# Přenos chyb

- náhodné proměnné $x_i$ : $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\quad E[x_i] = \mu_i \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$
- **výsledná veličina** : $y(\boldsymbol{x})$ $\quad V_{i,j} = \mathrm{cov}(x_i, x_j)$
- Taylorův rozvoj : $y(\boldsymbol{x}) = y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)$

**Očekávaná hodnota**: $E\left[y(\boldsymbol{x})\right] \approx y(\boldsymbol{\mu})$

- **Rozptyl**: $V\left[y(\boldsymbol{x})\right] = E\left[y(\boldsymbol{x})^2\right] - \left(E\left[y(\boldsymbol{x})\right]\right)^2$

$$y^2(\boldsymbol{x}) \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + 2y(\boldsymbol{\mu}) \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_j - \mu_j)$$

$$E\left[y^2(\boldsymbol{x})\right] \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \left.\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \mathrm{cov}(x_i, x_j)$$

**Rozptyl**: $V\left[y(\boldsymbol{x})\right] \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \left.\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \mathrm{cov}(x_i, x_j)$

# Přenos chyb – nezávislé náhodné proměnné

- náhodné proměnné $x_i$ : $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\quad E[x_i] = \mu_i \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$
- **výsledná veličina** : $y(\boldsymbol{x})$ $\quad V[x_i] = \sigma_i^2$

- $x_i$ nezávislé $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(x_i, x_j) = 0 \quad \mathrm{pro} \quad i \neq j$

**Očekávaná hodnota**: $E\left[y(\boldsymbol{x})\right] \approx y(\boldsymbol{\mu})$

**Rozptyl**: $$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \left( \left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \right)^2 \sigma_i^2$$

# Přenos chyb – součet náhodných proměnných

- náhodné proměnné $x_1, x_2$ : $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$
- **výsledná veličina** : $y(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2$ $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$

I. <u>$x_1, x_2$ nezávislé</u>

**Očekávaná hodnota**: $E\left[y(\boldsymbol{x})\right] = \mu_1 + \mu_2$

**Rozptyl**: $V\left[y(\boldsymbol{x})\right] = V[x_1] + V[x_2] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

II. <u>$x_1, x_2$ nejsou nezávislé</u>

**Očekávaná hodnota**: $E\left[y(\boldsymbol{x})\right] = \mu_1 + \mu_2$

**Rozptyl**: $V\left[y(\boldsymbol{x})\right] = V[x_1] + V[x_2] + 2\mathrm{cov}(x_1, x_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\mathrm{cov}(x_1, x_2)$

# Přenos chyb – aritmetický průměr

• náhodné proměnné $x_i$ : $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $E[x_i] = \mu_i$ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$

• **výsledná veličina** : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $V[x_i] = \sigma_i^2$ $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$

<u>$x_1$, $x_2$ nezávislé</u>

**Rozptyl**: $V[\overline{x}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V[x_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$

• všechny $\sigma_i$ stejné ($\sigma_i = \sigma$) $\Rightarrow V[\overline{x}] = \frac{\sigma^2}{n}$ $\Rightarrow$ chyba aritmetického průměru: $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

# Přenos chyb

*a, b* nezávislé

- **součet / rozdíl**:

$$y = a + b$$

$$y = a - b$$

$$\boxed{\sigma_y^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

- **součin / podíl**:

$$y = ab$$

$$y = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_y^2}{y^2} = \frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2}}$$

- **mocnina**:

$$y = a^n$$

$$\boxed{\frac{\sigma_y^2}{y^2} = n^2 \frac{\sigma_a^2}{a^2}}$$

- například $R = 4\varrho \frac{l}{\pi d^2}$ $\quad \frac{\sigma_R^2}{R^2} = \frac{\sigma_\varrho^2}{\varrho^2} + \frac{\sigma_l^2}{l^2} + 4\frac{\sigma_d^2}{d^2}$