Rozdělení pravděpodobnosti

- **diskrétní náhodná proměnná**
  - rovnoměrné rozdělení
  - binomické rozdělení
  - Poissonovo rozdělení

- **spojitá náhodná proměnná**
  - rovnoměrné rozdělení
  - Cauchyho rozdělení
  - normální (Gaussovo) rozdělení

  - χ^2-rozdělení
  - (Studentovo) t-rozdělení
  - Boltzmannovo rozdělení

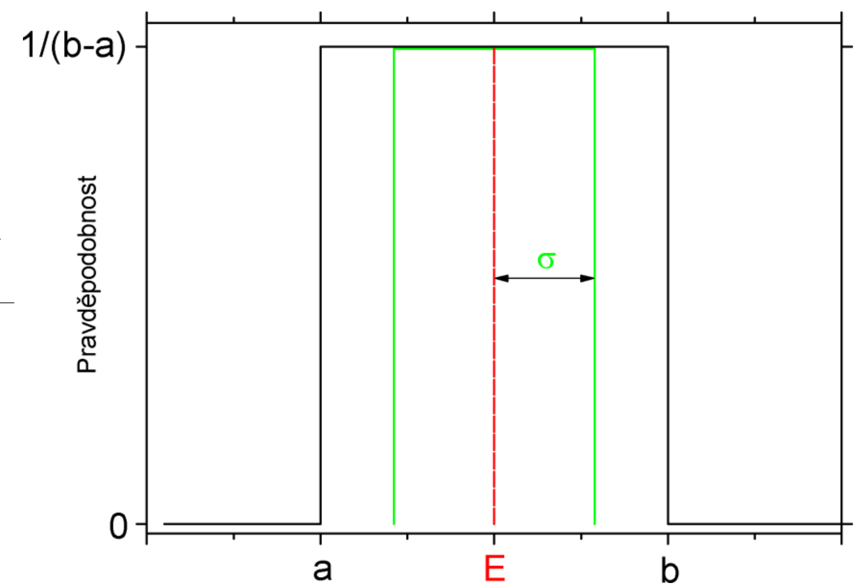
Rovnoměrné rozdělení

spojité náhodné veličiny

- rovnoměrné rozdělení spojité náhodné veličiny v intervalu (a,b)
- pravděpodobnost výskytu:

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{pro } a \le x \le b \\ 0 & \text{pro } x < a, x > b \end{cases}$$

- normovací podmínka: $1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = p(b-a) \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{1}{b-a}$
- střední hodnota: $\mathrm{E} = \int_a^b x\, p\, \mathrm{d}x = \dfrac{a+b}{2}$
- disperze: $\mathrm{V} = \int_a^b (x-E)^2 p\, \mathrm{d}x = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- standardní odchylka: $\sigma = \sqrt{V} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$



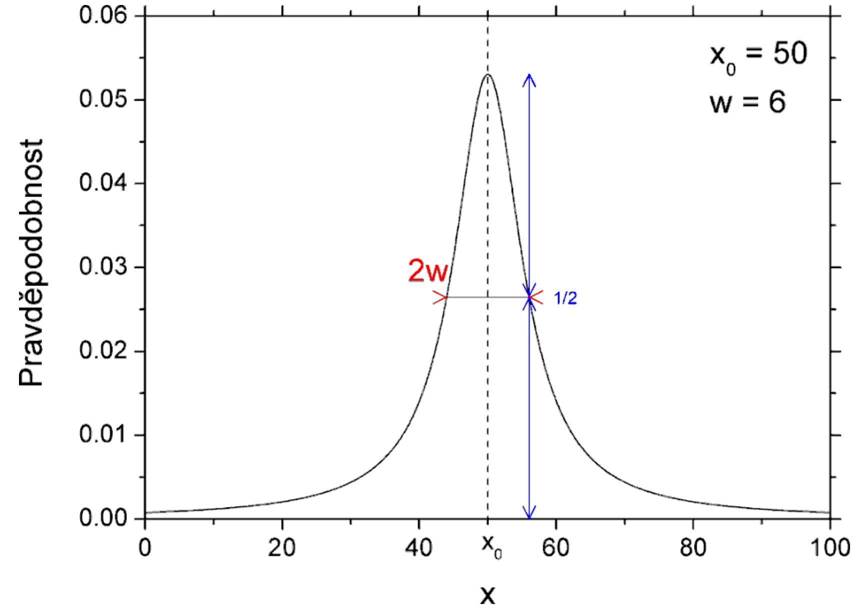
Cauchyho rozdělení

spojité náhodné veličiny

- Cauchyho-Lorentzovo rozdělení
- hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\pi w \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{w} \right)^2 \right]}$$

- normovací podmínka: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$



- střední hodnota **není definována**, disperze je **nekonečná**
  - liché momenty divergují, sudé jsou nekonečné

$\rightarrow$ medián

- distribuční funkce:

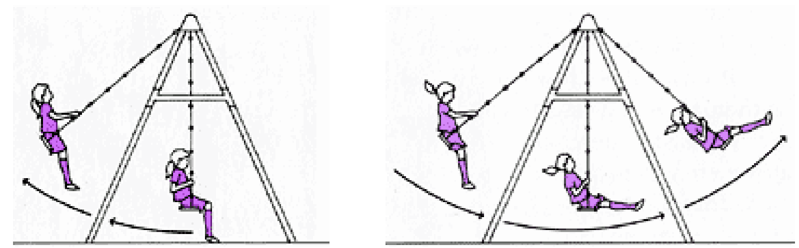
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{w}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{w}{w^2 + (x - x_0)^2}$$

Lorentzova funkce

Cauchyho rozdělení – příklad: nucené kmity

- harmonická budící síla: $F_b = F_0 \sin \Omega t$



- pohybová rovnice:

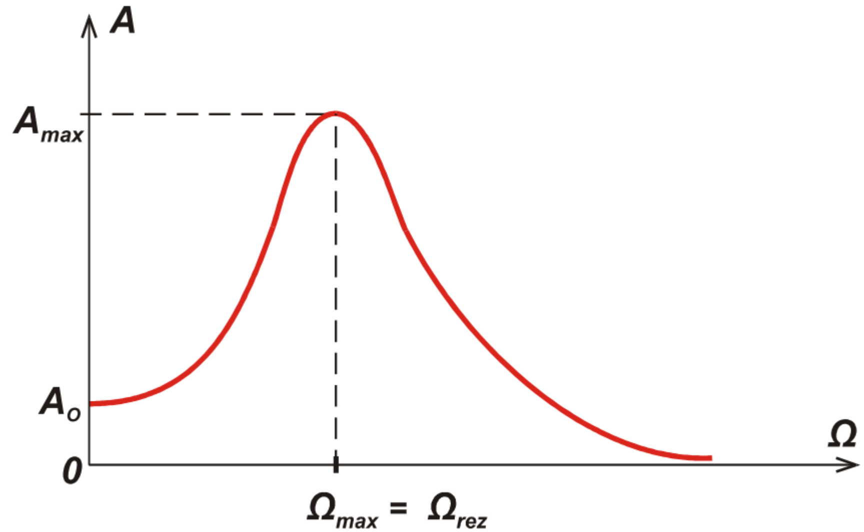
$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega^2 y = \frac{1}{m} F_0 \sin \Omega t$$

- řešení: $y = A \sin(\Omega t + \varphi_0)$
- jak se chová amplituda?

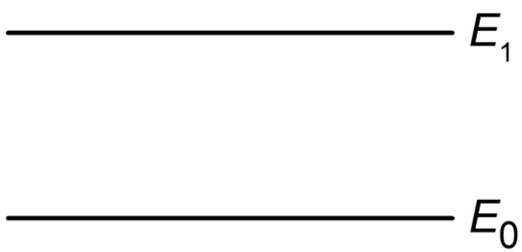
$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2) + 4b^2\Omega^2}}$$

- a energie?

$$E = \frac{1}{4} \frac{F_0^2}{m} \frac{\Omega^2 + \omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2) + 4b^2\Omega^2}$$



Cauchyho rozdělení – příklad: šířka spektrální čáry



Heisenberg:

$$\Delta E \Delta t > \frac{\hbar}{2}$$

doba života: $\tau = \Delta t$

- Wigner-Weisskopf: $$e^{-iE_1 t} = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{-iE_0 t}$$ $$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

$$f(E_1) = \frac{k}{\left(E_1 - E_0\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

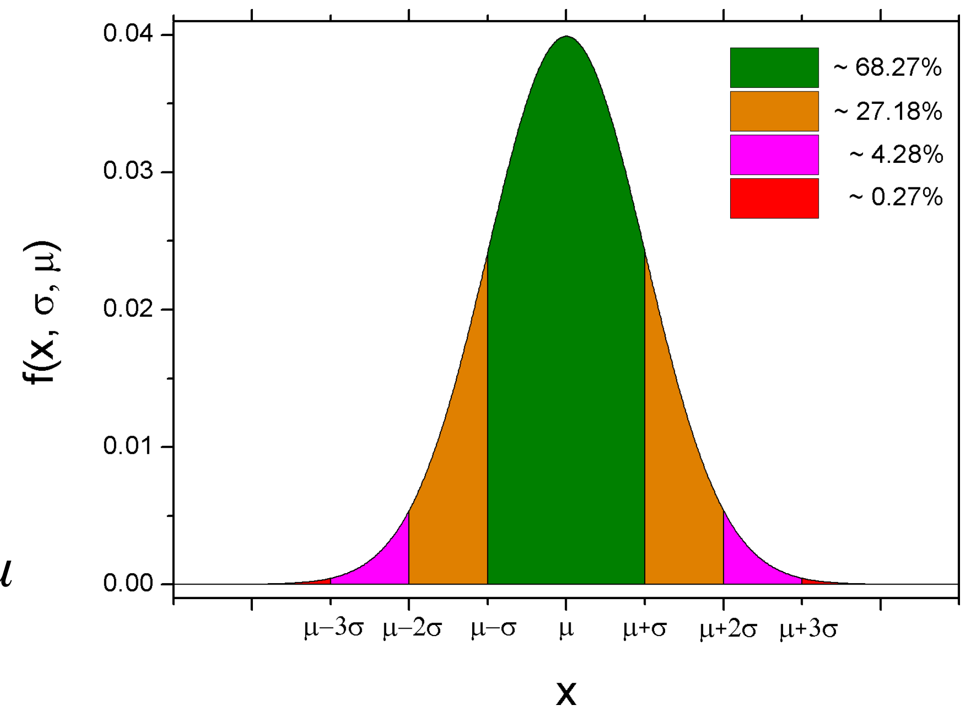
Breit-Wigner

Normální rozdělení

spojité náhodné veličiny

- Gaussovo rozdělení
- hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- střední hodnota: $\mathrm{E} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \mu$
- disperze: $\mathrm{V} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \sigma^2$
- distribuční funkce:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Normální rozdělení

spojité náhodné veličiny

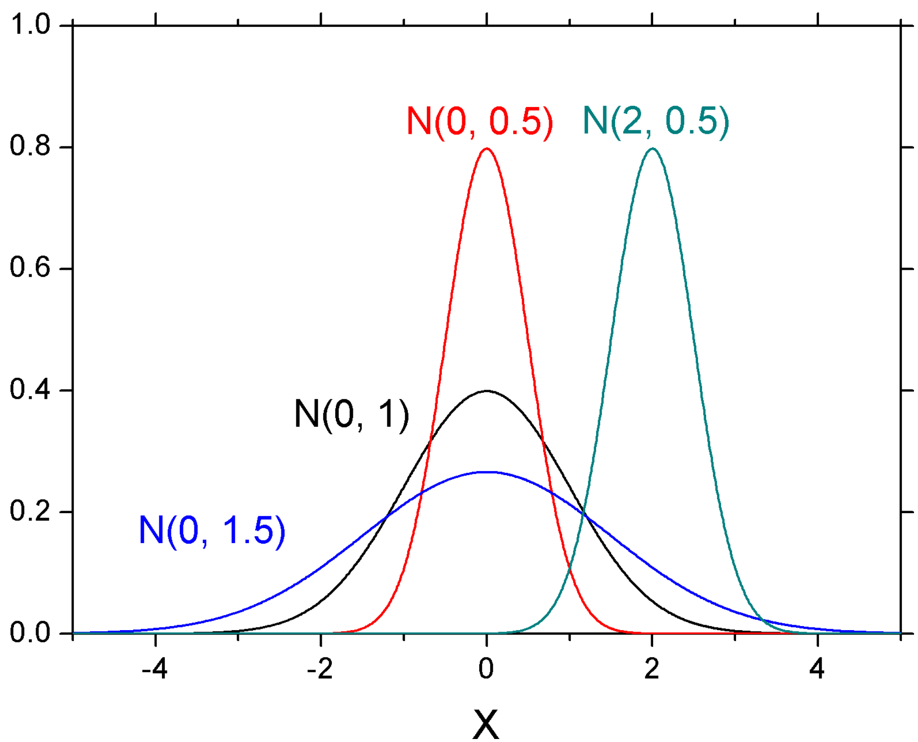
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu = 0$

$\sigma = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- příklady $N(\mu, \sigma)$:



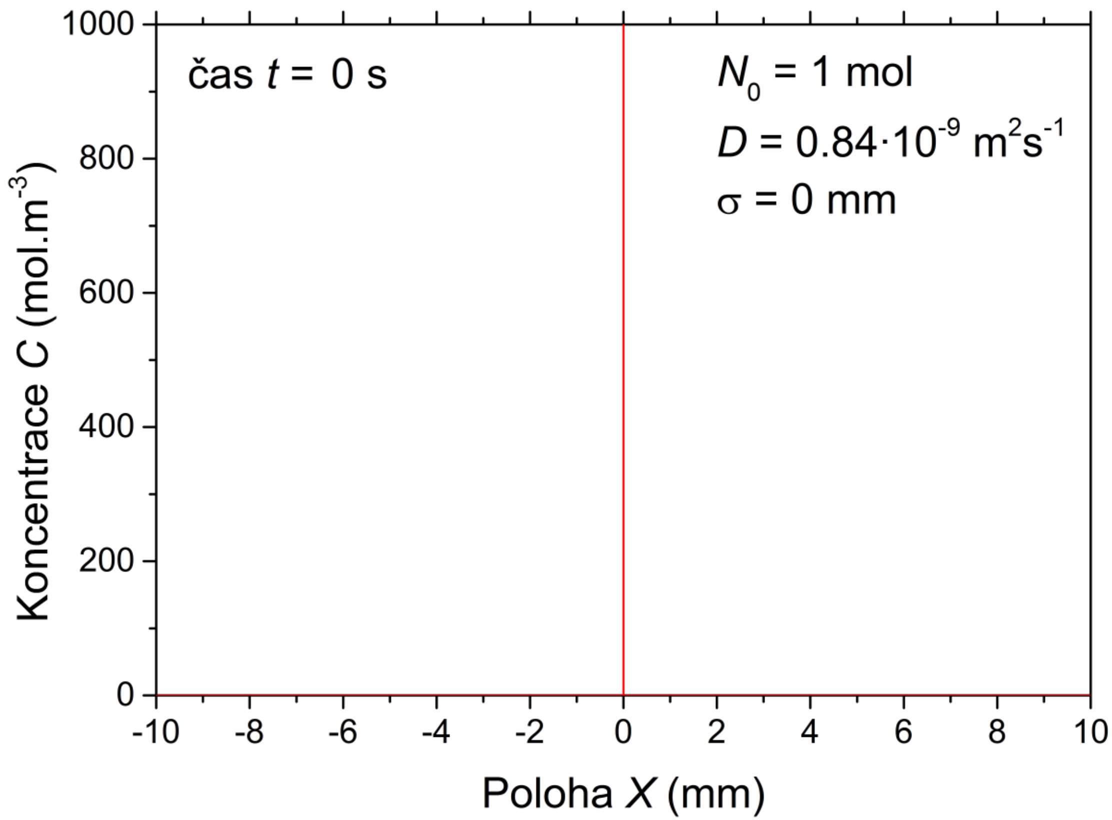
standardní (normované) Gaussovo rozdělení $N(0, 1)$

Normální rozdělení - příklad: difuze

- Fickův 2. zákon: $\dfrac{\partial C}{\partial t} = D\Delta x$

řešení pro jednu dimenzi:

$$C(X,t) = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{X^2}{4Dt}}$$



χ^2 rozdělení

spojité náhodné veličiny

- Náhodná veličina w má rozdělení N(0,1).
- Jaké je rozdělení sumy w^2 při n-násobném **nezávislém** opakování?

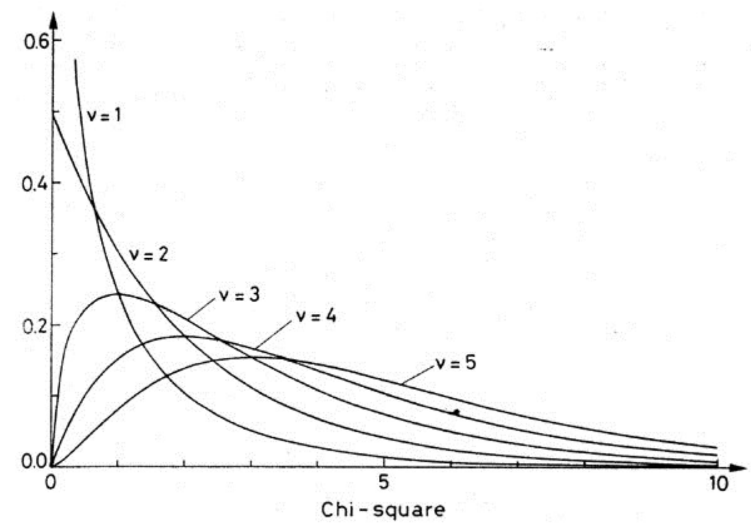
$$x = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \qquad f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

funkce gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$z! = \Gamma(z+1)$$

- Parametr n se nazývá počet stupňů volnosti.
- střední hodnota: $\mathrm{E} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x = n$
- disperze: $\mathrm{V} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2n$
- aplikace ve statistice (např. χ^2 test)

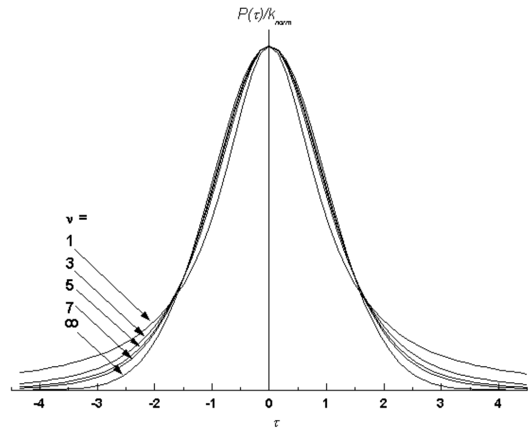


Studentovo *t*-rozdělení

spojité náhodné veličiny

- Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny x, y:
  - Náhodná veličina x má (opět) rozdělení N(0,1).
  - Náhodná veličina y má rozdělení χ^2(n), normované počtem stupňů volnosti n.
- Studentovo t-rozdělení:

$$f(t) \equiv \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$



- Parametr n opět vyjadřuje počet stupňů volnosti
- střední hodnota: $\mathrm{E} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = 0$
- disperze: $\mathrm{V} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{n}{n-2}$ (pro $n > 2$)

Boltzmannovo rozdělení

spojité náhodné veličiny

Příklad: dvouhladinový systém

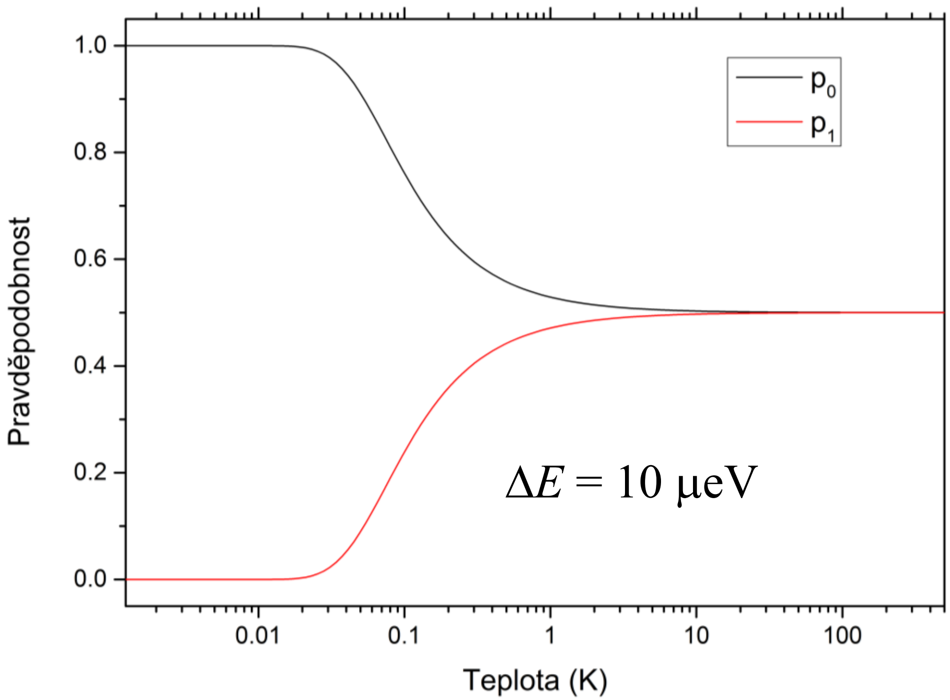
- mějme systém částic, které mohou zaujímat dva stavy (s různou E):

Jak jsou hladiny obsazeny při teplotě T?

E_1

$$N_i \sim e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

E_0



$$p_i = \frac{e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{\sum_j e^{-\frac{E_j}{k_B T}}}$$

Monte-Carlo simulace

Rozdělení pravděpodobnosti

- **diskrétní náhodná proměnná**
  - rovnoměrné rozdělení
  - binomické rozdělení
  - Poissonovo rozdělení

- **spojitá náhodná proměnná**
  - rovnoměrné rozdělení
  - Cauchyho rozdělení
  - normální (Gaussovo) rozdělení

  - χ^2-rozdělení
  - (Studentovo) t-rozdělení
  - Boltzmannovo rozdělení