Aproximações por métodos numéricos

Pedro Machado de Almeida
pedro.machado@ufjf.br

Departamento de Energia Elétrica
Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora, MG, 36.036-900 Brasil

2020

Aproximações por métodos numéricos

- Existem situações em que um controlador contínuo já está disponível.

Aproximações por métodos numéricos

- Existem situações em que um controlador contínuo já está disponível.
- Um caso típico é quando um sistema analógico é substituído por um sistema digital.

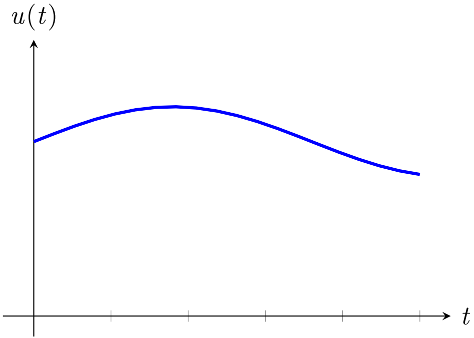
Aproximações por métodos numéricos

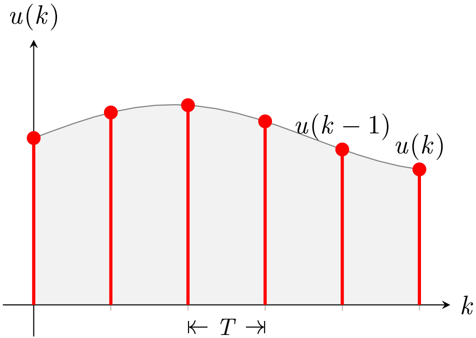
- Existem situações em que um controlador contínuo já está disponível.
- Um caso típico é quando um sistema analógico é substituído por um sistema digital.
- Neste caso é natural converter o controlador analógico original pelo discreto.

Aproximações por métodos numéricos

- Existem situações em que um controlador contínuo já está disponível.
- Um caso típico é quando um sistema analógico é substituído por um sistema digital.
- Neste caso é natural converter o controlador analógico original pelo discreto.
- Em todas as outras situações é mais conveniente fazer o projeto diretamente no domínio discreto.

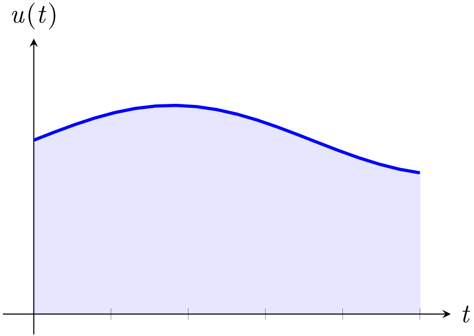
Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

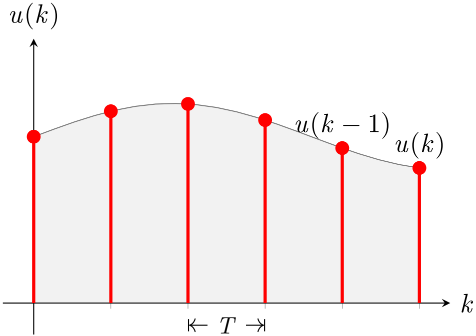




Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

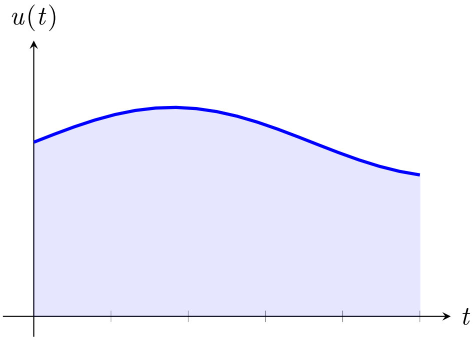


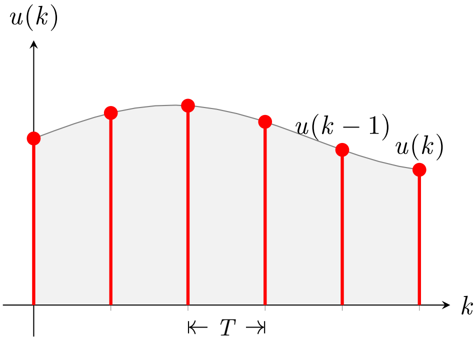


Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

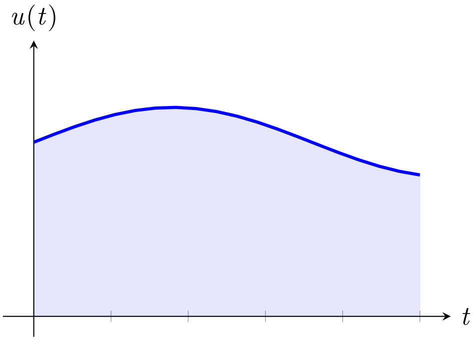


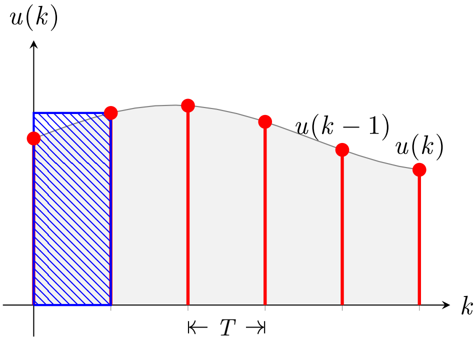


Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

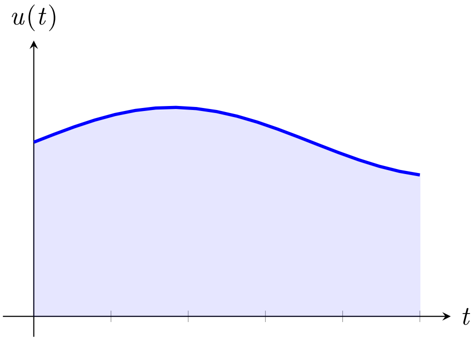


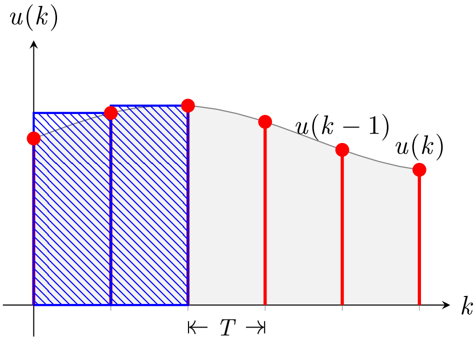


Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

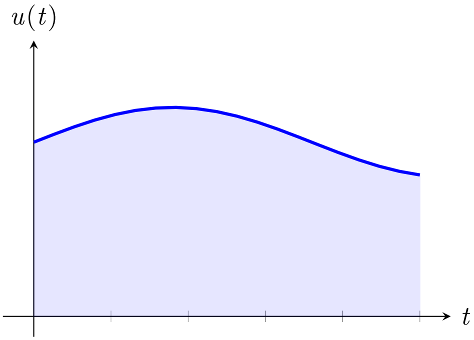


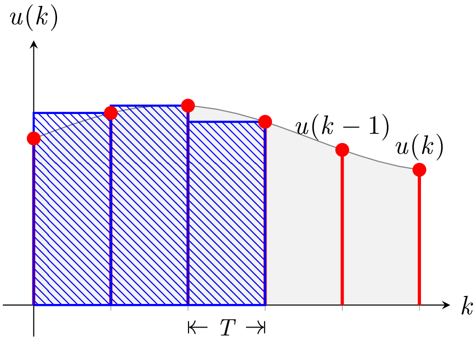


Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

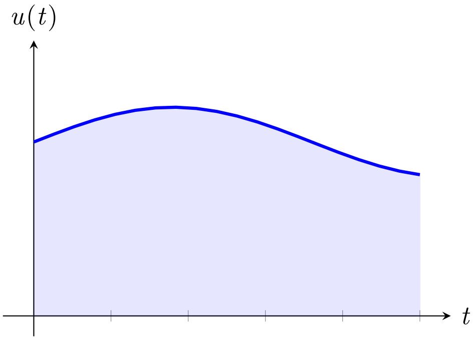


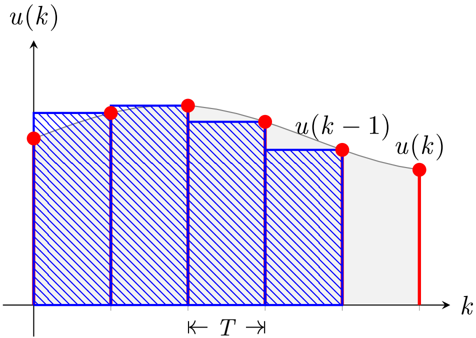


Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

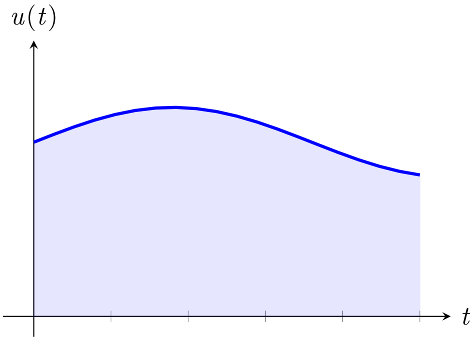


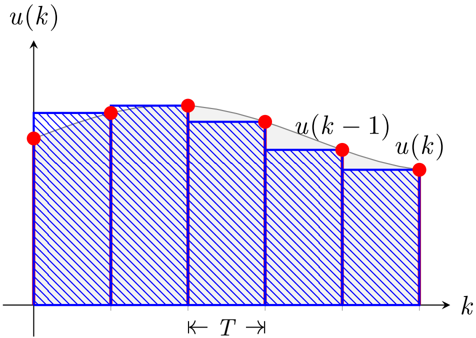


Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$



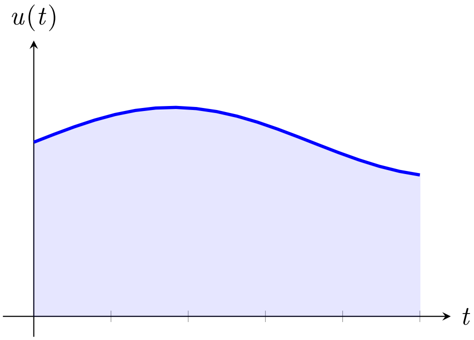


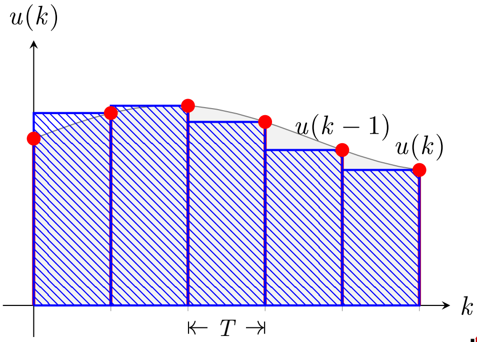
Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

$$y(k) = y(k-1) + u(k)T$$





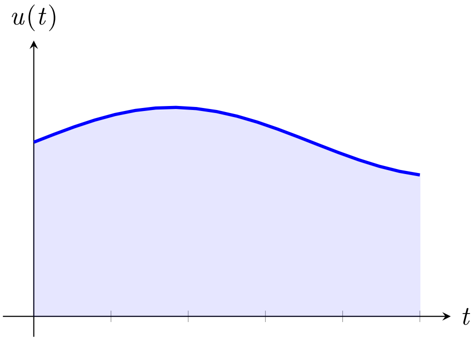
Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

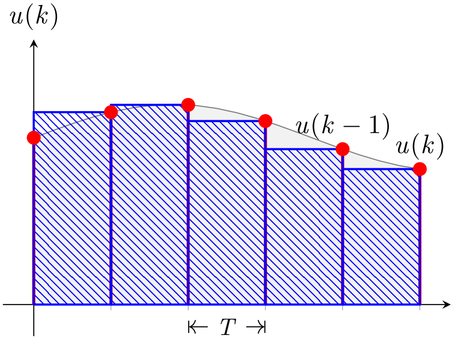
$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

$$y(k) = y(k-1) + u(k)T$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = T\frac{z}{z-1}$$





Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

- A aproximação pode ser vista como um mapeamento do plano s no plano z pela seguinte relação

$$s \approx \frac{1}{T}\frac{z-1}{z} \tag{1}$$

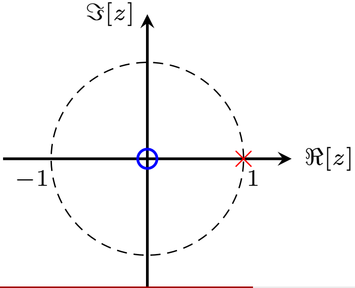
Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

- A aproximação pode ser vista como um mapeamento do plano s no plano z pela seguinte relação

$$s \approx \frac{1}{T}\frac{z-1}{z} \tag{1}$$

- Função de transferência para integral

$$G_i(z) = T\frac{z}{z-1}$$



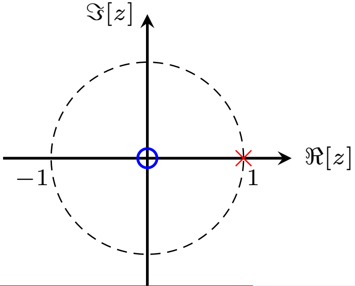
Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

- A aproximação pode ser vista como um mapeamento do plano s no plano z pela seguinte relação

$$s \approx \frac{1}{T}\frac{z-1}{z} \tag{1}$$

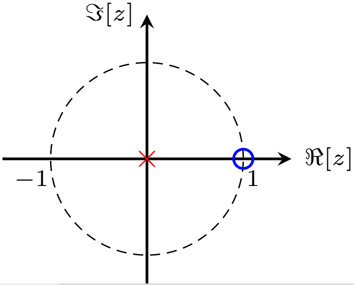
- Função de transferência para integral

$$G_i(z) = T\frac{z}{z-1}$$

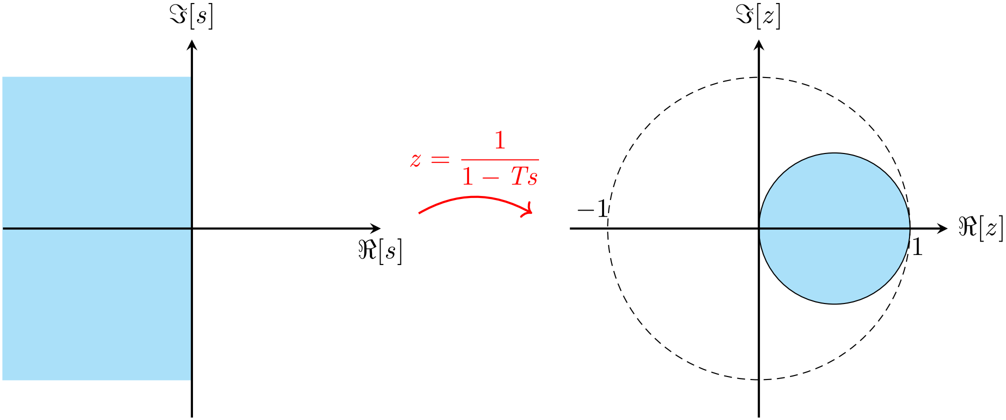


- Função de transferência para derivada

$$G_d(z) = \frac{1}{T}\frac{z-1}{z}$$



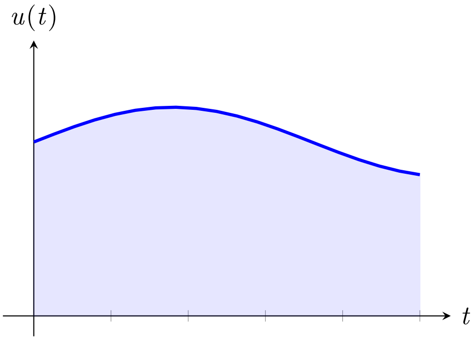
Aproximações por métodos numéricos - Euler Regressivo

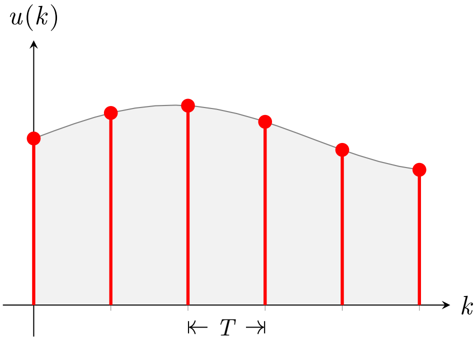


Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

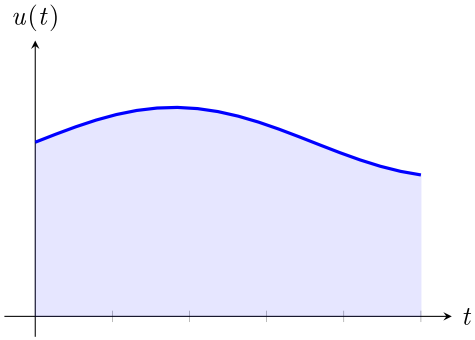


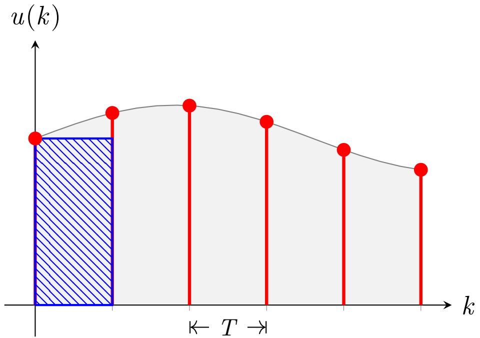


Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

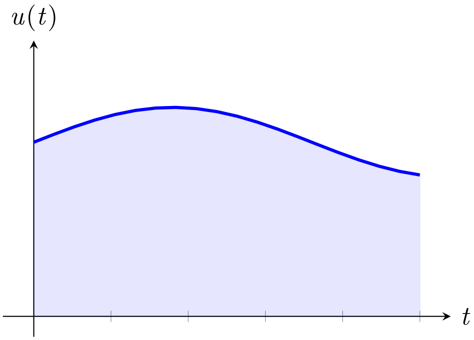


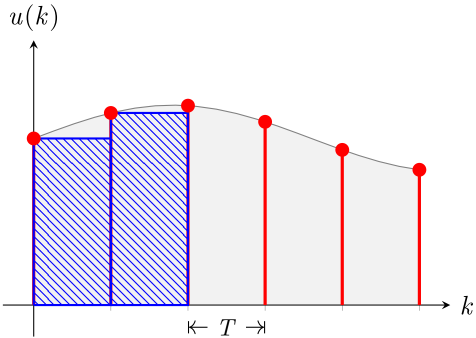


Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

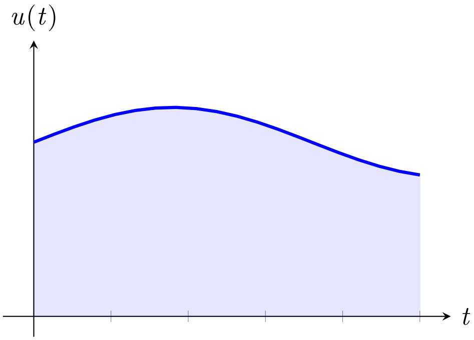


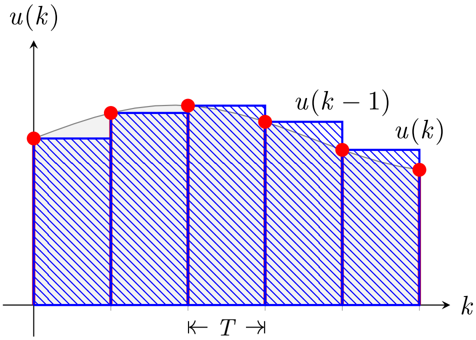


Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$



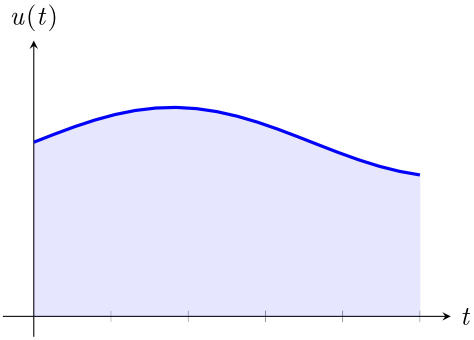


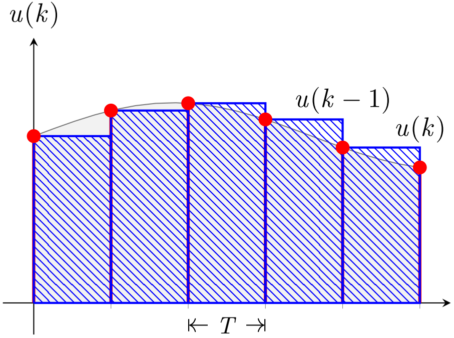
Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

$$y(k) = y(k-1) + u(k-1)\,T$$





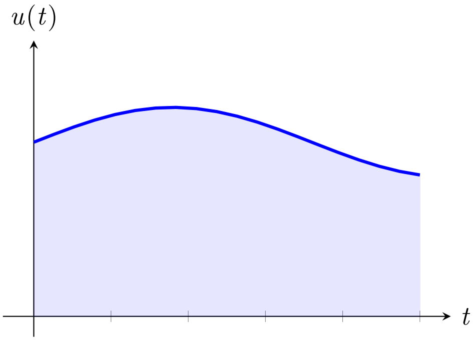
Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

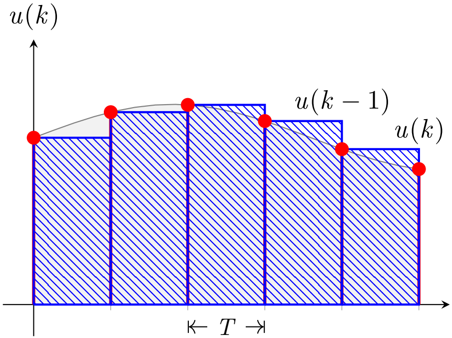
$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

$$y(k) = y(k-1) + u(k-1)\,T$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = T\frac{1}{z-1}$$





Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

- A aproximação pode ser vista como um mapeamento do plano s no plano z pela seguinte relação

$$s \approx \frac{1}{T}\frac{z-1}{1} \tag{2}$$

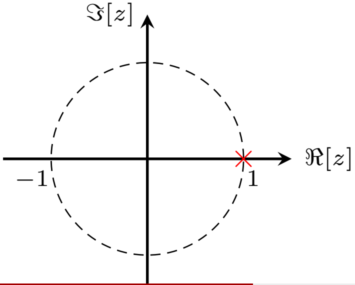
Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

- A aproximação pode ser vista como um mapeamento do plano s no plano z pela seguinte relação

$$s \approx \frac{1}{T}\frac{z-1}{1} \tag{2}$$

- Função de transferência para integral

$$G_i(z) = T\frac{1}{z-1}$$



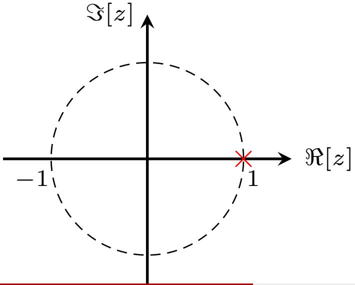
Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

- A aproximação pode ser vista como um mapeamento do plano s no plano z pela seguinte relação

$$s \approx \frac{1}{T}\frac{z-1}{1} \tag{2}$$

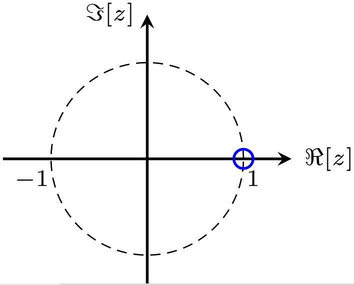
- Função de transferência para integral

$$G_i(z) = T\frac{1}{z-1}$$

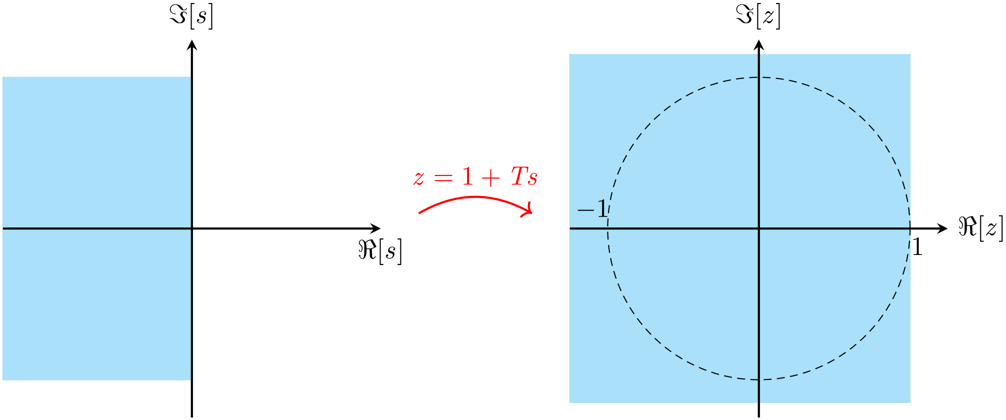


- Função de transferência para derivada

$$G_d(z) = \frac{1}{T}\frac{z-1}{1}$$



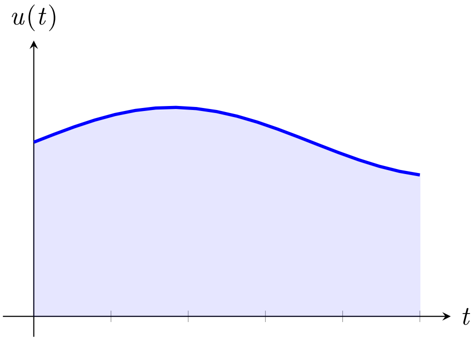
Aproximações por métodos numéricos - Euler Progressivo

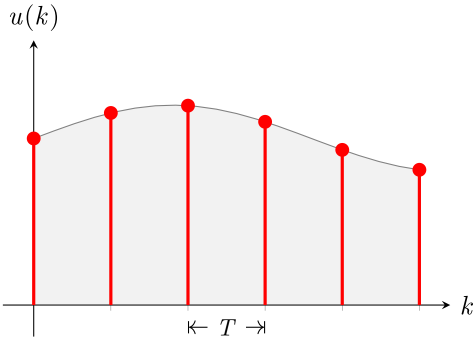


Aproximações por métodos numéricos - Tustin

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

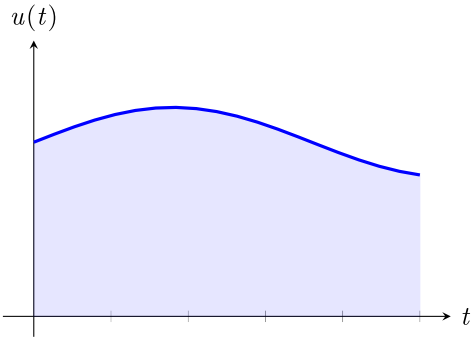


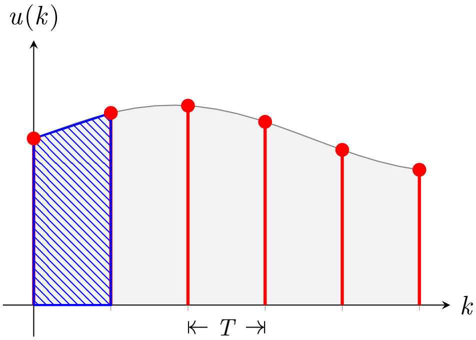


Aproximações por métodos numéricos - Tustin

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

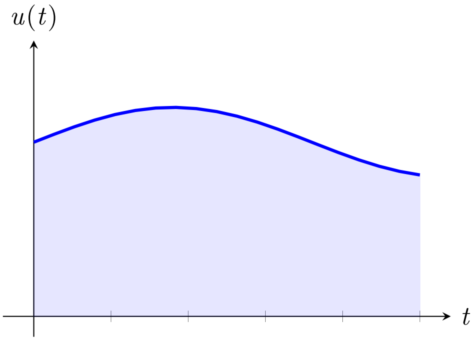


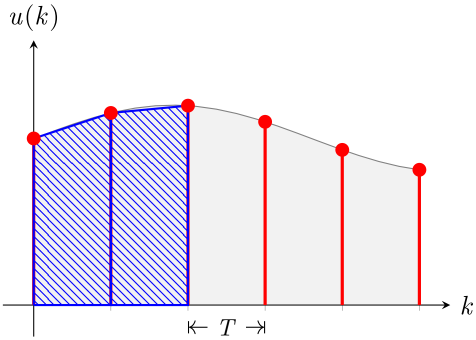


Aproximações por métodos numéricos - Tustin

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

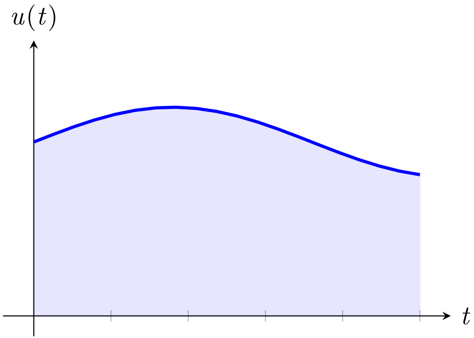


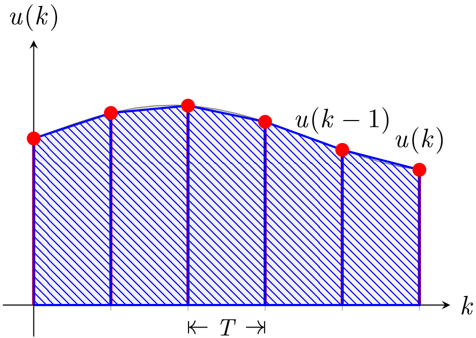


Aproximações por métodos numéricos - Tustin

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$



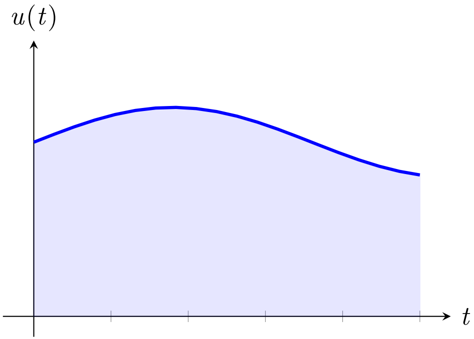


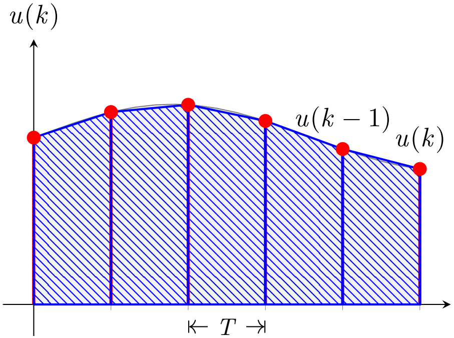
Aproximações por métodos numéricos - Tustin

$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

$$y(k) = y(k-1) + \frac{T}{2}\left[u(k) + u(k-1)\right]$$





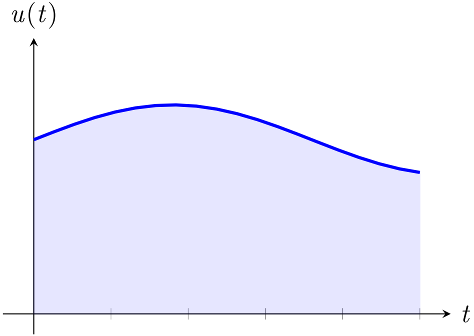
Aproximações por métodos numéricos - Tustin

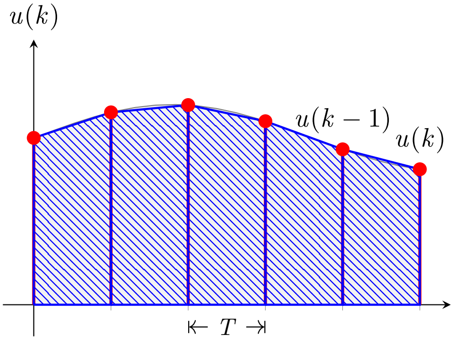
$$y(t) = \int u(t)\ dt$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

$$y(k) = y(k-1) + \frac{T}{2}\left[u(k) + u(k-1)\right]$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$





Aproximações por métodos numéricos - Tustin

- A aproximação pode ser vista como um mapeamento do plano s no plano z pela seguinte relação

$$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{3}$$

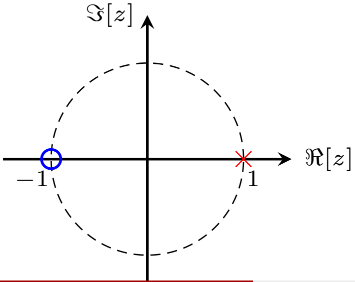
Aproximações por métodos numéricos - Tustin

- A aproximação pode ser vista como um mapeamento do plano s no plano z pela seguinte relação

$$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{3}$$

- Função de transferência para integral

$$G_i(z) = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$



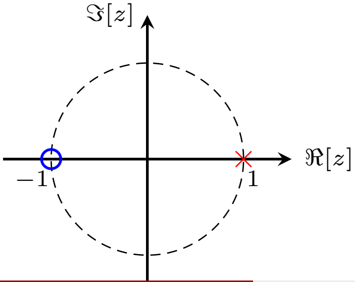
Aproximações por métodos numéricos - Tustin

- A aproximação pode ser vista como um mapeamento do plano s no plano z pela seguinte relação

$$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{3}$$

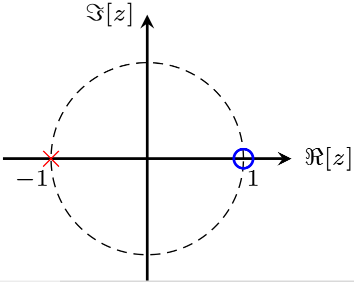
- Função de transferência para integral

$$G_i(z) = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

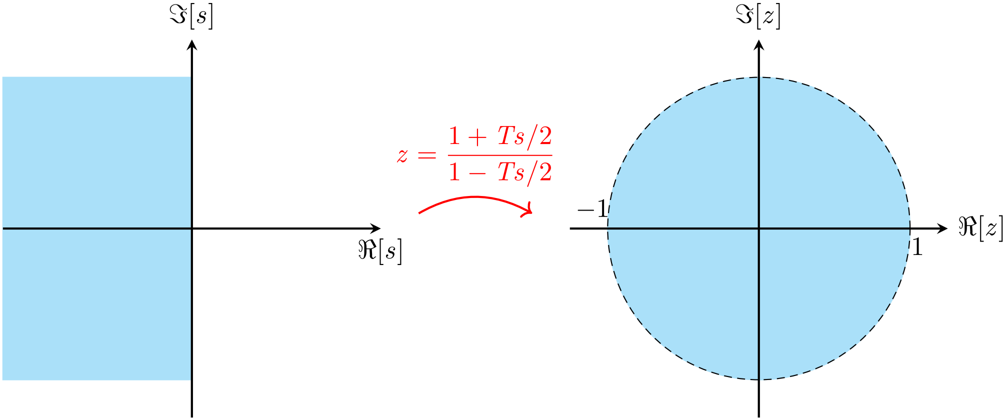


- Função de transferência para derivada

$$G_d(z) = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$



Aproximações por métodos numéricos - Tustin



Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Um dos problemas com as aproximações discutidas anteriormente é que a escala de frequência é distorcida.

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Um dos problemas com as aproximações discutidas anteriormente é que a escala de frequência é distorcida.
- Por exemplo, se um filtro passa-banda ou rejeita faixa é obtido através das aproximações estudadas até agora, o filtro digital obtido não resultará nas frequências projetadas no domínio contínuo.

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Um dos problemas com as aproximações discutidas anteriormente é que a escala de frequência é distorcida.
- Por exemplo, se um filtro passa-banda ou rejeita faixa é obtido através das aproximações estudadas até agora, o filtro digital obtido não resultará nas frequências projetadas no domínio contínuo.
- Este efeito é chamado de Frequency Warping (distorção na frequência).

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Considere a aproximação bilinear

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Considere a aproximação bilinear

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

- A transmissão de sinais senoidais para o filtro digital é dado por

$$G(e^{j\omega}) \approx G\left(\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}\right)$$

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Considere a aproximação bilinear

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

- A transmissão de sinais senoidais para o filtro digital é dado por

$$G(e^{j\omega}) \approx G\left(\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}\right)$$

- O argumento de G é

$$\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}+e^{-e^{j\omega T/2}}} = j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Considere a aproximação bilinear

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

- A transmissão de sinais senoidais para o filtro digital é dado por

$$G(e^{j\omega}) \approx G\left(\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}\right)$$

- O argumento de G é

$$\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}+e^{-e^{j\omega T/2}}} = j\,\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

- A escala de frequência é portanto distorcida.

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Assuma por exemplo que o sistema contínuo bloqueie sinais com frequência ω'.

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Assuma por exemplo que o sistema contínuo bloqueie sinais com frequência ω'.
- Devido a distorção da frequência, o sinal amostrado bloqueará a transmissão de sinais com frequência ω em que

$$\omega' = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- Assuma por exemplo que o sistema contínuo bloqueie sinais com frequência ω'.
- Devido a distorção da frequência, o sinal amostrado bloqueará a transmissão de sinais com frequência ω em que

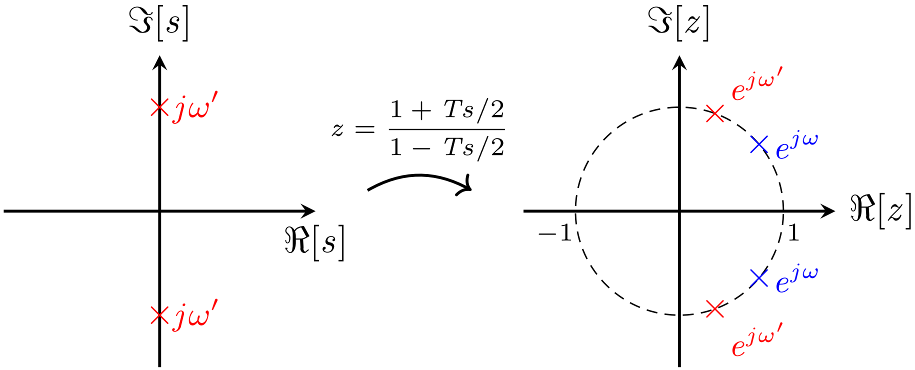
$$\omega' = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

- Ou seja

$$\omega = \frac{2}{T}\tan^{-1}\left(\frac{\omega' T}{2}\right) \approx \omega'\left(1 - \frac{(\omega' T)^2}{12}\right) \tag{4}$$

Distorção na Frequência - Frequency Warping

$$\omega = \frac{2}{T}\tan^{-1}\left(\frac{\omega' T}{2}\right) \approx \omega'\left(1 - \frac{(\omega' T)^2}{12}\right)$$



Distorção na Frequência - Frequency Warping

- É fácil introduzir uma transformação que elimine a distorção em uma frequência específica ω_1 modificando a transformação bilinear pela seguinte transformação (bilinear with pre-warping)

$$s' \approx \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 T/2)} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \tag{5}$$

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- É fácil introduzir uma transformação que elimine a distorção em uma frequência específica ω_1 modificando a transformação bilinear pela seguinte transformação (bilinear with pre-warping)

$$s' \approx \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 T/2)} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \tag{5}$$

- Consequentemente

$$H(e^{j\omega_1 T}) = G(j\omega_1)$$

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- É fácil introduzir uma transformação que elimine a distorção em uma frequência específica ω_1 modificando a transformação bilinear pela seguinte transformação (bilinear with pre-warping)

$$s' \approx \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 T/2)} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \tag{5}$$

- Consequentemente

$$H(e^{j\omega_1 T}) = G(j\omega_1)$$

- Ou seja, a função de transferência contínua e sua aproximação discreta tem o mesmo valor na frequência ω_1.

Distorção na Frequência - Frequency Warping

- É fácil introduzir uma transformação que elimine a distorção em uma frequência específica ω_1 modificando a transformação bilinear pela seguinte transformação (bilinear with pre-warping)

$$s' \approx \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 T/2)} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \tag{5}$$

- Consequentemente

$$H(e^{j\omega_1 T}) = G(j\omega_1)$$

- Ou seja, a função de transferência contínua e sua aproximação discreta tem o mesmo valor na frequência ω_1.
- Entretanto, ainda existem distorções em outras frequências.

Invariância ao degrau - Step Invariance

- Outra aproximação usa a ideia de amostrar sistemas contínuos.

Invariância ao degrau - Step Invariance

- Outra aproximação usa a ideia de amostrar sistemas contínuos.
- Desta forma, é possível obter aproximações que resultam em valores corretos nos instantes de amostragem para uma classe especial de sinais de entrada.

Invariância ao degrau - Step Invariance

- Outra aproximação usa a ideia de amostrar sistemas contínuos.
- Desta forma, é possível obter aproximações que resultam em valores corretos nos instantes de amostragem para uma classe especial de sinais de entrada.
- Por exemplo, se o sinal de entrada é constante durante os intervalos de amostragem a técnica de ZOH fornece uma função de transferência $H(z)$ que corresponde a função de transferência $G(s)$ que resulta em valores corretos da saída quando o sinal de entrada é um sinal constante por partes que muda nos instantes de amostragem.

Invariância ao degrau - Step Invariance

- Outra aproximação usa a ideia de amostrar sistemas contínuos.
- Desta forma, é possível obter aproximações que resultam em valores corretos nos instantes de amostragem para uma classe especial de sinais de entrada.
- Por exemplo, se o sinal de entrada é constante durante os intervalos de amostragem a técnica de ZOH fornece uma função de transferência $H(z)$ que corresponde a função de transferência $G(s)$ que resulta em valores corretos da saída quando o sinal de entrada é um sinal constante por partes que muda nos instantes de amostragem.
- Essa aproximação é portanto denominada invariância ao degrau.

Invariância à rampa - Ramp Invariance

- A noção de invariância ao degrau é idealmente adequada para descrever sistemas em que o sinal de entrada é gerado por um computador, pois o mesmo é constante em um período de amostragem.

Invariância à rampa - Ramp Invariance

- A noção de invariância ao degrau é idealmente adequada para descrever sistemas em que o sinal de entrada é gerado por um computador, pois o mesmo é constante em um período de amostragem.
- Esta aproximação no entanto, não é tão boa quando os sinais de entrada são contínuos.

Invariância à rampa - Ramp Invariance

- A noção de invariância ao degrau é idealmente adequada para descrever sistemas em que o sinal de entrada é gerado por um computador, pois o mesmo é constante em um período de amostragem.
- Esta aproximação no entanto, não é tão boa quando os sinais de entrada são contínuos.
- Neste caso, é muito melhor utilizar uma aproximação em se assume que o sinal de entrada varia linearmente entre os períodos de amostragem.

Invariância à rampa - Ramp Invariance

- A noção de invariância ao degrau é idealmente adequada para descrever sistemas em que o sinal de entrada é gerado por um computador, pois o mesmo é constante em um período de amostragem.
- Esta aproximação no entanto, não é tão boa quando os sinais de entrada são contínuos.
- Neste caso, é muito melhor utilizar uma aproximação em se assume que o sinal de entrada varia linearmente entre os períodos de amostragem.
- Esta aproximação é denominada invariância a rampa pois resulta em valores exatos da saída nos instantes de amostragem para sinais em rampa sendo idêntico a amostragem first-order-hold (FOH).

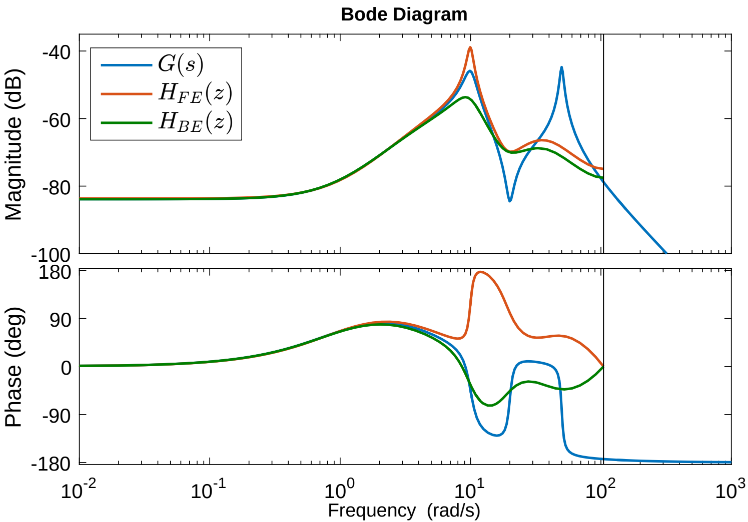
Comparação entre as aproximações

- Considere a seguinte função de transferência no tempo contínuo

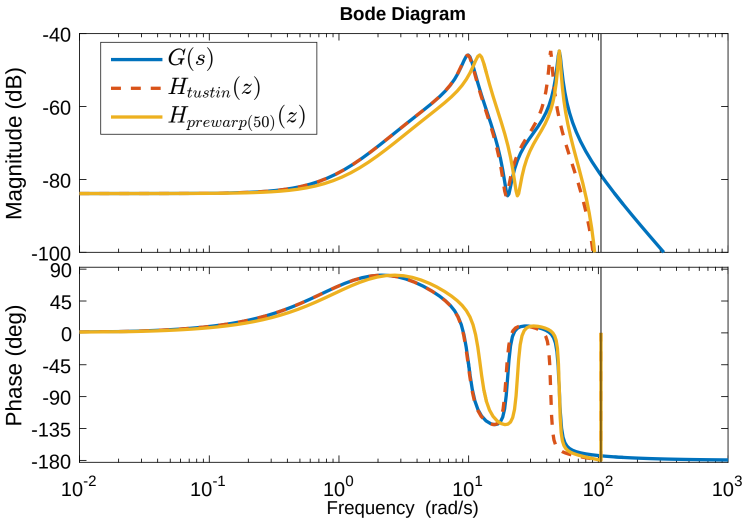
$$G(s) = \frac{(s+1)^2(s^2+2s+400)}{(s+5)^2(s^2+2s+100)(s^2+3s+2500)}$$

- As figuras a seguir mostram a resposta em frequência para diferentes métodos.
- O período de amostragem é $T = 0{,}03\ s$.

Comparação entre as aproximações



Comparação entre as aproximações



Comparação entre as aproximações