Kvantemekanik 2, skriftlig eksamen, d. 3. april 2020.

`4+1 timers prøve med alle sædvanlige hjælpemidler. Opgaven må besvares med blyant.`
`Opgaven indeholder 10 delspørgsmål, som vægtes lige i bedømmelsen.`

Opgave 1. Perturbation af Majorana mode

Et system er beskrevet ved en Hamiltonoperator med formen

$$H^0 = \begin{pmatrix} 0 & ia & ib \\ -ia & 0 & ic \\ -ib & -ic & 0 \end{pmatrix}$$

hvor a, b og c er reelle konstanter, der er forskellige fra nul.

1.1. Udled, med eksplicitte mellemregninger, de 3 egenværdier af H^0.
Vink: Den ene egenværdi E_0^0 af H^0 er 0 og for de andre to $E_\pm^0$ gælder at $E_-^0 = -E_+^0$.

Den egensøjle for H^0, der tilhører E_0^0, er $\psi_0^0 = A(c, -b, a)^T$, hvor A er en nomalisationskonstant og ^{T} betyder transponeret.

Systemet perturberes af

$$H' = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

hvor $\epsilon \ll |a|, |b|, |c|$. Vi vil benytte perturbationsteori til at bestemme effekten af H'.

1.2. Bestem første ordens korrektionen, E_0^1, til den uperturberede egenenergi E_0^0 af H^0.

1.3. Vis, at anden ordens korrektionen, E_0^2, til egentilstanden ψ_0^0 af H^0 er nul. Kommentér resultatet.

Vi betragter nu i stedet et system, der er dobbelt så stort. Det uperturberede system og perturbationen er beskrevet ved hhv. (H^0 og H' er stadig givet som ovenfor)

$$H^0_{\text{new}} = \begin{pmatrix} H^0 & 0 \\ 0 & -H^0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad H'_{\text{new}} = \begin{pmatrix} 0 & iH' \\ -iH' & 0 \end{pmatrix} .$$

1.4. Bestem første ordens korrektionerne til den dobbelt udartede egenværdi 0 af H^0_{new}.

Kommentar: Det uperturberede system er en simpel model, der har en Majorana tilstand.

Opgave 2. Lab med skævt placeret spole

Med vores setup fra laboratoriet observeres der resonans ved vinkelfrekvensen $\omega = \omega_{\text{old}}$. Nu drejes den store spole vinklen θ omkring den lille spoles akse således at Hamiltonoperatoren bliver

$$H = -\gamma B_0 \cos(\theta) S_z + \gamma B_0 \sin(\theta) S_y - \gamma B_{\text{rf}} \cos(\omega t) S_x \ .$$

2.1. Ved hvilken vinkelfrekvens, ω_{new}, vil vi forvente at finde resonans efter den store spole er blevet drejet

$$a) \quad \omega_{\text{new}} = \omega_{\text{old}} \cos(\theta) \quad , \quad b) \quad \omega_{\text{new}} = \omega_{\text{old}} \quad \text{eller} \quad c) \quad \omega_{\text{new}} = -\omega_{\text{old}} \sin(\theta)$$

Husk at begrunde svaret.

(vend)

Opgave 3. Påvirker Jordens magnetfelt drivhuseffekten?

Rotationen af et molekyle er beskrevet ved Hamiltonoperatoren

$$H^0 = \frac{L^2}{2I} + dBL_z,$$

hvor I og d er positive reelle konstanter. I de næste 3 delspørgsmål, **3.1, 3.2 og 3.3**, sættes magnetfeltet $B = 0$.

3.1 Opskriv egenværdierne for H^0 for $B = 0$ og angiv deres udartethed.

Molekylet bliver udsat for elektromagnetisk stråling med vinkelfrekvensen ω beskrevet ved

$$H' = q\mathcal{E}z\cos(\omega t) \ ,$$

hvor q og $\mathcal{E}$ er reelle konstanter.

Molekylet befinder sig til tiden $t = -\infty$ i grundtilstanden, $|l\,m\rangle = |0\,0\rangle$, af H^0.

3.2 Benyt første ordens tidsafhængig perturbationsteori til at opskrive et udtryk for sandsynlighedsamplituden fra grundtilstanden til en vilkårlig af de 3 første exciterede tilstande, $|1\,m\rangle$, for H_0 til tiden t.

3.3 Brug svaret fra forrige spørgsmål til at vurdere ved hvilken vinkelfrekvens ω, der kan forekomme absorption, så rotoren er gået fra $|0\,0\rangle$ til $|1\,0\rangle$ til tiden $t = \infty$.
Vink: Nyttigt integral

$$\delta(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\omega}t}dt \ .$$

Nu betragter vi samme problemstilling som ovenstående, men denne gang med magnetfeltet, $B \neq 0$, der er tilstrækkelig lille til at grundtilstanden af H^0 stadig er $|0, 0\rangle$.

3.4 Ændrer det eksterne magnetfelt på de mulige vinkelfrekvenser, ω, hvor der kan forekomme absorption, så rotoren går fra $|0\,0\rangle$ for $t = -\infty$ til en af tilstandene $|1\,m\rangle$ til tiden $t = \infty$?

Kommentar: Molekylet kan tænkes som en drivhusgas og det eksterne magnetfelt som Jordens magnetfelt.

Opgave 4. Hvilket potientiale passer til variationsbølgefunktionen

Vi betragter en partikel i en dimension.

4.1 For hvilket af de 3 nedenstående potentialer vil variationsbølgefunktionen

$$\psi_b(x) = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/4} e^{-b(x-a)^2},$$

hvor a er en positiv reel konstant og b er variationsparameteren, være et godt valg?

$$1)\quad V_1(x) = \frac{1}{2}k_1x^2 \quad , \quad 2)\quad V_2 = k_2(x+a)^4 \quad \text{eller} \quad 3)\quad V_3 = k_3|x-a| \ .$$

Konstanterne k_1, k_2 og k_3 er alle positive. Der skal indgå en illustration i begrundelsen for dit svar.

Opgavesæt slut