Controle de uma Bola Sobre a Viga

Alice Ramos Ferreira
Iuri Carlos Scatambuli Brighenti
Jakson da Rocha Almeida

Sumário

Objetivos

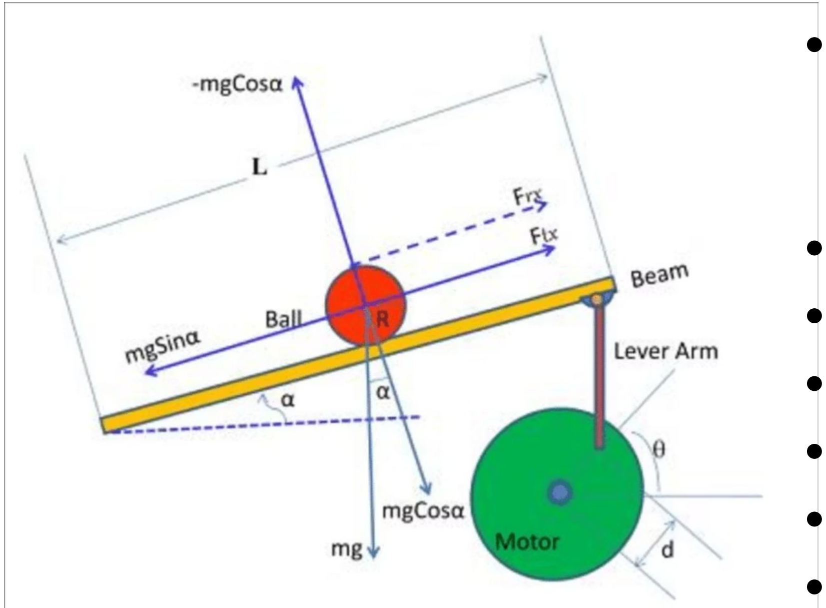


Figura 1: Sistema Ball and Beam

- Controlador através do método do espaço de estados que:
    - Rastreie uma referência assintoticamente
    - Rejeite um distúrbio assintoticamente
- Escolha dos auto-valores em malha fechada
- Apresentar a análise das funções de sensibilidade
- Análise das curvas de resposta em frequência.
- Simulação e análise da simulação.
- Respostas frente a variações no distúrbio e na referência
- Conclusões

Modelo Contínuo do Sistema

A equação linearizada é dada por:

$$\ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin(\alpha) \quad \text{com} \quad \sin(\alpha) \approx \alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{5}{7} g \cdot \alpha$$

Aplicando Laplace para condições iniciais nulas:

$$s^2 X(s) = \frac{5}{7} g \cdot \alpha(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{\alpha(s)} = \frac{\frac{5}{7} g}{s^2}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^2}, \quad K = \frac{5}{7} \cdot 9.81 \approx 7.0071$$

- Representação em Espaço de Estados

Variáveis de estado: $\begin{cases} x_1 = x & \text{(posição)} \\ x_2 = \dot{x} & \text{(velocidade)} \end{cases}$

Das equações: $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= K \cdot u \end{aligned}$

Encontramos:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelagem Discreta

Considerando o sistema linearizado com Ts = 0.02s e K ≈ 7.007:

$$G(s) = \frac{K}{s^2} \implies \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

A representação discreta obtida (ZOH) é:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k]$$

Para garantir rastreamento e rejeição de distúrbios, expandimos o vetor de estados com uma ação integral do erro (x_i):

$$\xi[k+1] = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ -T_s C & 1 \end{bmatrix} \xi[k] + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ T_s \end{bmatrix} r[k]$$

Sendo: $\xi[k] = [x_1[k] \quad x_2[k] \quad x_i[k]]^T.$

Controlabilidade e Observabilidade

Controlabilidade

Posto = 3 (Igual à ordem n = 3)

O sistema é completamente controlável

Observabilidade

Posto = 2 (Menor que n = 3)

O sistema aumentado não é completamente observável.

O sistema aumentado não é completamente observável, uma vez que o estado integrador não influencia diretamente a saída. No entanto, tal estado é computado internamente pelo controlador, não sendo necessária sua reconstrução a partir da saída, o que não compromete o projeto do controle

Escolha dos Polos de Malha Fechada

Definimos os polos com base na resposta transitória esperada.

Foram estabelecidos:

- Sobressinal máximo: Mp ≤ 5%
- Tempo de acomodação: ts = 2,5 s

Relação entre sobressinal e amortecimento:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Fazendo Mp = 0.05:

$$\boxed{\zeta \approx 0.7}$$

Para sistemas dominados por polos complexos:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Substituindo:

$$3 = \frac{4}{0.7\omega_n} \Rightarrow \quad \omega_n = 2{,}33\ \mathrm{rad/s}$$

Alocação dos Polos

Utilizamos a técnica de Ackermann para o sistema aumentado.

Frequência natural: $\omega_n = 2.3\ \text{rad/s}$

Amortecimento: $\zeta = 0.7$

Tempo de amostragem: $T_s = 0{,}02\ \text{s}$

Polos Dominantes (Plano-s) → Plano-z:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T_s}$$

Polos do Integrador

$$s_3 = 6 \cdot \text{real}(s_1) \quad \text{(Polo não dominante)}$$

$$p_3 \approx 5 \sim 10 \times \text{parte real dominante}$$

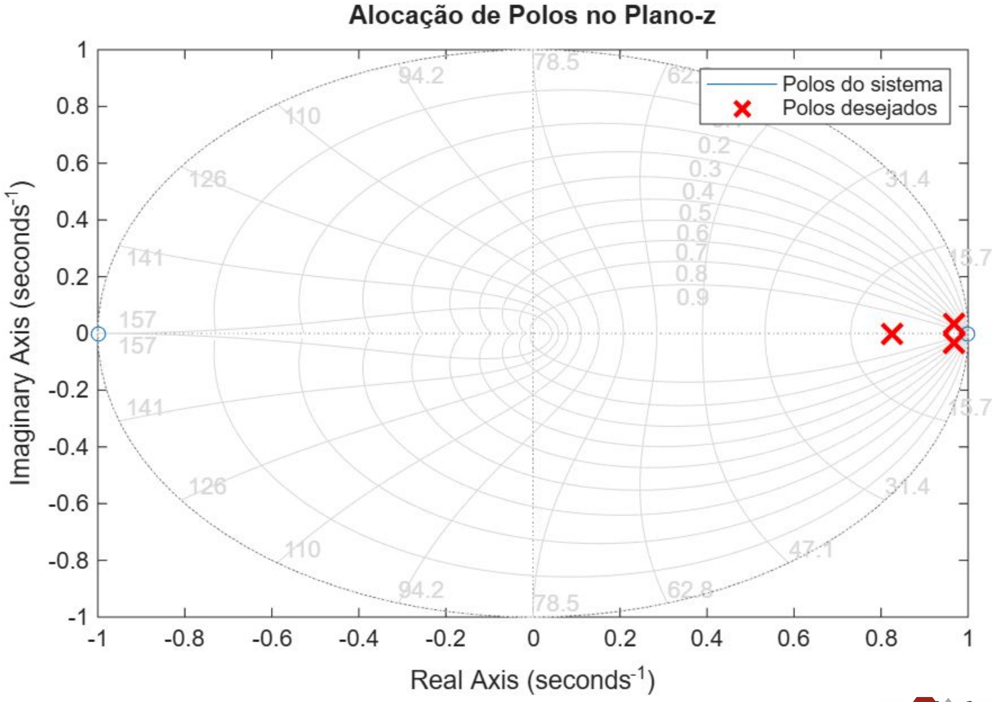
$$p_3 = 6 \cdot (-1{,}63) \approx \boxed{-9{,}78}$$

$$\boxed{p_d = \begin{bmatrix} -1{,}63 + j\,1{,}66 \\ -1{,}63 - j\,1{,}66 \\ -9{,}78 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{z_d = \begin{bmatrix} 0{,}968\,e^{+j0{,}0332} \\ 0{,}968\,e^{-j0{,}0332} \\ 0{,}822 \end{bmatrix}}$$

Mapa de Polos e Zeros

- Dominantes: $z \approx 0.96 \pm j0.03$
- Integrador: $z \approx 0.82$



Ganhos do Controlador

Sendo a lei de controle dada por:

$$u[k] = -L\xi[k]$$

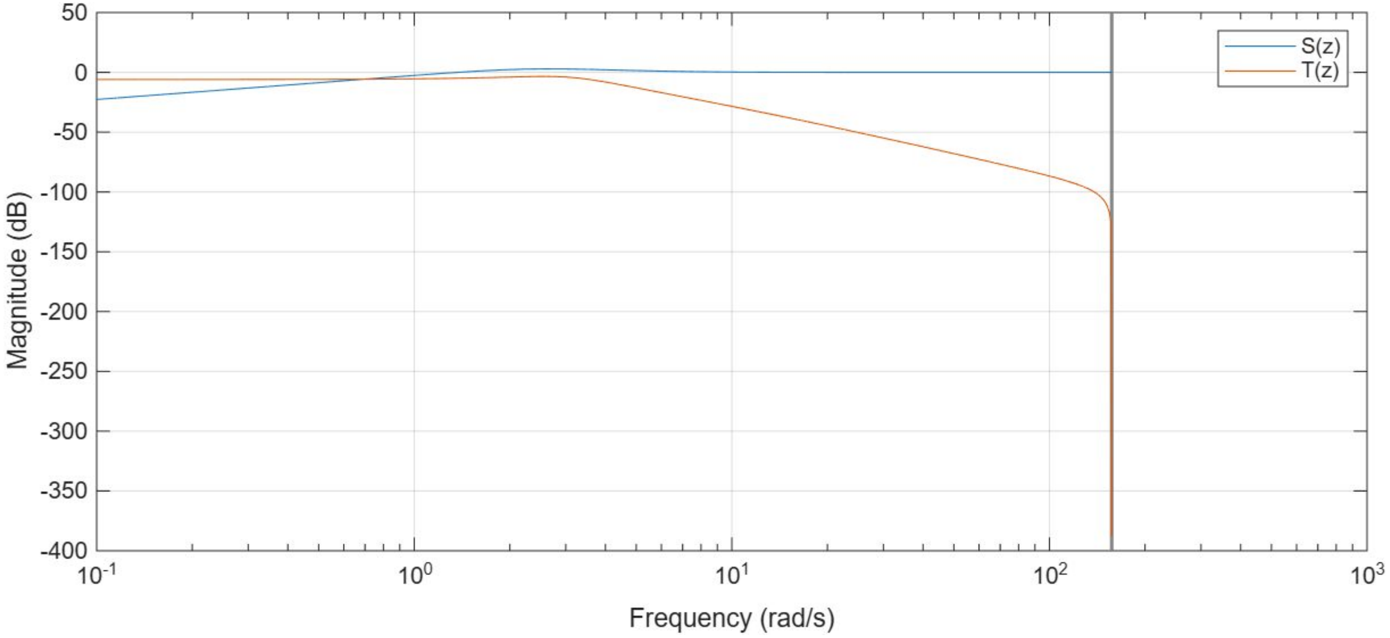
Os ganhos calculados foram:

$$L = \begin{bmatrix} 4.7046 & 1.6662 & -6.4214 \end{bmatrix}$$

Funções de Sensibilidade

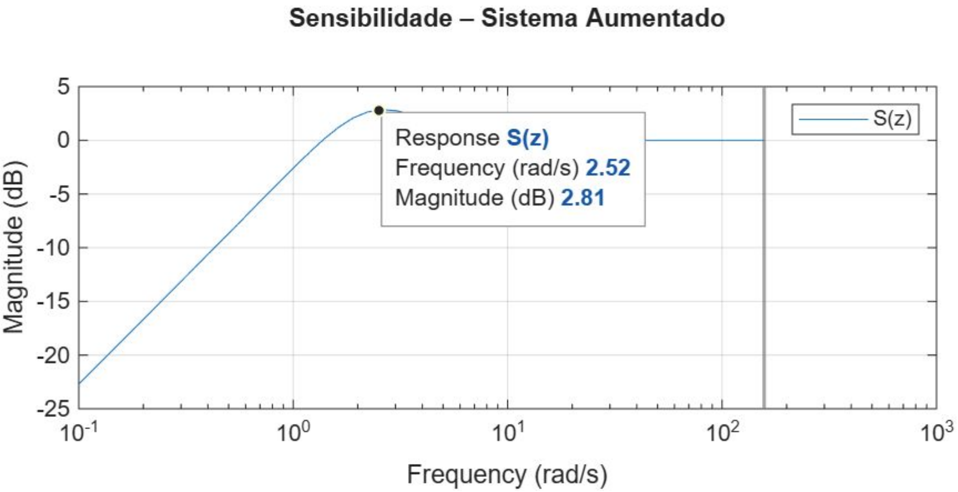
Análise de S(z) (Sensibilidade) e T (z) (Sensibilidade Complementar).

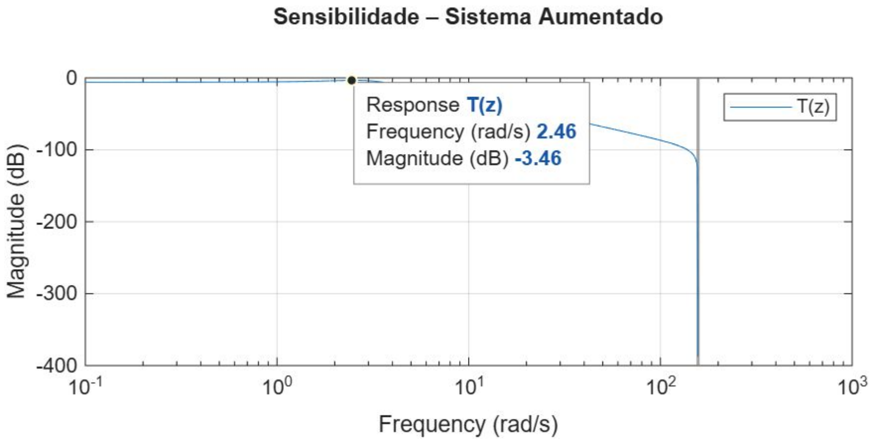
Sensibilidade – Sistema Aumentado



Funções de Sensibilidade

Análise de S(z) (Sensibilidade) e T (z) (Sensibilidade Complementar).





Funções de Sensibilidade

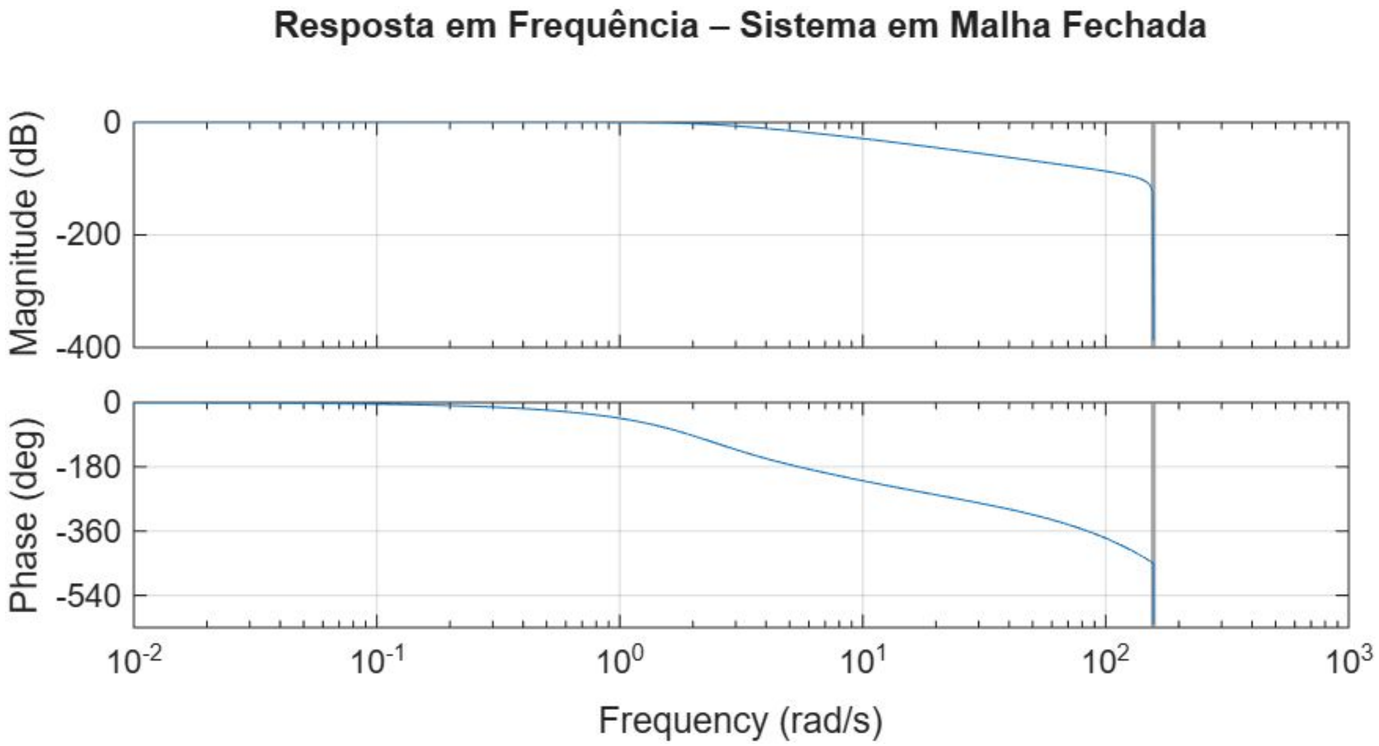
Sensibilidade S(z):

- Baixas Frequências: Magnitude tende a $-\infty$ dB, confirmando a ação do integrador na eliminação total de erros estacionários.
- Altas Frequências: Tende a 0 dB.

Sensibilidade Complementar T (z):

- O corte (-3 dB) ocorre próximo a 2.46 rad/s, próximo ao requisito de projeto ($\omega n \approx$ 2.3 rad/s).

Resposta em Frequência - Malha Fechada



Resposta em Frequência - Malha Fechada

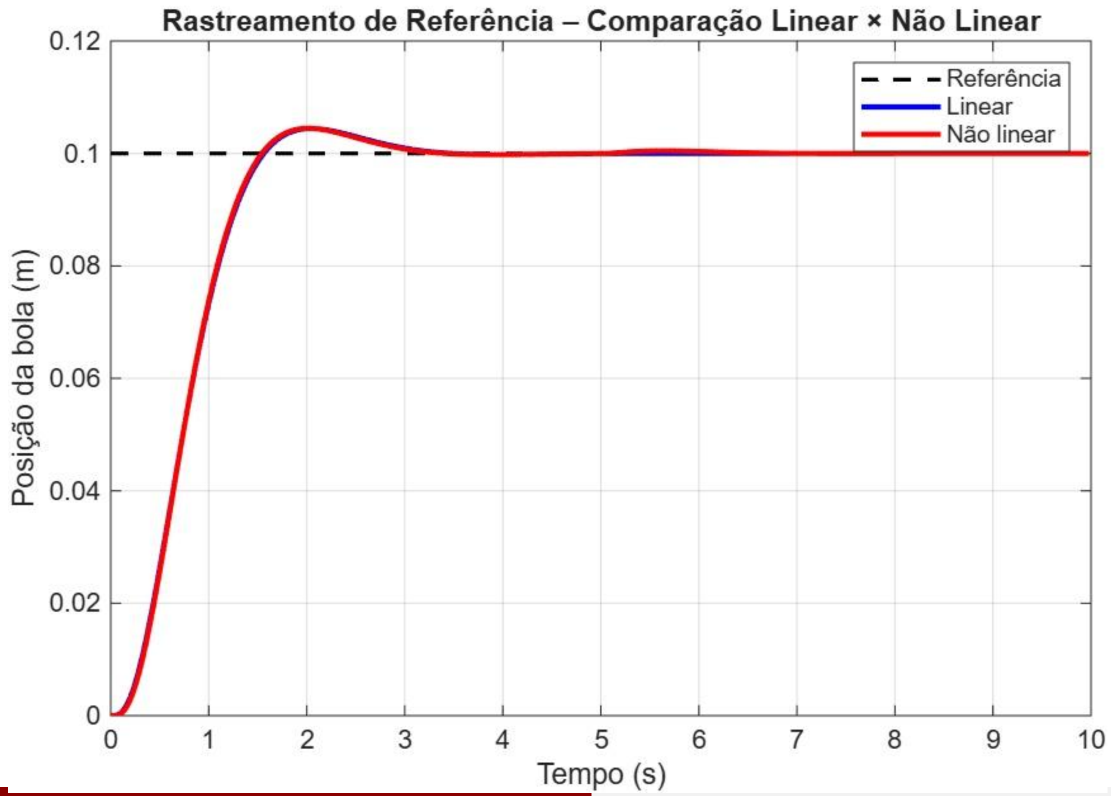
Magnitude:

- Ganho constante de 0 dB em baixas frequências, validando o projeto para rastreamento de referência.
- Ausência de picos de ressonância excessivos (Mp), de acordo com o coeficiente de amortecimento $\zeta = 0.7$ escolhido (sem oscilações excessivas).

Fase:

- O comportamento da fase é suave, sem quedas abruptas que indicariam proximidade da instabilidade dentro da faixa de operação

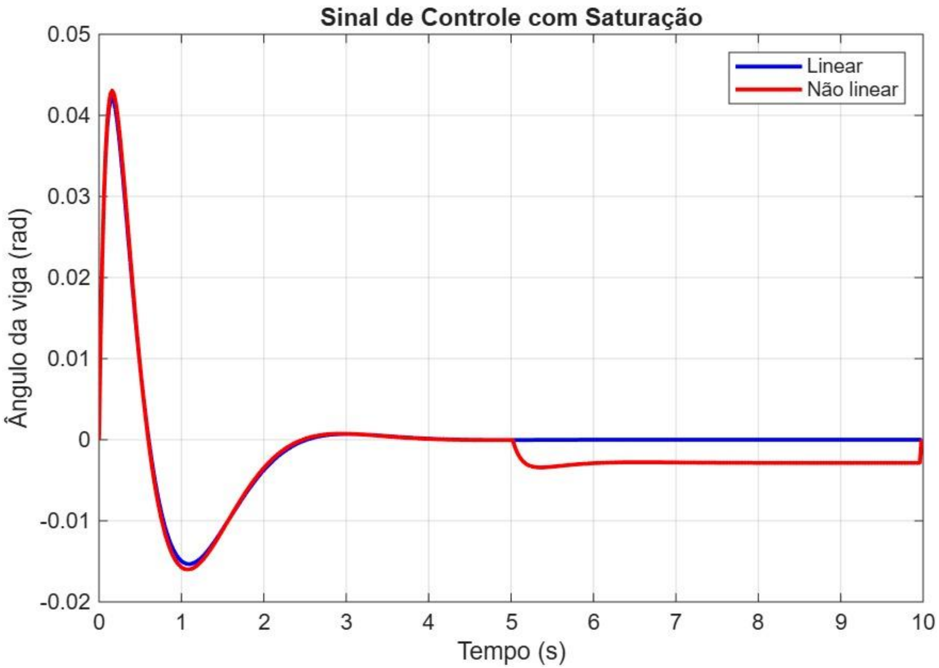
Rastreamento de Referência - Linear x Não Linear



- Boa sobreposição do Linear com o Não Linear para pequenas referências, modelo linearizado é válido para pequenas inclinações
- Pequeno overshoot
- Erro estacionário nulo

Sinal de Controle e Saturação

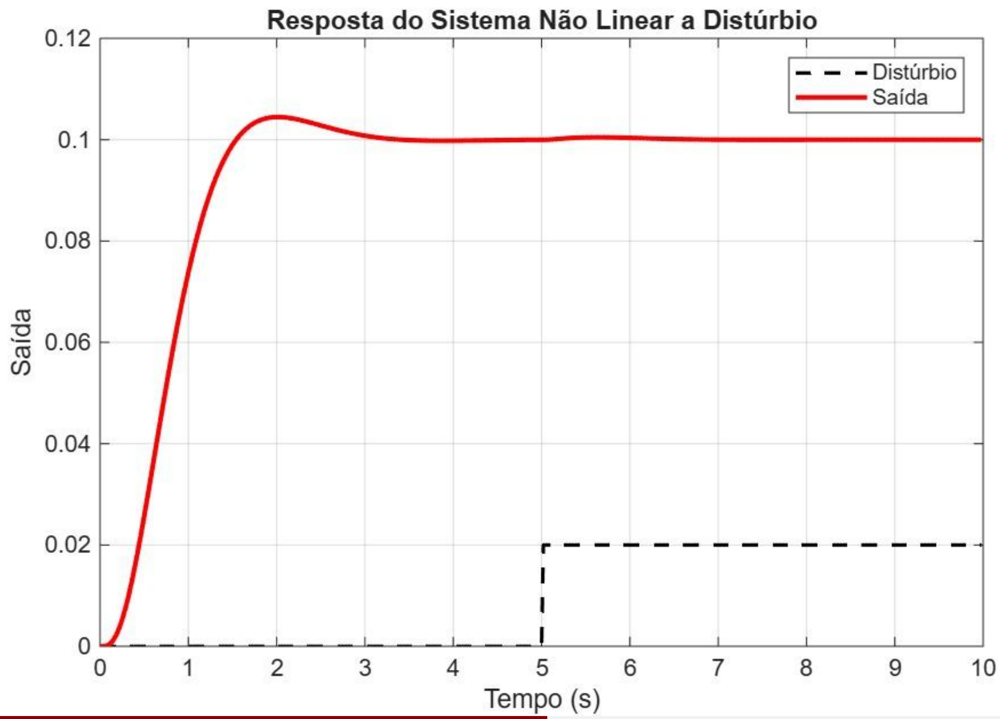
Análise do esforço de controle para a referência de 0.1m.



- Pico de 0.045, abaixo do limite de saturação de 0.4

Rejeição de Distúrbio

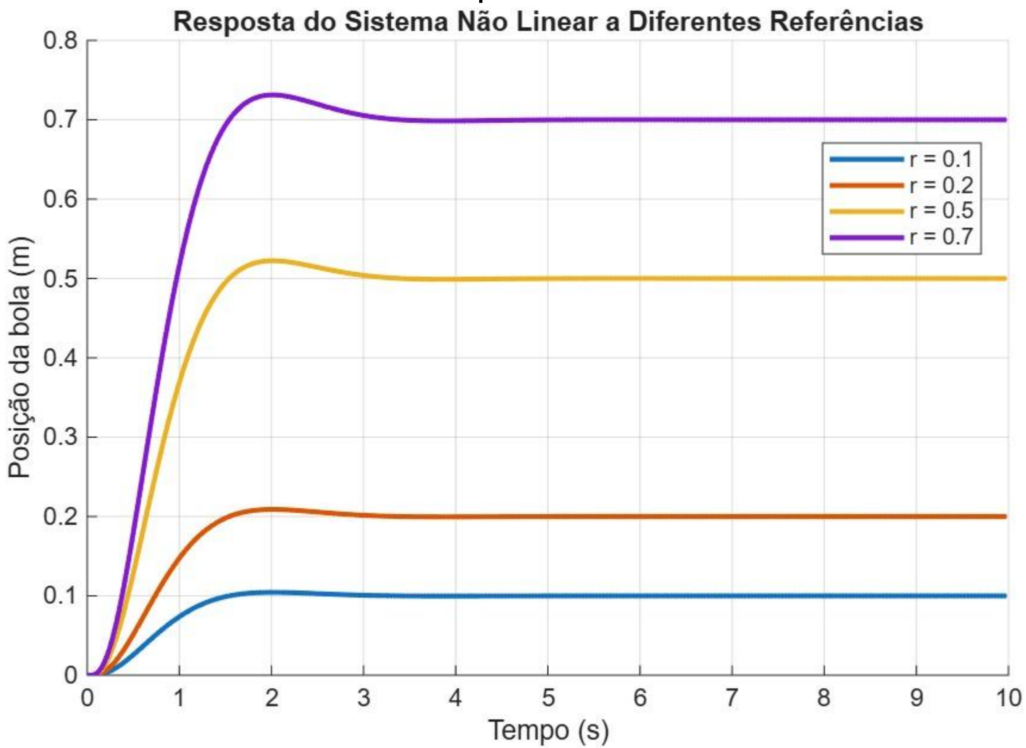
Aplicação de um distúrbio constante d = 0.02 no instante t = 5s.



- Pequeno disturbio é rapidamente corrigido, restaurando o sistema para a referência

Variação na Referência

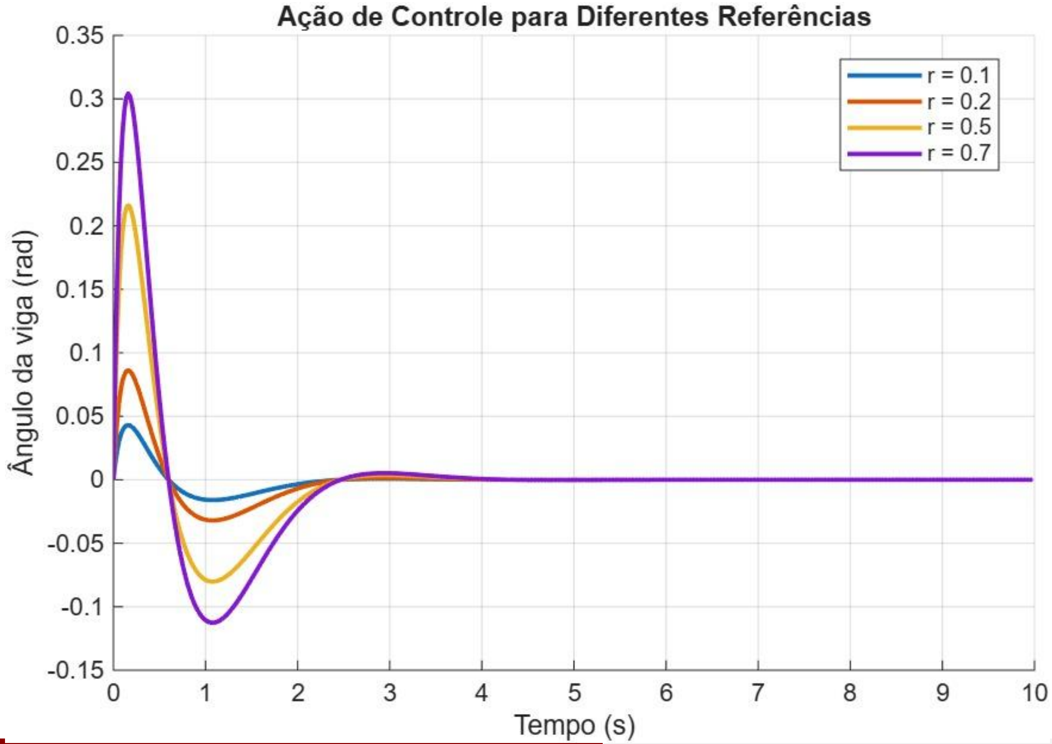
Teste do sistema não linear para referências crescentes: 0.1, 0.2, 0.5 e 0.7m.



- O sistema mantém a estabilidade até próximo a referências grandes (r = 0.7m), onde a aproximação sin(θ) ≈ θ começa a perder precisão.
- Resposta consistente para diferentes referências

Esforço de Controle nas Variações de Referência

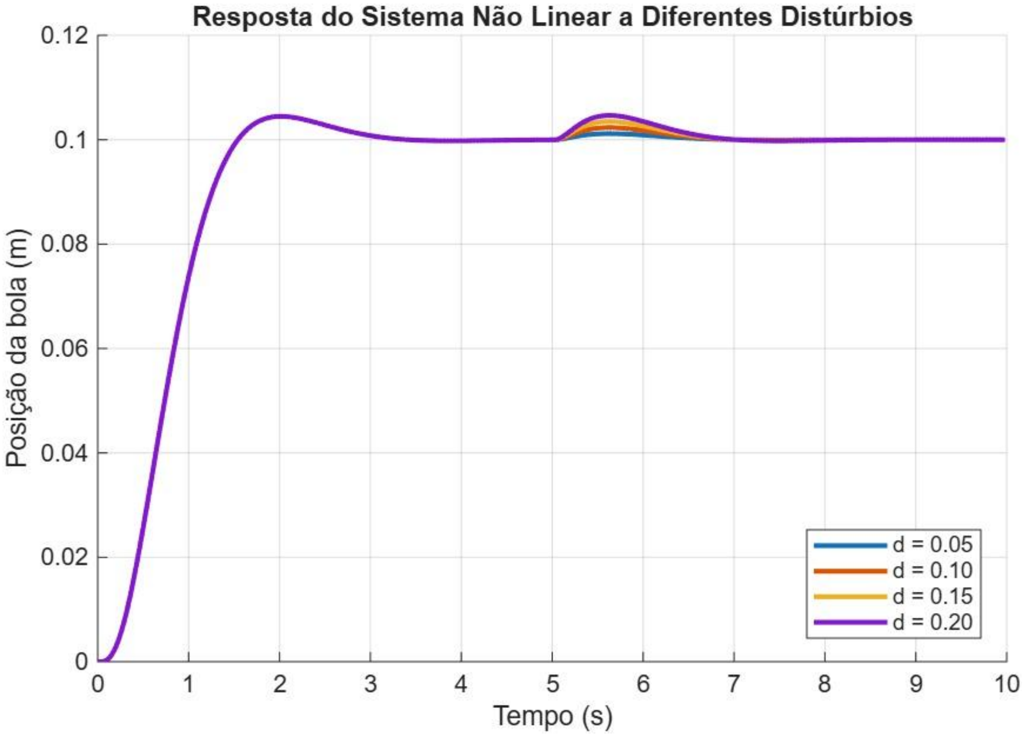
Teste do sistema não linear para referências crescentes: 0.1, 0.2, 0.5 e 0.7m.



- Para valores abaixo de 0.7 o sistema ainda permanece abaixo do limite de saturação

Variação no Distúrbio

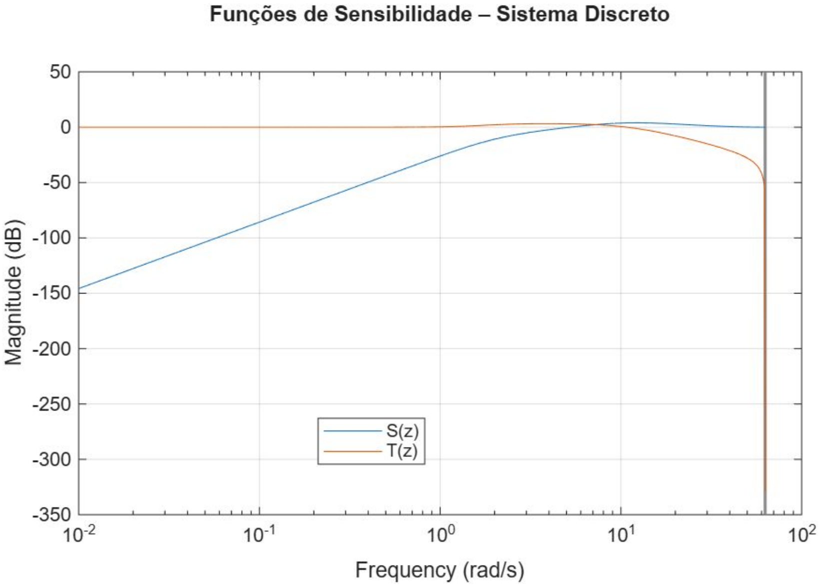
Teste de rejeição para distúrbios de diferentes magnitudes: 0.05, 0.10, 0.15, 0.20.



- Desvio proporcional a intensidade do distúrbio
- Todos foram corrigidos e retornaram a referência rapidamente

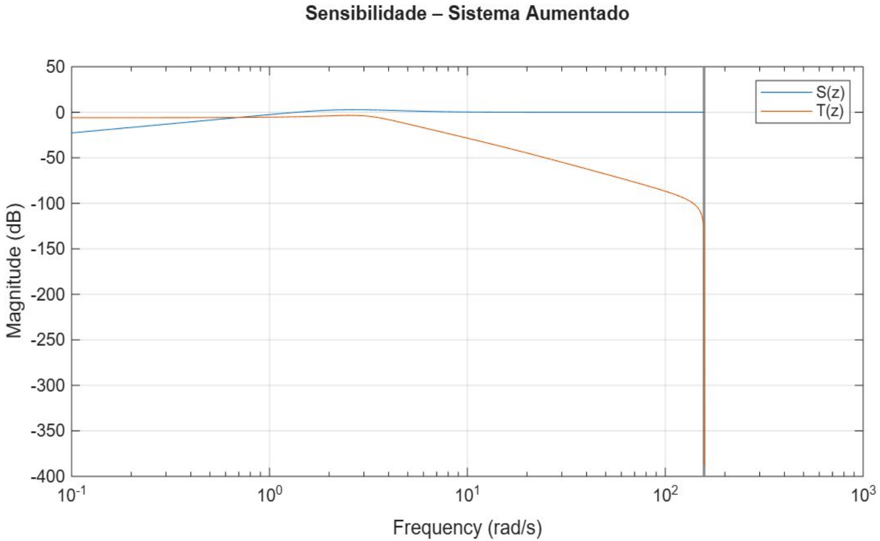
Comparação dos métodos

Seminário 3



Picos de Sensibilidade:
Ms = 1.5809 (3.9779 dB)
Mt = 1.4456 (3.2007 dB)

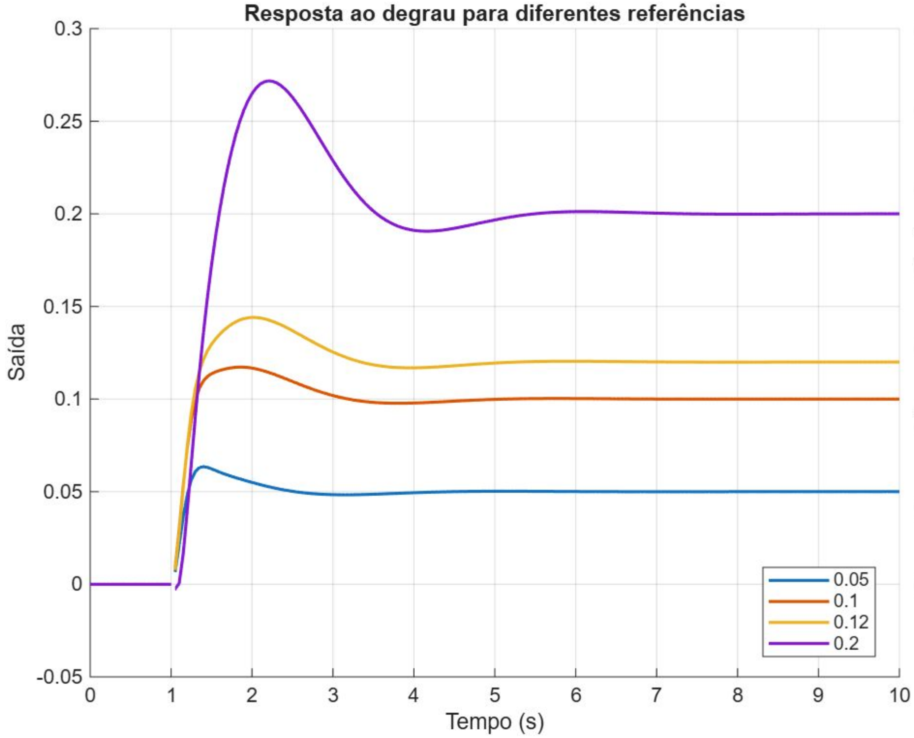
Seminário 4



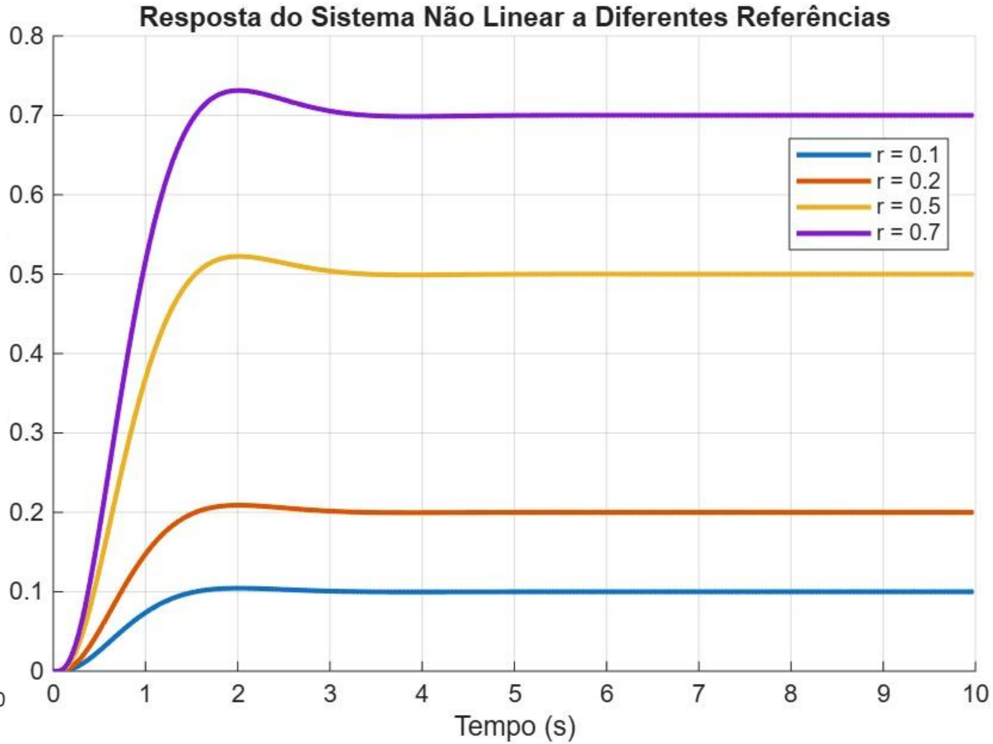
Sistema Discreto
Ms = 1.3884 (2.8505 dB)
Mt = 0.67395 (-3.4274 dB)

Comparação dos métodos

Seminário 3



Seminário 4



Conclusão

- A inclusão do estado integrador no vetor de estados garantiu erro nulo para referência degrau e rejeição total de distúrbios constantes, conforme demonstrado nas simulações.
- A comparação Linear x Não Linear mostrou que, para a faixa de operação testada, o modelo linearizado representa bem a dinâmica da planta.
- O controlador projetado via Ackermann ($\zeta = 0.7$, $\omega n = 2.3$) suportou variações significativas na referência (até 0.7m) e distúrbios elevados sem saturação excessiva ou instabilidade.
- Comparando os métodos dos seminários 3 e 4, o método através do espaço de estados teve desempenho significativamente melhor, com menores sobressinais.

Referências

- LOPES, Murylo Peliçaro. **Construção de uma plataforma experimental Ball and Beam para o ensino de controle automático.** 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia de Controle e Automação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2019. Acesso em: 15 out. 2025.
- CORREA, Yan U. S.; ANGÉLICO, Bruno A.; TANMURI, Eduardo A. **Simulação e implementação de um controlador para o sistema Ball and Beam utilizando Feedback Linearization.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO, 24., 2022, São Paulo. Anais [...]. Sociedade Brasileira de Automática, 2022. Acesso em: 15 out. 2025.
- UNIVERSITY OF MICHIGAN. **Ball and Beam System: System Modeling.** *Control Tutorials for MATLAB and Simulink (CTMS)*, University of Michigan, [s.d.]. Disponível em: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=BallBeam&section=SystemModeling. Acesso em: 16 out. 2025.
- STMicroelectronics. **L298D / L298N – Dual Full-Bridge Driver IC Datasheet**. Disponível em: https://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/pdf/22440/STMICROELECTRONICS/L298N.html. Acesso em: 17 out. 2025.