konsum-Modell sind gegeben durch die Nutzenfunktion $u(k, l) = k - (l - \bar{l})^2$. Die Konsumausstattung wird mit k_0 bezeichnet. Die Zeitausstattung wird mit T bezeichnet. Der Lohn (pro Zeiteinheit) wird mit w bezeichnet.

   (a) Skizzieren Sie einige Indifferenzkurven. Ist die Präferenzrelation monoton? Ist sie konvex? (Hinweis: Beschreiben Sie Indifferenzkurven durch Funktionen, die die vertikale Achse (l) in die horizontale Achse (k) abbilden.)

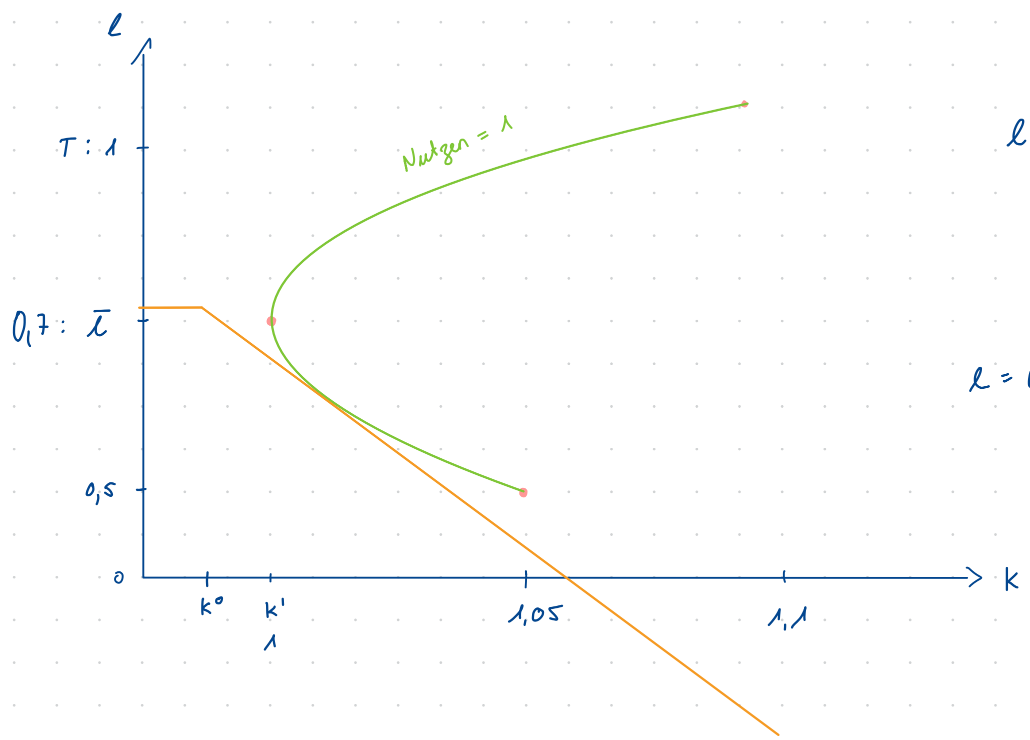
   (b) Finden Sie das optimale Konsumbündel, ausgedrückt als eine Funktion von k_0, w, T und $\bar{l}$.

$u(1, 0{,}7) = 1$

a) Wir nehmen den Punkt $y = (k', \bar{l})$ $\quad u(k', \bar{l}) = k' - (\bar{l} - \bar{l})^2$

$= k'$

→ wir brauchen eine Funktion, die l auf der vertikalen Achse und k auf der horizontalen Achse abbildet



$l = 1$: $1 = k - (l - 0{,}7)^2$

$1 = k - (1 - 0{,}7)^2$

$1 = k - 0{,}09$

$k = 1{,}09$

$l = 0{,}5$: $1 = k - (l - 0{,}7)^2$

$1 = k - (0{,}5 - 0{,}7)^2$

$1 = k - (-0{,}2)^2$

$k = 1{,}04$

b) $u(k,l) = k - (l - \bar{l})^2$
$= k + l^2 - \bar{l}^2 + 2l\bar{l}$

$$GRS = -\frac{\frac{du(k,l)}{dk}}{\frac{du(k,l)}{dl}} = -\frac{1}{-2l + 2\bar{l}} = \frac{1}{2(l-\bar{l})} \overset{!}{<} 0 \quad \forall\ \bar{l} > l$$

↳ optimal nur wenn $\bar{l} > l$
damit fällt jede Freizeitmenge $l_\epsilon [\bar{l}, T]$ weg und ist niemals optimal

Budgetgerade $\quad r \cdot k = w \cdot (T - l)$

Kosten Kapital (=1) · Kapital = Stunden Lohn · Arbeitszeit

$$\mathcal{L} = k - (l - \bar{l})^2 + \lambda(rk - w(T-l))$$

I $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = 1 + \lambda r \overset{!}{=} 0 \qquad 1 = -\lambda r$

II $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = 2(\bar{l} - l) + \lambda w \overset{!}{=} 0 \qquad 2(l - \bar{l}) = -\lambda w$

$\frac{I}{II} : -\frac{1}{2(l-\bar{l})} = \frac{-\lambda r}{-\lambda w} = \frac{r}{w}$

III $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = rk - w \cdot (T - l) \overset{!}{=} 0$
$rk = w \cdot (T - l)$

Im Optimum gilt:

$$\boxed{GRS = -\frac{du/dk}{du/dl} = -\frac{r}{w} = -\frac{1}{w}}$$

Im Optimum muss gelten:

↳ $\frac{1}{2(l - \bar{l})} \overset{!}{=} -\frac{1}{w}$

$T > \bar{l} > l^*$

$2(l^* - \bar{l}) = -w$
$2l^* = -w + 2\bar{l}$

$l^* = \frac{-w + 2\bar{l}}{2} = \bar{l} - \frac{w}{2}$

$w > 0 \rightarrow l^* < \bar{l}$
$l^* < T$

optimal, wenn:
$k^* > k_0$
$l^* \overset{!}{>} 0 \iff \bar{l} - \frac{w}{2} > 0$
$\bar{l} > \frac{w}{2}$
$2\bar{l} \overset{!}{>} w$

→ Lohn darf nicht zu hoch relativ zur idealen Freizeitmenge $\bar{l}$ liegen

1. mögliche Randlösung

$l^* = T \qquad k^* = k_0$
↳ maximale Freizeit $\qquad$ ↳ Grundausstattung Kapital

Damit diese Randlösung hält muss gelten:

$0 \geq GRS_{12}(k^*, l^*) \overset{!}{=} -\frac{1}{w}$

$0 \geq \frac{1}{2(T - \bar{l})}$ ↯ nicht erfüllt, da $T > \bar{l}$ und dadurch $GRS > 0$ ist, GRS muss aber < 0 sein

(>0)

2. Mögliche Randlösung

$k^* = k_0 + w(T - \ell)$ $\quad \ell^* = 0$

$= k_0 + wT$ $\quad \Rightarrow$ keine Freizeit

$\Rightarrow$ maximale Arbeit

Es muss nach wie vor gelten:

$$0 \geq GRS_{12}(k^*, \ell^*) \leq -\frac{1}{w}$$

$$0 \geq \frac{1}{2(0 - \bar{\ell})} = \frac{1}{-2\bar{\ell}} \leq -\frac{1}{w}$$

$-\frac{1}{2\ell} \geq -\frac{1}{w} \quad | + \frac{1}{2\ell} \quad | + \frac{1}{w}$

$\frac{1}{w} \geq \frac{1}{2\ell} \quad | \cdot 2\ell \quad | \cdot w$

$2\ell \geq w$

✓ für $\bar{\ell} > 0$

wichtig:
bei mal (-1)
dreht sich das
ungleich Zeichen

$$\frac{1}{2\bar{\ell}} \geq \frac{1}{w}$$

$$2\bar{\ell} < w$$

$\Rightarrow$ gegenteilige Bedingung zum ersten Optimum:

Wenn der Lohn groß genug ist relativ zur idealen Freizeitmenge $\bar{\ell}$, dann wird das Individuum die komplette verfügbare Zeit zum Arbeiten benutzen