Řešení Test č. 1 středa 16. 11. 2022 15 bodů

Úloha 1. (6 bodů) Potřebujete měřit elektrické napětí a máte k dispozici digitální voltmetr se čtyřmístným displejem a výrobcem udanou přesností (maximální chybou): ± (0.3 % + 1 dgt).

2 b. - Vypočítejte standardní nejistotu měření napětí, odečítáte-li na displeji hodnotu 12.34 V.

2 b. - Totéž spočtěte pro případ, že na tomto přístroji praskl displej a poslední číslici nelze přečíst (vypočítejte příslušnou zaokrouhlovací chybu, které se dopouštíte zanedbáním poslední číslice)

2 b. - Spočítejte, jestli ono nakonec místo rozbitého přístroje nebude lepší použít starý ručkový voltmetr s třídou přesnosti 0.5 a rozsahem 15 V.

Řešení:
a) Digitální přístroj má výrobcem udanou maximální chybu:

$$\Delta = 0.003 \cdot 12.34\ \mathrm{V} + 1 \cdot 0.01\ \mathrm{V} = 0.04702\ \mathrm{V},$$

standardní nejistota měření tedy bude:

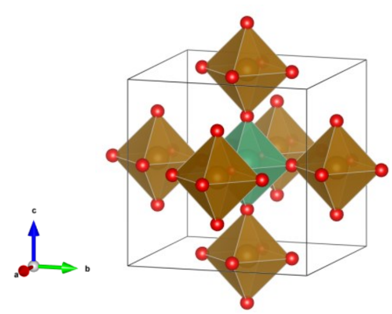
$$\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \cong 0.027\ \mathrm{V}.$$

b) Nyní na displeji vidíme jen 12.3 V, přístroj tak naměřil něco mezi 12.3 a 12.4. Průměrnou nejistotu z toho, že neznáme poslední číslici, tak můžeme vyjádřit jako 0.05 V. Tuhle chybu přičteme k chybě z minulé části a můžeme psát, že U = 12.35 ± 0.08, přičemž jsme střední hodnotu umístili uprostřed možných hodnot.
c) Chybu ručkového přístroje spočítáme z rozsahu R a třídy přesnosti P jako:

$$\sigma_\mathrm{r} = \frac{RP}{100\sqrt{3}} = \frac{0.5 \cdot 15}{100\sqrt{3}} = 0.043\ \mathrm{V},$$

což je menší chyba 0.08 V, takže bude vhodnější ručkový přístroj než digitální s rozbitým displejem.

Úloha 2. (5 bodů) V perovskitu $Ba(FeNb)_{0.5}O_3$ obsazují atomy železa i niobu stejný typ krystalových poloh (kyslíkový oktaedr) a obsazují je zcela náhodně se stejnou pravděpodobností. Každý takový oktaedr je v této struktuře obklopen šesti jinými oktaedry, které jsou co do symetrie zcela ekvivalentní (tj. jsou stejně daleko, stejně natočeny apod.) a které jsou opět obsazeny náhodně buď atomem Fe nebo Nb – viz schematické znázornění na obrázku (atomy baria a některé atomy Fe/Nb/O pro přehlednost nevykresleny).



2 b. - Spočítejte pro daný oktaedr uprostřed (na obrázku zelený, je jedno jestli v něm zrovna sedí Fe nebo Nb), kolik různých kombinací počtu sousedních Fe a Nb ve svém nejbližším okolí může mít. Které z těchto kombinací jsou nejčetnější?

3 b. - Aby se magnetické momenty Fe atomů se ve struktuře mohly spontánně uspořádat, musí mezi nimi působit silné výměnné interakce, což zde znamená, že spolu jejich oktaedry musí v krystalu přímo sousedit (tj. sdílejí spolu kyslíkový atom – na obrázku červený) a tvořit tak rozlehlou síť těchto interakcí. Nechť je daný oktaedr (např. ten zelený na obrázku) obsazen Fe, jaká je pravděpodobnost, že bude součástí takové sítě, tj. že bude mít aspoň dvě interakce s Fe v okolních oktaedrech? A naopak,

spočítejte pravděpodobnost, že ten Fe bude zcela izolovaný, tj. bez jediného atomu Fe v sousedních oktaedrech.

Řešení:

a) V šesti oktaedrech nejbližšího okolí se může nacházet $n_{\mathrm{Fe}} = 0$ až 6 atomů Fe (a tedy $6 - n_{\mathrm{Fe}}$ atomů Nb), různých kombinací jejich počtu je tedy 7. Je-li pravděpodobnost obsazení oktaedru stejná pro Fe i Nb, je $p = 0.5$, a pravděpodobnost jednotlivých poměrů z binomického rozdělení je:

$n_{\mathrm{Fe}} : n_{\mathrm{Nb}} = 0 : 6 \dots\ B(6, 0, 0.5) = \binom{6}{0} 0.5^0 (1 - 0.5)^6 = 0.5^6$ a podobně pro ostatní kombinace,

obecně $B(6, n_{\mathrm{Fe}}, 0.5) = \binom{6}{n_{\mathrm{Fe}}} p^{n_{\mathrm{Fe}}} (1-p)^{6-n_{\mathrm{Fe}}} = \binom{6}{n_{\mathrm{Fe}}} p^6$.

Nejčetnější tedy bude kombinace s největším kombinačním číslem, což je $\binom{6}{3}$ pro poměr 3 : 3.

b) Máme-li oktaedr obsazený Fe, tak pravděpodobnost P_2, že bude součástí sítě interakcí je dána (binomickou) pravděpodobností, že má z těch svých 6 sousedů alespoň 2 Fe, tedy:

$$P_2 = \sum_{k=2}^{6} B(n,k,p) = 1 - \sum_{k=0}^{1} B(n,k,p) = 1 - \binom{6}{0} p^0 (1-p)^6 - \binom{6}{1} p^1 (1-p)^5$$

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2^6} - \frac{6}{2^6} \cong 0.89$$

Podobně spočteme, že v okolí nebude ani jeden atom Fe:

$$P_0 = \binom{6}{0} p^0 (1-p)^6 \cong 0.016$$

Úloha 3. (4 body) Geigerův-Müllerův detektor umístěný v blízkosti radioaktivního vzorku cesia (obsahující isotop ^{137}Cs) naměřil během jedné hodiny 5 184 událostí – rozpadů β^-. Radionuklid ^{137}Cs má dlouhý poločas rozpadu (cca 30 let) a vzorek obsahuje obrovské množství těchto radioaktivních jader.

1+1 b. - Jaký je očekávaný počet událostí za sekundu? Jaká je standardní odchylka?

2 b. - Vypočítejte pravděpodobnost, že během jedné sekundy nedetekujeme ani jednu událost.

Řešení:

a) Aplikujeme Poissonovo rozdělení $P(k,\mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$.

Detektor naměřil za jednu sekundu v průměru $\frac{5184}{3600} = 1.44$ událostí, střední hodnota a tedy i parametr Poissonova rozdělení $\mu = 1.44$. Standardní odchylka je odmocninou z disperze, která je rovna také parametru μ, takže standardní odchylka $\sigma = \sqrt{\mu} = 1.2$ událostí.

b) Dosadíme do poissonovské pravděpodobnosti počet událostí 0, tedy:

$$P(0, 1.44) = \frac{1.44^0 e^{-1.44}}{0!} \cong 0.237$$