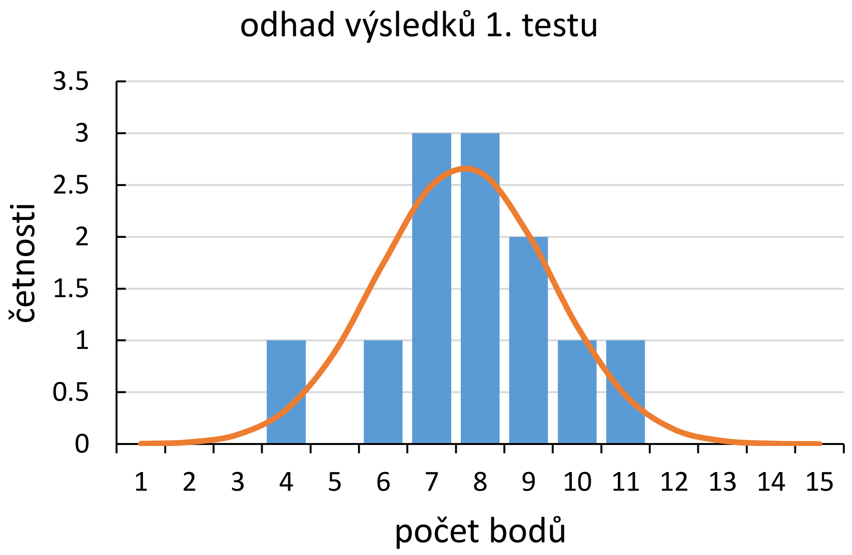
Centrální limitní věta – výsledky testu

- odhad průměrného počtu bodů z testu 5. 12. 11:30

tipované hodnoty
8.3
9
8
7
9.5
11
7
8
7.6
6.5
6
4



histogram hodnot

- očekávaná hodnota 7.83
- rozptyl 3.14 (1.77^2)
- šikmost - 0.29
- špičatost 0.002

normální rozdělení

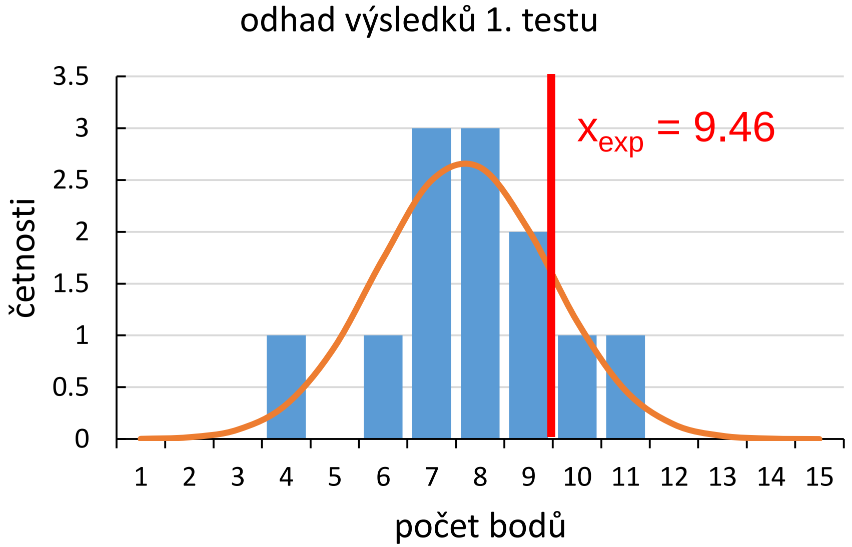
$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- odhad μ 7.66
- odhad σ 1.79

Centrální limitní věta – výsledky testu

- odhad průměrného počtu bodů z testu 5. 12. 11:30

tipované hodnoty
8.3
9
8
7
9.5
11
7
8
7.6
6.5
6
4



normální rozdělení

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- odhad μ 7.66
- odhad σ 1.79

experiment

- průměrný počet bodů 9.46
- pravděpodobnost 31.5 %

$$P(x \geq x_{exp}) = 1 - F(x_{exp}|\mu,\sigma) = 1 - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x_{exp}-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$P(|x-\mu| \geq |x_{exp}-\mu|) = 2P(x \geq x_{exp}) = 31.5\ \%$$

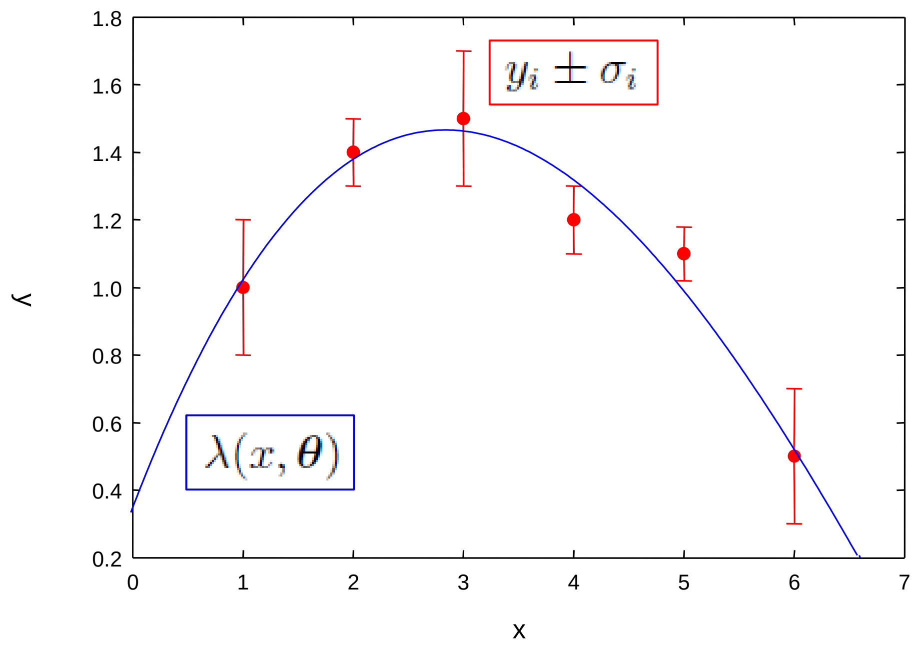
Metoda nejmenších čtverců

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – nezávislé proměnné

  $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – závislé proměnné $y_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$

- modelová funkce $\lambda(x, \boldsymbol{\theta})$ – modelujeme závislost $y(x)$

  $\boldsymbol{\theta} = \theta_1, \theta_2, ...\theta_m$ – parametry modelové závislosti



Metoda nejmenších čtverců

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – nezávislé proměnné

  $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – závislé proměnné $y_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$

- modelová funkce $\lambda(x, \boldsymbol{\theta})$ – modelujeme závislost $y(x)$

  $\boldsymbol{\theta} = \theta_1, \theta_2, ...\theta_m$ – parametry modelové závislosti

- věrohodnostní funkce

$$L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left[-\frac{(y_i - \lambda(x_i|\boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma_i^2}\right]$$

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \lambda(x_i|\boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \ln\sqrt{2\pi\sigma_i^2}$$

- minimalizujeme tzv. „chí kvadrát“

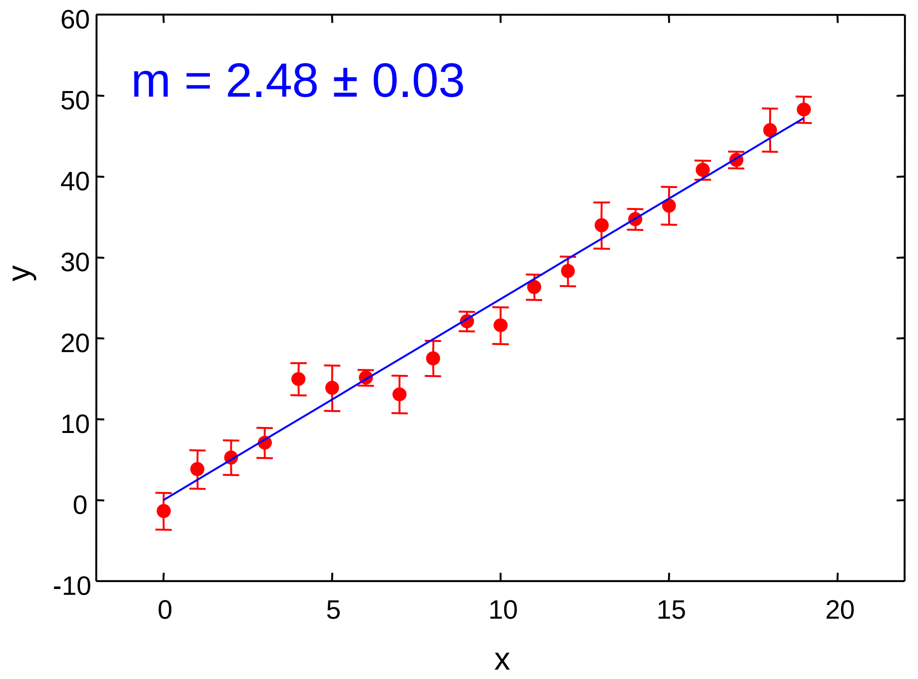
$$\boxed{\chi^2(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \lambda(x_i|\boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2}}$$

Metoda nejmenších čtverců – lineární fit $\quad y = m\,x$

- modelová funkce $\quad \lambda(x|m) = mx$
- „chí kvadrát“ $\quad \chi^2(m|\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - mx_i)^2}{\sigma_i^2}$
- lineární regrese

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}$$

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} = \frac{1}{\langle x^2 \rangle}$$



- označení $\quad \langle a \rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sigma_i^2}$