Seminární úlohy 9

1. Při zkoumání aktivity radioaktivního zářiče byl měřen počet rozpadů za jednu minutu. Celkem bylo provedeno 20 měření a získány následující hodnoty počtu rozpadů:

39601, 39795, 39424, 39997, 39683, 39740, 39589, 39710, 39607, 39761, 39650, 39484, 39469, 39911, 39445, 39147, 39931, 39442, 39307 a 39308. Pomocí metody maximální věrohodnosti spočítejte odhad aktivity zářiče (aktivita se udává v Becquerelech, 1 Bc = počet rozpadů za sekundu).

Řešení: Počet rozpadů k zářiče za 1 minutu je náhodná proměnná, která se řídí Poissonovým rozdělením

$$P(k,\mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

Věrohodnostní funkci pro *n*=20 opakování zkonstruujeme jako

$$\prod_{i=1}^{n} P(k_i,\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{k_i} e^{-\mu}}{k_i!}$$

Pomocí metody maximální věrohodnosti získáme hodnotu odhadu parametru μ vyřešením podmínky pro maximum věrohodnostní funkce, což je v tomto případě ekvivalentní (ale snazší) hledání maxima logaritmu věrohodnostní funkce:

$$\ln \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{k_i} e^{-\mu}}{k_i!} = \ln \mu \sum_{i=1}^{n} k_i - n\mu + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{k_i} e^{-\mu}}{k_i!} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\ln \mu \sum_{i=1}^{n} k_i - n\mu + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!} \right) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} k_i - n$$

Nejlepší odhad parametru μ je tedy aritmetický průměr naměřených hodnot:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i$$

To vychází 39600.05 za minutu, a tedy ca 660 Bq.

2. Náhodná proměnná *x* má exponenciální rozdělení s parametrem τ. Naměříme-li nezávisle sadu *n* hodnot *x*, jaký bude odhad parametru $\tilde{\tau}$ metodou maximální věrohodnosti?

Řešení:

Náhodná proměnná *x* se řídí exponenciálním rozdělením, a její hustota pravděpodobnosti tak má tvar:

$$f(x,\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}$$

Věrohodnostní funkci pro *n* opakování zkonstruujeme jako

$$\prod_{i=1}^{n} f(x,\tau)$$

a opět budeme logaritmovat:

$$\ln \prod_{i=1}^{n} f(x,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{\tau} - \sum_{i=1}^{n} \ln e^{-\frac{x_i}{\tau}} = -n \ln \tau - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(-n \ln \tau - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = -n \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Maximum je nalezeno z podmínky

$$0 = -n \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Nejlepší odhad parametru τ je tedy opět aritmetický průměr naměřených hodnot:

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$