

## Seminární úlohy 8

1. Při zkoumání aktivity radioaktivního zářiče byl měřen počet rozpadů za jednu minutu. Celkem bylo provedeno 20 měření a získány následující hodnoty počtu rozpadů:

39601, 39795, 39424, 39997, 39683, 39740, 39589, 39710, 39607, 39761, 39650, 39484, 39469, 39911, 39445, 39147, 39931, 39442, 39307 a 39308. Pomocí metody maximální věrohodnosti spočítejte odhad aktivity zářiče (aktivita se udává v Becquerelech, 1 Bc = počet rozpadů za sekundu).

Řešení: Počet rozpadů k zářiče za 1 minutu je náhodná proměnná, která se řídí Poissonovým rozdělením

$$P(k, \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

Věrohodnostní funkci pro  $n=20$  opakování zkonstruujeme jako

$$\prod_{i=1}^n P(k_i, \mu) = \prod_{i=1}^n \frac{\mu^{k_i} e^{-\mu}}{k_i!}$$

Pomocí metody maximální věrohodnosti získáme hodnotu odhadu parametru  $\mu$  vyřešením podmínky pro maximum věrohodnostní funkce, což je v tomto případě ekvivalentní (ale snazší) hledání maxima logaritmu věrohodnostní funkce:

$$\begin{aligned} \ln \prod_{i=1}^n \frac{\mu^{k_i} e^{-\mu}}{k_i!} &= \ln \mu \sum_{i=1}^n k_i - n\mu + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i!} \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \prod_{i=1}^n \frac{\mu^{k_i} e^{-\mu}}{k_i!} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \ln \mu \sum_{i=1}^n k_i - n\mu + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i!} \right) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n k_i - n \end{aligned}$$

Nejllepší odhad parametru  $\mu$  je tedy aritmetický průměr naměřených hodnot:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$$

To vychází 39600.05 za minutu, a tedy ca 660 Bq.

2. Náhodná proměnná  $x$  má exponenciální rozdělení s parametrem  $\tau$ . Naměříme-li nezávisle sadu  $n$  hodnot  $x$ , jaký bude odhad parametru  $\tilde{\tau}$  metodou maximální věrohodnosti?

Řešení:

Náhodná proměnná  $x$  se řídí exponenciálním rozdělením, a její hustota pravděpodobnosti tak má tvar:

$$f(x, \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}$$

Věrohodnostní funkci pro  $n$  opakování zkonstruujeme jako

$$\prod_{i=1}^n f(x, \tau)$$

a opět budeme logaritmovat:

$$\begin{aligned} \ln \prod_{i=1}^n f(x, \tau) &= \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{\tau} - \sum_{i=1}^n \ln e^{-\frac{x_i}{\tau}} = -n \ln \tau - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n x_i \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( -n \ln \tau - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n x_i \right) &= -n \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Maximum je nalezeno z podmínky

$$0 = -n \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n x_i$$

Nejlepší odhad parametru  $\tau$  je tedy opět aritmetický průměr naměřených hodnot:

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$