

Projeto de Reguladores Utilizando Realimentação de Estados

Pedro Machado de Almeida

pedro.machado@ufjf.edu.br

Departamento de Energia Elétrica
Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora, MG, 36.036-900 Brasil

2020

Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.

Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:

Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:
 - Equilibrar um pêndulo invertido

Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:
 - Equilibrar um pêndulo invertido
 - Manter um avião a uma altitude preestabelecida

Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:
 - Equilibrar um pêndulo invertido
 - Manter um avião a uma altitude preestabelecida
 - Manter uma reação química em uma temperatura constante

Regulação

- A princípio apenas problemas de regulação, que é manter todas as variáveis de estado (e portanto a saída) no seus respectivos pontos de equilíbrio (zero) frente a distúrbios, serão abordados.
- Problemas de regulação envolvem:
 - Equilibrar um pêndulo invertido
 - Manter um avião a uma altitude preestabelecida
 - Manter uma reação química em uma temperatura constante
- Posteriormente, problemas de rastreamento de referências serão abordados e projetados utilizando conceitos desenvolvidos para regulação.

Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.

Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.
- Duas questões fundamentais devem ser respondidas:

Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.
- Duas questões fundamentais devem ser respondidas:
 1. É possível levar o sistema de um dado estado inicial até outro estado qualquer?

Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.
- Duas questões fundamentais devem ser respondidas:
 1. É possível levar o sistema de um dado estado inicial até outro estado qualquer?
 2. Como determinar o estado de um sistema dinâmico a partir das observações das entradas e saídas?

Espaço de estados - alocação de polos

- Alguns conceitos preliminares devem ser abordados antes do projeto do controlador em si.
- Duas questões fundamentais devem ser respondidas:
 1. É possível levar o sistema de um dado estado inicial até outro estado qualquer?
 2. Como determinar o estado de um sistema dinâmico a partir das observações das entradas e saídas?
- Estas questões foram levantadas e respondidas por **Kalman**, quem introduziu os conceitos de controlabilidade e observabilidade.

Controlabilidade

- O conceito base para o desenvolvimento de sistemas de controle no espaço de estados é a **controlabilidade**.

Controlabilidade

- O conceito base para o desenvolvimento de sistemas de controle no espaço de estados é a **controlabilidade**.

Definição - Controlabilidade

A equação de estados $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$ é dito **controlável** se é possível encontrar uma sequência e entrada $u(k)$ que leva o sistema de um estado inicial arbitrário $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}_1$ até um estado arbitrário final $\mathbf{x}(j) = \mathbf{z}_2$ em um tempo finito j .

Controlabilidade

- O conceito base para o desenvolvimento de sistemas de controle no espaço de estados é a **controlabilidade**.

Definição - Controlabilidade

A equação de estados $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$ é dito **controlável** se é possível encontrar uma sequência e entrada $u(k)$ que leva o sistema de um estado inicial arbitrário $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}_1$ até um estado arbitrário final $\mathbf{x}(j) = \mathbf{z}_2$ em um tempo finito j .

- Em outras palavras, um sistema controlável é aquele no qual pode-se mudar o estado de uma condição inicial arbitrária para um estado final arbitrário em um tempo finito.

Controlabilidade

- O conceito base para o desenvolvimento de sistemas de controle no espaço de estados é a **controlabilidade**.

Definição - Controlabilidade

A equação de estados $\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma u(k)$ é dito **controlável** se é possível encontrar uma sequência e entrada $u(k)$ que leva o sistema de um estado inicial arbitrário $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}_1$ até um estado arbitrário final $\mathbf{x}(j) = \mathbf{z}_2$ em um tempo finito j .

- Em outras palavras, um sistema controlável é aquele no qual pode-se mudar o estado de uma condição inicial arbitrária para um estado final arbitrário em um tempo finito.
- Se o sistema não é controlável, existem estados que são inacessíveis a partir de uma ação de controle.

Controlabilidade

- De forma a determinar se um dado sistema é controlável, considere a solução das equações de estado

$$\mathbf{x}(j) = \Phi^j \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} \Phi^{j-i-1} \Gamma u(i) \quad (1)$$

Controlabilidade

- De forma a determinar se um dado sistema é controlável, considere a solução das equações de estado

$$\mathbf{x}(j) = \Phi^j \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} \Phi^{j-i-1} \Gamma u(i) \quad (1)$$

- O sistema é controlável se para dados valores arbitrários de $\mathbf{x}(0)$ e $\mathbf{x}(j)$ é possível encontrar uma sequência de entrada $\{u(0), u(1), \dots, u(j-1)\}$ que leva o sistema de $\mathbf{x}(0)$ até $\mathbf{x}(j)$.

Controlabilidade

- De forma a determinar se um dado sistema é controlável, considere a solução das equações de estado

$$\mathbf{x}(j) = \Phi^j \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} \Phi^{j-i-1} \Gamma u(i) \quad (1)$$

- O sistema é controlável se para dados valores arbitrários de $\mathbf{x}(0)$ e $\mathbf{x}(j)$ é possível encontrar uma sequência de entrada $\{u(0), u(1), \dots, u(j-1)\}$ que leva o sistema de $\mathbf{x}(0)$ até $\mathbf{x}(j)$.
- Note que a definição de controlabilidade não especifica o tempo para a mudança de estado. Apenas que j deve ser finito.

Controlabilidade

- Para uma primeira análise pode-se escolher $j = n$, em que n é a ordem do sistema

$$\mathbf{x}(n) = \Phi^n \mathbf{x}(0) + \Phi^{n-1} \Gamma u(0) + \Phi^{n-2} \Gamma u(1) + \cdots + \Gamma u(n-1) \quad (2)$$

Controlabilidade

- Para uma primeira análise pode-se escolher $j = n$, em que n é a ordem do sistema

$$\mathbf{x}(n) = \Phi^n \mathbf{x}(0) + \Phi^{n-1} \Gamma u(0) + \Phi^{n-2} \Gamma u(1) + \cdots + \Gamma u(n-1) \quad (2)$$

- Escrevendo (2) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_n(n) \end{bmatrix} - \Phi^n \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \cdots \quad \Phi^{n-1}\Gamma] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Controlabilidade

- Para uma primeira análise pode-se escolher $j = n$, em que n é a ordem do sistema

$$\mathbf{x}(n) = \Phi^n \mathbf{x}(0) + \Phi^{n-1} \Gamma u(0) + \Phi^{n-2} \Gamma u(1) + \dots + \Gamma u(n-1) \quad (2)$$

- Escrevendo (2) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_n(n) \end{bmatrix} - \Phi^n \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ou

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}_c \mathbf{u} \quad (4)$$

Controlabilidade

- Para uma primeira análise pode-se escolher $j = n$, em que n é a ordem do sistema

$$\mathbf{x}(n) = \Phi^n \mathbf{x}(0) + \Phi^{n-1} \Gamma u(0) + \Phi^{n-2} \Gamma u(1) + \dots + \Gamma u(n-1) \quad (2)$$

- Escrevendo (2) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_n(n) \end{bmatrix} - \Phi^n \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ou

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}_c \mathbf{u} \quad (4)$$

em que a matriz

$$\mathbf{W}_c = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma] \quad (5)$$

é chamada **matriz de controlabilidade** para (Φ, Γ) .

Controlabilidade

- Se a matriz \mathbf{W}_c tem inversa, o vetor de entrada é dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{z} \quad (6)$$

Controlabilidade

- Se a matriz \mathbf{W}_c tem inversa, o vetor de entrada é dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{z} \quad (6)$$

- Lembre-se de que uma matriz $n \times n$ tem inversa (é não singular, ou tem posto n) se e apenas se o determinante é diferente de zero.

Controlabilidade

- Se a matriz \mathbf{W}_c tem inversa, o vetor de entrada é dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{z} \quad (6)$$

- Lembre-se de que uma matriz $n \times n$ tem inversa (é não singular, ou tem posto n) se e apenas se o determinante é diferente de zero.
- Se o posto da matriz de controlabilidade é menor que n , o sistema é dito **não controlável**.

Controlabilidade

Teorema - Controlabilidade

O sistema de ordem n

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Phi u(k)$$

é controlável se e apenas se a matriz de controlabilidade

$$[\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$$

tem posto n (posto completo).

Controlabilidade

Teorema - Controlabilidade

O sistema de ordem n

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Phi u(k)$$

é controlável se e apenas se a matriz de controlabilidade

$$[\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$$

tem posto n (posto completo).

- Uma importante consequência desse desenvolvimento é: **um sistema de n -ésima ordem controlável pode ir de seu estado atual até qualquer outro estado em n períodos de amostragem.**

Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.

Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.
- É uma propriedade que todos os sistemas no qual o modelo em espaço de estados não possui uma função de transferência com cancelamento de polos e zeros.

Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.
- É uma propriedade que todos os sistemas no qual o modelo em espaço de estados não possui uma função de transferência com cancelamento de polos e zeros.
- Modelos com tal cancelamento será **não controlável** e/ou **não observável** (propriedade importante que será analisada em breve).

Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.
- É uma propriedade que todos os sistemas no qual o modelo em espaço de estados não possui uma função de transferência com cancelamento de polos e zeros.
- Modelos com tal cancelamento será **não controlável** e/ou **não observável** (propriedade importante que será analisada em breve).

Teorema

O modelo em espaço de estados (Φ, Γ, C, D) com a função de transferência $H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D = b(z)/a(z)$ será controlável e observável se e apenas se $b(z)$ e $a(z)$ não possuírem raízes comuns (sem cancelamento polo/zero).

Controlabilidade

- A propriedade de controlabilidade é extremamente importante no projeto de sistemas de controle.
- É uma propriedade que todos os sistemas no qual o modelo em espaço de estados não possui uma função de transferência com cancelamento de polos e zeros.
- Modelos com tal cancelamento será **não controlável** e/ou **não observável** (propriedade importante que será analisada em breve).

Teorema

O modelo em espaço de estados (Φ, Γ, C, D) com a função de transferência $H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D = b(z)/a(z)$ será controlável e observável se e apenas se $b(z)$ e $a(z)$ não possuírem raízes comuns (sem cancelamento polo/zero).

- Uma consequência útil desse teorema é que ser um sistema de n -ésima ordem não possui cancelamento polo/zero na sua função de transferência, qualquer modelo no espaço de estados de n -ésima ordem será controlável e observável.

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.
- Entretanto, na maioria das aplicações o sistema a ser controlado é contínuo.

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.
- Entretanto, na maioria das aplicações o sistema a ser controlado é contínuo.
- Considere o seguinte sistema, sem cancelamento de polos e zeros

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}\tag{7}$$

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.
- Entretanto, na maioria das aplicações o sistema a ser controlado é contínuo.
- Considere o seguinte sistema, sem cancelamento de polos e zeros

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}\tag{7}$$

- O sistema discretizado utilizando ZOH é

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)\tag{8}$$

em que

$$\mathbf{\Phi} = e^{\mathbf{A}T} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \, d\tau$$

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A princípio, a controlabilidade foi discutida apenas para modelos discretos.
- Entretanto, na maioria das aplicações o sistema a ser controlado é contínuo.
- Considere o seguinte sistema, sem cancelamento de polos e zeros

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}\tag{7}$$

- O sistema discretizado utilizando ZOH é

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)\tag{8}$$

em que

$$\mathbf{\Phi} = e^{\mathbf{A}T} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \, d\tau$$

- **Se os sistema contínuo (7) é controlável é garantido que o sistema discretizado (8) também será controlável?**

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem T .

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem T .
- Uma condição simples e suficiente em T para garantir a controlabilidade do sistema equivalente ZOH é dada em termos da localização dos polos do sistema contínuo.

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem T .
- Uma condição simples e suficiente em T para garantir a controlabilidade do sistema equivalente ZOH é dada em termos da localização dos polos do sistema contínuo.
- Suponha que a seguinte localização dos polos p_i , $i = 1, \dots, n$

$$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem T .
- Uma condição simples e suficiente em T para garantir a controlabilidade do sistema equivalente ZOH é dada em termos da localização dos polos do sistema contínuo.
- Suponha que a seguinte localização dos polos p_i , $i = 1, \dots, n$

$$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

- Definindo β_{max} como sendo a parte imaginária com maior magnitude

$$\beta_{max} = \max_i |\beta_i|, \quad i = 1, \dots, n$$

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- Se o sistema discretizado será controlável depende do intervalo de amostragem T .
- Uma condição simples e suficiente em T para garantir a controlabilidade do sistema equivalente ZOH é dada em termos da localização dos polos do sistema contínuo.
- Suponha que a seguinte localização dos polos p_i , $i = 1, \dots, n$

$$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

- Definindo β_{max} como sendo a parte imaginária com maior magnitude

$$\beta_{max} = \max_i |\beta_i|, \quad i = 1, \dots, n$$

- A condição suficiente para garantir a controlabilidade é

$$T < \frac{\pi}{\beta_{max}} \tag{9}$$

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A condição anterior tem forma similar a condição do teorema de amostragem.

Controlabilidade do Modelo ZOH Equivalente

- A condição anterior tem forma similar a condição do teorema de amostragem.
- Note que se a planta possui todos seus polos no eixo real, $\beta_{max} = 0$, o sistema discretizado será controlável para qualquer valor de T .

Alocação de Polos

- Considere inicialmente que todas as variáveis de estado são medidas.

Alocação de Polos

- Considere inicialmente que todas as variáveis de estado são medidas.
- Se o sistema é controlável, através de uma combinação linear dos estados, é possível alocar os polos de malha fechada no local desejado.

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (10)$$

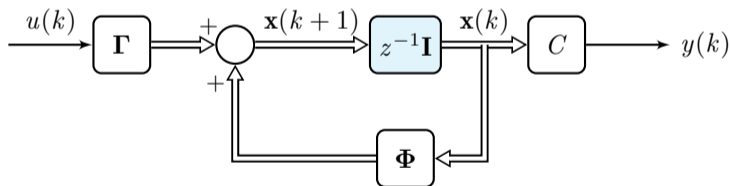


Figura 1: Sistema em malha aberta.

Alocação

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \quad (11)$$

$$u(k) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 & \cdots & -l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (12)$$

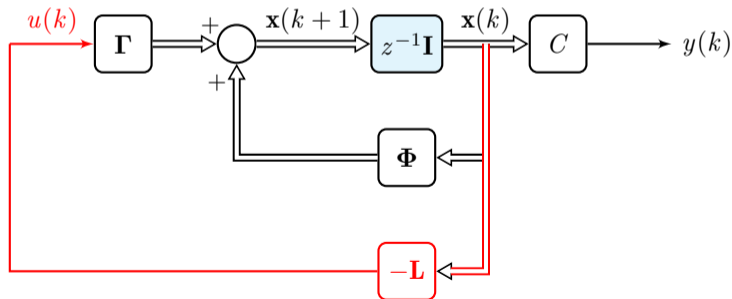


Figura 2: Sistema em malha fechado com realimentação de estados.

Forma Canônica Controlável

- Assuma que Φ tem a equação característica

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \Phi) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (13)$$

Forma Canônica Controlável

- Assuma que Φ tem a equação característica

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \Phi) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (13)$$

- A sua forma canônica controlável é dada por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}(k) \\ &= \bar{\Phi} \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\Gamma} \bar{u}(k) \end{aligned} \quad (14)$$

Forma Canônica Controlável

- A forma canônica (14) tem as seguintes propriedades

Forma Canônica Controlável

- A forma canônica (14) tem as seguintes propriedades
 1. A matriz de controlabilidade da forma canônica controlável é triangular superior

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{W}}_c &= [\bar{\Gamma} \quad \bar{\Phi}\bar{\Gamma} \quad \dots \quad \bar{\Phi}^{n-1}\bar{\Gamma}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{15}$$

portanto o determinante de $\bar{\mathbf{W}}_c$ é igual a 1. O que significa que o sistema $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$ é sempre controlável independentemente dos valores de a_n .

Forma Canônica Controlável

- A forma canônica (14) tem as seguintes propriedades
 1. A matriz de controlabilidade da forma canônica controlável é triangular superior

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{W}}_c &= [\bar{\Gamma} \quad \bar{\Phi}\bar{\Gamma} \quad \dots \quad \bar{\Phi}^{n-1}\bar{\Gamma}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

portanto o determinante de $\bar{\mathbf{W}}_c$ é igual a 1. O que significa que o sistema $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$ é sempre controlável independentemente dos valores de a_n .

2. Qualquer sistema controlável pode ser transformado para a forma canônica controlável através de uma transformação linear adequada.

Forma Canônica Controlável

- Um dado sistema controlável (Φ, Γ) e uma forma canônica controlável $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$ são relacionados pela seguinte transformação linear

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{T}_c \mathbf{x}(k) \quad (16)$$

em que

$$\mathbf{T}_c = \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{W}_c^{-1} \quad (17)$$

Alocação

- O modelo discreto da planta (Φ, Γ) pode ser transformado na forma canônica controlável $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$ e fechar a malha com uma realimentação de estados com vetor de ganhos $-\bar{\mathbf{L}}$.

Alocação

- O modelo discreto da planta (Φ, Γ) pode ser transformado na forma canônica controlável $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$ e fechar a malha com uma realimentação de estados com vetor de ganhos $-\bar{\mathbf{L}}$.
- O cálculo do vetor $\bar{\mathbf{L}}$ que aloca os polos na posição desejada utilizando a forma canônica controlável é simples.

Alocação

- O modelo discreto da planta (Φ, Γ) pode ser transformado na forma canônica controlável $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$ e fechar a malha com uma realimentação de estados com vetor de ganhos $-\bar{\mathbf{L}}$.
- O cálculo do vetor $\bar{\mathbf{L}}$ que aloca os polos na posição desejada utilizando a forma canônica controlável é simples.
- Posteriormente, $\bar{\mathbf{L}}$ pode ser transformado em \mathbf{L} através de uma transformação linear, que aloca os polos do sistema (Φ, Γ) nos locais desejados.

Alocação

- O modelo discreto da planta (Φ, Γ) pode ser transformado na forma canônica controlável $(\bar{\Phi}, \bar{\Gamma})$ e fechar a malha com uma realimentação de estados com vetor de ganhos $-\bar{\mathbf{L}}$.
- O cálculo do vetor $\bar{\mathbf{L}}$ que aloca os polos na posição desejada utilizando a forma canônica controlável é simples.
- Posteriormente, $\bar{\mathbf{L}}$ pode ser transformado em \mathbf{L} através de uma transformação linear, que aloca os polos do sistema (Φ, Γ) nos locais desejados.
- O vetor \mathbf{L} é o vetor de ganhos utilizados no regulador real.

Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

- Substituindo a ação de controle na planta

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}\bar{u}(k) \quad (19)$$

$$(20)$$

$$(21)$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

- Substituindo a ação de controle na planta

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}\bar{u}(k) \quad (19)$$

$$= \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}(-\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k)) \quad (20)$$

$$(21)$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

- Substituindo a ação de controle na planta

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}\bar{u}(k) \quad (19)$$

$$= \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}(-\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k)) \quad (20)$$

$$= (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (21)$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

- Considere o sistema na forma canônica controlável e a ação de controle dada pela seguinte realimentação de estados

$$\bar{u}(k) = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (18)$$

- Substituindo a ação de controle na planta

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}\bar{u}(k) \quad (19)$$

$$= \bar{\Phi}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\Gamma}(-\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{x}}(k)) \quad (20)$$

$$= (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (21)$$

- Note que

$$\bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [\bar{l}_1 \quad \bar{l}_2 \quad \cdots \quad \bar{l}_n] = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \cdots & \bar{l}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

$$\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}}$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

$$\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \cdots & \bar{l}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

$$\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \cdots & \bar{l}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 - \bar{l}_1 & -a_2 - \bar{l}_2 & \cdots & -a_n - \bar{l}_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}})\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (23)$$

$$\bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \cdots & \bar{l}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 - \bar{l}_1 & -a_2 - \bar{l}_2 & \cdots & -a_n - \bar{l}_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Suponha que os autovalores desejados sejam especificados pelo seguinte polinômio

$$p(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n \quad (24)$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

- Para encontrar os ganhos do vetor de realimentação $\bar{\mathbf{L}}$ basta igualar os coeficientes

$$-a_1 - \bar{l}_1 = -p_1$$

$$-a_2 - \bar{l}_2 = -p_2$$

$$\vdots = \vdots$$

$$-a_n - \bar{l}_n = -p_n$$

Alocação de polos na forma canônica controlável

- Para encontrar os ganhos do vetor de realimentação $\bar{\mathbf{L}}$ basta igualar os coeficientes

$$\begin{aligned} -a_1 - \bar{l}_1 &= -p_1 \\ -a_2 - \bar{l}_2 &= -p_2 \\ &\vdots \\ -a_n - \bar{l}_n &= -p_n \end{aligned}$$

- O que resulta em

$$\bar{\mathbf{L}} = [(p_1 - a_1) \quad (p_2 - a_2) \quad \cdots \quad (p_n - a_n)] \quad (25)$$

Alocação de polos para um sistema controlável arbitrário

- Após o cálculo de $\bar{\mathbf{L}}$ o vetor de ganhos \mathbf{L} utilizado no sistema real pode ser encontrado através da seguinte transformação linear

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}\mathbf{T}_c \quad (26)$$

Alocação de polos para um sistema controlável arbitrário

- Após o cálculo de $\bar{\mathbf{L}}$ o vetor de ganhos \mathbf{L} utilizado no sistema real pode ser encontrado através da seguinte transformação linear

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}\mathbf{T}_c \quad (26)$$

- em que $\mathbf{T}_c = \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{W}_c^{-1}$, portanto

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} (p_1 - a_1) & (p_2 - a_2) & \cdots & (p_n - a_n) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{W}_c^{-1} \quad (27)$$

Fórmula de Ackermann

- Outra maneira de calcular o vetor de ganhos é a fórmula de Ackermann

Fórmula de Ackermann

$$\mathbf{L} = [0 \cdots 1] \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{p}(\Phi) \quad (28)$$

em que \mathbf{W}_c é a matriz de controlabilidade do modelo ZOH equivalente (Φ, Γ) , e $\mathbf{p}(\Phi)$ é a matriz polinomial $\Phi^n + p_1 \Phi^{n-1} + \cdots + p_n \mathbf{I}$. As raízes de $p(z)$ são as localizações desejadas dos polos de malha fechada.

Procedimento para o calculo do vetor de realimentação

1. Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- s e o período de amostragem T .

Procedimento para o calculo do vetor de realimentação

1. Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- s e o período de amostragem T .
2. Obtenha o modelo equivalente discreto ZOH da planta e calcule o polinômio do denominador

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi) = a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Se os polos s_i da planta contínua são conhecidos, $a(z)$ pode ser calculado como

$$a(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{s_i T})$$

Procedimento para o calculo do vetor de realimentação

1. Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- s e o período de amostragem T .
2. Obtenha o modelo equivalente discreto ZOH da planta e calcule o polinômio do denominador

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi) = a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Se os polos s_i da planta contínua são conhecidos, $a(z)$ pode ser calculado como

$$a(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{s_i T})$$

3. Mapeie os polos escolhidos do Item 1 no plano- z utilizando a fórmula de mapeamento $z_i = e^{s_i T}$. Multiplique os polos para obter o polinômio $p(z)$

$$\prod_{i=1}^n (z - z_i) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n = p(z)$$

Procedimento para o calculo do vetor de realimentação

1. Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- s e o período de amostragem T .
2. Obtenha o modelo equivalente discreto ZOH da planta e calcule o polinômio do denominador

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi) = a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Se os polos s_i da planta contínua são conhecidos, $a(z)$ pode ser calculado como

$$a(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{s_i T})$$

3. Mapeie os polos escolhidos do Item 1 no plano- z utilizando a fórmula de mapeamento $z_i = e^{s_i T}$. Multiplique os polos para obter o polinômio $p(z)$

$$\prod_{i=1}^n (z - z_i) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n = p(z)$$

4. Monte as matrizes de controlabilidade \mathbf{W}_c e $\bar{\mathbf{W}}_c$.

Procedimento para o calculo do vetor de realimentação

1. Dado um sistema no domínio de tempo contínuo e suas especificações de performance, escolha as localizações adequadas dos polos em malha fechada no plano- s e o período de amostragem T .
2. Obtenha o modelo equivalente discreto ZOH da planta e calcule o polinômio do denominador

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi) = a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Se os polos s_i da planta contínua são conhecidos, $a(z)$ pode ser calculado como

$$a(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{s_i T})$$

3. Mapeie os polos escolhidos do Item 1 no plano- z utilizando a fórmula de mapeamento $z_i = e^{s_i T}$. Multiplique os polos para obter o polinômio $p(z)$

$$\prod_{i=1}^n (z - z_i) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n = p(z)$$

4. Monte as matrizes de controlabilidade \mathbf{W}_c e $\bar{\mathbf{W}}_c$.
5. Calcule o vetor de realimentação

$$\mathbf{L} = [(p_1 - a_1) \quad (p_2 - a_2) \quad \dots \quad (p_n - a_n)] \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{W}_c^{-1}$$

Margens de Estabilidade

- As margens de estabilidade são determinadas utilizando o gráfico de Nyquist da função de transferência de malha aberta $\ell(z)$ juntamente com o ponto crítico $(-1, j0)$.

Margens de Estabilidade

- As margens de estabilidade são determinadas utilizando o gráfico de Nyquist da função de transferência de malha aberta $\ell(z)$ juntamente com o ponto crítico $(-1, j0)$.
- As margens de estabilidade mostram qual a máxima perturbação no ganho e fase que podem ser toleradas em $\ell(z)$ antes que o sistema em malha fechada se torne instável.

Margens de Estabilidade

- As margens de estabilidade são determinadas utilizando o gráfico de Nyquist da função de transferência de malha aberta $\ell(z)$ juntamente com o ponto crítico $(-1, j0)$.
- As margens de estabilidade mostram qual a máxima perturbação no ganho e fase que podem ser toleradas em $\ell(z)$ antes que o sistema em malha fechada se torne instável.
- Para o caso de realimentação de estados, o sistema deve ser primeiramente convertido em um sistema SISO de acordo com a Figura 3.

Margens de Estabilidade

- As margens de estabilidade são determinadas utilizando o gráfico de Nyquist da função de transferência de malha aberta $\ell(z)$ juntamente com o ponto crítico $(-1, j0)$.
- As margens de estabilidade mostram qual a máxima perturbação no ganho e fase que podem ser toleradas em $\ell(z)$ antes que o sistema em malha fechada se torne instável.
- Para o caso de realimentação de estados, o sistema deve ser primeiramente convertido em um sistema SISO de acordo com a Figura 3.
- Note que o sinal negativo de $-L$ foi movido para o somador.

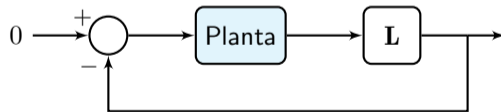


Figura 3: Sistema com realimentação negativa unitária.

Margens de Estabilidade

- Para analisar a estabilidade e as margens de fase e ganho, deve-se analisar o diagrama de Nyquist (ou Bode) de

$$\ell(z) = \mathbf{L}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} \quad (29)$$

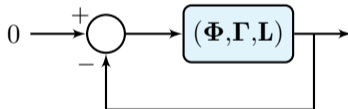


Figura 4: Sistema equivalente para análise das margens de estabilidade.