Test č. 2 úterý 5. 1. 2021

Úloha 1. (4 body) Při testování byl akumulátor opakovaně nabíjen a vybíjen, a přitom se v každém cyklu při plném nabití změřilo elektrické napětí *U* na vstupu akumulátoru (hodnoty jsou uvedeny v tabulce a také v souboru t2a_u1.txt). Měření probíhalo voltmetrem s výrobcem udanou (mezní) chybou:
$\Delta = \pm(0.5\ \% + 3\ \text{dgt})$.

Zpracujte toto měření elektrického napětí.
Výsledek vyjádřete se standardní odchylkou („σ“, *P* ~ 68 %).

měření	*U* (V)
1	12.019
2	12.093
3	11.986
4	12.000
5	12.078
6	12.046
7	12.028
8	11.953
9	11.913
10	12.009
11	12.049
12	12.063
13	12.002
14	11.909
15	10.925
16	12.080
17	11.924
18	11.912
19	11.995
20	11.902

Řešení:

Jedná se o zpracování přímo měřené veličiny, takže spočítáme aritmetický průměr a odhad standardní odchylky:

$\bar{U} = 11.9443\ \text{V}$, $s_U = \sqrt{\frac{1}{19}\sum(U_i - \bar{U})^2} = 0.247708\ \text{V}$.

S využitím 3σ kritéria zjistíme, že měření č. 15 je pravděpodobně zatíženo hrubou chybou:

$$3\sigma = k_{19}^{3\sigma} s_U = 3.45\ \times 0.247708\ V \sim 0.85\ \text{V}\ < |U_{15} - \bar{U}|$$

Měření č. 15 tedy vyloučíme a získáme nové hodnoty

$\bar{U} = 11.99795\ \text{V}$, $s_U = \sqrt{\frac{1}{19}\sum(U_i - \bar{U})^2} = 0.063321\ \text{V}$,

kdy již 3σ kritériu vyhovují všechny zbylé hodnoty. Spočítáme tedy standardní odchylku aritmetického průměru, interval rozšíříme podle studentova rozdělení a sloučíme se standardní chybou měřidla do kombinované nejistoty měření napětí:

$s_{\bar{U}} = \frac{1}{\sqrt{19}} s_U\ = 0.014527\ \text{V}$, $\quad u_U = \sqrt{(k_{18}^{1\sigma} s_{\bar{U}})^2 + \frac{\Delta^2}{3}} = \sqrt{0.014963^2 + \frac{(0.05999 + 0.003)^2}{3}} = 0.03933\ \text{V}$

Zaokrouhlíme a zapíšeme výsledek: $U = 12.00(4)\ \text{V}$ nebo $U = (12.00 \pm 0.04)\ \text{V}$

Úloha 2. (3 body) V dalším testování byl studován vnitřní odpor nabitého akumulátoru. Změřili jsme proto elektrické napětí a proud:

U = (12,19 ± 0,07) V,

I = (296,2 ± 1,2) mA.

(Udané nejistoty *U* a *I* jsou standardní odchylky.)

Spočítejte elektrický odpor a jeho standardní nejistotu.

Řešení:

Využijeme zákona přenosu chyb, takže $\bar{R} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = 41.15463\ \Omega$

A toho, že funkce *R*(*U*,*I*) je ve tvaru podílu, takže můžeme pro relativní nejistoty psát:

$$\eta_R^2 = \eta_U^2 + \eta_I^2 = 4.93885 \times 10^{-5}$$

a tedy $u_R = \eta_R \bar{R} = 0.289222\ \Omega$

Zaokrouhlíme a zapíšeme výsledek: $R = 41.2(3)\ \Omega$ nebo $R = (41.2 \pm 0.3)\ \Omega$.

Úloha 3. (8 bodů) Sledovali jsme dále závislost vnitřního odporu *R* na úrovni nabití akumulátoru (hodnoty uvedeny v tabulce a také v souboru t2a_u3.txt). Pokud není akumulátor úplně nabitý nebo zcela vybitý, lze závislost odporu na nabití považovat přibližně za lineární.

Nabití (%)	R (Ω)	ΔR (Ω)
0	43.505	0.1
5	43.232	0.1
10	43.123	0.1
15	43.119	0.1
20	43.047	0.1
25	42.952	0.1
30	42.817	0.1
35	42.777	0.1
40	42.686	0.1
45	42.627	0.1
50	42.593	0.1
55	42.493	0.1
60	42.473	0.1
65	42.358	0.1
70	42.304	0.1
75	42.269	0.1
80	42.134	0.1
85	42.136	0.1
90	42.213	0.1
95	42.404	0.1
100	42.732	0.1

Nafitujte (v nějakém programu dle vlastního výběru) měřené odpory lineární závislostí pro oblast nabití 20 – 80 % (tj. nakreslete závislost do grafu a určete její dva parametry).

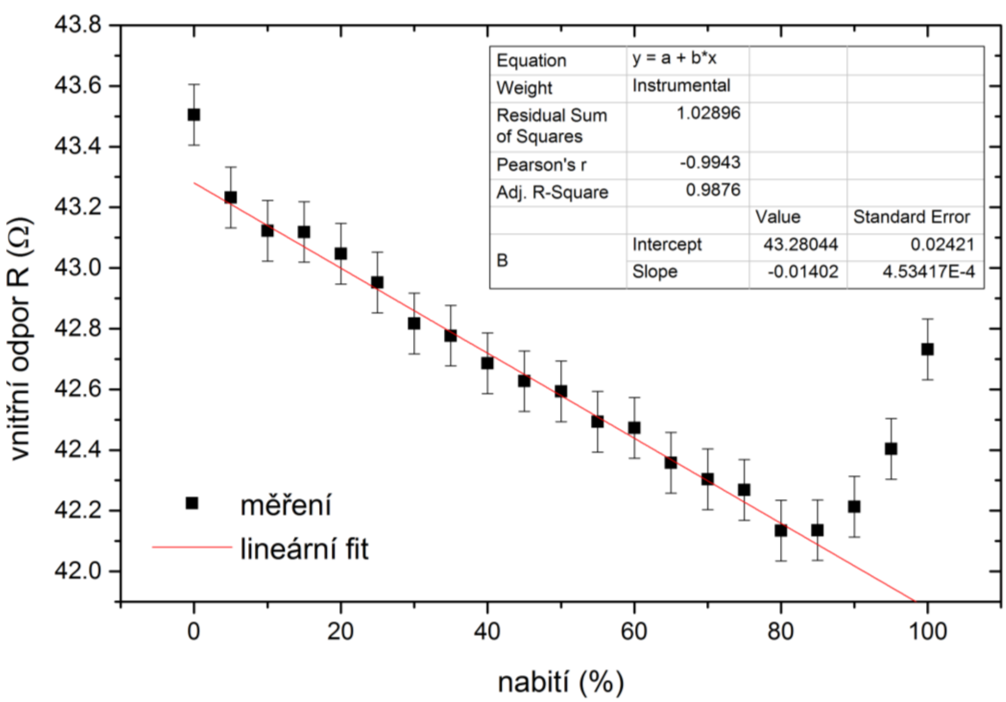
Určete i nejistoty těchto parametrů, nezapomeňte započíst nejistoty měření ΔR. (Ať už přímo ve fitu nebo zvlášť jako kombinovanou nejistotu.)

Získanou závislost vykreslete (extrapolujte) na celý obor 0 – 100 %.

Vypočítejte hodnotu R pro nabití 47.5 %.

Řešení:

Fitovat lze v čemkoliv, co nám rozumně poskytne chyby fitovaných parametrů (zde pro lineární závislost směrnici a průsečík s osou *x*). Např. v Originu použijeme *LinearFit*, omezíme se (Input data) u nabití na rozsah 20 – 80 % (lze také vymezit v grafu oblast dat pomocí *Data Selector* ještě před samotným fitováním). Získaný fit ale chceme mít na celém rozsahu, takže to musíme nastavit, tj. změnit rozsah ve *Fitted Curves Plot*. Provedeme fit a získáme něco jako následující obrázek:



Fitováním rovnice typu $y = a + bx$ jsme získali parametry:
směrnice (b): -0.01402 ± 0.00045
průsečík (a): 43.280 ± 0.024
Toto jsou nejistoty typu A určené z regrese a není v nich započtena chyba měření (ΔR = 0.1 Ω), což je potřeba udělat (aspoň přibližně). Jak na to?

Chyba ΔR je všude stejná a vzhledem k tomu, že se odpor příliš nemění, je přibližně stejná i relativní chyba měření. Šlo by tedy např. vyjádřit relativní chyby z regrese (nejistota typu A) a relativní chyby z měřicího přístroje (nejistota typu B) a skloubit je do výsledné nejistoty η_C jako $\eta_C^2 = \eta_A^2 + \eta_B^2$.

směrnice (b): $\eta_A \sim 0.032$
průsečík (a): $\eta_A \sim 0.00056$
měření (ΔR): $\eta_B \sim \frac{\Delta R}{\bar{R}} \sim \frac{0.1}{42.579} \sim 0.0023$
Je vidět, že zatímco průsečík, tj. R(0 %) je z fitu relativně přesně určen, a tedy příspěvek měřidla důležitý, u směrnice je to naopak – je fitem určena relativně nepřesně. Zároveň asi tušíme, že takto to děláme hodně nahrubo, trochu to zavání mícháním „jablek s hruškami" a pro složitější závislosti bude aplikace méně a méně smysluplná.

Můžeme si nejistoty vyjádřit v analogii s metodou přenosu chyb, neboť víme, jak spolu jednotlivé veličiny souvisí ($y = a + bx$):
$a = y - bx \quad \rightarrow \quad \sigma_a^2 = 1^2 . \sigma_y^2 + (-x)^2 . \sigma_b^2$ kde $\sigma_y = \Delta R$
$b = \frac{y-a}{x} \quad \rightarrow \quad \sigma_b^2 = \frac{1}{x^2} . \sigma_y^2 + \frac{1}{(-x)^2} . \sigma_a^2$
a kde za *x* dosazujeme jeho střední hodnotu (50).

$$\sigma_a = \sqrt{0.01 + 0.000514} = 0.1025\ \Omega$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{0.01}{2500} + \frac{2.34 \times 10^{-7}}{2500}} = 0.00206\ \Omega/\%$$

Vidíme podobný výsledek jako v předchozím postupu – nejistota parametru a je zcela dána měřicím přístrojem, u b je tomu naopak.
Tohle bude fungovat, dokud parametry a, b nejsou vzájemně příliš korelované. V takovém případě bychom měli počítat výslednou nejistotu v přenosu chyby bez zanedbání korelačních členů. Hodnoty korelací získáme z korelační matice, kterou obvykle programy poskytují na výstupu.

Nicméně to už si rovnou můžeme pro nejistoty odvodit analytické vztahy (podobně jako jsme na přednášce měli výraz pro přímku proch. počátkem). Zde vyjdou výrazy (n=13 pro hodnoty 20-80 %):

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^{13}(x_i - \bar{x})^2} = 0.00148\ \Omega/\%$$

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_y^2}{13} - \frac{\sigma_y^2 \bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{13}(x_i - \bar{x})^2} = 0.07914\ \Omega$$

Dosazením do rovnice, jejíž parametry teď už známe, můžeme určit vnitřní odpor pro nabití 47.5 %:

$$R_{47.5\,\%} = 43.280 - 0.01402 \times 47.5 = 42.614\ \Omega$$

(V Originu lze také využít *Find Y from X* při fitování.)

K vyjádření nejistoty $R_{47.5\,\%}$ využijeme nejistoty spočtené výše (jedním z postupů). V tomto případě je velký vliv měřidla, takže si lze výpočet usnadnit zanedbáním nejistoty typu A.