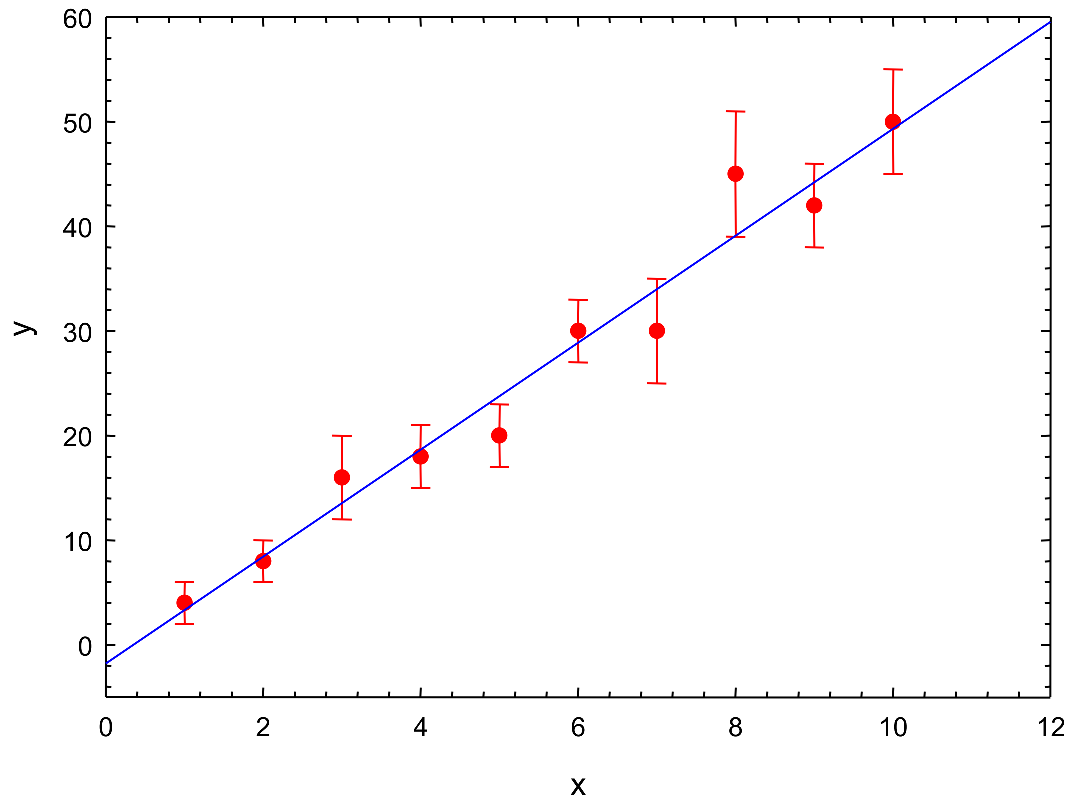
Metoda nejmenších čtverců – lineární regrese

Lineární regrese $\lambda(x|a,b) = ax + b$

$$\hat{a} = \frac{\langle 1\rangle\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle 1\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\hat{b} = \frac{\langle y\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle\langle xy\rangle}{\langle 1\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

označení: $\langle a\rangle \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{\sigma_i^2}$



Najděte kovarianční matici odhadů parametrů *a*,*b* $U = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{a}}^2 & \mathrm{cov}(\hat{a},\hat{b}) \\ \mathrm{cov}(\hat{b},\hat{a}) & \sigma_{\hat{b}}^2 \end{pmatrix}$

Metoda nejmenších čtverců – lineární regrese

Řešení

Prvek *i,j* inverzní matice ke kovarianční matici U parametrů lineárního modelu je $U_{ij}^{-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right]_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - a x_i - b)^2}{\sigma_i^2}$$

první derivace

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i - a x_i - b}{\sigma_i^2} x_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{-x_i y_i + a x_i^2 - b x_i}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i - a x_i - b}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{-y_i + a x_i + b}{\sigma_i^2}$$

druhé derivace

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = \langle x^2 \rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial b^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} = \langle 1 \rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a \partial b} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} = -\langle x \rangle \longrightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} \langle 1 \rangle & -\langle x \rangle \\ -\langle x \rangle & \langle x^2 \rangle \end{pmatrix}$$

Metoda nejmenších čtverců – lineární regrese

Řešení

Inverzní matice ke kovarianční matici parametrů $$U^{-1} = \begin{pmatrix} \langle 1 \rangle & -\langle x \rangle \\ -\langle x \rangle & \langle x^2 \rangle \end{pmatrix}$$

abychom získali kovarianční matici parametrů *a*,*b* spočítáme inverzní matici k U^{-1}

$$\det U^{-1} = \langle 1 \rangle \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$U = \frac{1}{\langle 1 \rangle \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x \rangle \\ \langle x \rangle & \langle 1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{b}}^2 & \operatorname{cov}(\hat{a}, \hat{b}) \\ \operatorname{cov}(\hat{a}, \hat{b}) & \sigma_{\hat{a}}^2 \end{pmatrix}$$

takže chyby odhadů parametrů *a*,*b* jsou

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle 1 \rangle \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{\langle 1 \rangle}{\langle 1 \rangle \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

kovariance odhadů parametrů *a*,*b* je $$\operatorname{cov}(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{\langle x \rangle}{\langle 1 \rangle \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$