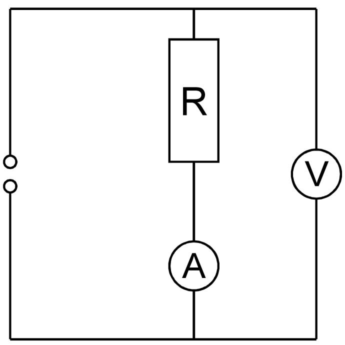
1. zápočtový test
(45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

Příklad 1

Zadání:
Rezistor o neznámém odporu R připojíme ke zdroji napětí, voltmetru a ampérmetru podle schématu na obrázku. Známé vnitřní odpory voltmetru a ampérmetru jsou $R_V = (1.65 \pm 0.03)\ \Omega$ a $R_A = (2.02 \pm 0.02)\ \Omega$.



Digitální voltmetr má 4-místný displej a ukazuje hodnotu 24.82 V, na měřeném rozsahu uvádí výrobce přesnost $\pm(0.3\% + 1)$. Ručička ampérmetru ukazuje hodnotu 0.89 A, třída přesnosti ampérmetru je 2 a použitý rozsah stupnice je 1.5 A.

(a) Vypočítejte standardní odchylku měření elektrického napětí U a proudu I. Výsledky měření zapište ve správném tvaru.

(b) Odvoďte obecný vztah pro výpočet odporu R pomocí veličin uvedených v zadání.

(c) Vypočítejte očekávanou hodnotu a chybu měření odporu R. Výsledek zapište ve správném tvaru.

Poznámka: Při výpočtu úloh (b) a (c) použijte výsledné hodnoty z úlohy (a).

(10 bodů)

Řešení:
(a) Pro digitální voltmetr je maximální chyba měření napětí ε_U dána součtem 0.3%-násobku naměřené hodnoty a 1-násobku řádu poslední platné číslice, tj. jedné setiny V.

$$\varepsilon_U = 0.003 \times 24.82\ \text{V} + 1 \times 0.01\ \text{V} = 0.08446\ \text{V}$$

Pro analogový ampérmetr s třídou přesnosti $P = 2$ a rozsahem $R = 1.5$ A je maximální chyba měření proudu ε_I dána jako:

$$\varepsilon_I = \frac{PR}{100} = 0.03\ \text{A}.$$

Standardní odchylky σ_U a σ_I vypočítáme tak, že vydělíme maximální chyby $\sqrt{3}$.

$$\sigma_U = \frac{\varepsilon_U}{\sqrt{3}} \doteq 0.01\ \mathrm{V}$$
$$\sigma_I = \frac{\varepsilon_I}{\sqrt{3}} \doteq 0.02\ \mathrm{A}$$

Obě veličiny tedy známe s přesností na setiny, naměřené hodnoty není tudíž nutné dále zaokrouhlovat. Výsledky měření napětí a proudu zapíšeme následovně.

$$U = (24.82 \pm 0.05)\ \mathrm{V}$$
$$I = (0.89 \pm 0.02)\ \mathrm{A}$$

(b) V daném zapojení měří ampérmetr přímo proud procházející rezistorem, zatímco voltmetr měří napětí na rezistoru plus napětí na samotném ampérmetru. Podíl napětí a proudu je potom roven součtu odporu rezistoru R a odporu ampérmetru R_A.

$$\frac{U}{I} = R + R_A$$
$$R = \frac{U}{I} - R_A$$

(c) Maximální chyba odporu R je rovna součtu maximální chyby podílu U/I a maximální chyby odporu ampérmetru.

$$\varepsilon_R = \frac{U\varepsilon_I + I\varepsilon_U}{I^2} + \varepsilon_{R_A}$$

Vydělením této rovnice $\sqrt{3}$ dostaneme stejný vztah i pro standardní odchylky.

$$\sigma_R = \frac{U\sigma_I + I\sigma_U}{I^2} + \sigma_{R_A}$$

$$\sigma_R = \frac{24.82\ \mathrm{V} \times 0.02\ \mathrm{A} + 0.89\ \mathrm{A} \times 0.05\ \mathrm{V}}{(0.89\ \mathrm{A})^2} + 0.02\ \Omega \doteq 0.7\ \Omega$$

Nakonec dopočítáme odpor R, zaokrouhlíme ho podle odchylky σ_R na desetiny Ω a zapíšeme výsledek.

$$R = \frac{U}{I} - R_A$$
$$R = \frac{24.82\ \mathrm{V}}{0.89\ \mathrm{V}} - 2.02\ \Omega$$
$$R \doteq 25.9\ \Omega$$
$$R = (25.9 \pm 0.7)\ \Omega$$

Příklad 2

Zadání:
Jádro radionuklidu $^{22}_{11}$Na se rozpadá na stabilní jádro $^{22}_{10}$Ne:

- v 90.4% případů je při rozpadu vyzářen pozitron e^+, foton γ a elektronové neutrino ν_e (užitečná emise pozitronu),
- v 9.5% případů je při rozpadu vyzářen pouze foton γ a elektronové neutrino ν_e (bez emise pozitronu),
- v 0.1% případů je při rozpadu vyzářen pouze pozitron e^+ a elektronové neutrino ν_e (neužitečná emise pozitronu).

(a) Jaká je pravděpodobnost, že z 10 rozpadů, bude nejméně 8 provázených užitečnou emisí pozitronu?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že z 10 rozpadů, bude vyzářeno právě 8 pozitronů?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že z 10 rozpadů, nebude ani jeden bez emise pozitronu?

(d) Jaká je pravděpodobnost, že z 10 rozpadů provázených emisí pozitronu, bude právě 1 neužitečný?

(10 bodů)

Řešení:
Označme nejprve si po řadě pravděpodobnosti $p_1 = 0.904$, $p_2 = 0.095$ a $p_3 = 0.001$ pro jednotlivé možnosti.
Obecně pravděpodobnost k úspěchů z N pokusů udává binomické rozdělení $P(k|N, p)$.

$$P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

(a) Pravděpodobnost nejméně 8 úspěchů (užitečná emise pozitronu, $p = p_1$) z 10 pokusů (rozpadů) je rovna součtu pravděpodobností pro 10, 9 a 8 úspěchů.

$$P_{(a)} = \binom{10}{10} p_1^{10} + \binom{10}{9} p_1^9 (1-p_1) + \binom{10}{8} p_1^8 (1-p_1)^2$$
$$P_{(a)} = 0.904^{10} + 10 \times 0.904^9 \times 0.096 + 45 \times 0.904^8 \times 0.096^2$$
$$P_{(a)} \doteq 0.937 = 93.7\%$$

(b) Elementární událost vyzáření pozitronu nastane jak v prvním užitečném tak i ve třetím neužitečném případě. Pravděpodobnost úspěchu je tím pádem $p = p_1 + p_3$ a pravděpodobnost 8 úspěchů z 10 pokusů (rozpadů) je:

$$P_{(b)} = \binom{10}{8} (p_1 + p_3)^8 (1 - p_1 - p_3)^2$$
$$P_{(b)} = 45 \times 0.905^8 \times 0.095^2$$
$$P_{(b)} \doteq 0.183 = 18.3\%$$

(c) Elementární událost rozpadu bez vyzáření pozitronu odpovídá druhému případu s pravděpodobností $p = p_2$. Pravděpodobnost žádného úspěchu z 10 pokusů (rozpadů) je:

$$P_{(c)} = \binom{10}{0} (1 - p_2)^{10}$$
$$P_{(c)} = 0.905^{10}$$
$$P_{(c)} \doteq 0.369 = 36.9\%$$

(d) Pokud budeme uvažovat pouze rozpady doprovázené emisí pozitronu, je nutné zavést nové pravděpodobnosti p_1' a p_3' pro užitečný a neužitečný případ, jejichž součet bude roven 1.

$$\begin{aligned} p_1' &= K p_1 \\ p_3' &= K p_3 \\ p_1' + p_3' &= 1 \\ K &= \frac{1}{p_1 + p_3} \\ p_1' &= \frac{p_1}{p_1 + p_3} = \frac{0.904}{0.905} \\ p_3' &= \frac{p_3}{p_1 + p_3} = \frac{0.001}{0.905} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost právě jednoho úspěchu z 10 pokusů (rozpadů s emisí pozitronu) je potom:

$$P_{(d)} = \binom{10}{1} (p_3')^1 (1 - p_3')^9$$
$$P_{(d)} = 10 \times \frac{0.001}{0.905} \times \left(\frac{0.904}{0.905}\right)^9$$
$$P_{(d)} \doteq 0.011 = 1.1\%$$

Příklad 3

Zadání:
Náhodná proměnná x má rozdělení popsané hustotou pravděpodobnosti $f(x)$

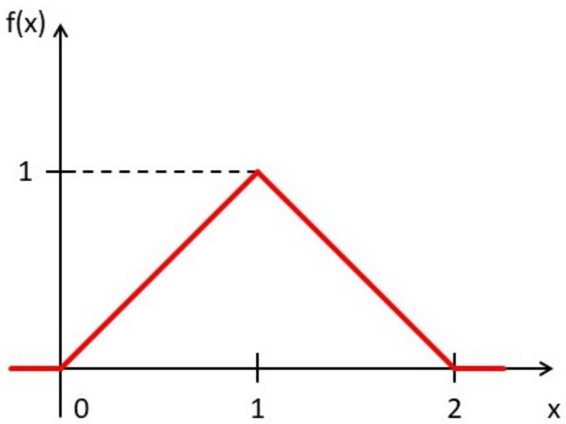
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x & \text{pro } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{pro } x \in [1,2] \\ 0 & \text{pro } x > 2 \end{cases}$$

(a) Vypočítejte očekávanou hodnotu a rozptyl náhodné proměnné x.

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodná proměnná leží v intervalu $\pm\sigma$, neboli $x \in (\mu - \sigma; \mu + \sigma)$?

(10 bodů)

Řešení:



(a) Nejprve počítejme očekávanou hodnotu, definovanou pomocí integrálu.

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x$$
$$E[x] = \int_0^1 x \cdot x\mathrm{d}x + \int_1^2 x \cdot (2-x)\mathrm{d}x$$
$$E[x] = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$
$$E[x] = \frac{1}{3} - 0 + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}$$
$$\mu = E[x] = 1$$

Rozptyl je jednodušší počítat pomocí odvozeného vzorce pro očekávanou hodnotu:

$$V[x] = E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

$$E[x^2] = \int_0^1 x^2 \cdot x\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2 \cdot (2-x)\mathrm{d}x$$

$$E[x^2] = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2$$

$$E[x^2] = \frac{1}{4} - 0 + \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

$$E[x^2] = \frac{7}{6}$$

$$V[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$V[x] = \frac{7}{6} - 1$$

$$V[x] = \sigma^2 = \frac{1}{6}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0.41$$

(b) Pravděpodobnost, že náhodná proměnná x leží v intervalu hodnot $(\mu-\sigma;\mu+\sigma)$ je definována pomocí integrálu z hustoty pravděpodobnosti.

$$P\left\{x \in (\mu-\sigma;\mu+\sigma)\right\} = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\mathrm{d}x$$

Vzhledem k symetrickému umístění očekávané hodnoty $\mu = 1$, viz obrázek, můžeme psát:

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{\mu-\sigma}^{\mu} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{\mu}^{\mu+\sigma} f(x)\mathrm{d}x$$

Hledaná pravděpodobnost je potom rovna:

$$P\left\{x \in (\mu-\sigma;\mu+\sigma)\right\} = 2\int_{1-\frac{\sqrt{6}}{6}}^{1} x\mathrm{d}x$$

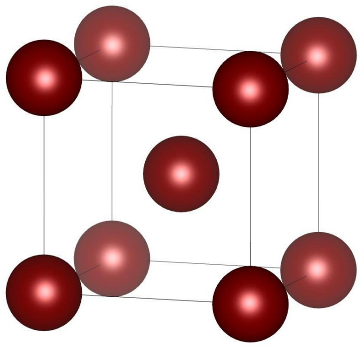
$$P\left\{x \in (\mu-\sigma;\mu+\sigma)\right\} = \left[x^2\right]_{1-\frac{\sqrt{6}}{6}}^{1}$$

$$P\left\{x \in (\mu-\sigma;\mu+\sigma)\right\} = 1 - \left(1 - \frac{2\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{6}\right)$$

$$P\left\{x \in (\mu-\sigma;\mu+\sigma)\right\} = \frac{2\sqrt{6}-1}{6} \doteq 0.650 = 65.0\%$$

Příklad 4

Zadání:
Železo za normálních podmínek krystalizuje v kubické prostorově centrované soustavě, tzn. každý atom železa má v nejbližším okolí osm jiných atomů železa, viz obrázek.



Přirozené zastoupení izotopu ^{57}Fe je 2.119%, zbylých 97.881% připadá na ostatní stabilní izotopy železa, zejména ^{56}Fe a ^{54}Fe. Vypočítejte pravděpodobnost, že daný atom železa (nezávisle na izotopu) má ve svém nejbližším okolí právě dva atomy izotopu ^{57}Fe. Jaká je pravděpodobnost, že bude mít alespoň jeden atom izotopu ^{57}Fe v nejbližším okolí?

(5 bodů)

Řešení:
Pravděpodobnost, že z 8 atomů železa (počet pokusů N) jich je právě k izotop ^{57}Fe (úspěch), udává binomické rozdělení $P(k|N,p)$ s $p = 0.02119$.

$$P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Pravděpodobnost právě 2 atomů izotopu ^{57}Fe v nejbližším okolí je:

$$P(2) = \binom{8}{2} p^2 (1-p)^6$$
$$P(2) = 28 \times 0.02119^2 \times (1 - 0.02119)^6$$
$$P(2) \doteq 0.011 = 1.1\%$$

Pravděpodobnost nejméně jednoho atomu izotopu ^{57}Fe v nejbližším okolí je doplňkem k případu, kdy v nejbližším okolí není žádný takový atom.

$$P(k \geq 1) = 1 - P(0)$$
$$P(k \geq 1) = 1 - \binom{8}{0} (1-p)^8$$
$$P(k \geq 1) = 1 - (1 - 0.02119)^8$$
$$P(k \geq 1) \doteq 0.157 = 15.7\%$$

Příklad 5

Zadání:
Perioda matematického kyvadla je dána známým vztahem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

pomocí kterého lze měřit tíhové zrychlení g. Odhadněte maximální relativní chybu měření tíhového zrychlení pro délku závěsu kyvadla 1 m, určenou s nepřesností 1 cm při:
(a) změření jedné periody T s nepřesností měření času 0.1 s,
(b) změření deseti periody T s nepřesností měření času 0.1 s.

Poznámka: Tam, kde je to potřeba, použijte ve výpočtu hodnotu tíhového zrychlení $g = 9.81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$.

(5 bodů)

Řešení:
Ze vztahu pro periodu kmitání matematického kyvadla si můžeme odvodit rovnici pro tíhové zrychlení g:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}l$$

Maximální relativní chyba součinu resp. podílu je rovna součtu jednotlivých maximálních relativních chyb. Neboli:

$$\begin{aligned}
\eta_g &= \eta_l + 2\eta_T \\
\eta_g &= \frac{\varepsilon_l}{l} + \frac{2\varepsilon_T}{T} \\
\eta_g &= \frac{\varepsilon_l}{l} + \frac{2\varepsilon_T}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \\
\eta_g &= \frac{\varepsilon_l}{l} + \frac{\varepsilon_T\sqrt{g}}{\pi\sqrt{l}}
\end{aligned}$$

(a) Pro měření jediné periody T můžeme rovnou dosadit $\varepsilon_T = 0.1$ s do předchozího vztahu a spočítat η_g.

$$\begin{aligned}
\eta_g &= \frac{0.01\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}} + \frac{0.1\ \mathrm{s}\sqrt{9.81\ \mathrm{m\ s^{-2}}}}{\pi\sqrt{1\ \mathrm{m}}} \\
\eta_g &\doteq 0.110 = 11.0\%
\end{aligned}$$

(b) Při měření 10 period T je maximální chyba periody 10krát menší, tedy $\varepsilon_T = 0.01$ s.

$$\begin{aligned}
\eta_g &= \frac{0.01\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}} + \frac{0.01\ \mathrm{s}\sqrt{9.81\ \mathrm{m\ s^{-2}}}}{\pi\sqrt{1\ \mathrm{m}}} \\
\eta_g &\doteq 0.020 = 2.0\%
\end{aligned}$$

Příklad 6

Zadání:
Geigerův-Müllerův detektor umístěný v blízkosti radioaktivního vzorku cesia obsahujícího izotop ^{137}Cs naměřil během deseti minut 7 200 událostí (rozpadů β^-). Vypočítejte pravděpodobnost, že během jedné sekundy detekuje právě 8 událostí. Jaká je pravděpodobnost, že během dvou sekund detekuje právě 16 událostí?

Poznámka: Radionuklid ^{137}Cs má dlouhý poločas rozpadu (cca 30 let) a vzorek obsahuje obrovské množství těchto radioaktivních jader.

(5 bodů)

Řešení:
Počet k naměřených událostí za zvolený časový úsek je určen Poissonovým rozdělením $P(k|\nu)$ s očekávanou hodnotou ν.

$$P(k|\nu) = e^{-\nu}\frac{\nu^k}{k!}$$

Za jednu sekundu detektor naměří v průměru $\nu = 12$ událostí. Pravděpodobnost detekce 8 událostí za 1 sekundu je tedy:

$$P(8|1\text{ s}) = e^{-12}\frac{12^8}{8!}$$
$$P(8|1\text{ s}) \doteq 0.066 = 6.6\%$$

Za dvě sekundy detektor naměří v průměru $\nu = 24$ událostí. Pravděpodobnost detekce 16 událostí za 2 sekundy je tedy:

$$P(16|2\text{ s}) = e^{-24}\frac{24^{16}}{16!}$$
$$P(16|2\text{ s}) \doteq 0.022 = 2.2\%$$

Poznámka: Neplatí tedy zdánlivě správná představa, že pravděpodobnost detekce dvojnásobného množství událostí za dvojnásobný čas je stejná jako pravděpodobnost původní. Důvodem je, že náhodná proměnná - počet detekovaných událostí - nabývá pouze diskrétních hodnot. Ve druhém případě nabývá dvojnásobného množství možných výsledků, tudíž zmíněné pravděpodobnosti nemohou být stejné.
Např. detekce 16 událostí za 2 sekundy má analogii v detekci 8 událostí za 1 sekundu. Na druhou stranu detekce lichého počtu událostí za 2 sekundy takovou analogii nemá.