

# Controle de um pêndulo invertido

Pedro Machado de Almeida

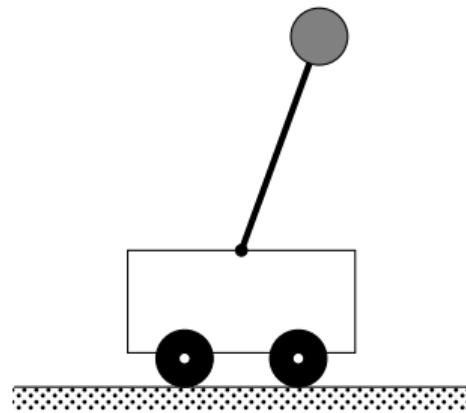
[pedro.machado@ufjf.edu.br](mailto:pedro.machado@ufjf.edu.br)

Departamento de Energia Elétrica  
Universidade Federal de Juiz de Fora  
Juiz de Fora, MG, 36.036-900 Brasil

2025



# Pêndulo invertido

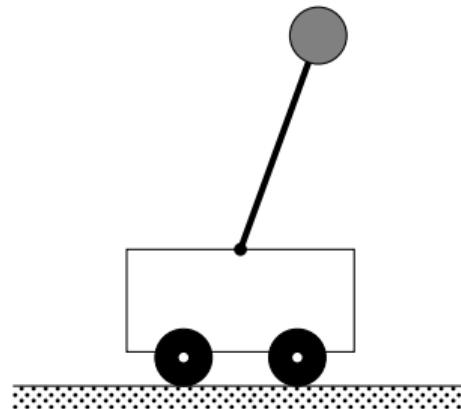


- **Objetivo principal:** Manter o pêndulo na posição vertical aplicando uma força no carro.

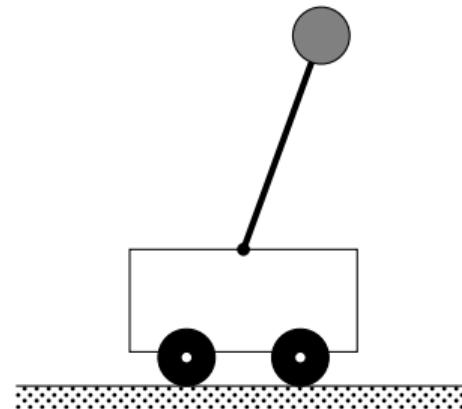
# Pêndulo invertido

## Desafios

- Sistema não linear



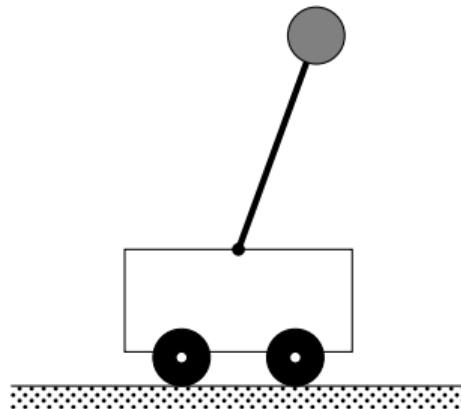
# Pêndulo invertido



## Desafios

- Sistema não linear
- Linearização

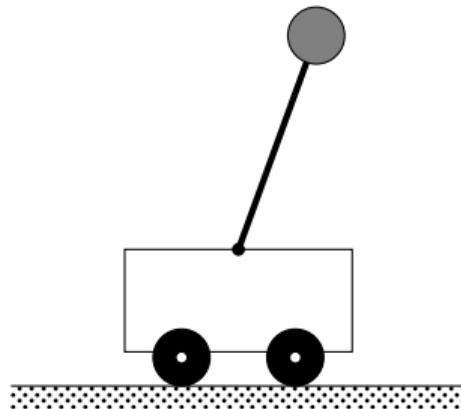
# Pêndulo invertido



## Desafios

- Sistema não linear
- Linearização
- Sistema instável

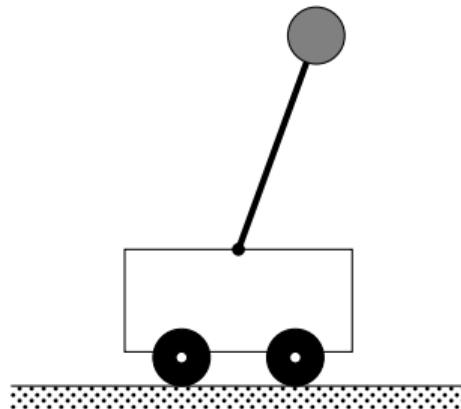
# Pêndulo invertido



## Desafios

- Sistema não linear
- Linearização
- Sistema instável
- Sujeito a distúrbios externos

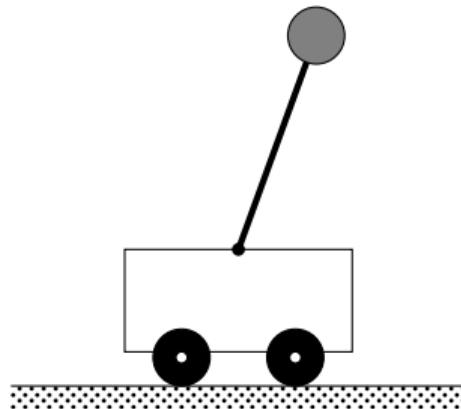
# Pêndulo invertido



## Desafios

- Sistema não linear
- Linearização
- Sistema instável
- Sujeito a distúrbios externos
- Limitações na ação de controle

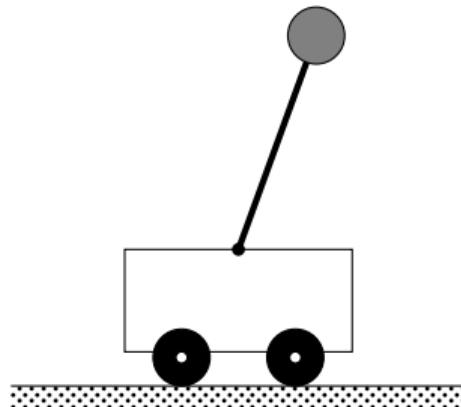
# Pêndulo invertido



## Desafios

- Sistema não linear
- Linearização
- Sistema instável
- Sujeito a distúrbios externos
- Limitações na ação de controle
- Seleção da estratégia de controle

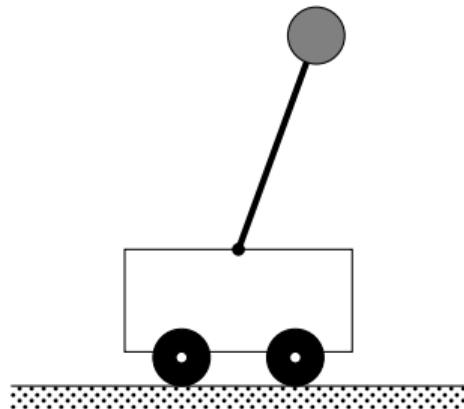
# Pêndulo invertido



## Desafios

- Sistema não linear
- Linearização
- Sistema instável
- Sujeito a distúrbios externos
- Limitações na ação de controle
- Seleção da estratégia de controle
- Sintonia da lei de controle

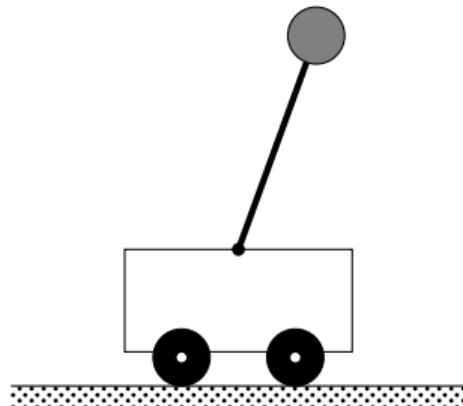
# Pêndulo invertido



## Desafios

- Sistema não linear
- Linearização
- Sistema instável
- Sujeito a distúrbios externos
- Limitações na ação de controle
- Seleção da estratégia de controle
- Sintonia da lei de controle
- Sensibilidade às condições iniciais

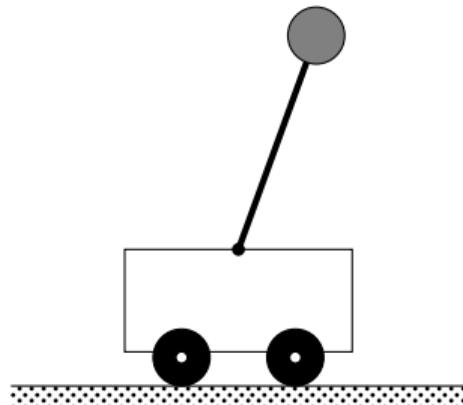
# Pêndulo invertido



## Desafios

- Sistema não linear
- Linearização
- Sistema instável
- Sujeito a distúrbios externos
- Limitações na ação de controle
- Seleção da estratégia de controle
- Sintonia da lei de controle
- Sensibilidade às condições iniciais
- Estimação de estados

# Pêndulo invertido



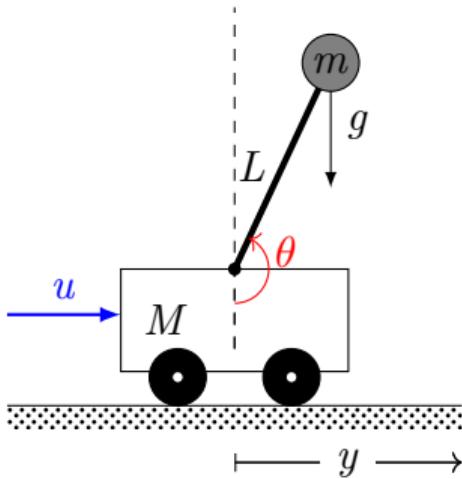
## Desafios

- Sistema não linear
- Linearização
- Sistema instável
- Sujeito a distúrbios externos
- Limitações na ação de controle
- Seleção da estratégia de controle
- Sintonia da lei de controle
- Sensibilidade às condições iniciais
- Estimação de estados
- Sensibilidade a variações paramétricas

# Objetivos do Seminário 1

- Apresentar a planta em estudo e definir os objetivos do sistema de controle a ser implementado;
- Descrever o modelo dinâmico da planta, destacando a correspondência com os fenômenos físicos relevantes;
- Identificar e discutir as não-linearidades presentes no sistema e suas implicações no controle;
- Estabelecer a ordem de grandeza das variáveis envolvidas no modelo;
- Analisar os principais distúrbios e incertezas aos quais a planta está sujeita, considerando seu impacto na robustez do controle.

# Modelagem



$$\dot{y} = v$$

$$\dot{v} = \frac{-m^2 L^2 g \cos(\theta) \sin(\theta) + mL^2 (mL\omega^2 \sin(\theta) - \delta v) + mL^2 u}{mL^2 (M + m(1 - \cos(\theta)^2))}$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{(m + M) mgL \sin(\theta) - mL \cos(\theta) (mL\omega^2 \sin(\theta) - \delta v) - mL \cos(\theta) u}{mL^2 (M + m(1 - \cos(\theta)^2))}$$

# Objetivos Seminário 2

- Modelagem Não-linear vs. Linear
- Comparação em simulação dos modelos (Não-linear vs. Linear )
- Análise da planta
  - Polos e zeros
  - Resposta em frequência
  - Controlabilidade e Observabilidade
- Escolha da frequência de amostragem
- Discretização
- Análise do sistema amostrado
- Impacto da variação da frequência de amostragem



# Objetivos Seminário 3

- Projeto de um controlador contínuo utilizando o método de alocação de polos baseado em polinômios que:
  - Rastreie uma referência assintoticamente
  - Rejeite um distúrbio assintoticamente
- Explicar o método para escolha dos auto-valores em malha fechada
- Discretizar o controlador utilizando os métodos de aproximação estudados
- Análise das funções de sensibilidade do sistema discreto
- Análise das curvas de resposta em frequência do sistema discreto
- Simulação e análise da simulação com o controlador discreto
- Respostas frente a variações no distúrbio e na referência com o controlador discreto
- Conclusões



# Objetivos Seminário 4

- Projeto de um controlador discreto em espaço de estados que:
  - Rastreie uma referência assintoticamente
  - Rejeite um distúrbio assintoticamente
- Método para escolha dos auto-valores em malha fechada
- Análise das funções de sensibilidade
- Análise das curvas de resposta em frequência
- Simulação e análise da simulação
- Respostas frente a variações no distúrbio e na referência
- Conclusões