Odhad parametrů

- sada n naměřených hodnot x_i : $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $x_i \in f(x|\boldsymbol{\theta})$ x_i nezávislé
- parametry: $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$
- cíl – najít nejlepší odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ parametrů $\boldsymbol{\theta}$
- odhad (estimátor) $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_m)$

Vlastnosti estimátorů

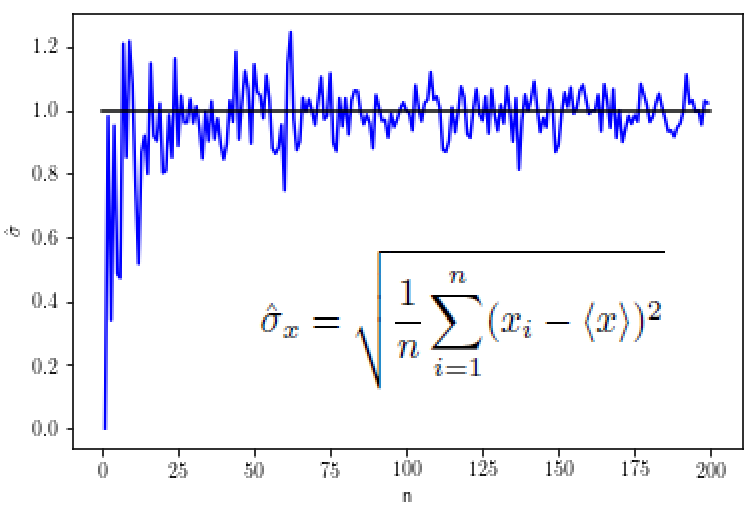
1. konzistence

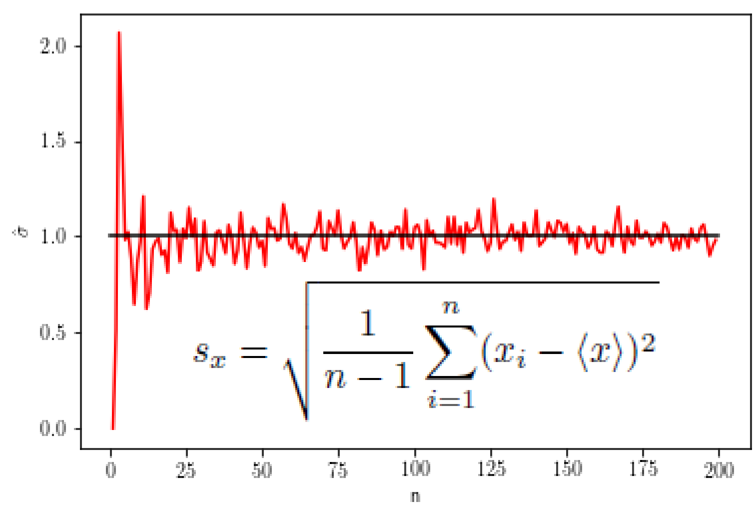
- pro $n \to \infty$ konverguje $\hat{\theta}$ k θ

2. předpojatost

- předpojatost $b \equiv E[\hat{\theta}] - \theta$

- $b = 0 \Rightarrow$ nepředpojatý (nevychýlený) odhad





Vlastnosti estimátorů

1. konzistence

• pro $n \to \infty$ konverguje $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ k $\boldsymbol{\theta}$

2. předpojatost

• předpojatost $b \equiv E[\hat{\theta}] - \theta$

• $b = 0 \Rightarrow$ nepředpojatý (nevychýlený) odhad

3. efektivita

• MSE: $E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = V[\hat{\theta}] + b^2$

statistická chyba estimátoru

systematická chyba estimátoru

Metoda maximální věrohodnosti

- sada n naměřených hodnot x_i : $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $x_i \in f(x|\boldsymbol{\theta})$ x_i nezávislé
- parametry: $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$
- cíl – najít nejlepší odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ parametrů $\boldsymbol{\theta}$
- odhad (estimátor) $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_m)$

- pravděpodobnost $P\left(x \in (x_i, x_i + dx)\right) = f(x_i|\boldsymbol{\theta})\, dx$
- pravděpodobnost, že naměříme hodnoty (x_1, x_2,…,x_n): $P = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\boldsymbol{\theta})\, dx$

věrohodnostní funkce $L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) \equiv \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\boldsymbol{\theta})$

- hledáme hodnoty $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pro které L nabývá maximum

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, m \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\theta}_k$$

Odhad parametrů normálního rozdělení

- naměřené hodnoty: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- hustota pravděpodobnosti: $f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$

- věrohodnostní funkce: $L(\mu,\sigma|\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$

$$\ln L(\mu,\sigma|\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n}\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)$$

- odhad očekávané hodnoty: $\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}\right|_{\mu=\hat{\mu}} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

- odhad rozptylu: $\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\hat{\sigma}} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$

Odhad parametrů normálního rozdělení

- odhad očekávané hodnoty: $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (aritmetický průměr)
- odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \equiv s_0$
- předpojatost?

$$E[\hat{\mu}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \mu$$ $\Rightarrow$ nepředpojatý odhad

$$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[(x_i - \mu)^2] = \sigma^2$$ $\Rightarrow$ nepředpojatý odhad

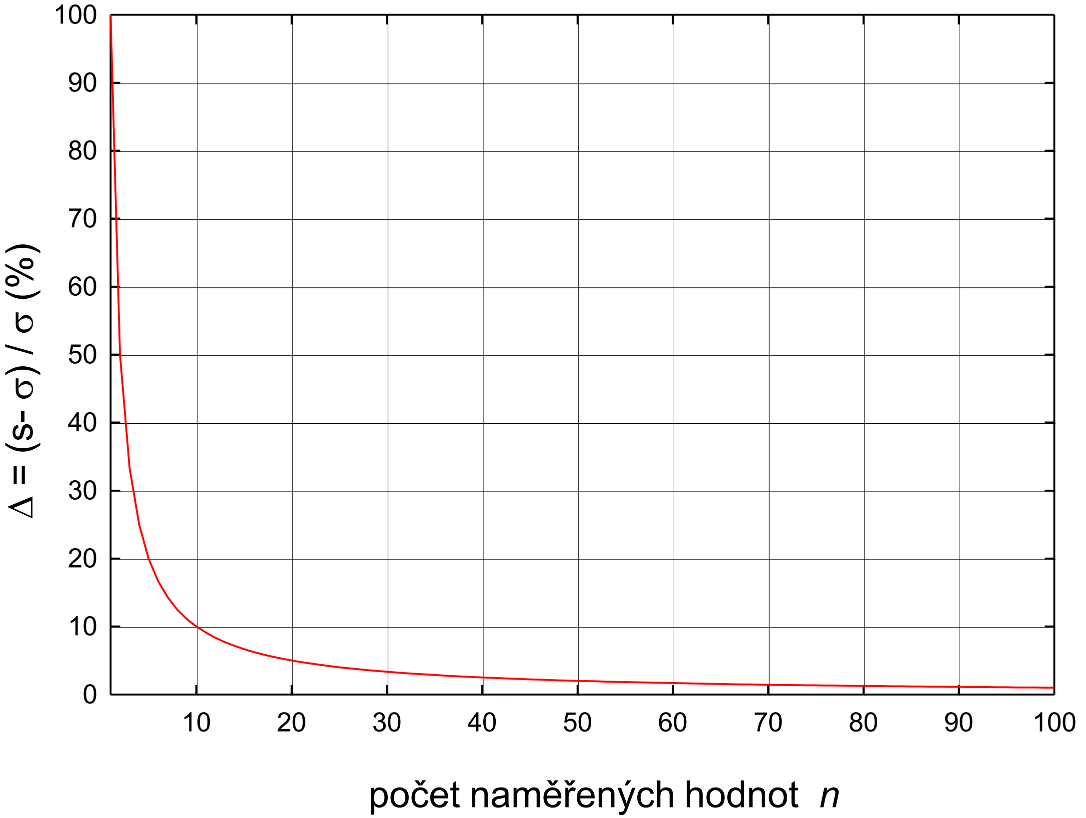
ale

$$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[(x_i - \overline{x})^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$ $\Rightarrow$ předpojatý odhad

- nepředpojatý odhad rozptylu: $\boxed{\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$

Odhad parametrů normálního rozdělení

$$\Delta = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \times 100\ \%$$



Odhad parametrů normálního rozdělení

5.5287
4.3908
5.7634
5.5533
5.2602
5.1191
4.7564

výsledek měření: $x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}\right) = 5.2 \pm 0.2$

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 5.196$ odhad chyby aritmetického průměru: $\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\overline{x}}} = \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 0.183$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = 0.449$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = 0.485$$

odhad chyby jednoho měření

odhad rozptylu aritmetického průměru: $\boxed{\hat{\sigma}^2_{\overline{x}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{s}^2 = \frac{\hat{s}^2}{n}}$