Seminární úlohy 5

1. 2. Diskrétní náhodná proměnná *k* může nabývat hodnot všech přirozených čísel a má rozdělení popsané posloupností pravděpodobností

$$P_k = \frac{1}{e\,k!} \quad .$$

Vypočítejte střední hodnotu μ a standardní odchylku σ této náhodné proměnné. Jaká je pravděpodonost, že $k > 4$?

Řešení:

Nejprve ověříme, že pravděpodobnosti jsou normované, tj. že platí $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$

Pokud použijeme Taylorův rozvoj exponenciální funkce $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, tak dostáváme

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e\,k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{e} e = 1.$$

Střední hodnota je:

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{e\,k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{e}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{e}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{m!} - 1\right) = \frac{1}{e}(e-1) = 1 - e^{-1} \approx 0.632,$$

kde index $m \equiv k-1$.

Pro výpočet rozptylu použijeme vztah $\sigma^2 = E[k^2] - \mu^2$.

$$E[k^2] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{e\,k!} = \frac{1}{e}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!}\right) = \frac{1}{e}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\right) = \frac{1}{e}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\right) =$$

$$= \frac{1}{e}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} - 1\right) = \frac{1}{e}(e - 2 + e - 1) = 2 - 3e^{-1} \approx 0.896,$$

kde index $n \equiv k-2$ a $m \equiv k-1$.

Rozptyl je tedy $\sigma^2 = 2 - 3e^{-1} - \left(1 - e^{-1}\right)^2 = 1 - e^{-1} - e^{-2}$.

Standardní odchylka je $\sigma = \sqrt{1 - e^{-1} - e^{-2}} \approx 0.705$.

Pravděpodobnost, že $k > 4$ je $P(k > 4) = 1 - P(k \le 4) = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) \approx 0.0037.$

2. Pozitron je antičástice elektronu. Pokud se setká elektron a pozitron dojde k anihilaci a obě částice se změní na záření. Nejčastěji (v 99.27 % případech) dojde ke změně anihilujího páru elektron-pozitron na dva fotony. Zbylé vzácné případy odpovídají tří-fotonové anihilaci. Kolik opakovaných měření pozitronové anihilace je nutné provést aby pravděpodobnost, že v naměřené sadě dat bude aspoň jedna tří-fotoná anihilace byla 0.99 ? (návod: použijte binomické rozdělení).

Řešení:

Pravděpodobnost 3-fotonové anihilace je $p = 1 - 0.9927 = 0.0073$.
Označme $P(k)$ pravděpodobnost, že v naměřené sadě N dat bude k tří-fotonových anihilací.Tato pravděpodobnost se řídí binomickým rozdělením

$$P(k|N,p) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Pravděpodobnost, že v sadě N naměřených hodnot nebude žádná tří-fotonová událost je $P(0|N,p) = (1-p)^N$. Hledaná pravděpodobnost, že v sadě naměřených N naměřených hodnot bude aspoň 1 tří-fotonová anihilace je doplněk k pravděpodobnosti $P(0|N,p)$.

Tedy

$$1 - P(0|N,p) = 0.99$$

$$(1-p)^N = 1 - 0.99$$

$$N = \frac{\ln 0.01}{\ln(1-p)} = \frac{\ln 0.01}{\ln 0.9927} \approx 629.$$