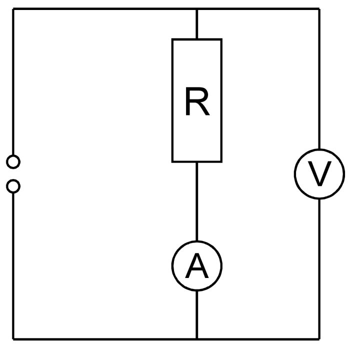
1. zápočtový test
(45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

Příklad 1 - měření odporu přímou metodou

Zadání:
Rezistor o neznámém odporu R připojíme ke zdroji napětí, voltmetru a ampérmetru podle schématu na obrázku. Známé vnitřní odpory voltmetru a ampérmetru jsou $R_V = (1.65 \pm 0.03)$ kΩ a $R_A = (2.02 \pm 0.02)$ Ω.



Digitální voltmetr má 4-místný displej a ukazuje hodnotu 22.14 V, na měřeném rozsahu uvádí výrobce přesnost $\pm(0.3\% + 1)$. Ručička ampérmetru ukazuje hodnotu 0.95 A, třída přesnosti ampérmetru je 2 a použitý rozsah stupnice je 1.5 A.

(a) Vypočítejte standardní odchylku měření elektrického napětí U a proudu I. Výsledky měření zapište ve správném tvaru.

(b) Odvoďte obecný vztah pro výpočet odporu R pomocí veličin uvedených v zadání.

(c) Vypočítejte očekávanou hodnotu a chybu měření odporu R. Výsledek zapište ve správném tvaru.

Poznámka: Při výpočtu úloh (b) a (c) použijte výsledné hodnoty z úlohy (a).

(10 bodů)

Řešení:
(a) Pro digitální voltmetr je maximální chyba měření napětí ε_U dána součtem 0.3%-násobku naměřené hodnoty a 1-násobku řádu poslední platné číslice, tj. jedné setiny V.

$$\varepsilon_U = 0.003 \times 22.14 \text{ V} + 1 \times 0.01 \text{ V} = 0.07642 \text{ V}$$

Pro analogový ampérmetr s třídou přesnosti $P = 2$ a rozsahem $R = 1.5$ A je maximální chyba měření proudu ε_I dána jako:

$$\varepsilon_I = \frac{PR}{100} = 0.03 \text{ A}.$$

Standardní odchylky σ_U a σ_I vypočítáme tak, že vydělíme maximální chyby $\sqrt{3}$.

$$\sigma_U = \frac{\varepsilon_U}{\sqrt{3}} \doteq 0.04 \text{ V}$$
$$\sigma_I = \frac{\varepsilon_I}{\sqrt{3}} \doteq 0.02 \text{ A}$$

Obě veličiny tedy známe s přesností na setiny, naměřené hodnoty není tudíž nutné dále zaokrouhlovat. Výsledky měření napětí a proudu zapíšeme následovně.

$$U = (22.14 \pm 0.04) \text{ V}$$
$$I = (0.95 \pm 0.02) \text{ A}$$

(b) V daném zapojení měří ampérmetr přímo proud procházející rezistorem, zatímco voltmetr měří napětí na rezistoru plus napětí na samotném ampérmetru. Podíl napětí a proudu je potom roven součtu odporu rezistoru R a odporu ampérmetru R_A.

$$\frac{U}{I} = R + R_A$$
$$R = \frac{U}{I} - R_A$$

(c) Maximální chyba odporu R je rovna součtu maximální chyby podílu U/I a maximální chyby odporu ampérmetru.

$$\varepsilon_R = \frac{U\varepsilon_I + I\varepsilon_U}{I^2} + \varepsilon_{R_A}$$

Vydělením této rovnice $\sqrt{3}$ dostaneme stejný vztah i pro standardní odchylky.

$$\sigma_R = \frac{U\sigma_I + I\sigma_U}{I^2} + \sigma_{R_A}$$

$$\sigma_R = \frac{22.14 \text{ V} \times 0.02 \text{ A} + 0.95 \text{ A} \times 0.04 \text{ V}}{(0.95 \text{ A})^2} + 0.02\ \Omega \doteq 0.6\ \Omega$$

Nakonec dopočítáme odpor R, zaokrouhlíme ho podle odchylky σ_R na desetiny Ω a zapíšeme výsledek.

$$R = \frac{U}{I} - R_A$$
$$R = \frac{22.14 \text{ V}}{0.95 \text{ V}} - 2.02\ \Omega$$
$$R \doteq 21.3\ \Omega$$

$$R = (21.3 \pm 0.6)\ \Omega$$

Příklad 2 - pološířka spektrální čáry

Zadání:
Pomocí scintilačního detektoru byla změřena energie γ záření produkovaného při radioaktivním rozpadu jader ^{137}Cs. Výsledné energetické spektrum má tvar lorentziánu s mediánem $E_\gamma = 662$ keV a pološířkou FWHM $= 6.9\%\ E_\gamma$. Vypočítejte, kolik procent naměřených hodnot energií spadá do intervalu jedné pološířky.

Poznámka: Rozmyslete si, jak vypadá interval jedné pološířky.

(5 bodů)

Řešení:
Pološířka w udává „**plnou šířku v polovině výšky**", pro čáru s energií $E_\gamma = 662$ keV je rovna:

$$w = 0.069 E_\gamma \doteq 46 \text{ keV}.$$

Interval jedné pološířky je tedy $E \in [E_\gamma - w/2, E_\gamma + w/2]$.

Ze zadání víme, že energetické spektrum má tvar lorentziánu, jeho hustota pravděpodobnosti je tedy popsána Cauchyho resp. Breit-Wignerovým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti $f(E)$ a distribuční funkcí $F(E)$.

$$\begin{aligned} f(E) &= \frac{1}{\pi} \frac{w/2}{w^2/4 + (E - E_\gamma)^2} \\ F(E) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{E - E_\gamma}{w/2} \right) \right] \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že náhodná proměnná E bude ležet v intervalu jedné pološířky můžeme vyjádřit pomocí distribuční funkce $F(E)$.

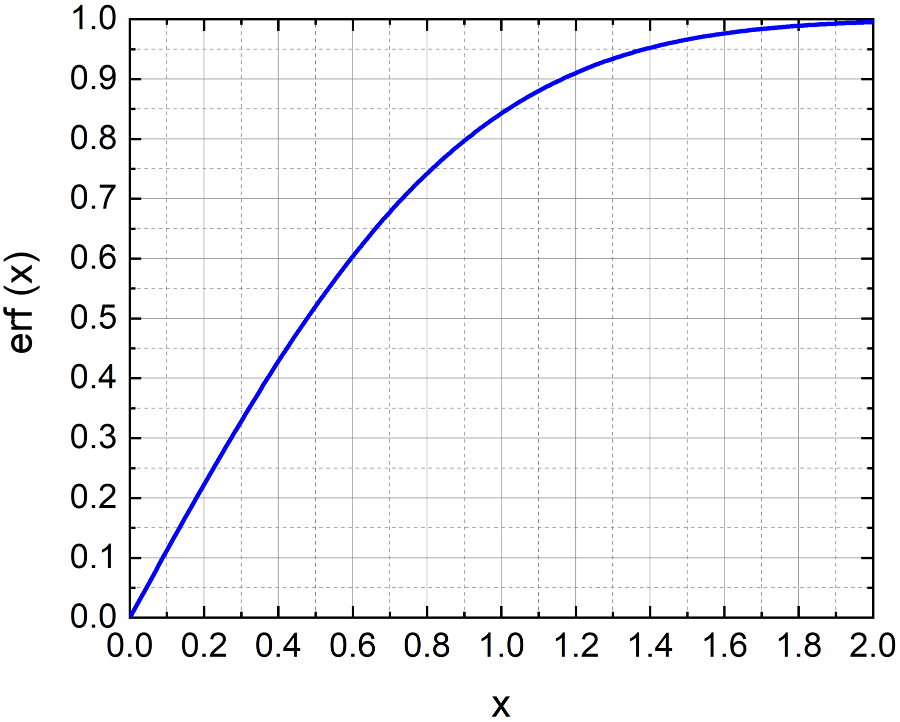
$$\begin{aligned} P\left\{ E \in [E_\gamma - \frac{w}{2}, E_\gamma + \frac{w}{2}] \right\} &= F\left(E_\gamma + \frac{w}{2}\right) - F\left(E_\gamma - \frac{w}{2}\right) \\ &= F\left(E_\gamma + \frac{w}{2}\right) - \left[1 - F\left(E_\gamma + \frac{w}{2}\right)\right] \\ &= 2F\left(E_\gamma + \frac{w}{2}\right) - 1 \\ &= 1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1) - 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

V intervalu jedné pološířky leží tedy přesně 50% (polovina) všech naměřených hodnot energií. Tento výsledek platí nezávisle na hodnotě mediánu E_γ a pološířky w.

Příklad 3 - normální rozdělení $\sigma_{0.9}$ kritérium

Zadání:
Uvažujme standardní normální rozdělení $N(0,1)$. Definujme $\sigma_{0.9}$ kritérium jako podmínku pro pravděpodobnost $P\{x \in [-\sigma_{0.9}, +\sigma_{0.9}]\} = 0.9$ neboli v intervalu $\pm\sigma_{0.9}$ v okolí očekávané hodnoty se nachází 90% naměřených hodnot náhodné proměnné x.

(a) Vypočítejte hodnotu parametru $\sigma_{0.9}$. K výpočtu využijte hodnoty error funkce, jejíž graf je zobrazený na obrázku.
(b) S jakou přesností (ve smyslu maximální chyby) je určena hodnota $\sigma_{0.9}$?
(c) Zapište výsledek ve správném tvaru pomocí očekávané hodnoty a standardní odchylky veličiny $\sigma_{0.9}$).



Poznámka: Rozmyslete si, s jakou přesností odečítáte z grafu erf(x) hodnoty náhodné proměnné x; neboli $x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$.

(10 bodů)

Řešení:
(a) Pravděpodobnost, že náhodná proměnná x bude ležet v intervalu $\pm\sigma_{0.9}$ můžeme obecně vyjádřit pomocí distribuční funkce $F(x)$.

$$\begin{aligned} P\{x \in [-\sigma_{0.9}, \sigma_{0.9}]\} &= F(\sigma_{0.9}) - F(-\sigma_{0.9}) \\ &= F(\sigma_{0.9}) - [1 - F(\sigma_{0.9})] \\ &= 2F(\sigma_{0.9}) - 1, \end{aligned}$$

kde jsme využili symetrie distribuční funkce $F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)$ pro libovolné x. Dosaďme za $F(x)$ známou distribuční funkci standardního normálního rozdělení.

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Počítejme s pravděpodobností $P = 0.9$.

$$\begin{aligned}
0.9 &= 2F\left(\sigma_{0.9}\right) - 1 \\
0.9 &= \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{0.9}}{\sqrt{2}}\right) \\
0.9 &= \operatorname{erf}(y)
\end{aligned}$$

Z obrázku ze zadání vidíme, že funkce $\operatorname{erf}(y)$ nabývá hodnoty 0.9 v intervalu $y \in (1.1, 1.2)$. Jako očekávanou hodnotu y zvolme střední hodnotu tohoto intervalu, neboli $\bar{y} = 1.15$ a dosaďme ji do poslední rovnice.

$$\begin{aligned}
0.9 &\approx \operatorname{erf}(\bar{y}) \\
\bar{y} &= \frac{\sigma_{0.9}}{\sqrt{2}} \\
\sigma_{0.9} &= \sqrt{2}\bar{y} \\
\sigma_{0.9} &= 1.626
\end{aligned}$$

(b) Hodnotu $\bar{y}$ jsme odhadli s maximální chybou $\varepsilon_y = 0.05$. Maximální chybu $\varepsilon_{\sigma_{0.9}}$ veličiny $\sigma_{0.9}$ vypočítáme jako:

$$\varepsilon_{\sigma_{0.9}} = \sqrt{2}\varepsilon_y = 0.0707$$

Vydělením $\sqrt{3}$ dostaneme standardní odchylku σ_σ:

$$\varepsilon_{\sigma_{0.9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_y \doteq 0.04$$

Veličinu $\sigma_{0.9}$ tedy známe s přesností na setiny.

(c) Hodnotu $\sigma_{0.9}$ zaokrouhlíme na setiny podle standardní odchylky a zapíšeme výsledek.

$$\sigma_{0.9} = (1.63 \pm 0.04)$$

Poznamenejme, že přesná hodnota spočítaná pomocí znalosti inverzní funkce k error funkci erf^{-1} je $\sigma_{0.9} = 1.645$.

Příklad 4 - Geigerův-Müllerův počítač

Zadání:
Geiger-Müllerův počítač umístěný v blízkosti radioaktivního vzorku cesia obsahujícího izotop ^{137}Cs naměřil během deseti minut 7 200 událostí (rozpadů β^-).

Vypočítejte pravděpodobnost, že během jedné sekundy detekujeme právě 8 událostí. Jaká je pravděpodobnost, že během dvou sekund detekujeme právě 16 událostí?

Poznámka: Radionuklid ^{137}Cs má dlouhý poločas rozpadu (cca 30 let) a vzorek obsahuje obrovské množství těchto radioaktivních jader.

(5 bodů)

Řešení:
Počet k naměřených událostí za zvolený časový úsek je určen Poissonovým rozdělením $P(k|\nu)$ s očekávanou hodnotou ν.

$$P(k|\nu) = e^{-\nu} \frac{\nu^k}{k!}$$

Za jednu sekundu detektor naměří v průměru $\nu = 12$ událostí. Pravděpodobnost detekce 8 událostí za 1 sekundu je tedy:

$$P(8|1\text{ s}) = e^{-12} \frac{12^8}{8!}$$
$$P(8|1\text{ s}) \doteq 0.066 = 6.6\%$$

Za dvě sekundy detektor naměří v průměru $\nu = 24$ událostí. Pravděpodobnost detekce 16 událostí za 2 sekundy je tedy:

$$P(16|2\text{ s}) = e^{-24} \frac{24^{16}}{16!}$$
$$P(16|2\text{ s}) \doteq 0.022 = 2.2\%$$

Poznámka: Neplatí tedy zdánlivě správná představa, že pravděpodobnost detekce dvojnásobného množství událostí za dvojnásobný čas je stejná jako pravděpodobnost původní. Důvodem je, že náhodná proměnná - počet detekovaných událostí - nabývá pouze diskrétních hodnot. Ve druhém případě nabývá dvojnásobného množství možných výsledků, tudíž zmíněné pravděpodobnosti nemohou být stejné.
Např. detekce 16 událostí za 2 sekundy má analogii v detekci 8 událostí za 1 sekundu. Na druhou stranu detekce lichého počtu událostí za 2 sekundy takovou analogii nemá.