

Řešení seminárních úloh 10

1. V experimentu bylo naměřeno 10 hodnot náhodné proměnné x : 10.5, 5.5, 11.2, 13.1, 9.0, 4.4, 6.9, 14.9, 6.2. Předpokládáme, že náhodná proměnná x má rovnoměrné rozdělení na intervalu (a, b) .

Pomocí metody maximální věrohodnosti vypočítejte odhady parametrů \hat{a} , \hat{b} tohoto rozdělení, odhad očekávané hodnoty $\hat{\mu}$ a odhad standardní odchylky $\hat{\sigma}$ této náhodné proměnné.

Řešení:

Náhodná proměnná x je výběrem z rovnoměrného rozdělení $U(a, b)$ s hustotou pravděpodobnosti $f(x|a, b)$.

$$f(x|a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in [a, b] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Věrohodnostní funkce je tedy:

$$L(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n},$$

která nabývá maximálních hodnot pro co nejúžší interval $[a, b]$. Protože všechny naměřené hodnoty musí ležet v tomto intervalu, musí platit $a \leq x_{\min}$ a $b \geq x_{\max}$. Maximální možnou hodnotu věrohodnostní funkce dosáhneme pro:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= x_{\min} = 4.4 \\ \hat{b} &= x_{\max} = 14.9 \end{aligned}$$

Očekávaná hodnota μ a standardní odchylka σ rovnoměrného rozdělení jsou dány jako:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{a+b}{2}, \\ \sigma &= \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}, \end{aligned}$$

jejich odhady $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}$ určíme dosazením odhadovaných parametrů \hat{a} a \hat{b} .

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2} \doteq 9.7 \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{(\hat{b} - \hat{a})^2}{12}} \doteq 3 \end{aligned}$$

2. Při měření aktivity radioaktivního zářiče byl měřen počet rozpadů za 1 min. Bylo provedeno 20 měření a získány následující počty (detekovaných) rozpadů: 39601, 39795, 39424, 39997, 39683, 39740, 39589, 39710, 39607, 39761, 39650, 39484, 39469, 39911, 39445, 39147, 39931, 39442, 39307, 39308.

Pomocí metody maximální věrohodnosti nalezněte odhad aktivity zářiče (tj. počet rozpadů za sekundu). Účinnost detekce záření uvažujte 30%.

Řešení:

Počet detekovaných rozpadů k zářiče za 1 min je náhodná proměnná s Poissonovým rozdělením.

$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!}$$

Věrohodnostní funkce $L(\nu|\mathbf{k})$ a její logaritmus jsou tedy:

$$L(\nu|\mathbf{k}) = \prod_{i=1}^n \frac{\nu^{k_i} e^{-\nu}}{k_i!},$$

$$\ln L(\nu|\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n k_i \ln \nu - n\nu - \sum_{i=1}^n \ln k_i!.$$

Hledáme takový odhad parametru $\hat{\nu}$, pro který věrohodnostní funkce resp. její logaritmus nabývá maxima.

$$\frac{dL}{d\nu} = 0$$

$$\frac{d \ln L}{d\nu} = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\nu} = 0$$

$$\frac{d \ln L}{d\nu} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\nu} - n = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$$

Průměrný počet detekovaných rozpadů za 1 min tedy můžeme odhadnout jako aritmetický průměr naměřených hodnot.

$$\hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = 39\,600 \text{ min}^{-1}$$

Aktivita zářiče, tj. počet rozpadů za 1 s, je tedy:

$$\hat{A} = \frac{[\hat{\nu}]}{60 \cdot 0.3} \text{ s}^{-1} = 2200 \text{ s}^{-1} = 2200 \text{ Bq}$$

3. Při opakovaném měření hmotnosti vzorku bylo získáno následujících 6 hodnot: 12.1 mg, 12.8 mg, 12.6 mg, 12.3 mg, 12.4 mg, 12.8 mg.

Předpokládáme, že měřená náhodná proměnná má normální rozdělení. Pomocí metody maximální věrohodnosti nalezněte odhad očekávané hodnoty $\hat{\mu}_m$, odhad chyby $\hat{\sigma}_{\hat{\mu}_m}$ odhadu očekávané hodnoty a odhad chyby jednoho měření $\hat{\sigma}_m$. Jaká je pravděpodobnost, že při jednom měření naměříme hmotnost větší než 13 mg?

Řešení:

Pro náhodné proměnné x_i , které jsou výběrem z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma)$, jsou věrohodnostní funkce a její logaritmus dány jako:

$$L(\mu, \sigma | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right],$$

$$\ln L(\mu, \sigma | \mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} - n \ln (\sqrt{2\pi\sigma^2}).$$

Hledáme takové odhady parametrů $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}$, pro které věrohodnostní funkce resp. její logaritmus nabývá maxima.

$$\frac{d \ln L}{d\mu} = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\mu} = 0$$

$$\frac{d \ln L}{d\mu} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \hat{\mu}}{\sigma^2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{d \ln L}{d\sigma} = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\sigma} = 0$$

$$\frac{d \ln L}{d\sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{\sigma^3} - \frac{n}{\hat{\sigma}} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}$$

Odhad $\hat{\sigma}_0$ je předpojatý, tzn. podhodnocuje skutečnou chybu σ . Korigovaný odhad $\hat{\sigma}_1$ je nepředpojatý, tzn. ani nepodhodnocuje ani nepřehodnocuje skutečnou chybu σ .

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}$$

Pro konkrétní naměřené hodnoty dostaneme odhad očekávané hodnoty hmotnosti $\hat{\mu}_m$ a odhad chyby 1 měření hmotnosti $\hat{\sigma}_m$ jako:

$$\hat{\mu}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = 12.50 \text{ mg},$$

$$\hat{\sigma}_m = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (m_i - \hat{\mu}_m)^2} = 0.28 \text{ mg}.$$

Chybu odhadu $\hat{\mu}_m$ odhadneme jako chybu aritmetického průměru.

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}_m} = \frac{\hat{\sigma}_m}{\sqrt{n}} = 0.12 \text{ mg}$$

Výsledek měření tedy zapíšeme jako $m = (12.5 \pm 0.1) \text{ mg}$.

Pravděpodobnost, že naměříme hodnotu větší než $m_0 = 13 \text{ mg}$ (výsledek 1 měření) je dána doplňkem k distribuční funkci normálního rozdělení.

$$\begin{aligned} P(m > m_0) &= 1 - F(m_0 | \hat{\mu}, \hat{\sigma}_m) \\ P(m > m_0) &= 1 - \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{m_0 - \hat{\mu}}{\sqrt{2} \hat{\sigma}_m} \right) \right] \\ P(m > m_0) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{13 - 12.5}{0.28 \sqrt{2}} \right) \\ P(m > m_0) &\doteq 3.7\% \end{aligned}$$