

## 2. DOMAĆA ZADAĆA – AK. GOD. 2019/20

### Domaća zadaća

U okviru ove domaće zadaće potrebno je implementirati sljedeće metode optimiranja:

#### Postupak zlatnog reza

Algoritam je dan na web stranici predmeta ([http://www.fer.unizg.hr/download/repository/zlatni\\_rez.txt](http://www.fer.unizg.hr/download/repository/zlatni_rez.txt)) i na predavanjima. U okviru ovog postupka potrebno je također implementirati metodu pronalaženja unimodalnog intervala (**napomena:** kao što je pokazano na predavanjima, po <http://www.fer.unizg.hr/download/repository/unimodalni.txt>). Postupak zlatnog reza mora se moći pokrenuti ili s početnom točkom, s pomoću koje se tada određuje unimodalni interval ili s predefiniranim intervalom, u kojem slučaju se preskače postupak traženja unimodalnog intervala i koristi se zadani interval. U svakom koraku postupka potrebno je ispisati sve četiri točke i vrijednosti funkcije cilja u njima. Potrebno je omogućiti da se bez prevođenja programa mogu definirati preciznost  $\epsilon$  te početna točka ili početni interval pretraživanja (npr. učitavanjem iz datoteke). Pretpostavljene vrijednosti:  $10^{-6}$  za  $\epsilon$ . (**napomena:** za iznos konstante  $k$  uzmite što precizniju vrijednost, računanjem kao  $0.5 \cdot (\sqrt{5} - 1)$ ).

#### Pretraživanje po koordinatnim osima

Algoritam je opisan u skripti (str. 4-33, 4-34) i na predavanjima. U sklopu ove metode iskoristite metodu zlatnog reza za minimizaciju u jednoj dimenziji. Potrebno je omogućiti da se bez prevođenja programa mogu definirati vektor granične preciznosti  $\epsilon$  te početna točka pretraživanja (npr. učitavanjem iz datoteke). Pretpostavljene vrijednosti:  $10^{-6}$  za sve elemente  $\epsilon$ .

#### Simpleks postupak po Nelderu i Meadu

Algoritam je dan na web stranici predmeta (<http://www.fer.unizg.hr/download/repository/simplex.html>). Početni simpleks generirajte na način da se za jednu konkretnu novu točku pomaknete od početne točke za određeni pomak u jednoj dimenziji (**primjer:** ako je početna točka  $(0,0)$  i pomak 1, tada ćete generirati točke  $(1,0)$  i  $(0,1)$ ). U svakom koraku postupka potrebno je ispisati centroid točaka i vrijednost funkcije cilja u njoj. Potrebno je omogućiti da se bez prevođenja mogu definirati početna točka pretraživanja, preciznost  $\epsilon$ , pomak koji se koristi za generiranje simpleksa, parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  te vrijednost za koju se sve točke pomiču prema najboljoj točki simpleksa ( $\sigma$ ). Pretpostavljene vrijednosti za parametre:  $10^{-6}$  za  $\epsilon$ , 1 za pomak koji se koristi kod početnog generiranja simpleksa,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 2$  i  $\sigma = 0.5$ .

#### Hooke-Jeeves postupak

Algoritam je dan na web stranici predmeta (<http://www.fer.hr/download/repository/hj.html>) i opisan na predavanjima (**napomena:** ne implementirati algoritam u skripti, koji ima nešto drugačije ponašanje!). U svakom koraku postupka potrebno je ispisati baznu točku, početnu točku pretraživanja i točku dobivenu pretraživanjem, kao i vrijednosti funkcije cilja u tim točkama. Potrebno je omogućiti da se bez prevođenja programa mogu definirati: vektor pomaka  $\mathbf{dx}$ , vektor granične preciznosti  $\epsilon$  te početna točka pretraživanja (npr. učitavanjem iz datoteke). Pretpostavljene vrijednosti: 0.5 za sve elemente  $\mathbf{dx}$  te  $10^{-6}$  za sve elemente  $\epsilon$ .

Svi algoritmi (osim postupka zlatnog reza) moraju podržavati proizvoljno veliku dimenzionalnost rješenja. Funkciju cilja potrebno je implementirati tako da vodi evidenciju o broju pozivanja, jer će algoritme biti potrebno usporediti na temelju broja evaluacija (preporučuje se ostvariti kao apstraktni razred).

## Funkcije cilja

$$- f_1(\mathbf{x}) = 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \text{ (Rosenbrockova 'banana' funkcija)}$$

Početna točka:  $\mathbf{x}_0 = (-1.9, 2)$ , minimum:  $\mathbf{x}_{\min} = (1, 1)$ ,  $f_{\min} = 0$

$$- f_2(\mathbf{x}) = (x_1 - 4)^2 + 4 \cdot (x_2 - 2)^2$$

Početna točka:  $\mathbf{x}_0 = (0.1, 0.3)$ , minimum:  $\mathbf{x}_{\min} = (4, 2)$ ,  $f_{\min} = 0$

$$- f_3(\mathbf{x}) = \sum_i (x_i - i)^2$$

Početna točka:  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  (nul vektor), minimum:  $\mathbf{x}_{\min} = (1, 2, 3, \dots, n)$ ,  $f_{\min} = 0$

$$- f_4(\mathbf{x}) = |(x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)| + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ (Jakobovićeva funkcija :)}$$

Početna točka:  $\mathbf{x}_0 = (5.1, 1.1)$ , minimum:  $\mathbf{x}_{\min} = (0, 0)$ ,  $f_{\min} = 0$

$$- f_6 = 0.5 + \frac{\sin^2 \sqrt{\sum x_i^2} - 0.5}{(1 + 0.001 \cdot \sum x_i^2)^2} \text{ (Schaffer's function f6)}$$

minimum:  $\mathbf{x}_{\min} = \mathbf{0}$  (nul vektor),  $f_{\min} = 0$

## Laboratorijska vježba

1. Definirajte jednodimenzijску funkciju br. 3, koja će imati minimum u točki 3. Kao početnu točku pretraživanja postavite točku 10. Primijenite sve postupke na rješavanje ove funkcije te ispišite pronađeni minimum i broj evaluacija funkcije za svaki pojedini postupak. Probajte sve više udaljavati početnu točku od minimuma i probajte ponovo pokrenuti navedene postupke. Što možete zaključiti?
2. Primijenite simpleks po Nelderu i Meadu, Hooke-Jeeves postupak te pretraživanje po koordinatnim osima na funkcije 1-4 uz zadane parametre i početne točke (broj varijabli funkcije 3 najmanje 5). Za svaki postupak i svaku funkciju odredite minimum koji su postupci pronašli i potrebni broj evaluacija funkcije cilja koji je potreban do konvergencije (prikažite tablično). Što možete zaključiti iz rezultata?
3. Primijenite postupak Hooke-Jeeves i simpleks po Nelderu i Meadu na funkciju 4 uz početnu točku (5, 5). Objasnite rezultate!
4. Primijenite simpleks po Nelderu i Meadu na funkciju 1. Kao početnu točku postavite točku (0.5, 0.5). Provedite postupak s nekoliko različitih koraka za generiranje početnog simpleksa (primjerice iz intervala od 1 do 20) i zabilježite potreban broj evaluacija funkcije cilja i pronađene točke minimuma. Potom probajte kao početnu točku postaviti točku (20, 20) i ponovo provesti eksperiment. Što možete zaključiti?
5. Primijenite jedan postupak optimizacije na funkciju 6 u dvije dimenzije, tako da postupak pokrećete više puta iz slučajno odabrane početne točke u intervalu [-50, 50]. Možete li odrediti vjerojatnost pronalaženja *globalnog* optimuma na ovaj način? (smatramo da je algoritam locirao globalni minimum ako je nađena vrijednost funkcije cilja manja od  $10^{-4}$ ).

## Napomena

Kako bi brojevi poziva funkcije za svaki od postupaka bili što relevantniji, probajte, gdje god je to moguće, izračunatu vrijednost funkcije za neku točku pohraniti i ako je potrebno iskoristiti ju ponovo, umjesto da se više puta izračunava.

Prije dolaska na laboratorijsku vježbu pripremite svaki od zadataka u obliku funkcije koju možete pokrenuti, tako da se svaki od zadataka može demonstrirati bez prevelikih promjena u kodu te pripremite datoteke s rezultatima svih zadataka. Možete koristiti i konfiguracijske datoteke u kojima specificirate sve bitne parametre, tako da se vježba može pokrenuti za različite postupke bez potrebe za ponovnih prevođenjem.

## Demonstracija funkcionalnosti u MATLAB-u

*Ovaj dio vježbe izvodi se na predavanjima.*

Potrebno je odabrati dvije optimizacijske funkcije, definirati ih kao funkcije u MATLABU i pronaći njihov minimum (bez ograničenja) uporabom ugrađenih MATLABovih funkcija. Neke od funkcija za optimiranje su sljedeće:

- `fminbnd`: minimum funkcije jedne varijable; koristi algoritam zlatnog reza i kvadratne interpolacije
- `fminsearch`: minimum funkcije više varijabli; koristi simplex postupak po Nelderu i Meadu
- `fminunc`: minimum funkcije više varijabli; ova funkcija može, ovisno o proslijeđenim parametrima, uporabiti nekoliko optimizacijskih algoritama, između ostaloga i postupak po Fletcheru i Powellu, poopćeni Newtonov postupak, metodu najbržeg spusta itd.
- `fmincon`: minimum funkcije više varijabli uz ograničenja

Funkcije se u MATLAB-u mogu definirati u posebnim `.m` datotekama, kao u sljedećem primjeru:

```
function f = apr_primjer(x) % mora biti u prvom retku!  
% Bezvezna funkcija dvije varijable  
f = x(1) + x(2);
```

Datoteku je potrebno nazvati istim imenom kao i funkcija (`apr_primjer.m`). Iz MATLAB-a se funkciji tada može pristupiti s `apr_primjer([1,1])`.

Odabrana poglavlja iz MATLAB Helpa:

- DEMOS: Optimization: Minimization of the "banana function"
- MATLAB: Mathematics: Function Functions: Minimizing Functions and Finding Zeros
- Optimization Toolbox: Standard Algorithms: Unconstrained Optimization