5. DOMAĆA ZADAĆA – AK. GOD. 2019/20

Domaća zadaća

U okviru ove zadaće potrebno je ostvariti metode numeričke integracije po postupku ***Runge-Kutta*** 4. reda (*u skripti: str. 7-35*), ***trapeznom*** postupku, ***Eulerovom*** postupku, ***obrnutom Eulerovom*** postupku, i ***prediktorsko-korektorskom*** postupku. Sustav je općenitog oblika $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{r}(\mathbf{t})$. Program treba (iz datoteka) učitavati matrice linearnog sustava diferencijalnih jednadžbi ($\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$) te početno stanje $\mathbf{x}(t=0)$.

Za uporabu trapeznog i obrnutog Eulerovog postupka potrebno je zadani linearni sustav prethodno transformirati u eksplicitni oblik (*skripta 7-24, 25*).

Potrebno je bez prevođenja programa omogućiti zadavanje **željenog koraka integracije** (T) i **vremenskog intervala** za koji se provodi postupak $[0, t_{MAX}]$. Za prediktorsko korektorski postupak potrebno je omogućiti da se bez prevođenja programa bilo koji dostupni eksplicitni postupak može koristiti kao prediktor, bilo koji implicitni postupak kao korektor te da je moguće definirati koliko puta će se korektor primijeniti. Program treba rješavati sustave svim sljedećim postupcima: Eulerovim, obrnutim Eulerovim, Trapeznim, Runge-Kutta 4. reda, $PE(CE)^2$ (prediktor Euler, korektor obrnuti Euler) i $PECE$ (prediktor Euler i korektor trapez). Prilikom rada potrebno je ispisivati varijable stanja na ekran, no ne u svakoj iteraciji nego svakih nekoliko iteracija (omogućiti da taj broj zadaje korisnik). Osim na ekran, ispis je uputno preusmjeriti i u datoteku. Nakon završetka postupka potrebno je **grafički prikazati kretanje varijabli stanja** za oba postupka izračunavanja (vodoravna os je vrijeme, uspravna su vrijednosti varijabli stanja). Crtanje se može izvesti bilo kakvim alatom, npr. čitanjem izračunatih vrijednosti iz datoteke.

Laboratorijska vježba

1. Izračunajte ponašanje sljedećeg sustava:
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
s periodom integracije T = 0.01 i $t_{MAX} = 10$ za sve zadane postupke. Sustav predstavlja matematičko njihalo. x_1(t=0) je početni odmak od ravnotežnog položaja a x_2(t=0) je početna brzina. Analitičko rješenje sustava je
$$x_1(t) = x_1(t=0)\cos t + x_2(t=0)\sin t$$
$$x_2(t) = x_2(t=0)\cos t - x_1(t=0)\sin t$$
Za svaki postupak izračunajte kumulativnu pogrešku koju svaki od postupaka napravi tijekom izvođenja, na način da zbrojite apsolutnu razliku dobivenog i stvarnog rješenja u svakoj točki integracije, te zbroj prikažete na kraju izvođenja programa.
Želimo li npr. dobiti sustav s prigušenjem, element matrice $\mathbf{A}$ s indeksom (2,2) treba postaviti na negativnu vrijednost.
2. Izračunajte ponašanje sljedećeg sustava:
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$
Sustav predstavlja fizikalno njihalo s prigušenjem (zadatak s predavanja). Isprobajte rješavanje s periodom integracije T = 0.1 i $t_{MAX} = 1$ za sve zadane postupke i obratite pažnju na numeričku stabilnost! (uz zadane početne uvjete) *Usporedbom rezultata odredite prikladni korak integracije za Runge-Kutta postupak.*
3. Izračunajte ponašanje sljedećeg sustava:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Isprobajte rješavanje s periodom integracije T = 0.01 i $t_{MAX} = 10$ za sve zadane postupke.

4. Izračunajte ponašanje sljedećeg sustava:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(t=0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Isprobajte rješavanje s periodom integracije T = 0.01 i $t_{MAX} = 1$ za sve zadane postupke.

Demonstracija funkcionalnosti u MATLAB-u

Ovaj dio vježbe izvodi se na predavanjima.

Rezultate je moguće prikazati i pozivom MATLAB-ovih funkcija za numeričku integraciju - dobiveni grafovi bi trebali biti identični vašim rezultatima, osim u slučaju neprikladno odabrane vrijednosti koraka integracije (T), što je i cilj uočiti.

Nekoć davno pokazivali smo i mogućnost povezivanja vlastite implementacije s MATLABom, primjerice za C/C++/C#/Java programe, što je opisano u repozitoriju:
(http://www.fer.hr/_download/repository/C_MATLAB.html**).**