Seminární úlohy 9

1. Bylo naměřeno následujících 10 hodnot náhodné proměnné x: 10.1, 5.5, 11.2, 13.1, 9.0, 4.4, 6.9, 8.7, 14.9,6.2. Předpokládáme, že náhodná proměnná x má rovnoměrné rozdělení na intervalu (a,b). Pomocí metody maximální věrohodnosti vypočítejte odhad parametrů a, b tohoto rozdělení, odhad očekávané hodnoty a rozptylu této náhodné proměnné.

Řešení:

Náhodná proměnná x je výběrem z rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \frac{1}{b-a}$ pro $x \in \langle a,b \rangle$ a $f(x) = 0$ pro $x \notin \langle a,b \rangle$. Věrodnostní funkce je tedy $L = \frac{1}{(b-a)^n}$. Maximální hodnoty nabývá věrodnostní funkce pro a a b co nejblíže k sobě. Ale protože pravděpodobnost, že jakákoliv naměřená hodnota padne mimo interval $\langle a,b \rangle$ je nula, musí být $a \leq x_{\min}$ a $b \geq x_{\max}$, kde $x_{\min}$ je nejmenší a $x_{\max}$ největší naměřená hodnota. Největší možnou hodnotu věrohodnostní funkce dostáneme pro $a = x_{\min}$ a $b = x_{\max}$. Tedy $a = 4.4$ a $b = 14.9$.
Očekávaná hodnota rovnoměrného rozdělení je $\mu = \frac{a+b}{2} = 9.7$. Rozptyl je $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = 9.2$.

2. Při měření aktivity radioaktivního zářiče byl měřen počet rozpadů za 1 min. Bylo provedeno 20 měření a získány následující hodnoty počtu rozpadů:
39601, 39795, 39424, 39997, 39683, 39740, 39589, 39710, 39607, 39761, 39650, 39484, 39469, 39911, 39445, 39147, 39931, 39442, 39307, 39308
Pomocí metody maximální pravděpodobnosti nalezněte odhad aktivity zářiče. Účinnost detekce záření uvažujte 30%.

Řešení:
Počet rozpadů k zářiče za 1 min je náhodná proměnná s Poissonovým rozdělením

$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!}.$$

Věrohodnostní funkce je $L(\nu|\mathbf{k}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\nu^{k_i}}{k_i!} e^{-\nu}$, kde N je počet naměřených hodnot. Logaritmus věrohodnostní funkce je $\ln L(\nu|\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{N} k_i \ln \nu - N\nu - \sum_{i=1}^{N} \ln k_i!$

$$\frac{d \ln L}{d\nu} = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{\nu} - N.$$

Podmínka pro extrém funkce ln L je

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{\nu} - N = 0.$$

Dostaneme $\nu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i$, tj. aritmetický průměr naměřených hodnot počtu rozpadů. Pro konkrétní naměřené hodnoty dostáváme $\nu = 2200$ min^{-1}. Aktivita A je počet rozpadů zářiče za 1 s. Protože detektor má účinnost 30% je $A = 2200 / (60 \times 0.3) = 2200$ Bq.

3. Při opakovaném měření hmotnosti bylo získáno následujících 6 hodnot: 12.1 mg, 12.8 mg, 12.6 mg, 12.3 mg, 12.4 mg, 12.8 mg. Pomocí metody maximální věrohodnosti nalezněte odhad očekávané hodnoty hmotnosti vzorku, chybu odhadu očekávané hodnoty a odhad chyby jednoho měření. Jaká je pravděpodobnost, že při jednom měření naměříme hmotnost větší než 13 mg? Předpokládáme, že měřená náhodná proměnná má normální rozdělení.

Řešení:

Věrohodnostní funkce je

$$L(\mu,\sigma|\{x\}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],$$

$$\ln L(\mu,\sigma|\{x\}) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - N\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i-\mu}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{N}{\sigma}$$

Položíme derivace rovné nule a dostáváme $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ a $\hat{\sigma} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$.

U odhadu chyby jednoho měření $\hat{\sigma}$ zkorigujeme předpojatost. Nepředpojatý odhad je

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$$

Pro konkrétní naměřené hodnoty dostaneme $\hat{\mu} = 12.50$ mg, $\hat{\sigma} = 0.28$ mg.

Chyba odhadu $\hat{\mu}$ (tj. aritmetického průměru) je $\sigma_{\hat{\mu}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} = 0.12$ mg.

Tedy hmotnost vzorku zjištěná měřením je (12.50 ± 0.12) mg.

Pravděpodobnost, že naměříme hodnotu větší než 13 mg je

$$P(x > 13\ \text{mg}) = 1 - F_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}(13\ \text{mg}) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{13-12.5}{0.28\sqrt{2}}\right)\right) = 3.7\ \%$$