Rovnoměrné rozdělení

Rovnoměrné rozdělení *U*(*a*,*b*)

- náhodná proměnná se vyskytuje všude v intervalu (a,b) se stejnou pravděpodobností ale mimo tento interval nikdy

- hustota pravděpodobnosti

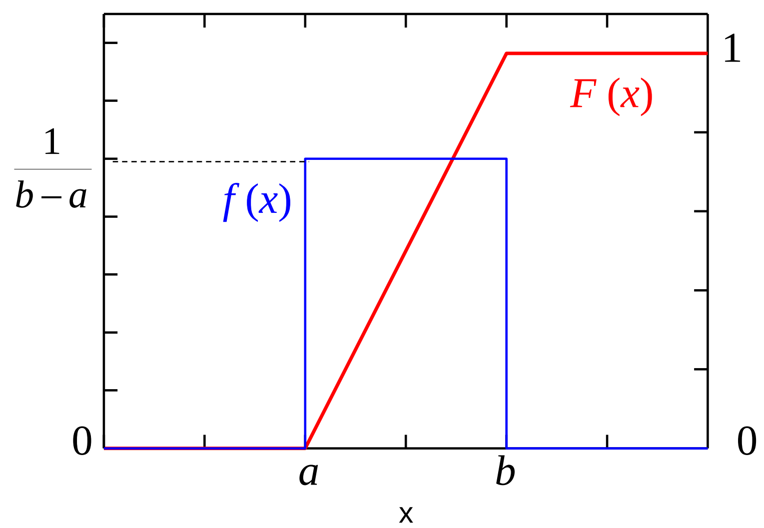
$$f(x|a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{pro } x\in\langle a,b\rangle\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

- distribuční funkce

$$F(x|a,b)=\begin{cases}0 & \text{pro } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pro } x\in\langle a,b\rangle\\ 1 & \text{pro } x>b\end{cases}$$

$$E[x]\equiv\mu=\frac{a+b}{2}$$

$$V[x]\equiv\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$



Normální Gaussovo rozdělení

Normální rozdělení $N\ (\mu, \sigma^2)$

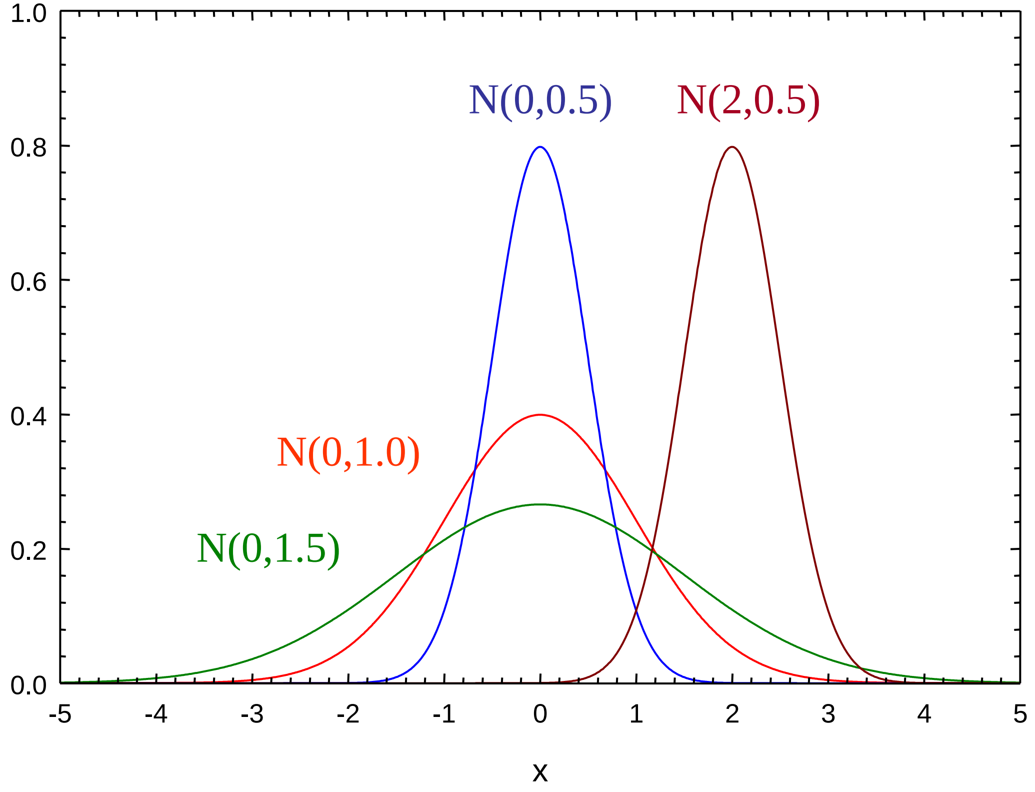
$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$E[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \mu$$

$$V[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \sigma^2$$

Normální Gaussovo rozdělení

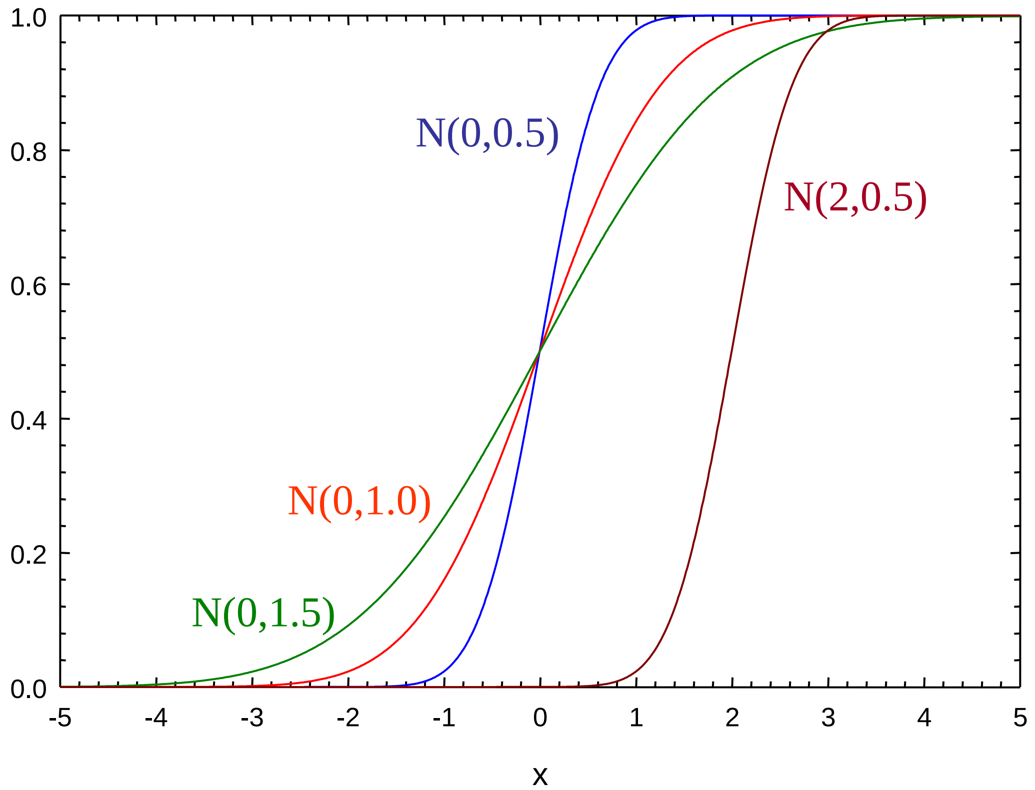
hustota pravděpodobnosti $$f\left(x|\mu,\sigma\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Normální Gaussovo rozdělení

Distribuční funkce $$F_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$ $$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

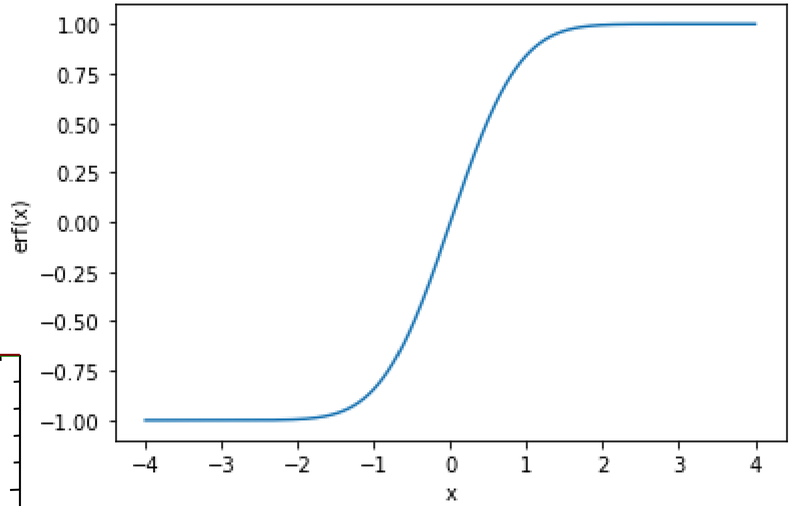
- error funkce: $$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

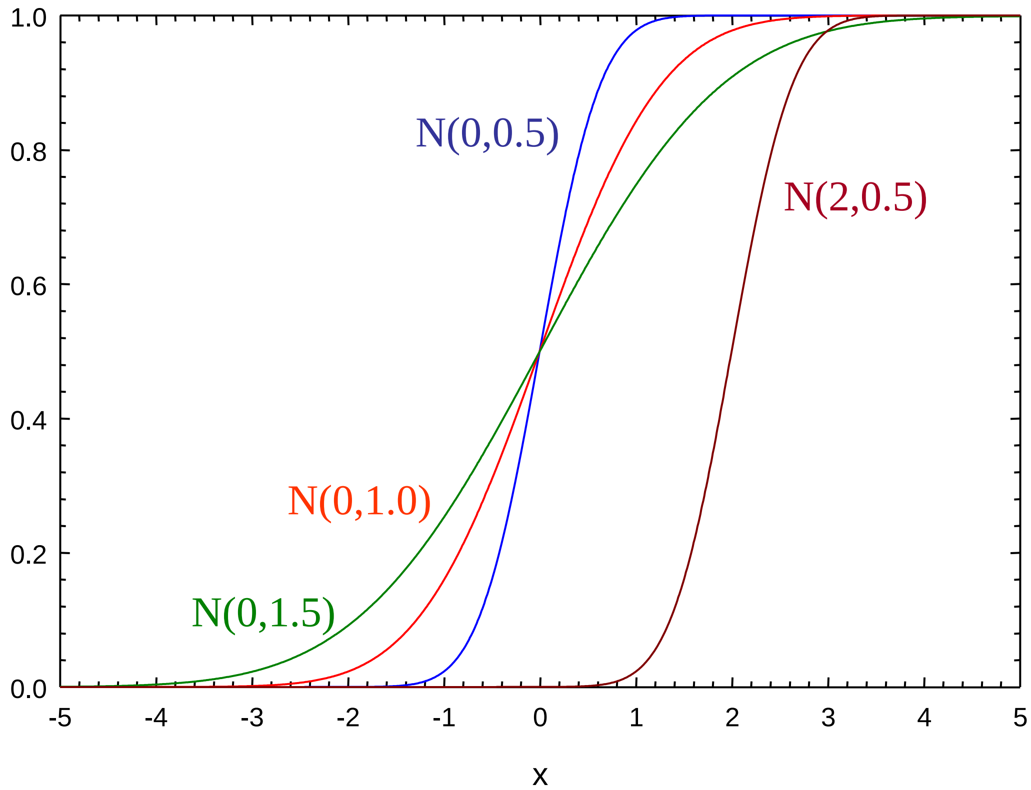


Normální Gaussovo rozdělení

Distribuční funkce $$F_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = F_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- error funkce: $$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt$$





výpočet error funkce:

např.

Excel: `erf(x)`

Matlab: `erf(x)`

Gnuplot: `erf(x)`

Python:

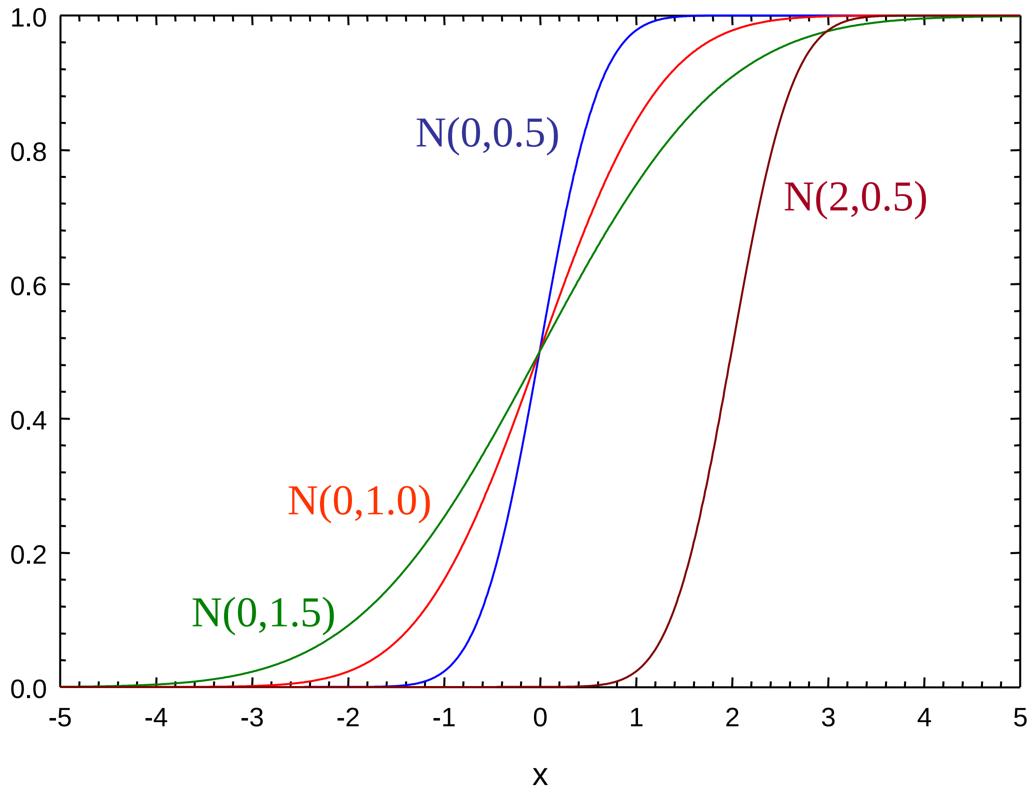
```
from scipy import special
special.erf(x)
```

Normální Gaussovo rozdělení

Distribuční funkce $$F_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- error funkce: $$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \longrightarrow F_{0,1}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$



výpočet error funkce:

např.

Excel: `erf(x)`

Matlab: `erf(x)`

Gnuplot: `erf(x)`

Python:

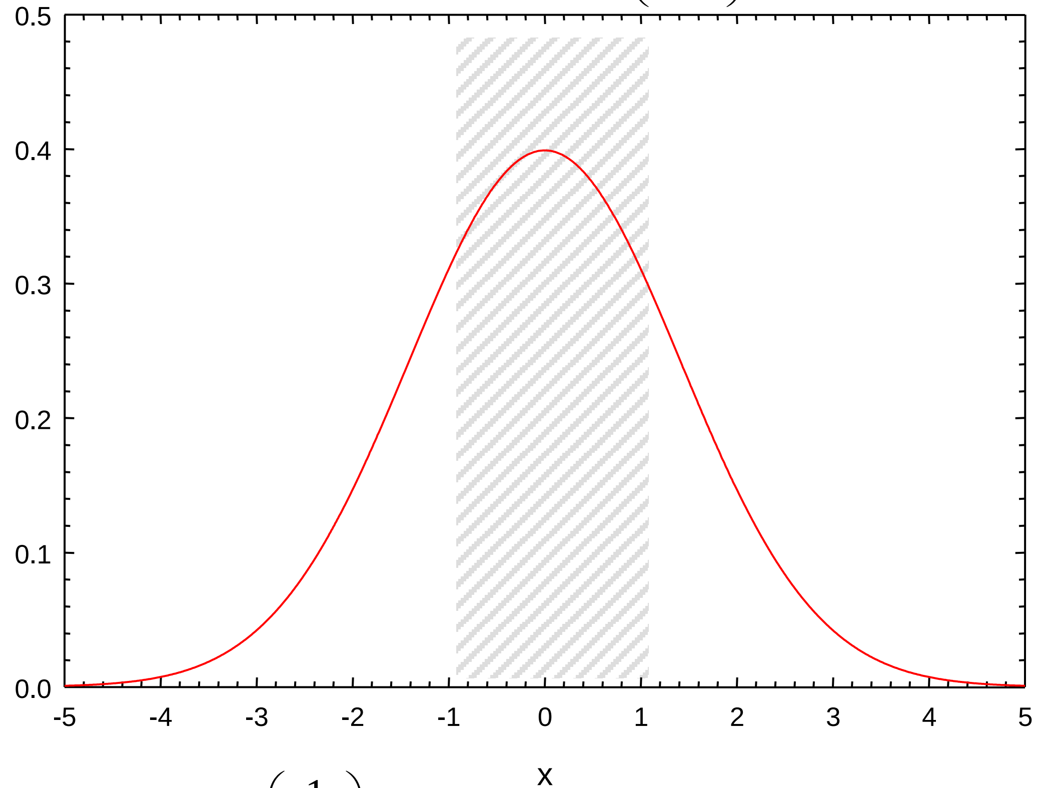
```
from scipy import special
special.erf(x)
```

Standardní Gaussovo rozdělení

$$y \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$N(\mu,\sigma) \rightarrow N(0,1)$$

$$N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



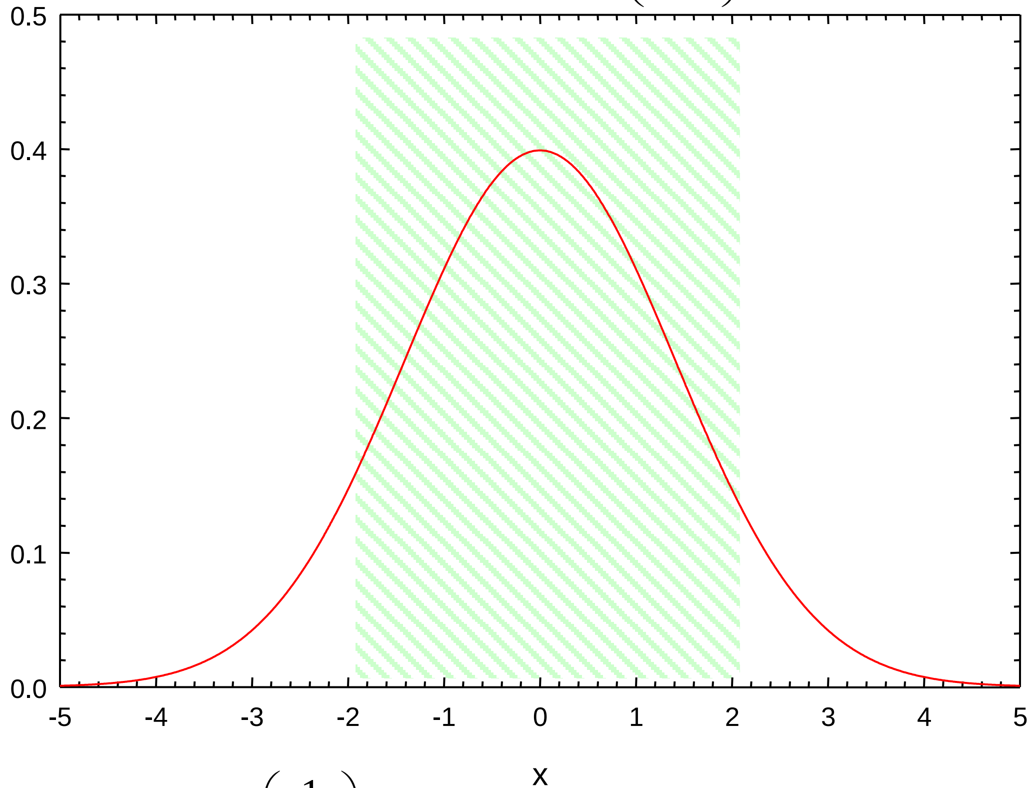
$$P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma) = F_{\mu,\sigma}(\mu+\sigma) - F_{\mu,\sigma}(\mu-\sigma) = erf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.683$$

Standardní Gaussovo rozdělení

$$y \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$N(\mu,\sigma) \rightarrow N(0,1)$$

$$N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



$$P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma) = F_{\mu,\sigma}(\mu+\sigma) - F_{\mu,\sigma}(\mu-\sigma) = erf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.683$$

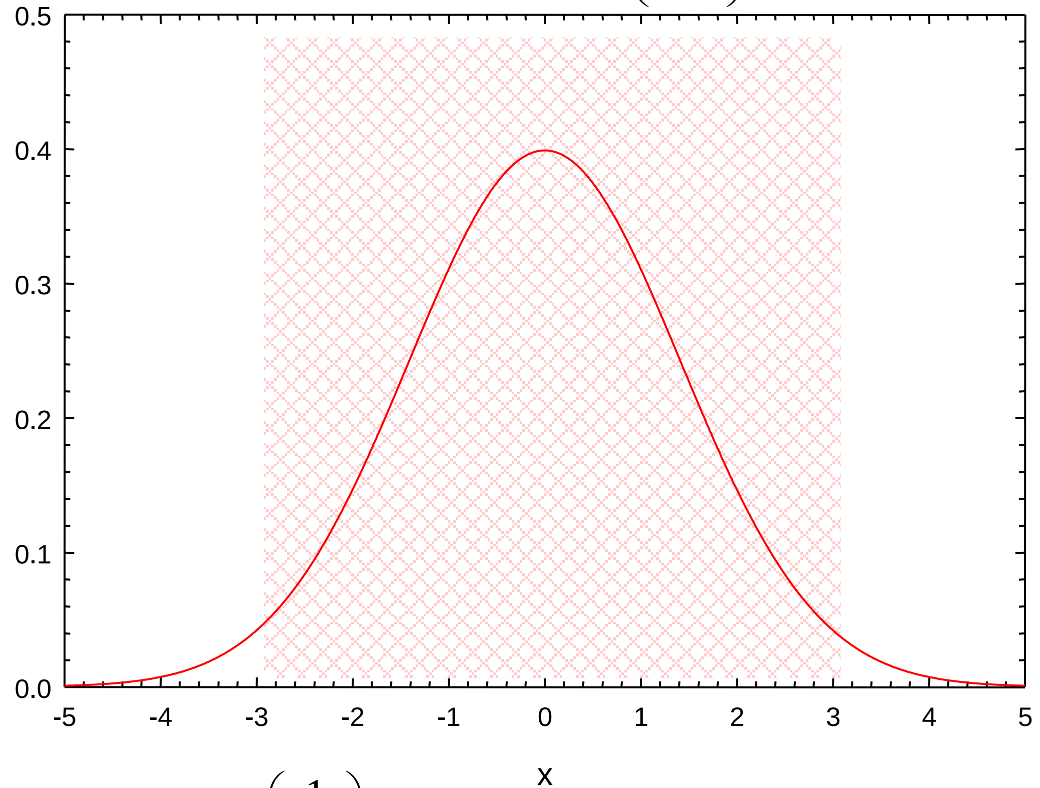
$$P(\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma) = F_{\mu,\sigma}(\mu+2\sigma) - F_{\mu,\sigma}(\mu-2\sigma) = erf\left(\sqrt{2}\right) = 0.955$$

Standardní Gaussovo rozdělení

$$y \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$N(\mu,\sigma) \to N(0,1)$$

$$N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



$$P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma) = F_{\mu,\sigma}(\mu+\sigma) - F_{\mu,\sigma}(\mu-\sigma) = erf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.683$$

$$P(\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma) = F_{\mu,\sigma}(\mu+2\sigma) - F_{\mu,\sigma}(\mu-2\sigma) = erf\left(\sqrt{2}\right) = 0.955$$

$$P(\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma) = F_{\mu,\sigma}(\mu+3\sigma) - F_{\mu,\sigma}(\mu-3\sigma) = erf\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.997$$

Normální Gaussovo rozdělení

zápisem výsledku měření ve tvaru $x = (\hat{\mu}_x \pm \hat{\sigma}_{C,x})\ [x]$

implicitně předpokládáme, že náhodná proměnná *x* má **normální rozdělení**,

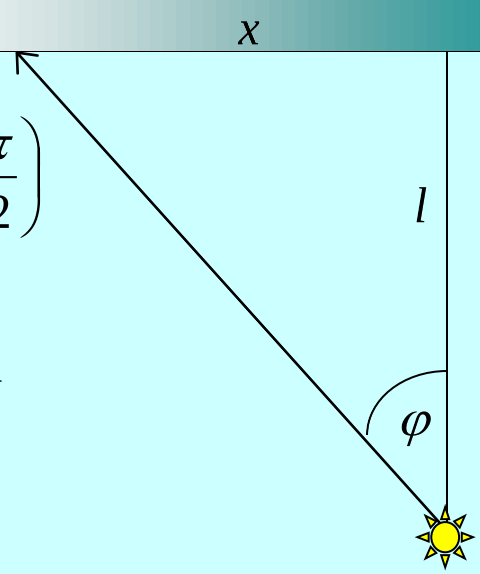
tj. $P\left(x \in \langle, \hat{\mu}_x - \hat{\sigma}_{C,x}, \hat{\mu}_x + \hat{\sigma}_{C,x} \rangle\right) \approx 0.683$

Cauchyho rozdělení

$$\varphi \in U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 1$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{\pi}$$



$$x = l \operatorname{tg} \varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$g(x) = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right| f(\varphi(x))$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{l}{l^2 + x^2}$$

Cauchyho rozdělení

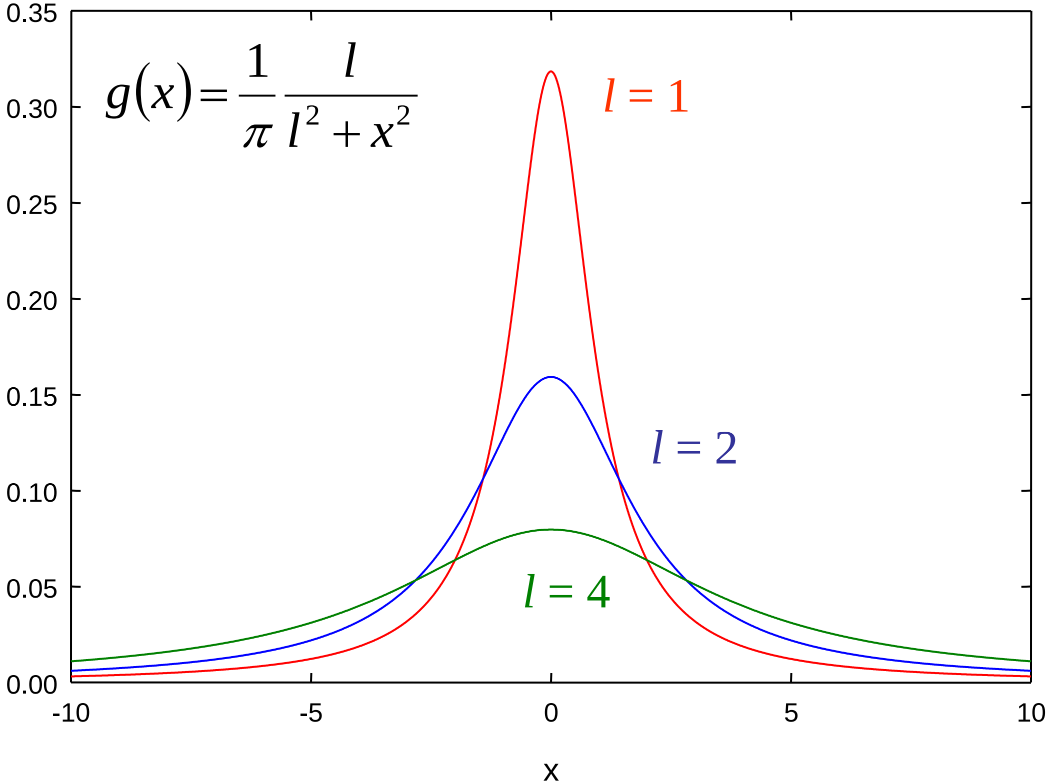
Cauchyho rozdělení

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{l}{l^2 + x^2}$$

$$\gamma = 2l$$

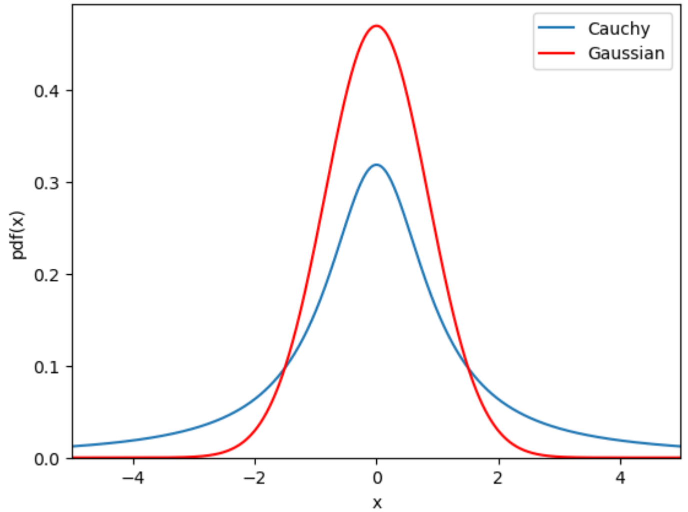
Breit-Wignerovo rozdělení

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{\gamma^2/4 + (x - x_0)^2}$$



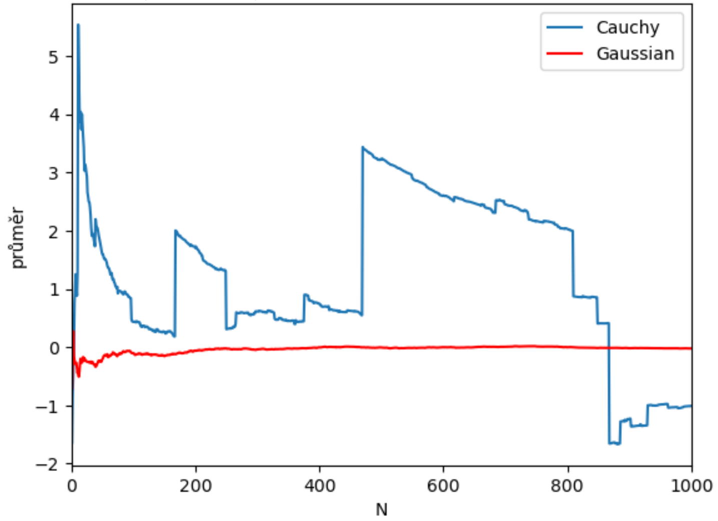
Cauchyho rozdělení

`cauchy-gauss.py`



Cauchyho rozdělení

Normální rozdělení
N (0,0.85)



- chování aritmetického průměru $\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

  v závislosti na počtu naměřených hodnot N

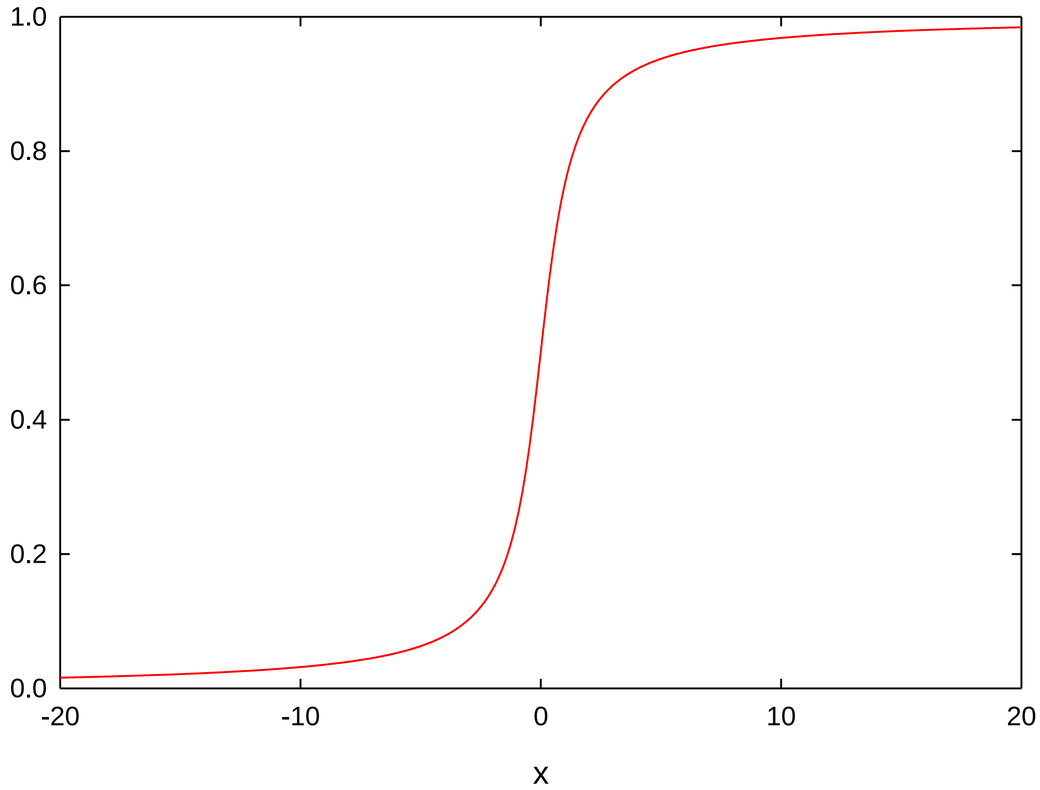
Cauchyho rozdělení

Distribuční funkce

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

medián: $F(x_m) = \frac{1}{2} \longrightarrow x_m = 0$



Cauchyho rozdělení

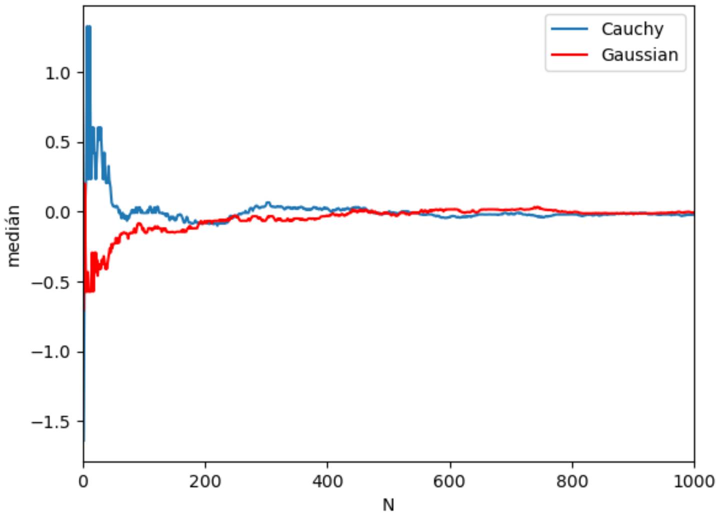
`cauchy-gauss.py`

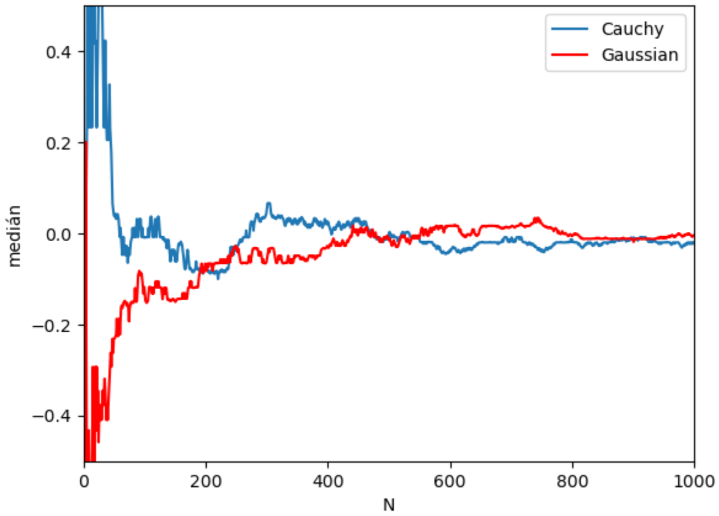
Cauchyho rozdělení

Normální rozdělení
N (0,0.85)

• chování mediánu

v závislosti na počtu naměřených hodnot *N*





Centrální limitní věta

- x_i náhodná proměnná s hustotou pravděpodobnosti $f_i(x)$
- x_i nezávislé

$$E[x_i] = \mu_i \qquad V[x_i] = \sigma_i^2$$

$$y = \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \text{pro } N \to \infty \text{ je } y \in N\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i, \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2\right)$$

$$\frac{y - \sum_{i=1}^{N} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2}} \to N(0,1)$$

Centrální limitní věta

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$x_i \in U(0,1)$$