

Příklad vyhodnocení - nepřímé měření

Chceme spočítat, jakou celkovou chybou bude zatíženo určení modulu pružnosti G metodou torzních kmitů:

$$G = \frac{4\pi l M R^2}{T^2 r^4}$$

Výsledky přímých měření (uvedeny střední mezní chyby):

- délka drátu: $l = \bar{l} \pm \Delta l = (55.2 \pm 0.1) \text{ cm}$
- poloměr drátu: $r = \bar{r} \pm \Delta r = (0.505 \pm 0.002) \text{ mm}$
- poloměr válce: $R = \bar{R} \pm \Delta R = (55.00 \pm 0.03) \text{ mm}$
- hmotnost válce: $M = \bar{M} \pm \Delta M = (808.6 \pm 0.01) \text{ g}$
- doba kmitu: $T = \bar{T} \pm \Delta T = (1.814 \pm 0.005) \text{ s}$

Vypočteme \bar{G} z dílčích měření:

$$\bar{G} = \frac{4\pi \bar{l} \bar{M} \bar{R}^2}{\bar{T}^2 \bar{r}^4} = 7.9281 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

Určíme celkovou střední mezní chybu ($P \sim 1$):

$$\begin{aligned} u_{\bar{G}}^2 &= \left(\frac{\partial G}{\partial l} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}}^2 (\Delta l)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial r} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}}^2 (\Delta r)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}}^2 (\Delta R)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial G}{\partial M} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}}^2 (\Delta M)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}}^2 (\Delta T)^2, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial l} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}} &= \frac{4\pi \bar{M} \bar{R}^2}{\bar{T}^2 \bar{r}^4} = \frac{\bar{G}}{\bar{l}} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial r} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}} &= -\frac{16\pi \bar{l} \bar{M} \bar{R}^2}{\bar{T}^2 \bar{r}^5} = -4 \frac{\bar{G}}{\bar{r}} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial R} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}} &= \frac{8\pi \bar{l} \bar{M} \bar{R}}{\bar{T}^2 \bar{r}^4} = 2 \frac{\bar{G}}{\bar{R}} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial M} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}} &= \frac{4\pi \bar{l} \bar{R}^2}{\bar{T}^2 \bar{r}^4} = \frac{\bar{G}}{\bar{M}} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{\bar{l}, \bar{r}, \bar{R}, \bar{M}, \bar{T}} &= -\frac{8\pi \bar{l} \bar{M} \bar{R}^2}{\bar{T}^3 \bar{r}^4} = -2 \frac{\bar{G}}{\bar{T}} \end{aligned}$$

Platí tedy:

$$\begin{aligned} u_{\bar{G}} &= \sqrt{\left(\frac{\bar{G}}{\bar{l}} \right)^2 (\Delta l)^2 + \left(-4 \frac{\bar{G}}{\bar{r}} \right)^2 (\Delta r)^2 + \left(2 \frac{\bar{G}}{\bar{R}} \right)^2 (\Delta R)^2 + \left(\frac{\bar{G}}{\bar{M}} \right)^2 (\Delta M)^2 + \left(-2 \frac{\bar{G}}{\bar{T}} \right)^2 (\Delta T)^2} \\ &\doteq 10^{10} \sqrt{2.063 \cdot 10^{-4} + 1.577 \cdot 10^{-2} + 7.480 \cdot 10^{-5} + 9.613 \cdot 10^{-9} + 1.910 \cdot 10^{-5}} \\ &\doteq 0.134 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

Výsledek zaokrouhlíme a zapíšeme:

$$G = \bar{G} + u_{\bar{G}} = (7.93 \pm 0.13) \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

Je vidět, že k celkové chybě nejvíce přispívá chyba určení poloměru r – je ve čtvrté mocnině.