In[2137]:=

In[2138]:=
```
Clear["Global`*"];
(* Q - parameters Q = (q1 == alpha, q2 == beta) *)
(* Configuration *)
X := {
   l * Cos[q1[t]],  (* x1 *)
   l * Sin[q1[t]],  (* y1 *)
   2 * l * Cos[q1[t]], (* x2 *)
   0 , (* y2 *)
   (2 * l * Cos[q1[t]]) + (2 * l * Cos[q2[t]]), (* x3 == x2 + ... *)
   0 + (2 * l * Sin[q2[t]]) (* y3 == y2 + .... *)
  };

dX := Simplify[D[X, t]];

m := {{m1, 0, 0, 0, 0, 0},
      {0, m1, 0, 0, 0, 0},
      {0, 0, m2, 0, 0, 0},
      {0, 0, 0, m2, 0, 0},
      {0, 0, 0, 0, m3, 0},
      {0, 0, 0, 0, 0, m3}};

G := {
   0,
   -g,
   0,
   -g,
    0,
   -g
  };
(* Trig→False disabled trig. simplifications *)
T := Simplify[(m.dX.dX) / 2, Trig → False];
U := m.G.X;

(* Lagrange *)
L = T - U;
dtdq1 = D[D[L, q1'[t]], t];
dq1 = D[L, q1[t]];

dtdq2 = D[D[L, q2'[t]], t];
dq2 = D[L, q2[t]];

LangrageDiff1 = Simplify[dtdq1 - dq1];
LangrageDiff2 = Simplify[dtdq2 - dq2];

r1 = LangrageDiff1;
r2 = LangrageDiff2;
```

```
(* Hamilton *)
H = T + U;

p1 = Simplify[D[L, q1'[t]]];
p2 = Simplify[D[L, q2'[t]]];

dp1 = -Simplify[D[H, q1[t]]];
dp2 = -Simplify[D[H, q2[t]]];

(* H = pq' - L *)
dq1 = (H + L) / p1;
dq2 = (H + L) / p2;

(* Prints *)

Print["X"]
MatrixForm[X]

Print["dX"]
MatrixForm[dX]

Print["m"]
MatrixForm[m]

Print["T"]
MatrixForm[T]

Print["U"]
MatrixForm[U]

Print["L"]
MatrixForm[L]

Print["dtdq1"]
MatrixForm[dtdq1]
Print["dtdq2"]
MatrixForm[dtdq2]

Print["dq1"]
MatrixForm[dq1]
Print["dq2"]
MatrixForm[dq2]
```

```
Print["LangrageDiff1"]
MatrixForm[LangrageDiff1]

Print["LangrageDiff2"]
MatrixForm[LangrageDiff2]

Print["H"]
MatrixForm[H]

Print["p1"]
MatrixForm[p1]
Print["p2"]
MatrixForm[p2]

Print["dp1"]
MatrixForm[dp1]
Print["dp2"]
MatrixForm[dp2]

Print["dq1"]
MatrixForm[dq1]
Print["dq2"]
MatrixForm[dq2]

(* Example *)
m1 = 1;
m2 = 1;
m3 = 1;
g = 9.81;
l = 1;
T = 100;

sol = NDSolve[{
     r1 == 0, r2 == 0,
     q1[0] == Pi / 2, q1'[0] == 3,
     q2[0] == Pi / 2, q2'[0] == 0
    },
    {q1, q2}, {t, 0, T}];

q1 = First[q1 /. sol];
q2 = First[q2 /. sol];

Plot[q1[t], {t, 0, T}]
Plot[q2[t], {t, 0, T}]
```

```
Animate[Graphics3D[{Line[{{-1.5, 0, 0}, {1.5, 0, 0}}], Line[{{0, -1.5, 0}, {0, 1.5, 0}}],
   Line[{{0, 0, -1.5}, {0, 0, 1.5}}], Arrow[{{0, 0, 0}, {
      (2 * l * Cos[q1[t]]) + (2 * l * Cos[q2[t]]),
      0 + (2 * l * Sin[q2[t]]),
      0}
    }]}], {t, 0, T}]
```

X

Out[2162]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} l\,\text{Cos}[q1[t]] \\ l\,\text{Sin}[q1[t]] \\ 2\,l\,\text{Cos}[q1[t]] \\ 0 \\ 2\,l\,\text{Cos}[q1[t]] + 2\,l\,\text{Cos}[q2[t]] \\ 2\,l\,\text{Sin}[q2[t]] \end{pmatrix}$$

dX

Out[2164]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -l\,\text{Sin}[q1[t]]\,q1'[t] \\ l\,\text{Cos}[q1[t]]\,q1'[t] \\ -2\,l\,\text{Sin}[q1[t]]\,q1'[t] \\ 0 \\ -2\,l\,\left(\text{Sin}[q1[t]]\,q1'[t] + \text{Sin}[q2[t]]\,q2'[t]\right) \\ 2\,l\,\text{Cos}[q2[t]]\,q2'[t] \end{pmatrix}$$

m

Out[2166]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} m1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m3 \end{pmatrix}$$

T

Out[2168]//MatrixForm=

$$\frac{1}{2}\,l^2\,\left(\left(m1\,\text{Cos}[q1[t]]^2 + (m1 + 4\,(m2 + m3))\,\text{Sin}[q1[t]]^2\right)\,q1'[t]^2 + 8\,m3\,\text{Sin}[q1[t]]\,\text{Sin}[q2[t]]\,q1'[t]\,q2'[t] + 4\,m3\,\left(\text{Cos}[q2[t]]^2 + \text{Sin}[q2[t]]^2\right)\,q2'[t]^2\right)$$

U

Out[2170]//MatrixForm=

$$-g\,l\,m1\,\text{Sin}[q1[t]] - 2\,g\,l\,m3\,\text{Sin}[q2[t]]$$

L

Out[2172]//MatrixForm=

$$g\,l\,m1\,\text{Sin}[q1[t]] + 2\,g\,l\,m3\,\text{Sin}[q2[t]] + \frac{1}{2}\,l^2\,\left(\left(m1\,\text{Cos}[q1[t]]^2 + (m1 + 4\,(m2 + m3))\,\text{Sin}[q1[t]]^2\right)\,q1'[t]^2 + 8\,m3\,\text{Sin}[q1[t]]\,\text{Sin}[q2[t]]\,q1'[t]\,q2'[t] + 4\,m3\,\left(\text{Cos}[q2[t]]^2 + \text{Sin}[q2[t]]^2\right)\,q2'[t]^2\right)$$

dtdq1

Out[2174]//MatrixForm=

$$\frac{1}{2} l^2 \Big(2\, q1'[t] \Big(-2\, m1 \cos[q1[t]] \sin[q1[t]]\, q1'[t] + 2\,(m1 + 4\,(m2 + m3)) \cos[q1[t]] \sin[q1[t]]\, q1'[t]\Big) + 8\, m3 \cos[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t]\, q2'[t] + 8\, m3 \cos[q2[t]] \sin[q1[t]]\, q2'[t]^2 + 2\Big(m1 \cos[q1[t]]^2 + (m1 + 4\,(m2 + m3)) \sin[q1[t]]^2\Big) q1''[t] + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q2''[t]\Big)$$

dtdq2

Out[2176]//MatrixForm=

$$\frac{1}{2} l^2 \Big(8\, m3 \cos[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t]^2 + 8\, m3 \cos[q2[t]] \sin[q1[t]]\, q1'[t]\, q2'[t] + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1''[t] + 8\, m3 \Big(\cos[q2[t]]^2 + \sin[q2[t]]^2\Big) q2''[t]\Big)$$

dq1

Out[2178]//MatrixForm=

$$\Big(2\,\Big(\Big(m1 \cos[q1[t]]^2 + (m1 + 4\,(m2 + m3)) \sin[q1[t]]^2\Big) q1'[t]^2 + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t]\, q2'[t] + 4\, m3 \Big(\cos[q2[t]]^2 + \sin[q2[t]]^2\Big) q2'[t]^2\Big)\Big) \Big/ \Big(2\,\Big(m1 + 2\,(m2 + m3) - 2\,(m2 + m3) \cos[2\, q1[t]]\Big) q1'[t] + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q2'[t]\Big)$$

dq2

Out[2180]//MatrixForm=

$$\Big(\Big(m1 \cos[q1[t]]^2 + (m1 + 4\,(m2 + m3)) \sin[q1[t]]^2\Big) q1'[t]^2 + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t]\, q2'[t] + 4\, m3 \Big(\cos[q2[t]]^2 + \sin[q2[t]]^2\Big) q2'[t]^2\Big) \Big/ \Big(4\, m3 \Big(\sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t] + q2'[t]\Big)\Big)$$

LangrageDiff1

Out[2182]//MatrixForm=

$$l \Big(-g\, m1 \cos[q1[t]] + 2\, l\,(m2 + m3) \sin[2\, q1[t]]\, q1'[t]^2 + 4\, l\, m3 \cos[q2[t]] \sin[q1[t]]\, q2'[t]^2 + l\, m1 \cos[q1[t]]^2\, q1''[t] + l\, m1 \sin[q1[t]]^2\, q1''[t] + 4\, l\, m2 \sin[q1[t]]^2\, q1''[t] + 4\, l\, m3 \sin[q1[t]]^2\, q1''[t] + 4\, l\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q2''[t]\Big)$$

LangrageDiff2

Out[2184]//MatrixForm=

$$2\, l\, m3 \Big(-g \cos[q2[t]] + 2\, l \cos[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t]^2 + 2\, l \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1''[t] + 2\, l\, q2''[t]\Big)$$

H

Out[2186]//MatrixForm=

$$-g\, l\, m1 \sin[q1[t]] - 2\, g\, l\, m3 \sin[q2[t]] + \frac{1}{2} l^2 \Big(\Big(m1 \cos[q1[t]]^2 + (m1 + 4\,(m2 + m3)) \sin[q1[t]]^2\Big) q1'[t]^2 + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t]\, q2'[t] + 4\, m3 \Big(\cos[q2[t]]^2 + \sin[q2[t]]^2\Big) q2'[t]^2\Big)$$

p1

Out[2188]//MatrixForm=

$$\frac{1}{2} l^2 \Big(2\,\Big(m1 + 2\,(m2 + m3) - 2\,(m2 + m3) \cos[2\, q1[t]]\Big) q1'[t] + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q2'[t]\Big)$$

p2

Out[2190]//MatrixForm=

$$4\, l^2\, m3 \Big(\sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t] + q2'[t]\Big)$$

```
dp1
```

Out[2192]//MatrixForm=

$$-l \cos[q1[t]] \left(-g\, m1 + 4\, l\, (m2+m3) \sin[q1[t]]\, q1'[t]^2 + 4\, l\, m3 \sin[q2[t]]\, q1'[t]\, q2'[t]\right)$$

```
dp2
```

Out[2194]//MatrixForm=

$$-2\, l\, m3 \cos[q2[t]] \left(-g + 2\, l \sin[q1[t]]\, q1'[t]\, q2'[t]\right)$$

```
dq1
```

Out[2196]//MatrixForm=

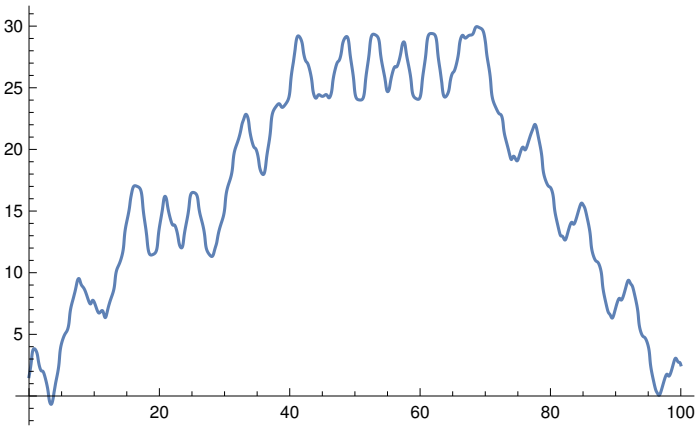
$$\Big(2 \Big(\left(m1 \cos[q1[t]]^2 + (m1 + 4\,(m2+m3)) \sin[q1[t]]^2\right) q1'[t]^2 + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t]\, q2'[t] + 4\, m3 \left(\cos[q2[t]]^2 + \sin[q2[t]]^2\right) q2'[t]^2\Big)\Big) \Big/ \Big(2 \left(m1 + 2\,(m2+m3) - 2\,(m2+m3) \cos[2\, q1[t]]\right) q1'[t] + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q2'[t]\Big)$$

```
dq2
```

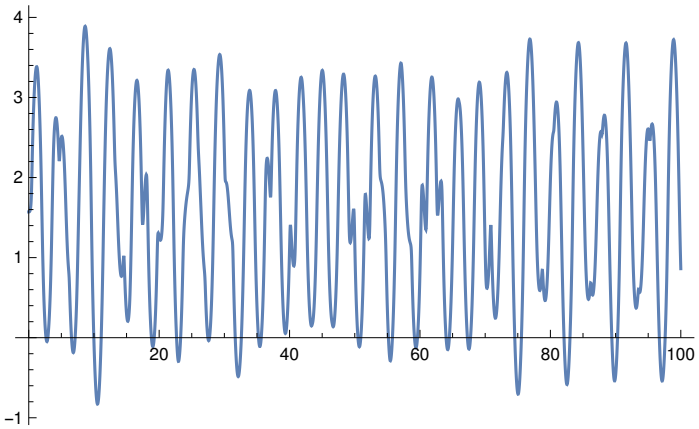
Out[2198]//MatrixForm=

$$\Big(\left(m1 \cos[q1[t]]^2 + (m1 + 4\,(m2+m3)) \sin[q1[t]]^2\right) q1'[t]^2 + 8\, m3 \sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t]\, q2'[t] + 4\, m3 \left(\cos[q2[t]]^2 + \sin[q2[t]]^2\right) q2'[t]^2\Big) \Big/ \Big(4\, m3 \left(\sin[q1[t]] \sin[q2[t]]\, q1'[t] + q2'[t]\right)\Big)$$

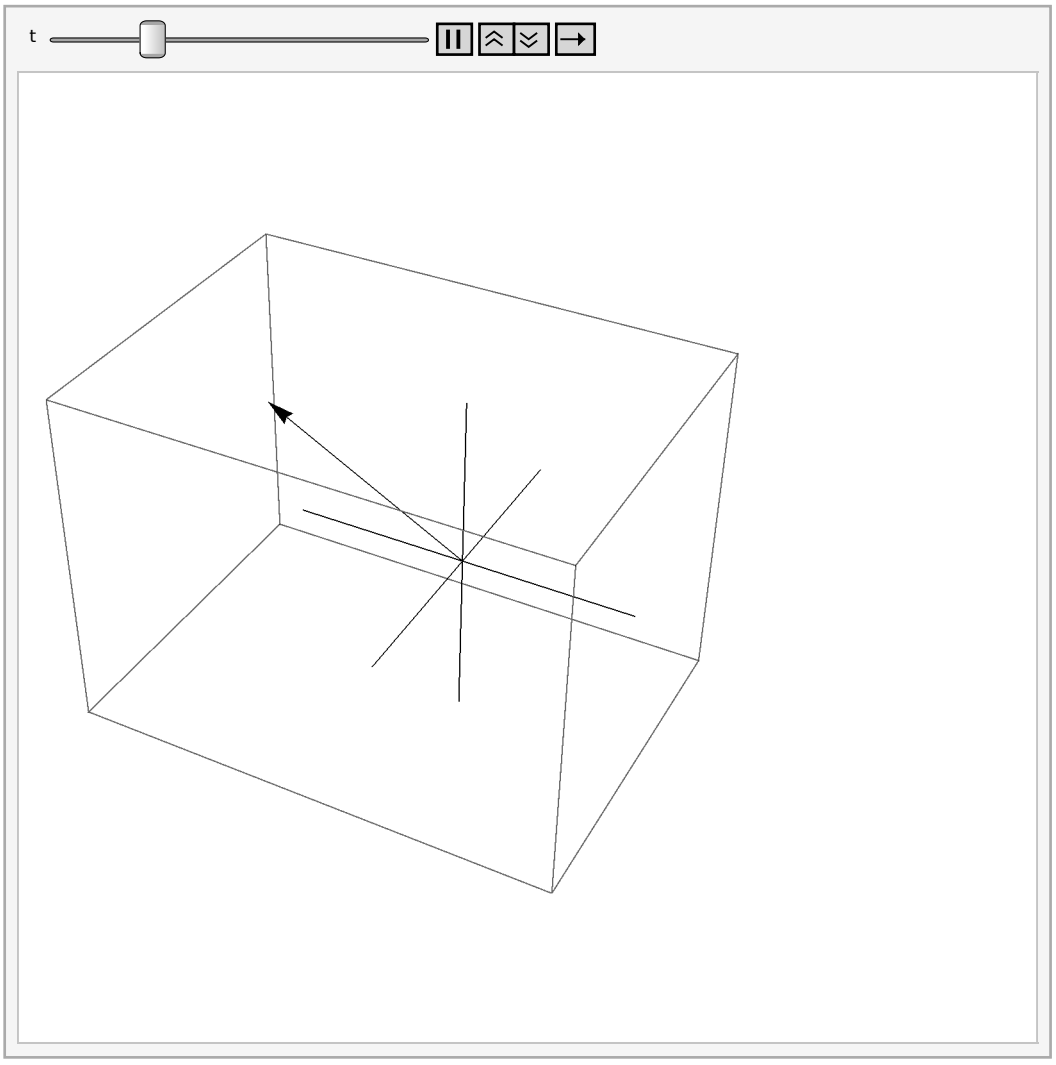
Out[2208]=



Out[2209]=



Out[2210]=



In[2211]:=

In[2212]:=