

# Projeto de Reguladores Utilizando Realimentação de Estados

Pedro Machado de Almeida  
[pedro.machado@ufjf.edu.br](mailto:pedro.machado@ufjf.edu.br)

Departamento de Energia Elétrica  
Universidade Federal de Juiz de Fora  
Juiz de Fora, MG, 36.036-900 Brasil

2020



# Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.

# Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:

# Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:
  - Equilibrar um pêndulo invertido

# Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:
  - Equilibrar um pêndulo invertido
  - Manter um avião a uma altitude preestabelecida

# Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:
  - Equilibrar um pêndulo invertido
  - Manter um avião a uma altitude preestabelecida
  - Manter uma reação química em uma temperatura constante

# Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:
  - Equilibrar um pêndulo invertido
  - Manter um avião a uma altitude preestabelecida
  - Manter uma reação química em uma temperatura constante
- Posteriormente, problemas de rastreamento de referências serão abordados e projetados utilizando conceitos desenvolvidos para regulação.

# Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.

# Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.
- Duas questões fundamentais devem ser respondidas:

# Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.
- Duas questões fundamentais devem ser respondidas:
  1. É possível levar o sistema de um dado estado inicial até outro estado qualquer?

# Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.
- Duas questões fundamentais devem ser respondidas:
  1. É possível levar o sistema de um dado estado inicial até outro estado qualquer?
  2. Como determinar o estado de um sistema dinâmico a partir das observações das entradas e saídas?

# Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.
- Duas questões fundamentais devem ser respondidas:
  1. É possível levar o sistema de um dado estado inicial até outro estado qualquer?
  2. Como determinar o estado de um sistema dinâmico a partir das observações das entradas e saídas?
- Estas questões foram levantadas e respondidas por **Kalman**, quem introduziu os conceitos de controlabilidade e observabilidade.

# Controlabilidade

- O conceito base para o desenvolvimento de sistemas de controle no espaço de estados é a **controlabilidade**.

# Controlabilidade

- O conceito base para o desenvolvimento de sistemas de controle no espaço de estados é a **controlabilidade**.

## Definição - Controlabilidade

A equação de estados  $\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma u(k)$  é dito **controlável** se é possível encontrar uma sequência e entrada  $u(k)$  que leva o sistema de um estado inicial arbitrário  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}_1$  até um estado arbitrário final  $\mathbf{x}(j) = \mathbf{z}_2$  em um tempo finito  $j$ .

# Controlabilidade

- O conceito base para o desenvolvimento de sistemas de controle no espaço de estados é a **controlabilidade**.

## Definição - Controlabilidade

A equação de estados  $\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma u(k)$  é dito **controlável** se é possível encontrar uma sequência e entrada  $u(k)$  que leva o sistema de um estado inicial arbitrário  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}_1$  até um estado arbitrário final  $\mathbf{x}(j) = \mathbf{z}_2$  em um tempo finito  $j$ .

- Em outras palavras, um sistema controlável é aquele no qual pode-se mudar o estado de uma condição inicial arbitrária para um estado final arbitrário em um tempo finito.

# Controlabilidade

- O conceito base para o desenvolvimento de sistemas de controle no espaço de estados é a **controlabilidade**.

## Definição - Controlabilidade

A equação de estados  $\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma u(k)$  é dito **controlável** se é possível encontrar uma sequência e entrada  $u(k)$  que leva o sistema de um estado inicial arbitrário  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}_1$  até um estado arbitrário final  $\mathbf{x}(j) = \mathbf{z}_2$  em um tempo finito  $j$ .

- Em outras palavras, um sistema controlável é aquele no qual pode-se mudar o estado de uma condição inicial arbitrária para um estado final arbitrário em um tempo finito.
- Se o sistema não é controlável, existem estados que são inacessíveis a partir de uma ação de controle.

# Controlabilidade

- De forma a determinar se um dado sistema é controlável, considere a solução das equações de estado

$$\mathbf{x}(j) = \Phi^j \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} \Phi^{j-i-1} \boldsymbol{\Gamma} u(i) \quad (1)$$

# Controlabilidade

- De forma a determinar se um dado sistema é controlável, considere a solução das equações de estado

$$\mathbf{x}(j) = \Phi^j \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} \Phi^{j-i-1} \boldsymbol{\Gamma} u(i) \quad (1)$$

- O sistema é controlável se para dados valores arbitrários de  $\mathbf{x}(0)$  e  $\mathbf{x}(j)$  é possível encontrar uma sequência de entrada  $\{u(0), u(1), \dots, u(j-1)\}$  que leva o sistema de  $\mathbf{x}(0)$  até  $\mathbf{x}(j)$ .

# Controlabilidade

- De forma a determinar se um dado sistema é controlável, considere a solução das equações de estado

$$\mathbf{x}(j) = \Phi^j \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} \Phi^{j-i-1} \boldsymbol{\Gamma} u(i) \quad (1)$$

- O sistema é controlável se para dados valores arbitrários de  $\mathbf{x}(0)$  e  $\mathbf{x}(j)$  é possível encontrar uma sequência de entrada  $\{u(0), u(1), \dots, u(j-1)\}$  que leva o sistema de  $\mathbf{x}(0)$  até  $\mathbf{x}(j)$ .
- Note que a definição de controlabilidade não especifica o tempo para a mudança de estado. Apenas que  $j$  deve ser finto.

# Controlabilidade

- Para uma primeira análise pode-se escolher  $j = n$ , em que  $n$  é a ordem do sistema

$$\mathbf{x}(n) = \Phi^n \mathbf{x}(0) + \Phi^{n-1} \mathbf{\Gamma} u(0) + \Phi^{n-2} \mathbf{\Gamma} u(1) + \cdots + \mathbf{\Gamma} u(n-1) \quad (2)$$

# Controlabilidade

- Para uma primeira análise pode-se escolher  $j = n$ , em que  $n$  é a ordem do sistema

$$\mathbf{x}(n) = \Phi^n \mathbf{x}(0) + \Phi^{n-1} \mathbf{\Gamma} u(0) + \Phi^{n-2} \mathbf{\Gamma} u(1) + \cdots + \mathbf{\Gamma} u(n-1) \quad (2)$$

- Escrevendo (2) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_n(n) \end{bmatrix} - \Phi^n \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = [\mathbf{\Gamma} \quad \Phi\mathbf{\Gamma} \quad \cdots \quad \Phi^{n-1}\mathbf{\Gamma}] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

# Controlabilidade

- Para uma primeira análise pode-se escolher  $j = n$ , em que  $n$  é a ordem do sistema

$$\mathbf{x}(n) = \Phi^n \mathbf{x}(0) + \Phi^{n-1} \boldsymbol{\Gamma} u(0) + \Phi^{n-2} \boldsymbol{\Gamma} u(1) + \cdots + \boldsymbol{\Gamma} u(n-1) \quad (2)$$

- Escrevendo (2) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_n(n) \end{bmatrix} - \Phi^n \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Gamma} \quad \Phi\boldsymbol{\Gamma} \quad \cdots \Phi^{n-1}\boldsymbol{\Gamma}] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ou

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}_c \mathbf{u} \quad (4)$$

# Controlabilidade

- Para uma primeira análise pode-se escolher  $j = n$ , em que  $n$  é a ordem do sistema

$$\mathbf{x}(n) = \Phi^n \mathbf{x}(0) + \Phi^{n-1} \boldsymbol{\Gamma} u(0) + \Phi^{n-2} \boldsymbol{\Gamma} u(1) + \cdots + \boldsymbol{\Gamma} u(n-1) \quad (2)$$

- Escrevendo (2) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_n(n) \end{bmatrix} - \Phi^n \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Gamma} \quad \Phi\boldsymbol{\Gamma} \quad \cdots \Phi^{n-1}\boldsymbol{\Gamma}] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ou

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}_c \mathbf{u} \quad (4)$$

em que a matriz

$$\mathbf{W}_c = [\boldsymbol{\Gamma} \quad \Phi\boldsymbol{\Gamma} \quad \cdots \Phi^{n-1}\boldsymbol{\Gamma}] \quad (5)$$

é chamada **matriz de controlabilidade para  $(\Phi, \boldsymbol{\Gamma})$** .

# Controlabilidade

- Se a matriz  $\mathbf{W}_c$  tem inversa, o vetor de entrada é dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{z} \quad (6)$$

# Controlabilidade

- Se a matriz  $\mathbf{W}_c$  tem inversa, o vetor de entrada é dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{z} \quad (6)$$

- Lembre-se de que uma matriz  $n \times n$  tem inversa (é não singular, ou tem posto  $n$ ) se e apenas se o determinante é diferente de zero.

# Controlabilidade

- Se a matriz  $\mathbf{W}_c$  tem inversa, o vetor de entrada é dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{z} \quad (6)$$

- Lembre-se de que uma matriz  $n \times n$  tem inversa (é não singular, ou tem posto  $n$ ) se e apenas se o determinante é diferente de zero.
- Se o posto da matriz de controlabilidade é menor que  $n$ , o sistema é dito **não controlável**.

# Controlabilidade

## Teorema - Controlabilidade

O sistema de ordem  $n$

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Phi u(k)$$

é controlável se e apenas se a matriz de controlabilidade

$$[\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$$

tem posto  $n$  (posto completo).

# Controlabilidade

## Teorema - Controlabilidade

O sistema de ordem  $n$

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Phi u(k)$$

é controlável se e apenas se a matriz de controlabilidade

$$[\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$$

tem posto  $n$  (posto completo).

- Uma importante consequência desse desenvolvimento é: **um sistema de  $n$ -ésima ordem controlável pode ir de seu estado atual até qualquer outro estado em  $n$  períodos de amostragem.**

# Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.

# Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.
- É uma propriedade que todos os sistemas no qual o modelo em espaço de estados não possui uma função de transferência com cancelamento de polos e zeros.

# Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.
- É uma propriedade que todos os sistemas no qual o modelo em espaço de estados não possui uma função de transferência com cancelamento de polos e zeros.
- Modelos com tal cancelamento será **não controlável** e/ou **não observável** (propriedade importante que será analisada em breve).

# Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.
- É uma propriedade que todos os sistemas no qual o modelo em espaço de estados não possui uma função de transferência com cancelamento de polos e zeros.
- Modelos com tal cancelamento será **não controlável** e/ou **não observável** (propriedade importante que será analisada em breve).

## Teorema

O modelo em espaço de estados  $(\Phi, \Gamma, C, D)$  com a função de transferência  $H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D = b(z)/a(z)$  será controlável e observável se e apenas se  $b(z)$  e  $a(z)$  não possuírem raízes comuns (sem cancelamento polo/zero).

# Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.
- É uma propriedade que todos os sistemas no qual o modelo em espaço de estados não possui uma função de transferência com cancelamento de polos e zeros.
- Modelos com tal cancelamento será **não controlável** e/ou **não observável** (propriedade importante que será analisada em breve).

## Teorema

O modelo em espaço de estados  $(\Phi, \Gamma, C, D)$  com a função de transferência  $H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D = b(z)/a(z)$  será controlável e observável se e apenas se  $b(z)$  e  $a(z)$  não possuírem raízes comuns (sem cancelamento polo/zero).

- Uma consequência útil desse teorema é que ser um sistema de  $n$ -ésima ordem não possui cancelamento polo/zero na sua função de transferência, qualquer modelo no espaço de estados de  $n$ -ésima ordem será controlável e observável.

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.
- Entretanto, na maioria das aplicações o sistema a ser controlado é contínuo.

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.
- Entretanto, na maioria das aplicações o sistema a ser controlado é contínuo.
- Considere o seguinte sistema, sem cancelamento de polos e zeros

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}\tag{7}$$

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.
- Entretanto, na maioria das aplicações o sistema a ser controlado é contínuo.
- Considere o seguinte sistema, sem cancelamento de polos e zeros

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}\tag{7}$$

- O sistema discretizado utilizando ZOH é

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma u(k)\tag{8}$$

em que

$$\Phi = e^{\mathbf{A}T} \quad \text{e} \quad \Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau$$

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.
- Entretanto, na maioria das aplicações o sistema a ser controlado é contínuo.
- Considere o seguinte sistema, sem cancelamento de polos e zeros

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}\tag{7}$$

- O sistema discretizado utilizando ZOH é

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma u(k)\tag{8}$$

em que

$$\Phi = e^{\mathbf{A}T} \quad \text{e} \quad \Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau$$

- **Se os sistema contínuo (7) é controlável é garantido que o sistema discretizado (8) também será controlável?**

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem  $T$ .

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem  $T$ .
- Uma condição simples e suficiente em  $T$  para garantir a controlabilidade do sistema equivalente ZOH é dada em termos da localização dos polos do sistema contínuo.

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem  $T$ .
- Uma condição simples e suficiente em  $T$  para garantir a controlabilidade do sistema equivalente ZOH é dada em termos da localização dos polos do sistema contínuo.
- Suponha que a seguinte localização dos polos  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem  $T$ .
- Uma condição simples e suficiente em  $T$  para garantir a controlabilidade do sistema equivalente ZOH é dada em termos da localização dos polos do sistema contínuo.
- Suponha que a seguinte localização dos polos  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

- Definindo  $\beta_{max}$  como sendo a parte imaginária com maior magnitude

$$\beta_{max} = \max_i |\beta_i|, \quad i = 1, \dots, n$$

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem  $T$ .
- Uma condição simples e suficiente em  $T$  para garantir a controlabilidade do sistema equivalente ZOH é dada em termos da localização dos polos do sistema contínuo.
- Suponha que a seguinte localização dos polos  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

- Definindo  $\beta_{max}$  como sendo a parte imaginária com maior magnitude

$$\beta_{max} = \max_i |\beta_i|, \quad i = 1, \dots, n$$

- A condição suficiente para garantir a controlabilidade é

$$T < \frac{\pi}{\beta_{max}} \tag{9}$$

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A condição anterior tem forma similar a condição do teorema de amostragem.

# Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A condição anterior tem forma similar a condição do teorema de amostragem.
- Note que se a planta possui todos seus polos no eixo real,  $\beta_{max} = 0$ , o sistema discretizado será controlável para qualquer valor de  $T$ .

# Alocação de Polos

- Considere inicialmente que todas as variáveis de estado são medidas.

# Alocação de Polos

- Considere inicialmente que todas as variáveis de estado são medidas.
- Se o sistema é controlável, através de uma combinação linear dos estados, é possível alocar os polos de malha fechada no local desejado.

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (10)$$

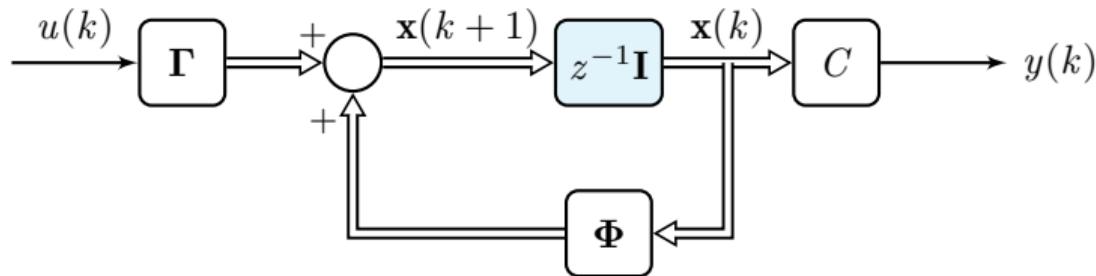


Figura 1: Sistema em malha aberta.

# Alocação

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (11)$$

$$u(k) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(k) = [-l_1 \quad -l_2 \quad \cdots \quad -l_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (12)$$

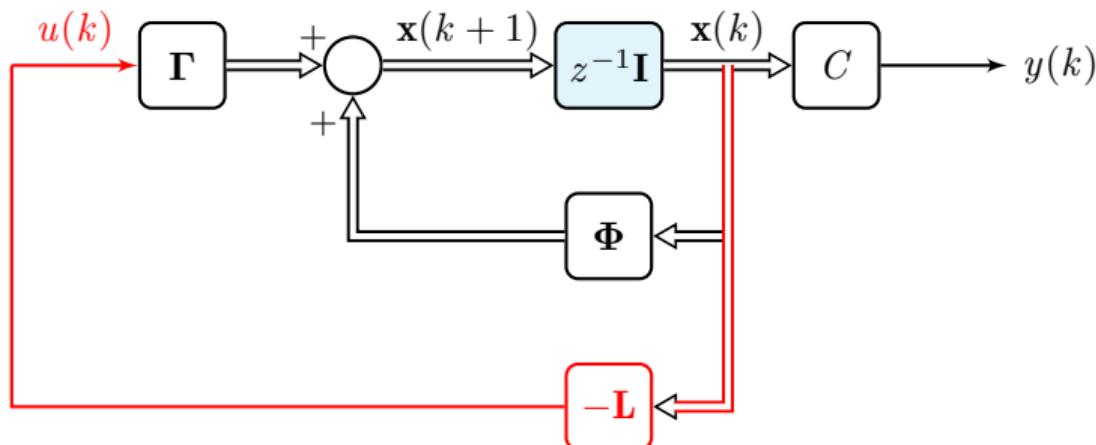


Figura 2: Sistema em malha fechada com realimentação de estados.

# Forma Canônica Controlável

- Assuma que  $\Phi$  tem a equação característica

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \Phi) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (13)$$

# Forma Canônica Controlável

- Assuma que  $\Phi$  tem a equação característica

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \Phi) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (13)$$

- A sua forma canônica controlável é dada por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}(k) \\ &= \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\Gamma}\bar{u}(k) \end{aligned} \quad (14)$$

# Forma Canônica Controlável

- A forma canônica (14) tem as seguintes propriedades

# Forma Canônica Controlável

- A forma canônica (14) tem as seguintes propriedades

- A matriz de controlabilidade da forma canônica controlável é triangular superior

$$\begin{aligned}\bar{W}_c &= [\bar{\Gamma} \quad \bar{\Phi}\bar{\Gamma} \quad \dots \quad \bar{\Phi}^{n-1}\bar{\Gamma}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

portanto o determinante de  $\bar{W}_c$  é igual a 1. O que significa que o sistema  $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$  é sempre controlável independentemente dos valores de  $a_n$ .

# Forma Canônica Controlável

- A forma canônica (14) tem as seguintes propriedades

- 1 A matriz de controlabilidade da forma canônica controlável é triangular superior

$$\begin{aligned}\bar{W}_c &= [\bar{\Gamma} \quad \bar{\Phi}\bar{\Gamma} \quad \dots \quad \bar{\Phi}^{n-1}\bar{\Gamma}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

portanto o determinante de  $\bar{W}_c$  é igual a 1. O que significa que o sistema  $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$  é sempre controlável independentemente dos valores de  $a_n$ .

- 2 Qualquer sistema controlável pode ser transformado para a forma canônica controlável através de uma transformação linear adequada.

# Forma Canônica Controlável

- Um dado sistema controlável  $(\Phi, \Gamma)$  e uma forma canônica controlável  $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$  são relacionados pela seguinte transformação linear

$$\bar{x}(k) = T_c x(k) \quad (16)$$

em que

$$T_c = \bar{W}_c W_c^{-1} \quad (17)$$

# Alocação

- O modelo discreto da planta  $(\Phi, \Gamma)$  pode ser transformado na forma canônica controlável  $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$  e fechar a malha com uma realimentação de estados com vetor de ganhos  $-\bar{L}$ .

# Alocação

- O modelo discreto da planta  $(\Phi, \Gamma)$  pode ser transformado na forma canônica controlável  $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$  e fechar a malha com uma realimentação de estados com vetor de ganhos  $-\bar{L}$ .
- O cálculo do vetor  $\bar{L}$  que aloca os polos na posição desejada utilizando a forma canônica controlável é simples.

# Alocação

- O modelo discreto da planta  $(\Phi, \Gamma)$  pode ser transformado na forma canônica controlável  $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$  e fechar a malha com uma realimentação de estados com vetor de ganhos  $-\bar{L}$ .
- O cálculo do vetor  $\bar{L}$  que aloca os polos na posição desejada utilizando a forma canônica controlável é simples.
- Posteriormente,  $\bar{L}$  pode ser transformado em  $L$  através de uma transformação linear, que aloca os polos do sistema  $(\Phi, \Gamma)$  nos locais desejados.

# Alocação

- O modelo discreto da planta  $(\Phi, \Gamma)$  pode ser transformado na forma canônica controlável  $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$  e fechar a malha com uma realimentação de estados com vetor de ganhos  $-\bar{L}$ .
- O cálculo do vetor  $\bar{L}$  que aloca os polos na posição desejada utilizando a forma canônica controlável é simples.
- Posteriormente,  $\bar{L}$  pode ser transformado em  $L$  através de uma transformação linear, que aloca os polos do sistema  $(\Phi, \Gamma)$  nos locais desejados.
- O vetor  $L$  é o vetor de ganhos utilizados no regulador real.

# Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

- Substituindo a ação de controle na planta

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}\bar{u}(k) \quad (19)$$

$$(20)$$

$$(21)$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

- Substituindo a ação de controle na planta

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}\bar{u}(k) \quad (19)$$

$$= \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}(-\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k)) \quad (20)$$

(21)

# Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

- Substituindo a ação de controle na planta

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}\bar{u}(k) \quad (19)$$

$$= \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}(-\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k)) \quad (20)$$

$$= (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (21)$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

- Substituindo a ação de controle na planta

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}\bar{u}(k) \quad (19)$$

$$= \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}(-\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k)) \quad (20)$$

$$= (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (21)$$

- Note que

$$\bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \cdots & \bar{l}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \cdots & \bar{l}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

$$\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}}$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

$$\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \cdots & \bar{l}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

$$\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \cdots & \bar{l}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 - \bar{l}_1 & -a_2 - \bar{l}_2 & \cdots & -a_n - \bar{l}_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

$$\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \cdots & \bar{l}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 - \bar{l}_1 & -a_2 - \bar{l}_2 & \cdots & -a_n - \bar{l}_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Suponha que os autovalores desejados sejam especificados pelo seguinte polinômio

$$p(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n \quad (24)$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

- Para encontrar os ganhos do vetor de realimentação  $\bar{L}$  basta igualar os coeficientes

$$-a_1 - \bar{l}_1 = -p_1$$

$$-a_2 - \bar{l}_2 = -p_2$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots$$

$$-a_n - \bar{l}_n = -p_n$$

# Alocação de polos na forma canônica controlável

- Para encontrar os ganhos do vetor de realimentação  $\bar{\mathbf{L}}$  basta igualar os coeficientes

$$-a_1 - \bar{l}_1 = -p_1$$

$$-a_2 - \bar{l}_2 = -p_2$$

$$\vdots = \vdots$$

$$-a_n - \bar{l}_n = -p_n$$

- O que resulta em

$$\bar{\mathbf{L}} = [(p_1 - a_1) \quad (p_2 - a_2) \quad \cdots \quad (p_n - a_n)] \quad (25)$$

# Alocação de polos para um sistema controlável arbitrário

- Após o cálculo de  $\bar{\mathbf{L}}$  o vetor de ganhos  $\mathbf{L}$  utilizado no sistema real pode ser encontrado através da seguinte transformação linear

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}\mathbf{T}_c \quad (26)$$

# Alocação de polos para um sistema controlável arbitrário

- Após o cálculo de  $\bar{\mathbf{L}}$  o vetor de ganhos  $\mathbf{L}$  utilizado no sistema real pode ser encontrado através da seguinte transformação linear

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}\mathbf{T}_c \quad (26)$$

- em que  $\mathbf{T}_c = \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{W}_c^{-1}$ , portanto

$$\mathbf{L} = [(p_1 - a_1) \quad (p_2 - a_2) \quad \cdots \quad (p_n - a_n)] \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{W}_c^{-1} \quad (27)$$

# Fórmula de Ackermann

- Outra maneira de calcular o vetor de ganhos é a fórmula de Ackermann

## Fórmula de Ackermann

$$\mathbf{L} = [0 \cdots 1] \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{p}(\Phi) \quad (28)$$

em que  $\mathbf{W}_c$  é a matriz de controlabilidade do modelo ZOH equivalente  $(\Phi, \Gamma)$ , e  $\mathbf{p}(\Phi)$  é a matriz polinomial  $\Phi^n + p_1\Phi^{n-1} + \cdots + p_n\mathbf{I}$ . As raízes de  $p(z)$  são as localizações desejadas dos polos de malha fechada.

# Procedimento para o cálculo do vetor de realimentação

- 1 Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- $s$  e o período de amostragem  $T$ .

# Procedimento para o cálculo do vetor de realimentação

- 1 Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- $s$  e o período de amostragem  $T$ .
- 2 Obtenha o modelo equivalente discreto ZOH da planta e calcule o polinômio do denominador

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi) = a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

Se os polos  $s_i$  da planta contínua são conhecidos,  $a(z)$  pode ser calculado como

$$a(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{s_i T})$$

# Procedimento para o cálculo do vetor de realimentação

- 1 Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- $s$  e o período de amostragem  $T$ .
- 2 Obtenha o modelo equivalente discreto ZOH da planta e calcule o polinômio do denominador

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi) = a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

Se os polos  $s_i$  da planta contínua são conhecidos,  $a(z)$  pode ser calculado como

$$a(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{s_i T})$$

- 3 Mapeie os polos escolhidos do Item 1 no plano- $z$  utilizando a fórmula de mapeamento  $z_i = e^{s_i T}$ . Multiplique os polos para obter o polinômio  $p(z)$

$$\prod_{i=1}^n (z - z_i) = z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n = p(z)$$

# Procedimento para o cálculo do vetor de realimentação

- 1 Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- $s$  e o período de amostragem  $T$ .
- 2 Obtenha o modelo equivalente discreto ZOH da planta e calcule o polinômio do denominador

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi) = a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

Se os polos  $s_i$  da planta contínua são conhecidos,  $a(z)$  pode ser calculado como

$$a(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{s_i T})$$

- 3 Mapeie os polos escolhidos do Item 1 no plano- $z$  utilizando a fórmula de mapeamento  $z_i = e^{s_i T}$ . Multiplique os polos para obter o polinômio  $p(z)$

$$\prod_{i=1}^n (z - z_i) = z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n = p(z)$$

- 4 Monte as matrizes de controlabilidade  $\mathbf{W}_c$  e  $\bar{\mathbf{W}}_c$ .

# Procedimento para o cálculo do vetor de realimentação

- 1 Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- $s$  e o período de amostragem  $T$ .
- 2 Obtenha o modelo equivalente discreto ZOH da planta e calcule o polinômio do denominador

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi) = a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

Se os polos  $s_i$  da planta contínua são conhecidos,  $a(z)$  pode ser calculado como

$$a(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{s_i T})$$

- 3 Mapeie os polos escolhidos do Item 1 no plano- $z$  utilizando a fórmula de mapeamento  $z_i = e^{s_i T}$ . Multiplique os polos para obter o polinômio  $p(z)$

$$\prod_{i=1}^n (z - z_i) = z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n = p(z)$$

- 4 Monte as matrizes de controlabilidade  $\mathbf{W}_c$  e  $\bar{\mathbf{W}}_c$ .
- 5 Calcule o vetor de realimentação

$$\mathbf{L} = [(p_1 - a_1) \quad (p_2 - a_2) \quad \cdots \quad (p_n - a_n)] \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{W}_c^{-1}$$

# Margens de Estabilidade

- As margens de estabilidade são determinadas utilizando o gráfico de Nyquist da função de transferência de malha aberta  $\ell(z)$  juntamente com o ponto crítico  $(-1,j0)$ .

# Margens de Estabilidade

- As margens de estabilidade são determinadas utilizando o gráfico de Nyquist da função de transferência de malha aberta  $\ell(z)$  juntamente com o ponto crítico  $(-1,j0)$ .
- As margens de estabilidade mostram qual a máxima perturbação no ganho e fase que podem ser toleradas em  $\ell(z)$  antes que o sistema em malha fechada se torne instável.

# Margens de Estabilidade

- As margens de estabilidade são determinadas utilizando o gráfico de Nyquist da função de transferência de malha aberta  $\ell(z)$  juntamente com o ponto crítico  $(-1,j0)$ .
- As margens de estabilidade mostram qual a máxima perturbação no ganho e fase que podem ser toleradas em  $\ell(z)$  antes que o sistema em malha fechada se torne instável.
- Para o caso de realimentação de estados, os sistema deve ser primeiramente convertido em um sistema SISO de acordo com a Figura 3.

# Margens de Estabilidade

- As margens de estabilidade são determinadas utilizando o gráfico de Nyquist da função de transferência de malha aberta  $\ell(z)$  juntamente com o ponto crítico  $(-1, j0)$ .
- As margens de estabilidade mostram qual a máxima perturbação no ganho e fase que podem ser toleradas em  $\ell(z)$  antes que o sistema em malha fechada se torne instável.
- Para o caso de realimentação de estados, os sistema deve ser primeiramente convertido em um sistema SISO de acordo com a Figura 3.
- Note que o sinal negativo de  $-L$  foi movido para o somador.

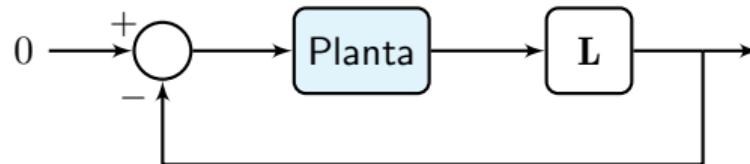


Figura 3: Sistema com realimentação negativa unitária.

# Margens de Estabilidade

- Para analisar a estabilidade e as margens de fase e ganho, deve-se analisar o diagrama de Nyquist (ou Bode) de

$$\ell(z) = \mathbf{L}(z\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Gamma} \quad (29)$$

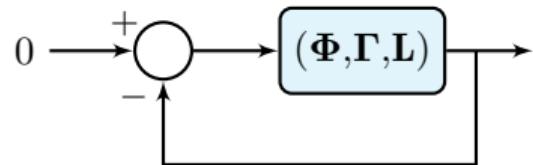


Figura 4: Sistema equivalente para análise das margens de estabilidade.