## 7.1 Замкнутые системы булевых функций

Пусть R — произвольное множество булевых функций. *Замыканием* множества $R$ называется множество всех функций, которые можно реализовать формулами в базисе $R$. Замыкание множества $R$ будем обозначать через $[R]$. Множество булевых функций $R$ называется *(функционально) замкнутым* множеством, если оно совпадает со своим замыканием, т. е. $R = [R]$.

Рассмотрим пять важнейших замкнутых множеств в $P_2$. Часто рассматриваемые ниже замкнутые множества называются также замкнутыми классами.

**1.** Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет нуль, если

$$f(0, \dots, 0) = 0.$$

Множество, состоящее из всех булевых функций сохраняющих нуль, обозначается через $T_0$. Легко видеть, что функции 0, $x$, $x\&y$, $x \vee y$ и $x \otimes y$ принадлежат $T_0$, а функции 1, $\bar{x}$, $x \sim y$, $x \mid y$, $x \downarrow y$ и $x \to y$ не принадлежат $T_0$.

Так как тождественная функция сохраняет нуль, и для любых сохраняющих нуль функций $f_0, f_1, \dots, f_k$ справедливо равенство

$$f(0, \dots, 0) = f_0(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_k(0, \dots, 0)) = f_0(0, \dots, 0) = 0.$$

т. е. реализуемая формулой $f_0(f_1, \dots, f_k)$ функция $f$ также сохраняет нуль, то легко видеть, что множество $T_0$ замкнуто. Любой булев вектор длины $2^n$ с первой нулевой компонентой будет вектором значений функции из $T_0$. Поэтому, в T0 содержится ровно $2^{2^n-1}$ функций из $P_2(n)$. Множество $T_0 \cap P_2(n)$ будем обозначать через $T_0(n)$.

**2.** Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет единицу, если

$$f(1, \dots, 1) = 1.$$

Множество, состоящее из всех булевых функций сохраняющих единицу, обозначается через $T_1$.

Легко видеть, что функции 1, $x$, $x\&y$, $x \vee y$, $x \sim y$ и $x \to y$ принадлежат $T_1$, а функции 0, $\bar{x}$, $x \otimes y$, $x \mid y$ и $x \downarrow y$ не принадлежат $T_1$. Доказательство замкнутости множества $T_1$ аналогично доказательству замкнутости множества $T_0$. Также легко видеть, что в $T_1$ содержится ровно $2^{2^n-1}$ функций из $P_2(n)$. Множество $T_1 \cap P_2(n)$ будем обозначать через $T_1(n)$.

**3.** Будем говорить, что булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является *двойственной* к функции $g(x_1, \ldots, x_n)$, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{g}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$

Функцию двойственную к функции $f$ будем обозначать через $f^*$. Легко видеть, что $(f^*)^* = f$ для любой булевой функции $f$. Из законов двойственности следует, что $(x\&y)^* = x \vee y$ и $(x \vee y)^* = x\&y$. Функция $f$ называется *самодвойственной*, если $f = f^*$. Множество, состоящее из всех самодвойственных булевых функций, обозначается через $S$. Самодвойственными являются функции $x$, $\bar{x}$, $x_1 \cap x_2 \cap x_3$. Среди булевых функций, существенно зависящих ровно от двух переменных, нет ни одной самодвойственной функции.

Докажем замкнутость множества самодвойственных функций. Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_k$ — произвольные самодвойственные функции. Рассмотрим новую функцию $f = f_0(f_1, \ldots, f_k)$. Так как добавление фиктивной переменной оставляет самодвойственную функцию самодвойственной, то без ограничения общности будем полагать, что все функции $f_i$ зависят от одних и тех же переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) &= f_0(f_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \ldots, f_k(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)) = \\ &= f_0(\bar{f}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \bar{f}_k(x_1, \ldots, x_n)) = \\ &= \bar{f}_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)) = \bar{f}(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $f$ — самодвойственная. Таким образом, множество $S$ замкнуто.

Так как каждая самодвойственная функция на противоположных наборах принимает противоположные значения, то для определения любой самодвойственной функции достаточно задать ее значения только на половине из $2^n$ наборов. Следовательно, в $S$ содержится ровно $2^{2^n-1}$ функций из $P_2(n)$. Далее множество самодвойственных функций, зависящих от n переменных, будем обозначать через $S(n)$.

**4.** Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейной, если степень ее многочлена Жегалкина не превосходит единицу, т. е.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n x_n \otimes \alpha_0,$$

где $\alpha_i$ — булевы постоянные. Множество, состоящее из всех линейных булевых функций, обозначается через $L$. Очевидно, что среди функций из $P_2(2)$ линейными являются только 0, 1, $x$, $\bar{x}$, $y$, $\bar{y}$, $x \otimes y$ и $x \sim y$. Непосредственно из определения линейной функции следует замкнутость множества $L$.

Так как каждая булева функция однозначно определяется коэффициентами своего многочлена Жегалкина, а укаждой линейной функции все коэффициенты при одночленах степени два и выше равны нулю, то легко видеть, что в $L$ содержится ровно $2^{n+1}$ функций из $P_2(n)$. Далее множество $L \cap P_2(n)$ будем обозначать через $L(n)$.

**5.** Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

для любых наборов $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таких, что $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$. Множество, состоящее из всех монотонных булевых функций, обозначается через $M$. В $P_2(2)$ монотонными являются функции 0, 1, $x$, $y$, $x\&y$ и $x \vee y$. Докажем замкнутость множества монотонных функций. Пусть $f_0, \ldots, f_k$ — произвольные монотонные функции. Очевидно, что добавление фиктивной переменной оставляет монотонную функцию монотонной. Поэтому без ограничения общности будем полагать, что все функции $f_i$ зависят от одних и тех же переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — такие наборы из $\mathbb{B}^n$, что $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$. Рассмотрим новую функцию $f = f_0(f_1, \ldots, f_k)$. Так как $f_i(\mathbf{a}) \leq f_i(\mathbf{b})$, то $(f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_k(\mathbf{a})) \preceq (f_1(\mathbf{b}), \ldots, f_k(\mathbf{b}))$, и поэтому

$$f(\mathbf{a}) = f_0(f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_k(\mathbf{a})) \leq f_0(f_1(\mathbf{b}), \ldots, f_k(\mathbf{b})) = f(\mathbf{b}).$$

Следовательно, функция $f$ — монотонная. Таким образом, множество $M$ замкнуто.

Обозначим множество монотонных функций $n$ переменных через $M(n)$. В отличие от множеств $T_0(n), T_1(n), S(n)$ и $L(n)$, мощности которых легко были найдены выше, точное число монотонных функций в $P_2(n)$ при больших $n$ неизвестно. Лишь сравнительно недавно А. Д. Коршуновым была найдена асимптотически точная формула для $|M(n)|$. Эта формула выглядит достаточно громоздко, и поэтомуздесь не приводится. Вместо этого для $|M(n)|$ ниже устанавливаются более грубые, но в тоже время значительно более простые неравенства.