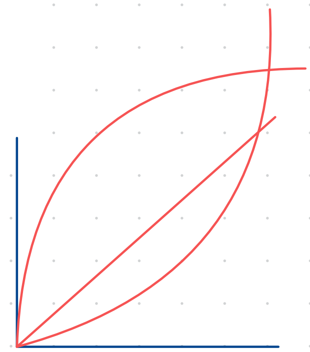
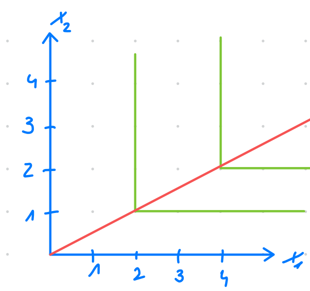
1. Betrachten Sie jeder der folgenden Produktionsfunktionen mit zwei Inputs:

   (a) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$.
   (b) $f(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$.
   (c) $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$.
   (d) $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$

   Lösen Sie für jeden Fall folgende Aufgaben. (i) Geben Sie ein Beispiel für einen Produktionsprozess, der mit der gegebenen Produktionsfunktion sinnvoll modelliert werden kann. (ii) Ist die zugrundeliegende Technologie konvex? (iii) Gilt für das Input 1 und/oder Input 2 das Gesetz der abnehmenden Grenzerträge? (iv) Sind die Skalenerträge steigend, konstant oder fallend? (v) Bestimmen Sie die bedingte Faktornachfrage.



a) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$



(i) Input 1: Arbeiter pro Stunde
Input 2: Maschine pro Stunde z.B. Bäume

Output: Was von der Maschine produziert wird
z.B.: geerntete Früchte: 2 Arbeiter bedienen die Maschine

(ii) f ist quasi-konkav

Zuwachs des Nutzens, der durch den Einsatz einer weiteren Einheit des eines Produktionsfaktors erzielt wird

(iii) – Im Bereich $x_1 < 2x_2$: Grenzprodukt von Gut 1: 1 Gut 2: 0
$x_1 > 2x_2$: von Gut 1: 0 Gut 2: 2

(iv) → Konstante Skalenerträge

(v) Bedingte Faktornachfrage $q = \min\{x_1, 2x_2\}$

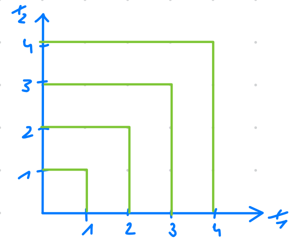
→ BEO nicht möglich, da $\min\{\ldots\}$ nicht ableitbar

→ Es muss gelten: $x_1^* = 2x_2^*$ (Ansonsten könnte man x_1 oder x_2 senken ohne Nutzen zu verlieren)

→ Daraus folgt: $x_1^* = q$ & $2x_2^* = q$
$x_2^* = \frac{q}{2}$

→ Bedingte Faktornachfrage: $d(p_1, p_2, q) = (q, \frac{q}{2})$ → unabhängig von den Preisen
(Kostenminimierung in der langen Frist)
(wegen perfekter Komplemente fkt.)

b) $f(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$



(i) Eine Firma gründet 2 Abteilungen, um das gleiche Konstruktionsproblem zu lösen
Input 1: Ingenieure pro Stunde Abteilung 1
Input 2: " Abteilung 2
Output: Kraftstoff effizienz eines neuen Motors

(ii) <u>Nein</u> f ist nicht quasi konkav (Indifferenzkurven sind nach innen gerichtet)

(iii) <u>Grenzerträge</u>

Für Gut 1: abnehmende Grenzerträge im Bereich $x_1 < x_2$: 0 — steigt Gut 1 um 1 verändert sich der Nutzen nicht
zunehmende -"- $x_1 > x_2$: 1 — steigt Gut 1 um 1 steigt auch der Nutzen um 1

Für Gut 2: abnehmend: $x_1 > x_2$: 0
zunehmend: $x_1 < x_2$: 1

(iv) <u>Skalenerträge:</u> konstant $f(\theta x_1, \theta x_2) = \max\{\theta x_1, \theta x_2\} = \theta \max\{x_1, x_2\}$

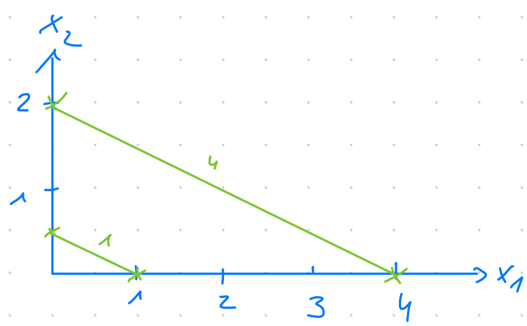
(v) <u>Faktornachfrage:</u>
→ es ist immer kostenminimierend <u>entweder</u> Gut 1 <u>oder</u> Gut 2 zu produzieren

$$d(p_1, p_2, q) \begin{cases} (0, q) & \text{wenn } p_1 \geq p_2 \\ (q, 0) & \text{wenn } p_1 \leq p_2 \end{cases}$$

wenn $p_1 = p_2$ sind entweder $(0,q)$ oder $(q,0)$ optimal, kein Mix aus beiden

c)

$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$



(i) Input 1 = Arbeit pro Stunde
Input 2 = Roboter pro Stunde
Output 1 = Ergebnis der Aufgabe

(ii) Ja, f ist quasi-konkav

(iii) $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0 \qquad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$ → konstantes Grenzprodukt

(iv) Konstante Skalenerträge

$$f(\theta x_1, \theta x_2) = \theta x_1 + 2\theta x_2 = \theta(x_1 + 2x_2) = \theta f(x_1, x_2)$$

(v) Bedingte Faktornachfrage

$$GRTS = -\frac{f_1'(x_1, x_2)}{f_2'(x_1, x_2)} = -\frac{1}{2}$$ → Gut 2 ist immer doppelt so wertvoll wie Gut 1

→ Firma verwendet Gut 2 als Input, wenn es weniger als halb so teuer ist wie Gut 1, ansonsten Gut 1

$$d(p_1, p_2, q) = \begin{cases} (0, \frac{q}{2}) & \text{wenn } p_2 < 2p_1 \\ (q, 0) & p_2 > 2p_1 \\ \{(x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 = q\} & p_2 = 2p_1 \end{cases}$$

d)

$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$

(i) → Inputs sind gewissermaßen, aber nicht vollständig substituierbar

(ii) Ja, f ist quasi-konkav (C-D Prod. fkt)

(iii) abnehmende Grenzerträge
→ erfüllt für beide Güter

$\frac{df}{dx_1} = \frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} > 0 \qquad \frac{d^2f}{dx_1^2} = -\frac{2}{9} x_1^{-\frac{5}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} < 0$

→ genauso für x_2

(iv) abnehmende Skalenerträge

$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2$

$f(\theta x_1, \theta x_2) = (\theta x_1)^{\frac{1}{3}} (\theta x_2)^{\frac{1}{3}} = \theta^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} \qquad m = \frac{2}{3} < 1$

$\theta^{\frac{1}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} \cdot \theta^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

$(x^a + x^b = x^{a \cdot b})$

(v)

$GRTS = -\frac{f_1'(x_1, x_2)}{f_2'(x_1, x_2)} = -\frac{\frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}}} = -\frac{x_2^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}}{x_1^{\frac{1}{3}} x_1^{\frac{2}{3}}} = -\frac{x_2}{x_1}$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

BEO erfordert: $GRTS = -\frac{p_1}{p_2} \qquad -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$ und $x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} = q$

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1$

$x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$ → einsetzen

→ $x_1^{\frac{1}{3}} \left(\frac{p_1}{p_2} x_1\right)^{\frac{1}{3}} = q \quad |^{\wedge 3}$

$x_1 \frac{p_1}{p_2} x_1 = q^3$

$x_1^2 = q^3 \frac{p_2}{p_1}$

$x_1^* = \sqrt{q^3 \frac{p_2}{p_1}}$

analog: $x_2^* = \sqrt{q^3 \frac{p_1}{p_2}}$

$d(p_1, p_2, q) = \left(\sqrt{q^3 \frac{p_2}{p_1}}, \sqrt{q^3 \frac{p_1}{p_2}} \right)$

→ je teurer ein Input relativ zu einem anderen Input, desto weniger von diesem Input nutzt die Firma

2. Betrachten Sie eine Firma, die Kapital und Arbeit verwendet, um ein Outputgut zu produzieren. Bei der gegenwärtig verwendeten Input-Kombination ist das Grenzprodukt des Kapitals gleich 3 und das Grenzprodukt der Arbeit gleich 2.

   Wieviel Arbeit – pro zusätzlicher Einheit Kapital – kann die Firma approximativ sparen, ohne das Output-Niveau zu senken, wenn die Menge des eingesetzten Kapitals ein wenig vergrößert wird?

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ - Produktionsfunktion} \\ K \text{ - Kapital} \\ L \text{ - Arbeit} \end{array}\right\} f(K, L)$$

→ wir wissen:
(Grenzprodukt)

$$\frac{\partial f(K,L)}{\partial K} = 3$$

$$\frac{\partial f(K,L)}{\partial L} = 2$$

→ Daraus können wir die GRTS errechnen:

$$GRTS = -\frac{\frac{\partial f(K,L)}{\partial K}}{\frac{\partial f(K,L)}{\partial L}} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

→ Die Firma kann also pro zusätzlicher Einheit Kapital 1,5 Stunden Arbeitszeit sparen, ohne das Output Niveau zu verringern

3. Betrachten Sie die "verschobene" Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = A(x_1+1)^c(x_2)^d$ mit Parametern $A > 0$, $c > 0$ und $d > 0$.

(a) Geben Sie ein Beispiel eines Produktionsprozesses, der mit der Produktionsfunktion modelliert werden kann.

(b) (* Algebra-intensive Aufgabe.) Bestimmen Sie die bedingte Faktornachfrage.

(c) Zeigen Sie, dass f für $c + d \leq 1$ abnehmende Skalenerträge hat.

(d) Zeigen Sie, dass f für $c = d = 1$ steigende Skalenerträge hat.

a) Wichtig: teilweise Substituierbarkeit zwischen Gütern

z.B.: Input 1: Arbeit, jedoch ist die Firma verpflichtet mindestens eine Arbeitsstunde für die Produktion zu verwenden
x_1: zusätzliche (zu der einen Stunde) benötigte Arbeit

b) $f(x_1, x_2) = A \cdot (x_1+1)^c x_2^d$

$\min \; p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad s.t \quad f(x_1, x_2) \leq q$

Innere Lösung

$\mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(A \cdot (x_1+1)^c x_2^d - q)$

BEO:

(I) $\frac{d\mathcal{L}}{dx_1} = p_1 - \lambda A c (x_1+1)^{c-1} x_2^d \overset{!}{=} 0$

$p_1 = \lambda A c (x_1+1)^{c-1} x_2^d$
$= \lambda f'_{x_1}(x_1, x_2)$

(II) $\frac{d\mathcal{L}}{dx_2} = p_2 - \lambda A d (x_1+1)^c x_2^{d-1} \overset{!}{=} 0$

$p_2 = \lambda A d (x_1+1)^c x_2^{d-1}$
$= \lambda f'_{x_2}(x_1, x_2)$

(III) $\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = -A(x_1+1)^c x_2^d + q = 0$

$A(x_1+1)^c x_2^d = q$

$\frac{(I)}{(II)}: \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{\cancel{\lambda A} c (x_1+1)^{c-1} x_2^d}{\cancel{\lambda A} d (x_1+1)^c x_2^{d-1}}$

$= \frac{c}{d} \frac{(x_1+1)^{-1}}{x_2^{-1}}$

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{c}{d} \frac{x_2}{(x_1+1)}$ ← GRTS

↓ umstellen nach x_2

$c x_2 = \frac{p_1}{p_2} d(x_1+1)$

$x_2 = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{d}{c} (x_1+1)$ (IV)

↓ einsetzen in (III)

$A(x_1+1)^c \left(\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{d}{c}(x_1+1)\right)^d = q$

$A\left(\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{d}{c}\right)^d (x_1+1)^{c+d} = q$

$(x_1+1)^{c+d} = \frac{q}{A}\left(\frac{p_1}{p_2} \frac{d}{c}\right)^{-d}$

$$x_1 + 1 = \sqrt[c+d]{\frac{q}{A}\left(\frac{p_1}{p_2}\,\frac{d}{c}\right)^{-d}}$$

$$x_1^* = \sqrt[c+d]{\frac{q}{A}\left(\frac{p_1}{p_2}\,\frac{d}{c}\right)^{-d}} - 1$$

↓ in (IV) einsetzen

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{d}{c}\left(\sqrt[c+d]{\frac{q}{A}\left(\frac{p_1}{p_2}\,\frac{d}{c}\right)^{-d}} - 1 + 1\right)$$

$$x_2^* = \frac{p_1}{p_2}\,\frac{d}{c}\left(\sqrt[c+d]{\frac{q}{A}\left(\frac{p_1}{p_2}\,\frac{d}{c}\right)^{-d}}\right)$$

→ dies ist die Innere Lösung, also wenn $x_1^* > 0$ & $x_2^* > 0$ gilt

Randlösung – wenn $f(x_1, x_2) \to \infty$ for $\|x_i\| \to \infty$ haben wir keine Randlösung.

→ Diese Regel gilt hier nicht! Die Isoquanten könnten die x_2 Achse schneiden, da x_1 um 1 verschoben ist.

→ Möglicher Fall: Das kostenminimierende Bundle liegt am Rand: $(x_1^*, x_2^*) = (0, x_2^*)$

→ Zwei BEO von oben:

≥ : die Bedingung
= : im Optimum ggb.

(III) $A(x_1+1)^c x_2^d = q$ $\qquad$ $\frac{(I)}{(II)}$ $\frac{p_1}{p_2} \geq \frac{c\ \ x_2}{d\ (x_1+1)}$

($x_1 \uparrow 0$ in both)

$$\hookrightarrow A \cdot 1^c x_2^d = q$$

$$A x_2^d = q$$

$$x_2^d = \frac{q}{A}$$

$$x_2^* = \left(\frac{q}{A}\right)^{-d} = \left(\frac{A}{q}\right)^d \xrightarrow{\text{einsetzen}} \frac{p_1}{p_2} \geq \frac{c\,\frac{A^d}{q^d}}{d} = \frac{c\,A^d}{d\,q^d}$$

wenn also $\frac{p_1}{p_2} \geq \frac{c\,A^d}{d\,q^d}$ gilt die Randlösung: $\left(0, \left(\frac{A}{q}\right)^d\right)$

wenn $\frac{p_1}{p_2} < \frac{c\,A^d}{d\,q^d}$ gilt die Innere Lösung $\left(\sqrt[c+d]{\frac{q}{A}\left(\frac{p_1}{p_2}\,\frac{d}{c}\right)^{-d}} - 1,\ \frac{p_1}{p_2}\,\frac{d}{c}\left(\sqrt[c+d]{\frac{q}{A}\left(\frac{p_1}{p_2}\,\frac{d}{c}\right)^{-d}}\right)\right)$

c)

$$f(\theta x_1, \theta x_2) = A(\theta x_1 + 1)^c (\theta x_2)^d \quad < \quad A(\theta x_1 + \theta)^c (\theta x_2)^d = \theta^{c+d} A (x_1 + 1)^c x_2^{\,d} = \underbrace{\theta^{c+d}}_{<1} f(x_1, x_2) \quad < \quad \theta f(x_1, x_2)$$

abnehmende Skalenerträge < abnehmende Skalenerträge < konstante Skalenerträge

d)

$$f(\theta x_1, \theta x_2)$$
$$= A(\theta x_1 + 1)^{\overset{=1}{c}} (\theta x_2)^{\overset{=1}{d}}$$
$$= A(\theta x_1 + 1)\, \theta x_2$$
$$= A(\theta^2 x_1 x_2 + \theta x_2)$$
$$= \theta A(\theta x_1 x_2 + x_2)$$

$\longrightarrow$ steigende Skalenerträge, da θ $m = 1$ rausmultipliziert ist, aber immer noch ein Teil θ $m > 0$ in der Produktionsfunktion "steckt". Somit muss $m > 1$ sein.