

# Rovnoměrné rozdělení

## Rovnoměrné rozdělení $U(a, b)$

- náhodná proměnná se vyskytuje všude v intervalu  $[a, b]$  se stejnou pravděpodobností, mimo tento interval se nevyskytuje nikdy
- hustota pravděpodobnosti

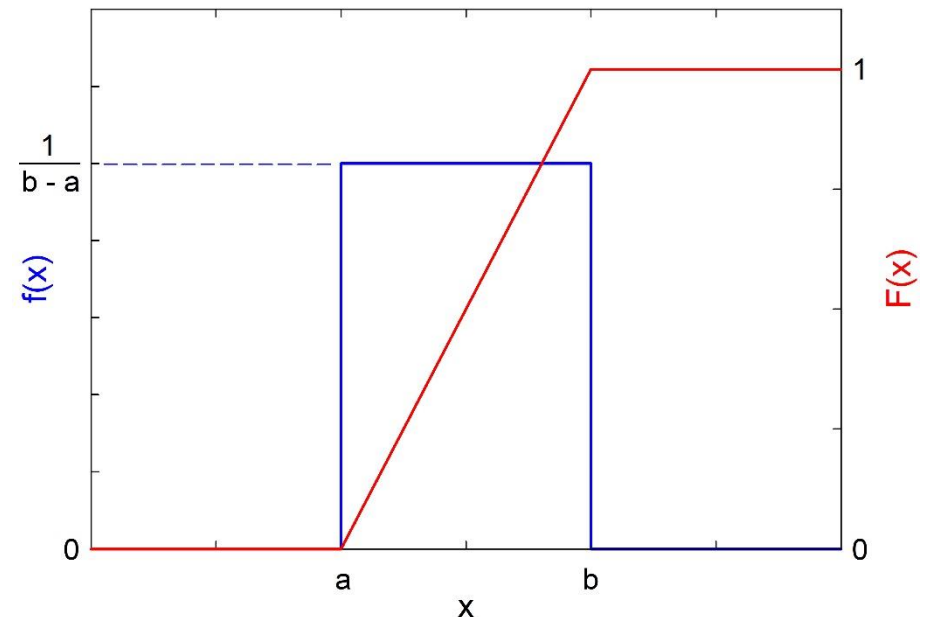
$$f(x|a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in [a, b] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- distribuční funkce

$$F(x|a, b) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in [a, b] \\ 1 & \text{pro } x > b \end{cases}$$

$$E[x] \equiv \mu = \frac{a+b}{2}$$

$$V[x] \equiv \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



# Normální (Gaussovo) rozdělení

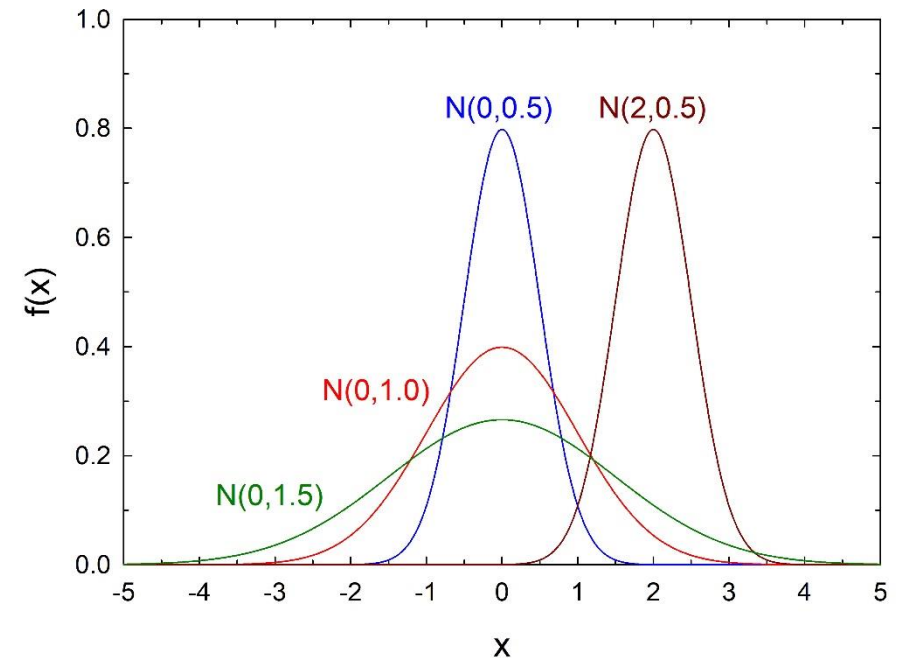
## Jednorozměrné Gaussovo rozdělení $N(\mu, \sigma)$

- hustota pravděpodobnosti

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$E[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu$$

$$V[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma^2$$



# Normální (Gaussovo) rozdělení

## Jednorozměrné Gaussovo rozdělení $N(\mu, \sigma)$

- distribuční funkce

$$F(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

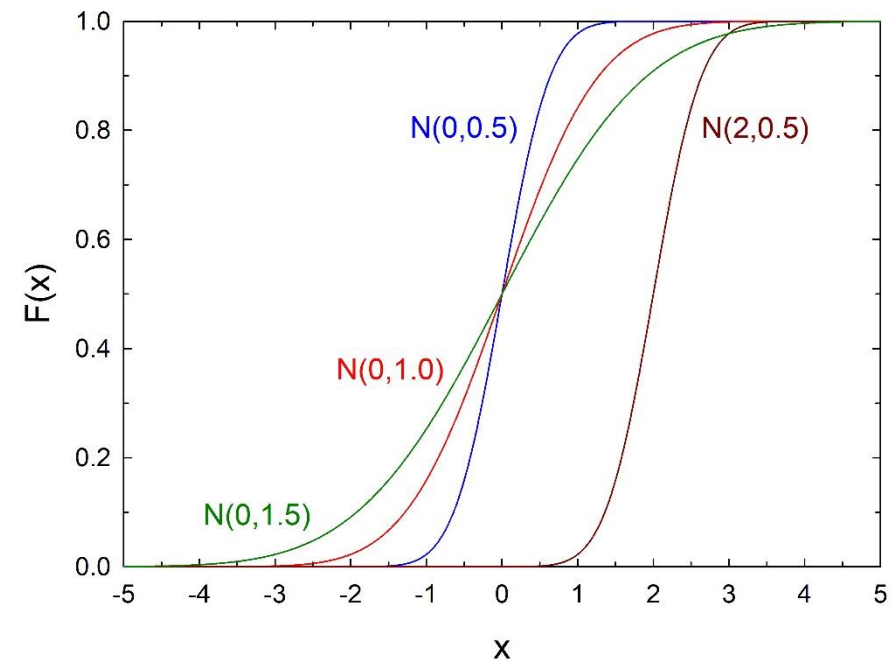
- error funkce

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$F(x|0,1) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$F(x|\mu, \sigma) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \middle| 0,1\right)$$

$$F(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$



výpočet error funkce:

Excel	<code>erf(x)</code>
ROOT	<code>ROOT::Math::erf(x)</code>
Matlab	<code>erf(x)</code>
Gnuplot	<code>erf(x)</code>
Python	<code>from scipy import special</code> <code>special.erf(x)</code>

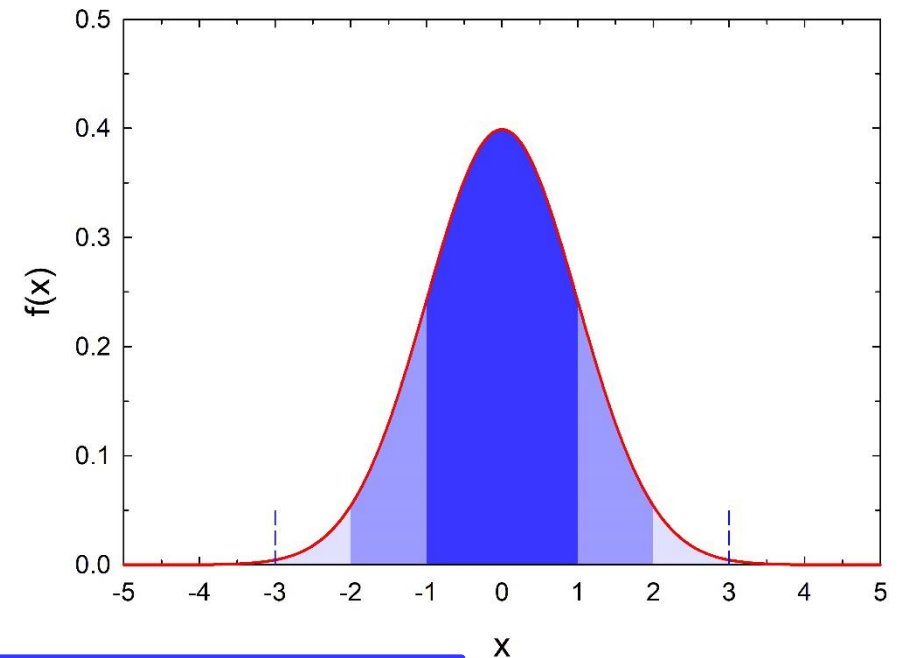
# Standardní Gaussovo rozdělení

**Standardní Gaussovo rozdělení**  $N(\mu, \sigma) \rightarrow N(0,1)$

$$N(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$y \equiv \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = F(\mu + \sigma | \mu, \sigma) - F(\mu - \sigma | \mu, \sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.683$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = F(\mu + 2\sigma | \mu, \sigma) - F(\mu - 2\sigma | \mu, \sigma) = \operatorname{erf}(\sqrt{2}) = 0.955$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = F(\mu + 3\sigma | \mu, \sigma) - F(\mu - 3\sigma | \mu, \sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.997$$

# Normální (Gaussovo) rozdělení

## Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$

Zápisem výsledku měření ve tvaru  $x = (\hat{\mu}_x \pm \sigma_{C,x}) [x]$

implicitně předpokládáme, že náhodná proměnná  $x$  má normální rozdělení  $N(\mu, \sigma)$

tj.  $P(x \in [\hat{\mu}_x - \sigma_{C,x}, \hat{\mu}_x + \sigma_{C,x}]) \approx 0.683$ .

- 1-sigma kritérium:

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = F(\mu + \sigma | \mu, \sigma) - F(\mu - \sigma | \mu, \sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.683$$

- 2-sigma kritérium:

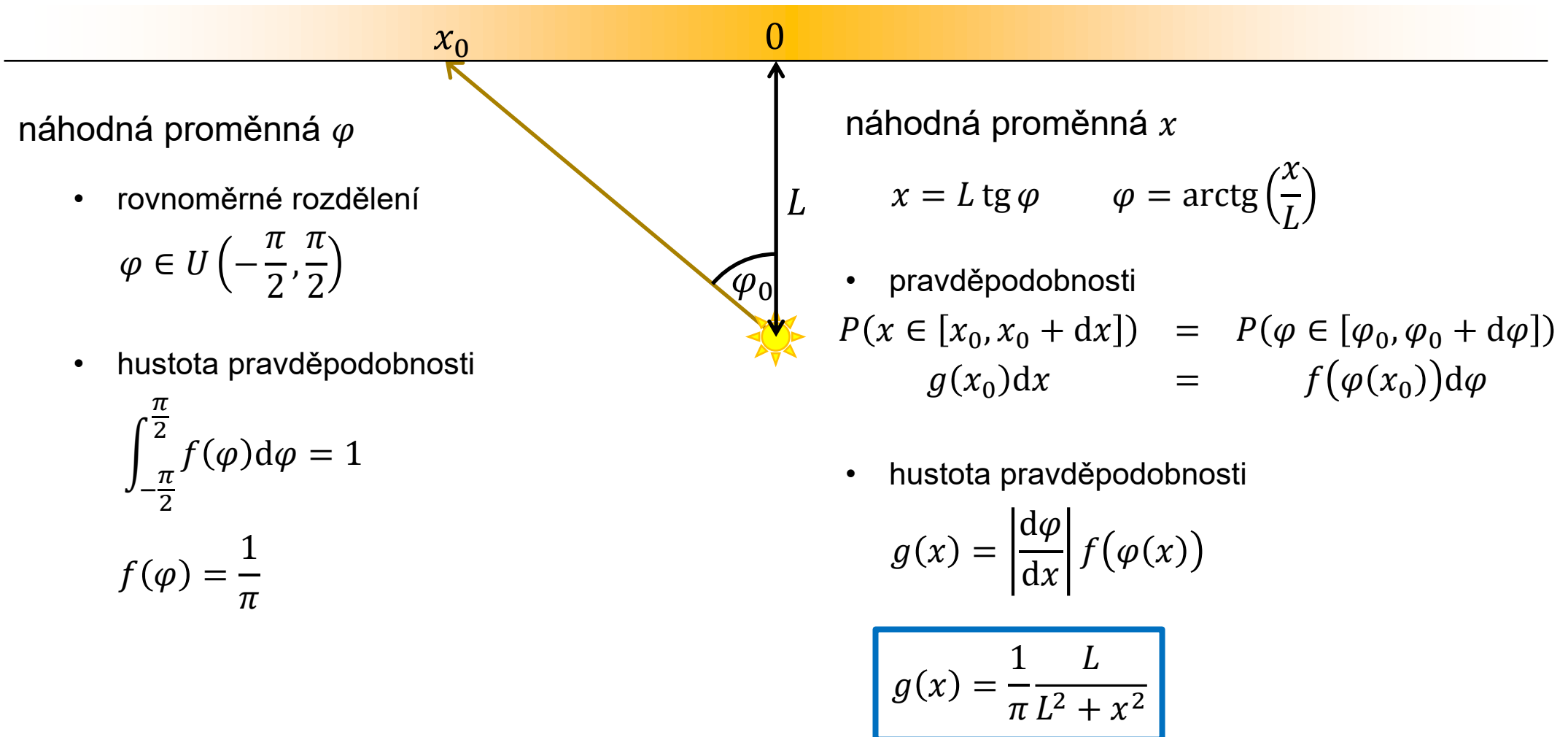
$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = F(\mu + 2\sigma | \mu, \sigma) - F(\mu - 2\sigma | \mu, \sigma) = \operatorname{erf}(\sqrt{2}) = 0.955$$

- 3-sigma kritérium:

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = F(\mu + 3\sigma | \mu, \sigma) - F(\mu - 3\sigma | \mu, \sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.997$$

# Cauchyho rozdělení

- Jaká je hustota pravděpodobnosti počtu fotonů dopadajících na stínítko ve vzdálenosti  $L$ ?



# Cauchyho rozdělení

## Cauchyho rozdělení $C(x_0, L)$

- hustota pravděpodobnosti

Cauchyho (Lorentzovo) rozdělení

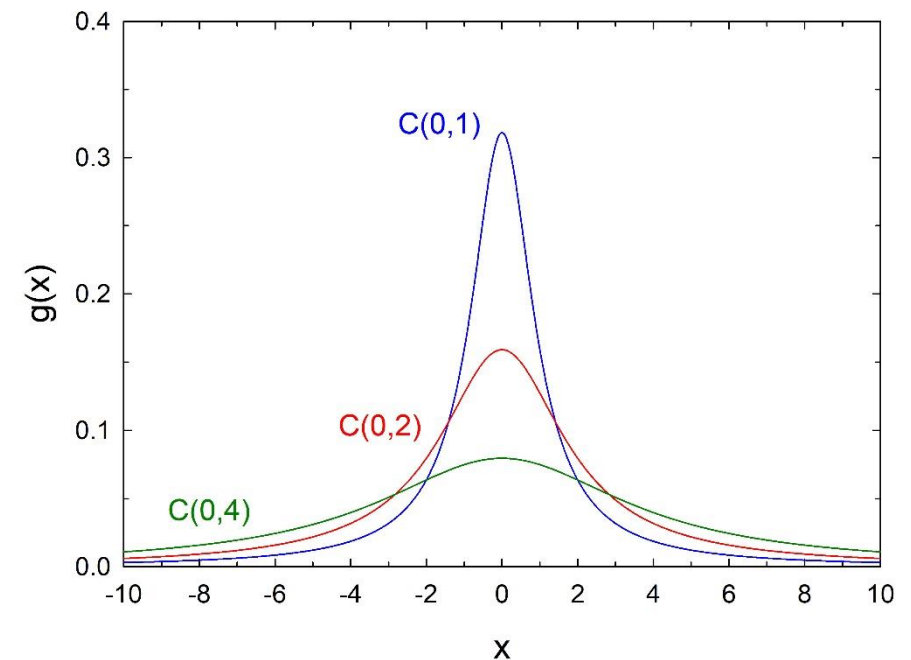
$$g(x|x_0, L) = \frac{1}{\pi} \frac{L}{L^2 + (x - x_0^2)}$$

Breit-Wignerovo rozdělení ( $\gamma = 2L$ )

$$g(x|x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{\gamma^2/4 + (x - x_0^2)}$$

- očekávaná hodnota a rozptyl nedefinovány!!!

→ použijeme např. medián  $x_0$  a pološířku  $\gamma$



# Cauchyho rozdělení

## Cauchyho rozdělení $C(x_0, L)$

- distribuční funkce

Cauchyho (Lorentzovo) rozdělení

$$G(x|x_0, L) = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{x - x_0}{L} \right) + \frac{\pi}{2} \right)$$

