1. Berechnen Sie die Angebotsfunktion für jede der folgenden Produktionsfunktionen (Ihre Lösung sollte für jeden Fall ein Ausdruck sein, der von den Input-Preisen p_1 und p_2 abhängt).

   (a) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$
   (b) $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$
   (c) $f(x_1) = \ln(x_1)$ für alle $x_1 > 1$ und $f(x_1) = 0$ für alle $x_1 \leq 1$.

   Erstellen Sie jeweils eine Skizze der Durchschnittskosten-Funktion, der Grenzkosten-Funktion und der Angebotsfunktion, indem Sie die Input-Preise $p_1 = 4$ und $p_2 = 1$ annehmen.

Vorlesung Kapitel 8A
Teil I, II, III

$\Rightarrow$ Wir müssen für jeden Outputpreis $p > 0$ die Angebotsmenge $S(p)$ zu bestimmen

a) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$

Kostenfunktion: $C_f(q) = p_1 q + p_2 \frac{q}{2}$

Durchschnittskosten $DK(q) = p_1 + \frac{p_2}{2}$ für $q > 0$

$\rightarrow$ konstant in q, daher ist jede beliebige Zahl $\check{q} \geq 0$ eine effiziente Betriebsgröße

Grenzkosten: $GK(q) = p_1 + \frac{p_2}{2}$

$\rightarrow$ Das Angebot folgt für alle Preise $p > p_1 + \frac{p_2}{2}$ dem Verlauf des Grenzkostenkurve

$\rightarrow$ Je mehr die Firma produziert, desto höher des Gewinn, theoretisch bis ∞

Fall 1: $p < p_1 + \frac{p_2}{2}$ $\Rightarrow$ Betriebsoptimum: $S(p) = 0$

Fall 2: $p = p_1 + \frac{p_2}{2}$ $\Rightarrow$ $S(p) = [0, \infty)$ (mit 0)

Fall 3: $p > p_1 + \frac{p_2}{2}$ $\Rightarrow$ $S(p) > 0$ (ohne 0)

$$\boxed{S(p) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } p < p_1 + \frac{p_2}{2} \\ [0, \infty) & \text{, falls } p = p_1 + \frac{p_2}{2} \\ \infty & \text{, falls } p > p_1 + \frac{p_2}{2} \end{cases}}$$

Teil 2: Preise einsetzen $p_1 = 4$ $p_2 = 1$

$DK(q) = 4 + \frac{1}{2} = 4{,}5$

$GK(q) = 4 + \frac{1}{2} = 4{,}5$

$$S(p) = \begin{cases} 0 & p < 4{,}5 \\ [0, \infty) & p = 4{,}5 \\ \infty & p > 4{,}5 \end{cases}$$

b) $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$

<u>Kostenfunktion:</u> $C(q) = 2\sqrt{p_1 p_2 q^3}$

<u>Durchschnittskosten:</u> $DK(q) = 2 p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$

$\rightarrow$ min bei $q = 0$

$\rightarrow$ Betriebsoptimum $q^* = 0$ $\quad DK(0) = 0$

<u>Grenzkosten:</u> $GK(q) = C_q'(q) = 3 p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} > 0$

$\rightarrow$ strikt wachsende Funktion

$\rightarrow$ Angebot folgt stets dem Verlauf der GK-Funktion

$\rightarrow$ Wir müssen die Inverse der GK-Fkt. bilden

$$GK(q) = p \quad \Rightarrow \quad GK^{-1}(p) = q \quad \Rightarrow \quad GK(GK^{-1}(p)) = p$$

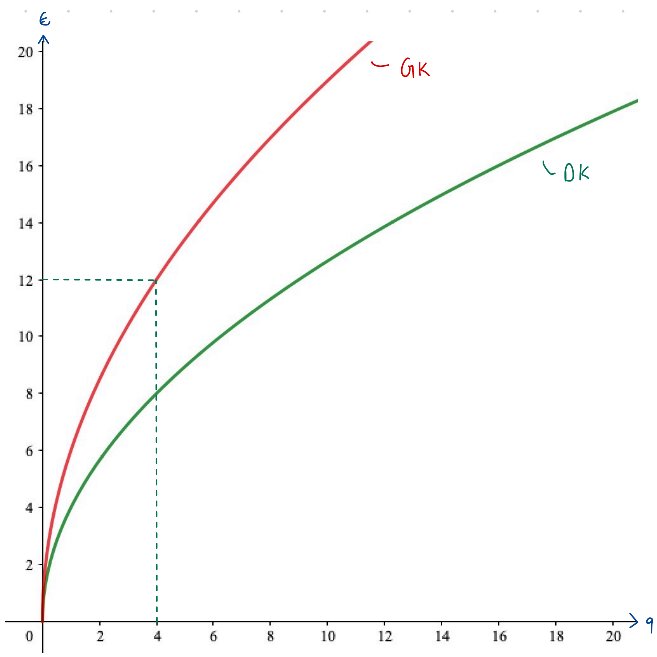
einsetzen $\Rightarrow$ $3 p_1^{1/2} p_2^{1/2} (GK^{-1}(p))^{\frac{1}{2}} = p \quad |^2$

$$9 p_1 p_2 \, GK^{-1}(p) = p^2$$

$$GK^{-1}(p) = \boxed{\frac{p^2}{9 p_1 p_2} \equiv S(p)}$$

Teil 2: Preise einsetzen: $p_1 = 4 \quad p_2 = 1$

$DK(q) = 2 \, 4^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = 4 q^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $GK = 3 \, 4^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = 6 q^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $S(p) = \frac{p^2}{9 \cdot 4 \cdot 1} = \frac{p^2}{36}$



<u>Bsp</u> $S(12) = \frac{12^2}{36} = 4$

c) $f(x_1) = \ln(x_1)$ für alle $x_1 > 1$ und $f(x_1) = 0$ für alle $x_1 \leq 1$

Kostenfunktion: $C_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{falls } q = 0 \\ p_1 \exp(q) & \text{falls } q > 0 \end{cases}$

Durchschnittskosten: $DK(q) = \frac{C_1(q)}{q} = \frac{p_1 \exp(q)}{q}$ $\Rightarrow$ Betriebsoptimum

$DK(\check{q}) = GK(q)$

$\frac{p_1 \exp(q)}{q} = p_1 \exp(q)$

$\check{q} = 1$

$\Rightarrow p_1 \exp(1) = p_1 e$

Grenzkosten: $GK(q) = C_1'(q) = p_1 \exp(q) > 0$ $\Rightarrow$ strikt wachsend

$\hookrightarrow$ für alle Preise $p > p_1 e$ folgt das Angebot dem Verlauf der GK-Funktion

$\rightarrow$ Formal mit der Inversen

Fall 1: $p < p_1 e$ $\Rightarrow S(p) = 0$

Fall 2: $p = p_1 e$ $\Rightarrow S(p) = \{0, 1\}$

sowohl $q = 0$ als auch $\check{q} = 1$ ist optimal

Fall 3: $p > p_1 e$

$p = GK(GK^{-1}(p))$

$\quad = p_1 \exp(GK^{-1}(p)) \quad | : p_1$

$\frac{p}{p_1} = \exp(GK^{-1}(p)) \quad | \ln(\ldots)$

$\ln\left(\frac{p}{p_1}\right) = GK^{-1}(p)$

$S(p) = \ln\left(\frac{p}{p_1}\right)$

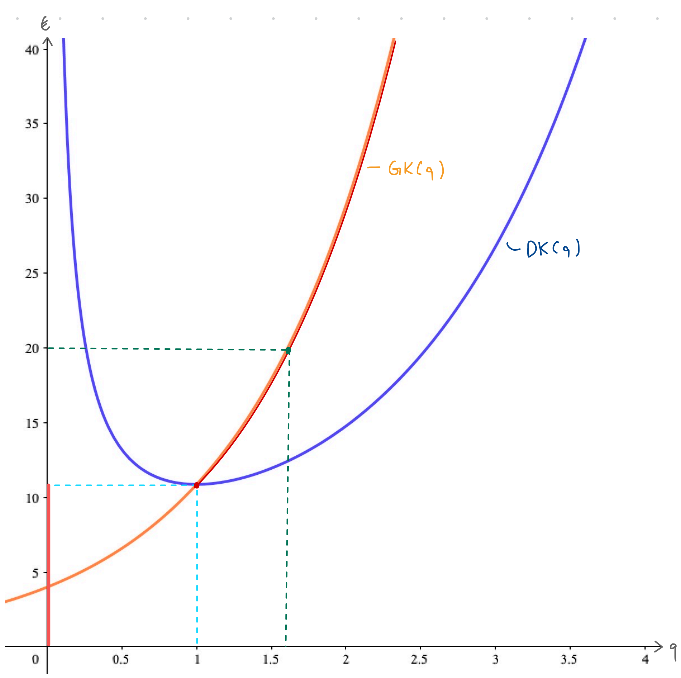
$$\boxed{S(p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < p_1 e \\ \{0, 1\} & \text{falls } p = p_1 e \\ \ln\left(\frac{p}{p_1}\right) & \text{falls } p > p_1 e \end{cases}}$$

Teil 2: Preise einsetzen $p_1 = 4$

$DK(q) = \frac{4 \cdot \exp(q)}{q}$

$GK(q) = 4 \exp(q)$

$S(p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < 4e \\ \{0, 1\} & \text{falls } p = 4e \\ \ln\left(\frac{p}{4}\right) & \text{falls } p > 4e \end{cases}$



Bsp $S(20) = \ln\left(\frac{20}{4}\right) = 1{,}61$

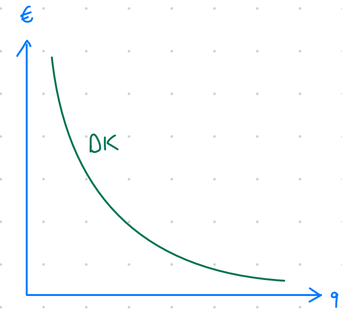
2. Bestimmen Sie für eine Firma mit der folgenden Kostenfunktion jeweils das Angebot:

(a) $C(q) = q^{3/4}$,

(b) $C(q) = \begin{cases} (100-q)q & \text{falls } q < 45, \\ 55q, & \text{falls } q \geq 45, \end{cases}$

(c) $C(q) = q^3 - 15q^2 + 125q$,

(d) $C(q) = q^{5/4}$.



a) $C(q) = q^{3/4}$

$C'(q) = \frac{3}{4} q^{-\frac{1}{4}} > 0$

$C''(q) = -\frac{3}{16} q^{-\frac{5}{4}} < 0$

$DK = \frac{q^{3/4}}{q} = q^{-\frac{1}{4}} > 0$

$DK'(q) = -\frac{1}{4} q^{-\frac{5}{4}} < 0$

$\rightarrow$ Kosten steigen je Outputmenge, aber sie steigen immer langsamer

$\rightarrow$ Durchschnittskosten sinken immer weiter

$\check{q} = \infty$

$DK(\check{q}) = 0$

Angebot $S(p) = \infty \quad \forall p$

b)

$C(q) = \begin{cases} (100-q)q & \text{falls } q < 45 \\ 55q & \text{falls } q \geq 45 \end{cases}$

Kosten je weiterer Einheit

Grenzkosten

$C'(q) = \begin{cases} 100 - 2q > 0 & \text{falls } q < 45 \\ 55 > 0 & \text{falls } q \geq 45 \end{cases}$

$DK(q) = \begin{cases} 100 - q & \text{falls } q < 45 \\ 55 & \text{falls } q \geq 45 \end{cases}$

Durchschnittliche Kosten bei Menge q

$C''(q) = \begin{cases} -2 < 0 & \text{falls } q < 45 \\ 0 = 0 & \text{falls } q \geq 45 \end{cases}$

$\rightarrow$ Kosten steigen je Output, aber steigen je Output immer weniger, bis zum 45st Output. Danach steigen die Kosten konstant.

$\check{q} = 45 \quad DK(\check{q}) = 55$

Betriebsoptima $[45, \infty)$

$\rightarrow S(p) = 0$ falls $p < 55$

$S(p) = \{0\} \cup [45, \infty)$ falls $p = 55$

$S(p) = \infty$ falls $p > 55$

c)

$C(q) = q^3 - 15q^2 + 125q$

$GK = C'(q) = 3q^2 - 30q + 125$

$C''(q) = 6q - 30$ > 0 für $\check{q} > 5$, < 0 für $\check{q} < 5$

$\to$ Grenzkosten wachsend im Bereich $[5, \infty)$

$DK(q) = q^2 - 15q + 125$

$DK'(q) = 2q - 15$

min DK: $2q - 15 = 0$
$2q = 15$
$q = 7.5$

> 0 (steigend) für $q > 7{,}5$

< 0 (fallend) für $q < 7{,}5$

$\to$ Betriebsoptimum $\check{q} = 7{,}5$

$DK(7{,}5) = 7{,}5^2 - 15 \cdot 7{,}5 + 125$
$= 68{,}75$

$p = GK(GK^{-1}(p))$

$q^* = GK^{-1}(p)$

$3q^{*2} - 30q^* + 125 = p$

$3q^{*2} - 30q^* + 125 - p = 0$

$\to$ abc Formel

$$q^*_{+/-} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 3(125 - p)}}{2 \cdot 3}$$

$$= 5 \pm \frac{\sqrt{12p - 600}}{6}$$

$\to$ für die $(-)$ Lösung gilt $q^* < 0$

$\to$ diese Lösung liegt also im fallenden Bereich des GK-Kurve

Check:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Wenn } p = DK(\check{q}) \overset{\text{weil}}{\Longrightarrow} GK(\check{q}) = DK(\check{q}) \overset{\text{muss gelten}}{\Longrightarrow} p = GK(\check{q}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \text{ daher} \\ \checkmark\ GK(68{,}75) = 7{,}5 \overset{\text{also}}{\Longleftarrow} GK^{-1}(p) = \check{q} \end{array}}$$

$$S(p) = \begin{cases} 5 + \dfrac{\sqrt{12p - 600}}{6} & \text{falls } p > 68{,}75 \\ \{0, 7{,}5\} & \text{falls } p = 68{,}75 \\ 0 & \text{falls } p < 68{,}75 \end{cases}$$

d)

$C(q) = q^{5/4}$

$C'(q) = \frac{5}{4} q^{\frac{1}{4}} > 0$

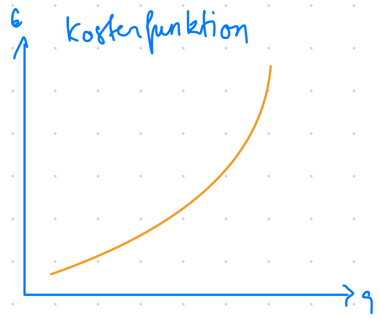
$C''(q) = \frac{5}{16} q^{-\frac{3}{4}} > 0$ $\Rightarrow$ Kosten werden im größer $\check{q} = 0$

$DK(q) = q^{\frac{1}{4}}$ min $DK(q) \Rightarrow DK'(q) = 0$

$q^{\frac{1}{4}} = 0$

$\check{q} = 0$

$DK(\check{q}) = 0$



$\Rightarrow$ Angebot folgt der Grenzkostenkurve für alle $p > 0$

$GK(q) = C'(q) = \frac{5}{4} q^{\frac{1}{4}}$

$GK^{-1}(p) = (\frac{4}{5})^4 p^4$

$GK(q) = p$

$q = GK^{-1}(p)$

$p = GK(GK^{-1}(p))$

$\Rightarrow$ Also ist das Angebot gegeben durch

$S(p) = (\frac{4}{5})^4 p^4$

3. Skizzieren Sie das jeweilige Angebot zu den Produktionsfunktionen, die Sie in Aufgabenblatt 8, Aufgabe 3, skizziert haben.