Princip maximální věrohodnosti

• **Věrohodnostní funkce** náhodné veličiny:
Funkce je úměrná
pravděpodobnosti realizované hodnoty (pro diskrétní veličiny)
hustotě pravděpodobnosti (spojité veličiny).

• Parametry rozdělení/hustoty pravděpodobnosti **neznáme**, ale předpokládáme, že tato věrohodnostní funkce je na nich závislá.

• **Hledáme** takové hodnoty parametrů rozdělení,
ze kterých nejpravděpodobněji vyplývají realizované hodnoty,
tj. pro které je hodnota věrohodnostní funkce **největší**.

Princip max. věrohodnosti - odhad parametrů

- Příklad:

  Odhad parametru **binomického rozdělení** z jediného experimentu.

Hledáme tedy odhad (estimátor) pro pravděpodobnost realizace p

- známe počet realizací k při N pokusech

$$B_{N,k}(p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$ (věrohodnostní funkce)

Hledáme hodnotu $p = \tilde{p}$, pro niž je pravděpodobnost $B_{N,k}$ **maximální**.

$$\frac{\mathrm{d}B_{N,k}(p)}{\mathrm{d}p} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{p} = \frac{k}{N} \quad \rightarrow \quad \langle \tilde{p} \rangle = \frac{\langle k \rangle}{N} = p$$

střední hodnota odhadu = střední hodnotě veličiny → **nevychýlený** odhad

(nepředpojatý, nestranný, *unbiased estimate*)

Princip max. věrohodnosti - odhad parametrů

Odhad parametru **binomického rozdělení** z jediného experimentu.

• střední hodnota odhadu p: $\tilde{p} = \dfrac{k}{N} \quad \rightarrow \quad \langle \tilde{p} \rangle = \dfrac{\langle k \rangle}{N} = p$

• disperze odhadu p: $V(\tilde{p}) = \dfrac{1}{N^2} V(k)$

Pro posouzení kvality (přesnosti) odhadů zkoumáme jejich střední hodnoty:

• odhad střední hodnoty: $\langle \tilde{\mu} \rangle = N \langle \tilde{p} \rangle = Np = \mu$ nevychýlený odhad

• odhad disperze: $\langle \tilde{V}(k) \rangle = \dfrac{N-1}{N} V(k)$ **vychýlený** odhad

nevychýlený odhad disperze: $\tilde{V}^*(k) = \dfrac{N}{N-1} \tilde{V}(k) = V(k)$

Princip max. věrohodnosti - odhad parametrů

Odhad parametru **Poissonova rozdělení**: $\tilde{\nu} = k$ nevychýlený odhad

• odhad střední hodnoty: $\langle \tilde{\mu} \rangle = \tilde{\nu} = \mu$ nevychýlený odhad

• odhad disperze: $\left\langle \tilde{V}(k) \right\rangle = \tilde{\nu} = \mu$ nevychýlený odhad

Relativní nejistotu odhadu lze zlepšit zvýšením *k*:

$$\eta = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{V(k)}}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Obecně lze zlepšit odhad opakováním experimentu.

Opakování nezávislého experimentu

Odhad parametru **binomického rozdělení**

z n-krát <u>nezávisle</u> opakovaného experimentu.

Výsledkem opakovaného experimentu jsou hodnoty $k_1, k_2, ..., k_n$.

Pravděpodobnost takového výsledku: $P_{k_1, k_2, \ldots, k_n}(p) = \prod_{i=1}^{n} B_{k_i}(p)$

Opět z podmínky $\frac{\mathrm{d}P_{k_1, k_2, \ldots, k_n}(p)}{\mathrm{d}p} = 0$

získáme odhad p: $\tilde{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{N}$ srovn.: $\tilde{p} = \frac{k}{N}$ (pro 1 experiment)

Takový odhad je aritmetickým průměrem odhadů získaných z jediného experimentu.

$$\langle \tilde{p} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle k_i \rangle}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{Np}{N} = p$$ nevychýlený odhad

Opakování nezávislého experimentu

Binomické rozdělení: $$\tilde{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{N}$$

• odhad střední hodnoty: $\langle\tilde{\mu}\rangle = N\langle\tilde{p}\rangle = Np$ nevychýlený odhad

• odhad disperze: $\langle\tilde{V}(k)\rangle = N\langle\tilde{p}(1-\tilde{p})\rangle = \frac{nN-1}{nN}V(k)$ vychýlený odhad

podobně pro **Poissonovo rozdělení**: $$\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i$$

• odhad střední hodnoty: $\langle\tilde{\mu}\rangle = \tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i$ nevychýlený odhad

• odhad disperze: $\langle\tilde{V}(k)\rangle = \tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i$ nevychýlený odhad

Odhad parametrů normálního rozdělení

Normální rozdělení: $$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

n-krát opakujeme.

Věrohodnostní funkce: $$P_{x_1,x_2,\dots,x_n}(\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu,\sigma)$$

Řešením podmínek $$\frac{\mathrm{d}P_{x_1,x_2,\dots,x_n}(\mu,\sigma)}{\mathrm{d}\mu}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}P_{x_1,x_2,\dots,x_n}(\mu,\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=0$$

získáme odhady parametrů μ a σ:

$$\tilde{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\bar{x} \qquad \tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Lze opět spočítat odhad střední hodnoty a disperze.

Odhad parametrů normálního rozdělení

- odhad střední hodnoty: $\langle \tilde{\mu} \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle x_i \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle x \rangle = \bar{x} = \mu$ nevychýlený odhad
- odhad disperze: $\langle \tilde{V} \rangle = \langle \tilde{\sigma}^2 \rangle = \frac{n-1}{n} V(x)$ vychýlený odhad

→ nevychýlený odhad disperze: $\tilde{V}^* = \frac{n}{n-1}\tilde{V} = V, \quad S_x^2 \equiv \tilde{V}^*$

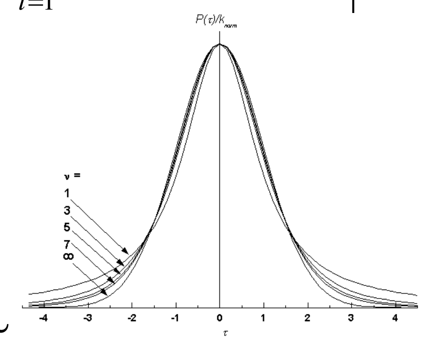
Výsledek měření veličiny x s normálním rozdělením bychom tedy mohli zapsat jako:

$$x = \tilde{\mu} \pm \tilde{\sigma}^* = \bar{x} \pm S_x$$

kde $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$

- interpretujeme: x leží s pravděpodobností P v intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

$$P = \int_{\mu_x - S_x}^{\mu_x + S_x} N\left(\mu_x, \sigma_x\right) \mathrm{d}x$$



? jak ale získat P, když neznáme μ, σ? .... známe pouze odhady: $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}$

tj. jak kompenzovat konečný počet měření? → Studentovo t-rozdělení

Odhad parametrů normálního rozdělení

- Studentovo t-rozdělení:
  - Náhodná veličina u má rozdělení $N(0,1)$.
  - Náhodná veličina v má rozdělení $\chi^2(n)$, normované počtem stupňů volnosti (n-1).

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

- Konstrukce u a v:

$$u \equiv \frac{\overline{x} - \mu_x}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}} \qquad v \equiv \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = (n-1)\frac{S_x^2}{\sigma_x^2}$$

→ veličina u má rozdělení N(0,1) → veličina v má rozdělení χ^2 s n-1 stupni volnosti

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{v}{n-1}}} = \frac{\overline{x} - \mu_x}{S_x}\sqrt{n} \qquad P = \int_{-t_P}^{t_P} f(t)\,\mathrm{d}t$$

→ veličina t má studentovo t-rozdělení s n-1 stupni volnosti

Hodnoty t_P pro různé pravděpodobnosti P a pro různé počty stupňů volnosti (n-1):

• Výsledek n-krát opakovaného měření veličiny x:

$$\boxed{x = \bar{x} \pm t_P \frac{S_x}{\sqrt{n}}}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

• S rostoucím počtem stupňů volnosti (n-1), tj. s rostoucím počtem opakování měření (n), se t_P blíží hodnotám pro normální rozdělení. (Důsledek CLV.)

• Zejména pro malé hodnoty n a vysokou P je korekce výrazná.

- tj. máme-li **malý počet měření**, musíme pro dosažení stejně velké pravděpodobnosti P volit **širší** interval výskytu okolo $\bar{x}$.

Stupeň volnosti (n-1)	Pravděpodobnost (P)					
	0.6827	0.9	0.95	0.9545	0.99	0.9973
	σ			2σ		3σ
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.80
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.63	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.70	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

Příklad - zpracování měření jedné veličiny

- Mikrometrem byla změřena tloušťka destičky, byly změřeny tyto hodnoty:

číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d (mm)	2,45	2,38	2,41	2,71	2,57	2,48	2,39	2,43	2,49	2,55

- Výsledek měření udejte:

  a) se *standardní odchylkou*

  b) s *mezní chybou*

(Vliv měřidla prozatím nezapočítáváme.)

Příklad - zpracování měření jedné veličiny

1) Spočítáme aritmetický průměr $\bar{d} = 2{,}486\,\text{mm}$,
2) Odchylky $d_i - \bar{d}$ jednotlivých hodnot.
3) Nevychýlený odhad standardní odchylky pro d_i:

$$S_d^2 = \frac{1}{n-1} V = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} \left(d_i - \bar{d}\right)^2$$

$$S_d = \sqrt{\frac{0{,}0920}{10-1}} = 0{,}101127 \cong 0{,}10\ \text{mm}$$

4) Vyloučíme hrubé chyby, $\left|d - \bar{d}\right| \geq "3\sigma"$

Koeficient t_P pro hladinu pravděpodobnosti 3σ (99,73%) a n-1 = 9:

$$t_{P=0{,}9973}^{3\sigma}(9) = 4{,}09 \quad \rightarrow \quad \left|d - \bar{d}\right| \geq 4{,}09 \cdot 0{,}10 = 0{,}41\ \text{mm}$$

5) Odhad standardní odchylky aritm. průměru $\bar{d}$:

$$S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} \cong 0{,}032\ \text{mm}$$

číslo měření	d (mm)	$d - \bar{d}$ (mm)	$\left(d - \bar{d}\right)^2$ (mm²)
1	2,45	-0,04	0,0013
2	2,38	-0,11	0,0112
3	2,41	-0,08	0,0058
4	2,71	0,22	0,0502
5	2,57	0,08	0,0071
6	2,48	-0,01	0,0000
7	2,39	-0,10	0,0092
8	2,43	-0,06	0,0031
9	2,49	0,00	0,0000
10	2,55	0,06	0,0041
$\bar{d}$ (mm)	2,486		
$\sum\left(d_i - \bar{d}\right)^2$			0,0920

Příklad - zpracování měření jedné veličiny

6) Spočítáme výslednou nejistotu (korigovanou pomocí t_P) jako:

a) **<u>standardní odchylku</u> aritmetického průměru**, P ~ 68.27 % (interval ± σ)

(též *směrodatná odchylka, střední kvadratická chyba*)

$$t^{\sigma}_{68,27\%}(9) = 1{,}06 \quad \rightarrow \quad u_d = 1{,}06 \cdot 0{,}032 \cong 0{,}034\ \text{mm}$$

b) **<u>mezní chybu</u> aritmetického průměru**, P ~ 99,73 % (interval ± 3σ)

$$t^{3\sigma}_{99,73\%}(9) = 4{,}09 \quad \rightarrow \quad u_d = 4{,}09 \cdot 0{,}032 \cong 0{,}131\ \text{mm}$$

7) Zaokrouhlení a zápis:

a) $d = \left(2{,}49 \pm 0{,}03\right)\text{mm},\ \ P = 68{,}27\%$

b) $d = \left(2{,}49 \pm 0{,}13\right)\text{mm},\ \ P = 99{,}73\%$