Řešení Test č. 1 úterý 8. 11. 2022 15 bodů

Úloha 1. (6 bodů) Měříme elektrický proud, který se během našeho experimentu postupně mění v rozsahu 4 − 25 mA. Bude tak přesnější měřit digitálním multimetrem Metex M-3860D se 4-místným displejem, rozsahem do 40 mA a výrobcem udanou přesností ±(2,5% + 3 dgt), anebo bude lepší použít deprézský (analogový) miliampérmetr s třídou přesnosti 0,5 a rozsahem do 80 mA?

2 b. - Vypočítejte standardní nejistotu měření proudu digitálním přístrojem.

2 b. - Totéž pro analogový ampérmetr.

2 b. - Srovnejte oba přístroje – kdy bude který přístroj vhodnější.

Řešení:
Na rozsahu 4 – 25 mA se chyba digitálního přístroje mění, u analogového je na celém rozsahu neměnná.
a) Digitální přístroj
Při minimální hodnotě 4 mA bude na displeji 4.000 mA, takže chyba bude:

$$\Delta_{\mathrm{min}} = 0.025 \cdot 4\ \mathrm{mA} + 3 \cdot 0.001\ \mathrm{mA} = 0.103\ \mathrm{mA},$$

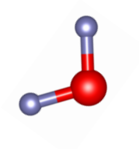
Při maximálním proudu 25 mA bude na displeji 25.00 mA, tedy:

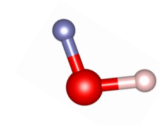
$$\Delta_{\mathrm{max}} = 0.025 \cdot 25\ \mathrm{mA} + 3 \cdot 0.01\ \mathrm{mA} = 0.655\ \mathrm{mA}.$$

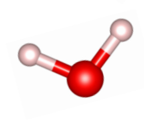
Standardní nejistota digitálního přístroje bude mezi $\sigma_{\mathrm{min}} = \frac{\Delta_{\mathrm{min}}}{\sqrt{3}} \cong 0.06\ \mathrm{mA}$ a $\sigma_{\mathrm{max}} = \frac{\Delta_{\mathrm{max}}}{\sqrt{3}} \cong 0.4\ \mathrm{mA}$.

b) Analogový přístroj
Na celém rozsahu je $\Delta = 0.005 \cdot 80\ \mathrm{mA} = 0.4\ \mathrm{mA}$, standardní nejistota tedy vyjde $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \cong 0.23\ \mathrm{mA}$.
c) Digitální je přesnější, dokud nedosáhne $\Delta = 0.4\ \mathrm{mA}\ \ (\sigma \cong 0.23\ \mathrm{mA})$, což nastane pro:
$(0.4\ \mathrm{mA} - 3 \cdot 0.01\ \mathrm{mA})/0.025 = 14.8\ \mathrm{mA}$
Na rozsahu od 4 do 14.8 mA je tedy vhodnější digitální přístroj, pro vyšší proudy už analogový.

Úloha 2. (4 body) Smíchali jsme 0,45 molu normální vody H_2O s neznámým množstvím těžké vody D_2O. V takové směsi je chemická výměna velmi rychlá, tzn. vodíkové atomy se libovolně vyměňují mezi molekulami. Důsledkem je, že se prakticky okamžitě ustanoví dynamická rovnováha mezi všemi třemi možnými isotopickými kombinacemi H_2O, HDO, a D_2O. (Isotopický efekt je zanedbatelný, tj. je chemicky úplně jedno, zda je jádrem vodíku proton nebo deuteron – oba druhy isotopů se tedy vážou v molekule vody zcela náhodně a nezávisle.)
Výslednou směs měříme jadernou magnetickou rezonancí na jádrech deuteria a ve spektru detekujeme dva odlišné signály: jednu čáru příslušející HDO a druhou čáru příslušející D_2O, a tyto čáry mají poměr intenzit *Int*(HDO) : *Int*(D_2O) = 9. Molekul HDO je tedy ve směsi 18x více než molekul D_2O.







2 b. - Spočítejte, jaké množství D_2O (v molech) bylo na začátku přimícháno do H_2O.

2 b. - Budeme-li měřit naopak signál normálního vodíku ^1H, naměříme také dvě čáry – pro H_2O a HDO. Jaký budou mít poměr intenzit?

Řešení:

a) Pravděpodobnost, že vodík ^{1}H bude v molekule vody právě *k*-krát, vyjadřuje binomické rozdělení:

$$B(n,k,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Takže pravděpodobnost, že daná molekula je D_2O, tj. jádra vodíku jsou obě deuteria, je:

$B(2,0,p) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2.$

Podobně vyjádříme pravděpodobnost pro molekulu HDO:

$B(2,1,p) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 = 2p(1-p)$

a H_2O:

$B(2,2,p) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 = p^2$.

Víme, že po ustálení isotopů poměr HDO a D_2O vyšel 18:1, tedy

$18 = \frac{2p(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{2p}{(1-p)}$, takže $p = \frac{9}{10}$

Parametr p má význam koncentrace jader ^{1}H (=proton), resp. $1-p$ udává koncentraci ^{2}H (D, deuteron), takže na začátku bylo přidáno $\frac{1}{9} \cdot 0.45 = 0.05 \text{ mol}$ těžké vody.

b) Pro $p = \frac{9}{10}$ stačí spočítat poměr pravděpodobností pro H_2O a HDO, tj. $\frac{p^2}{2p(1-p)} = \frac{p}{2(1-p)} = 4.5$, H_2O přispívá dvojnásobným signálem oproti HDO, takže poměr intenzit čar v ^{1}H spektru bude 9.

Úloha 3. (5 body) Studujeme optické signály, u kterých průměrně vzniká (a dopadá na náš detektor) 10^6 fotonů za sekundu. Signály jsou jednotlivé fotony, jsou tedy extrémně slabé, a proto k jejich detekci používáme fotonásobič v Geigerově režimu. V takovém nastavení je ale po detekci jedné události detektor po určitou krátkou dobu (tzv. mrtvá doba) neschopen detekovat žádnou jinou událost – pokud by tedy dopadl další foton na detektor dříve, než uplyne mrtvá doba, tak prostě není zaregistrován. Ten použitý detektor (i s celou související aparaturou) má mrtvou dobu 100 ns.

2 b. - Jaká je pravděpodobnost, že během mrtvé doby na detektor dopadne <u>právě jeden</u> foton?

3 b. - Stanovte účinnost detektoru, tj. spočtěte, jakou část z dopadajícího množství signálů detektor zvládne detekovat. (Pro jednoduchost uvažujte, že foton, který dopadne během mrtvé doby, s detektorem neinteraguje, tj. nevyvolá žádnou lavinu a tím třeba novou mrtvou dobu apod.)

Řešení:

a) Velké množství málo pravděpodobných a nezávislých událostí vede na použití Poissonova rozdělení:

$$P(k,\mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

Během mrtvé doby 100 ns na detektor v průměru dopadne $10^6 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{1}{100 \text{ ns}} = 0.1$ fotonů za sekundu.

Pravděpodobnost, že během mrtvé doby na detektor dopadne právě jeden foton je tedy:

$P(1, 0.1) = \frac{0.1^0 \, e^{-0.1}}{1!} = 0.090483 \sim 0.09.$

b) Účinnost detektoru vyjádříme jako pravděpodobnost, že během mrtvé doby nedopadne ani jeden foton:

$$P(0, 0.1) = \frac{0.1^0 \ e^{-0.1}}{0!} = 0.90483 \sim 0.9$$

Účinnost detektoru je tedy 90 %.