KM2 EKSAMEN | Exam number 220 | Sider i alt: 6

1.1) Jeg ved at egenværdierne af rødderne herunder:

$$0 = \det(H^0 - I\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & ia & ib \\ -ia & 0 & ic \\ -ib & -ic & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & ia & ib \\ -ia & -\lambda & ic \\ -ib & -ic & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - c^2) - ia(ia\lambda - bc) + ib(-ac - ib\lambda) = -\lambda^3 + \lambda c^2 + a^2\lambda + iabc - iabc + b^2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda c^2 + a^2\lambda + b^2\lambda$$

Jeg ved at den ene rod er $\lambda = 0$, så jeg dividerer med $(\lambda - 0)$

$$-\lambda^2 + c^2 + b^2 + a^2 = 0 \quad \Rightarrow E_\pm^0 = \frac{\pm\sqrt{-4(\cdot -1)\cdot(a^2+b^2+c^2)}}{-2} = \underline{\underline{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} \quad \text{og } E_0 = 0$$

1.2) Da systemet er ikkeudartet gør jeg således:

$$E_0^1 = \langle \Psi_0^0 | H^1 | \Psi_0^0 \rangle = A^2 (c \ \ -b \ \ a) \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} = A^2 (c \ \ -b \ \ a) \begin{pmatrix} \varepsilon c \\ -\varepsilon b \\ \varepsilon a \end{pmatrix}$$

$$= A^2 \varepsilon (c^2 + b^2 + a^2)$$

Jeg mangler nu bare at finde normaliseringskonstanten A:

$$1 = \langle \Psi_0^0 | \Psi_0^0 \rangle = A^2 (c \ \ -b \ \ a) \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} = A^2 (a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

så:

$$\underline{\underline{E_0^1 = \varepsilon}}$$

1.3) Da H^1 er en skaleret enhedsmatrice vil

$\langle \Psi_n | H^1 | \Psi_m \rangle = 0$ for $n \neq m$, da Ψ_n er egenvektorer og derfor orthonormale!

$$\underline{\underline{E_0^2 = \sum_{m \neq 0} \frac{|\langle \Psi_m | H^1 | \Psi_0^0 \rangle|^2}{E_0^0 - E_m^0} = 0}} \quad \text{da } \langle \Psi_m | H^1 | \Psi_0^0 \rangle = \varepsilon \langle \Psi_m | \Psi_0^0 \rangle = 0$$

1.4) For den nye H^0_{new} har vi egenvektorerne:

$\psi_a = \begin{pmatrix} \psi_0^0 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\psi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0^0 \end{pmatrix}$ med egenværdi $E_0^0 = 0$

Jeg gør nu som i 7.2 i bogen og finder pertubationsmatricen:

$$W = \begin{pmatrix} \langle \psi_a | H'_{new} | \psi_a \rangle & \langle \psi_a | H'_{new} | \psi_b \rangle \\ \langle \psi_b | H'_{new} | \psi_a \rangle & \langle \psi_b | H'_{new} | \psi_b \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \langle \psi_a | H'_{new} | \psi_b \rangle \\ \langle \psi_b | H'_{new} | \psi_a \rangle & 0 \end{pmatrix}$$

Jeg finder altså:

$$\langle \psi_a | H'_{new} | \psi_b \rangle = \begin{pmatrix} \psi_0^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iH' \\ -iH' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iH'\psi_0^0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \psi_0^0 iH' \psi_0^0 = i\varepsilon$$

og:

$$\langle \psi_b | H'_{new} | \psi_a \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \psi_0^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iH' \\ -iH' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \psi_0^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -iH'\psi_0^0 \end{pmatrix} = -i\varepsilon$$

Så:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon \\ -i\varepsilon & 0 \end{pmatrix} = i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

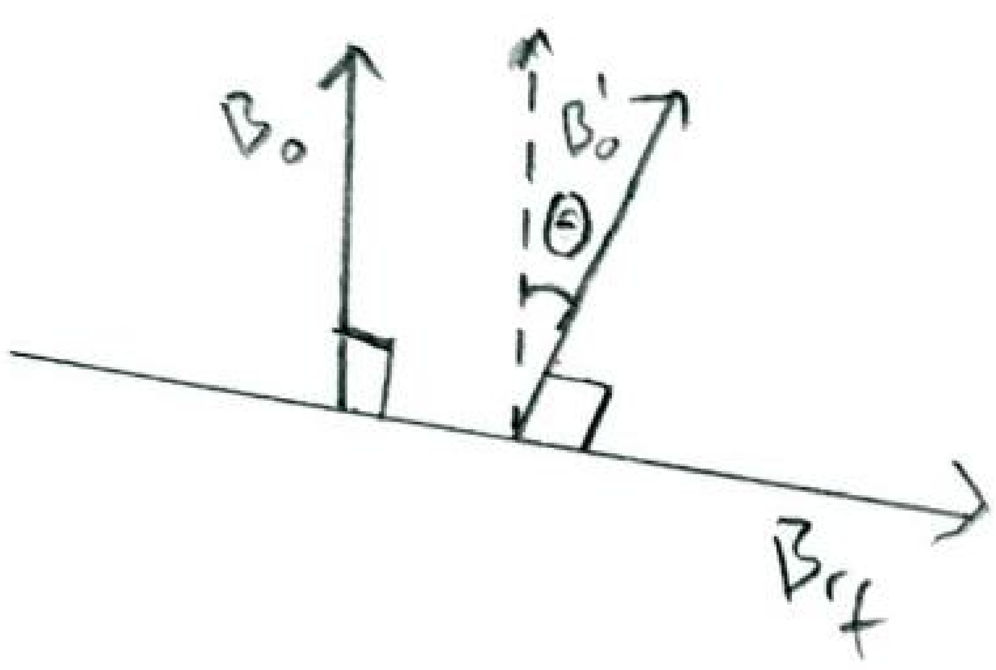
Jeg får altså egenværdierne som tilsvarer pertubationerne:

$$\det(W - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & i\varepsilon \\ -i\varepsilon & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \varepsilon^2 = 0$$

Altså:

$$\underline{\underline{E'_{\pm_{new}} = \lambda_\pm = \pm \varepsilon}}$$

2.1) Da vi i laboratoriet gik ud fra at den store spole og den lille var vinkelrette på hinanden, vil denne rotation ikke ændre noget. Vi roter netop den store omkring den lilles akse.
Vinkelen imellem de to er altå uændret selvom opsætningen ser roteret ud for os



I begge tilfælde er B_0 og B_{rf} vinkelrette,

så svaret er:

b) $\omega_{new} = \omega_{old}$

3.1) $H^0 = \frac{L^2}{2I}$

Dette er en kvantemekanisk rotor. Egenverdiene for L^2 er:

$\hbar^2 L\cdot(L+1)$.

Der er altså $2L+1$ værdier for m der kan gøre systemet udartet

$E_0 = 0$ er feks. ikke udartet.

Egenværdierne for systemet er altså $\underline{\frac{\hbar^2}{2I} L\cdot(L+1)}$ med $2l$ udartethed

3.2) Jeg finder sandsynlighedsamplituderne således:

$c_a^0 = 1$, $c_b^0 = 0$, $\dot{c}_a^1 = 0 \rightarrow c_a^1 = 1$, $\dot{c}_b^1 = -\frac{i}{\hbar}\langle 1m|H'|00\rangle e^{i\omega_0 t}$

Her er $\omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar} = \frac{\frac{2\hbar^2}{2I} - 0}{\hbar} = \frac{\hbar}{I}$.

$\dot{c}_b^1 = -\frac{i}{\hbar} q\mathcal{E}\langle Y_1^m | z\cos(\omega t) | Y_0^0\rangle e^{i\omega_0 t}$ $\boxed{z = r\cos\theta}$

$$= -\frac{i}{\hbar} q\mathcal{E}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}\int_0^{2\pi} e^{-im\phi}\,d\phi\int_0^{\pi} P_1^m(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta\int_0^{\infty} r^3\,dr\, e^{i\omega_0 t}\cos(\omega t)$$

Jeg kan her se, at hvis $m \neq 0$ er $\int_0^{2\pi} e^{-im\phi}\,d\phi = 0$

men hvis $m=0$ er $\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$ Altså

$$\dot{c}_b^1 = -\frac{i}{\hbar} q\mathcal{E}\sqrt{3}\,\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} dr\left(r^3\, 2a^{-3}\, e^{-2r/a}\right) e^{i\omega_0 t}\cos(\omega t)$$

Her er jeg gået ud fra at molekylet er hydrogen da jeg herved får et radielt led.(*) Jeg slår integralet op:

$$\dot{c}_b^1 = -\frac{i}{\hbar} q\mathcal{E}\frac{\sqrt{3}}{4}\pi\, 2a^{-3}\, 3!\left(\frac{a}{2}\right)^4 e^{i\omega_0 t}\cos(\omega t) = \underbrace{-\frac{i}{\hbar} q\mathcal{E}\frac{\sqrt{3}\cdot 3}{16}a}_{K}\, e^{i\hbar t/I}\cos(\omega t)$$

$$c_b^1 = K\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_0 t'}\cos(\omega t')\,dt' = \frac{K}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_0 t'}\left(e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}\right)dt' = \frac{K}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{i(\omega_0+\omega)t'} + e^{i(\omega_0-\omega)t'}\,dt'$$

$$\underline{c_b^1 = \frac{K}{2}\left(\frac{1}{i(\omega_0+\omega)}e^{i(\omega_0+\omega)t} + \frac{1}{i(\omega_0-\omega)}e^{i(\omega_0-\omega)t}\right)}$$ Og sandsynligheden er så $|c_b^1|^2$

(*) se næste side

3.3) For at jeg ved, at den er gået fra $|00\rangle$ til $|10\rangle$ må $|C_b'|^2 = 1$. Altså:

$$\left| \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_0+\omega)t'} + e^{i(\omega_0-\omega)t'} \, dt' \right|^2 = 1$$

Jeg bruger nu hintet og ser:

$$\left| k\pi\left(\delta(\omega_0+\omega)+\delta(\omega_0-\omega)\right)\right|^2 = k^2\pi^2\left(\delta(\omega_0+\omega)^2+\delta(\omega_0-\omega)^2\right)$$

I kraft af Dirac's deltafunktions egenskaber giver dette kun noget ved:

$\omega = \pm\omega_0 = \pm\frac{\hbar}{I}$. Da $\cos(\pm\omega t) = \cos(\omega t)$ er svaret $\omega = \omega_0 = \frac{\hbar}{I}$

3.4) Jeg ville umiddelbart sige nej, da jeg har kigget på Y_1^m-funktionerne der også er egenfunktioner for L_z, så min argumentation holder stadig.

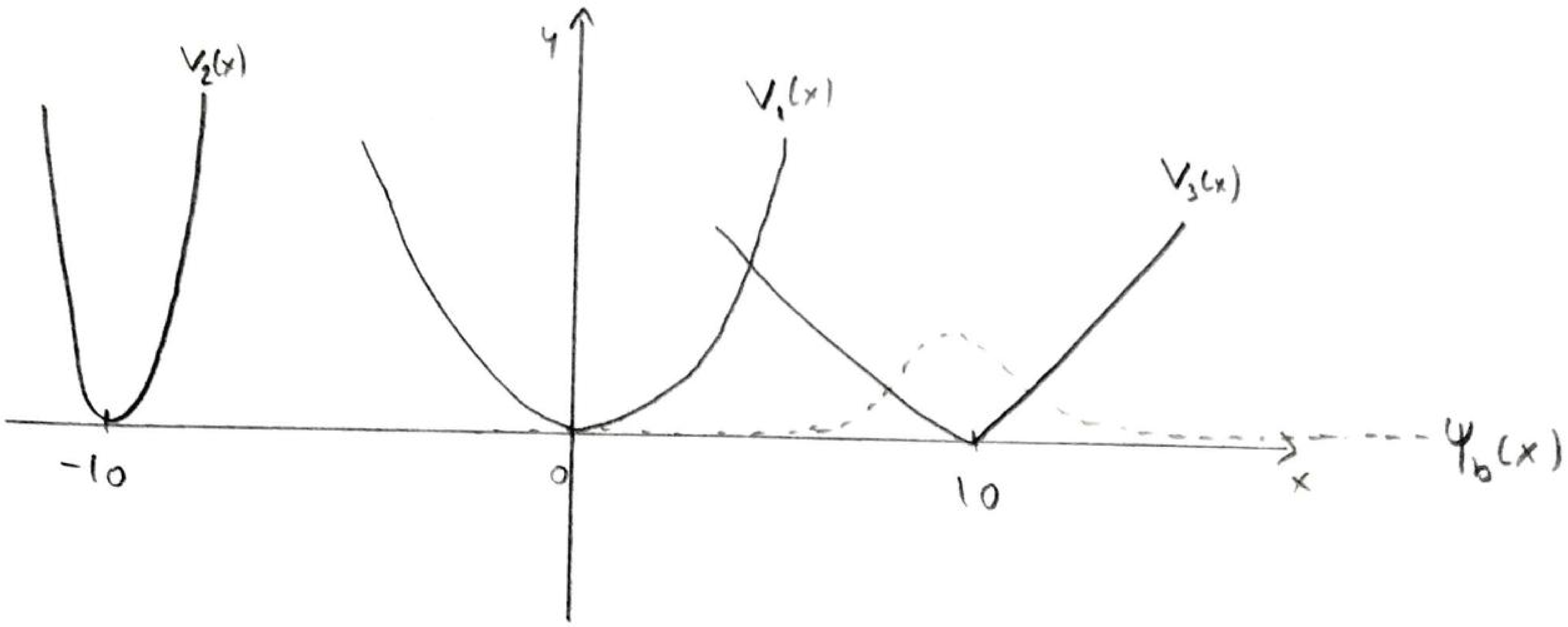
Det ville dog ændre ω_0, men den nye ville være:

$$\omega_0 = \frac{E_b - E_a}{\hbar} = \frac{\left(\frac{\hbar^2}{I} + dB\hbar m\right) - 0}{\hbar} = \frac{\hbar}{I} + dBm$$

men der skete kun overgange for $m=0$, så også dette forbliver det samme.

* Jeg valgte tidligere at gøre det radielle integral til et brint-integral. Dette går dog ingen mening. En bedre argumentation havde været at rotoren er (per definition) ligeglad med r-delen. Denne havde altså givet en konstant som jeg ville have pløffet ind i k. Ingen af mine udledninger eller konklusioner havde altså ændret sig. Jeg er bevidst om det, men har ikke tid til at lave det hele om. :)

4.1) For $a=10$ og de fleste andre konstanter ($k_1=k_2=k_3=\pi=2=b$) sat til 1:



Hvis vi altså bruger samme a, er det tydeligt, at det kun er for V_3 at bølgefunktionen giver mening, da denne netop gerne skulle minimeres i potentialet.
Hvis de andre funktioner havde været placeret anderledes kunne de også have fungeret.
(Man kan endda argumentere, at for $a \ll 1$ passer funktionen også på $V_1(x)$, men jeg tror ikke det er hvad der fiskes efter)