Seminární úlohy 4

1. Vypočítejte **střední hodnotu** a **rozptyl** diskrétní náhodné veličiny *k* s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu $1 \le k \le n$. Vypočítejte totéž pro spojitou náhodnou veličinu *x* s rovnoměrnou hustotou pravděpodobnosti na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Řešení:
Pro diskrétní proměnnou využijeme vzorců pro součet prvních *n* přirozených čísel, resp. prvních *n* čtverců přirozených čísel:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pravděpodobnost *p* je na intervalu $1 \le k \le n$ konstantní, a jak vyplývá z normovací podmínky $\sum_{k=1}^{n} p = np$, je $p = \frac{1}{n}$.
Střední hodnotu tedy spočteme z definice jako:

$$E(k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2}\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Podobně rozptyl:

$$V(k) = \sum_{k=1}^{n} (k - E(k))^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (k^2 - (E(k))^2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

Pro spojitou veličinu máme konstantní pravděpodobnost $p = \frac{1}{b-a}$ a integrujeme:

$$E(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$V(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2\frac{a+b}{2} + x\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. Jednorozměrná náhodná procházka (random walk) je pohyb po přímce po krocích $\pm L$ s pravděpodobností *p* pro pohyb jedním směrem a (1-*p*) pro pohyb opačným směrem. Vypočítejte, jaká bude po *N* krocích **střední hodnota polohy** a **střední hodnota čtverce vzdálenosti od počátku**. Vyjádřete obecně pro pravděpodobnost *p*, a také pro speciální případ *p* = ½.

Řešení:
Poloha *x* je tak dána součtem kroků doprava a doleva s příslušnou velikostí kroků $\pm L$:
$x = N_{\rightarrow}L + N_{\leftarrow}(-L) = N_{\rightarrow}L + (N - N_{\rightarrow})(-L) = L(2N_{\rightarrow} - N)$

Protože počet kroků doprava $N_{\rightarrow}$ je binomicky rozdělená náhodná veličina s pravděpodobností *p* a celovým počtem pokusů *N*, tj. $B(N_{\rightarrow}, N, p)$, je její střední hodnota a rozptyl rovna Np, resp. $Np(1-p)$.

Potom pro střední hodnotu polohy získáváme:

$$\langle x \rangle = \langle L(2N_{\rightarrow} - N) \rangle = 2L\langle N_{\rightarrow} \rangle - LN = NL(2p-1)$$

Rozptyl spočítáme podobně, využijeme $\langle (N_{\rightarrow})^2 \rangle = V(N_{\rightarrow}) + \langle N_{\rightarrow} \rangle^2 = Np(1-p) + N^2p^2$:

$$\begin{aligned}
V(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 &= \langle L^2(2N_{\rightarrow} - N)^2 \rangle - N^2L^2(2p-1)^2 \\
&= L^2(4\langle N_{\rightarrow} \rangle^2 - 4N\langle N_{\rightarrow} \rangle + N^2) - N^2L^2(2p-1)^2 \\
&= L^2(4(V(N_{\rightarrow}) + \langle N_{\rightarrow} \rangle^2) - 4N\langle N_{\rightarrow} \rangle + N^2) - N^2L^2(2p-1)^2 \\
&= L^2(4Np(1-p) + 4N^2p^2 - 4NNp + N^2 - N^2(2p-1)^2) \\
&= L^2(4Np(1-p) + N^2(2p-1)^2 - N^2(2p-1)^2) = \\
&= 4NL^2p(1-p)
\end{aligned}$$

Pro *p* = ½ je $\langle x \rangle_{p=0.5} = 0$, a v průměru stále zůstává na počátku.
Dále $V(x)_{p=0.5} = NL^2$, takže po N krocích se v průměru zatoulá do vzdálenosti $\sigma_{p=0.5} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{N}L$.