Seminární úlohy 7

1. Náhodné proměnné *x* a *y* jsou nezávislé s očekávanou hodnotou μ_x a μ_y a rozptylem σ_x^2 a σ_y^2. Vypočítejte očekávanou (střední) hodnotu veličiny $(x-y)^2$.

Řešení:

$$\langle (x-y)^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle - 2\langle xy\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 + \langle x\rangle^2 + \langle y^2\rangle - \langle y\rangle^2 + \langle y\rangle^2 - 2(Cov(x,y) + \langle x\rangle\langle y\rangle)$$
$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \langle x\rangle^2 + \langle y\rangle^2 - 2\langle x\rangle\langle y\rangle = \left(\mu_x - \mu_y\right)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

2. Náhodná proměnná *x* má rovnoměrné rozdělení na intervalu (0,1), náhodná proměnná *y* má rovnoměrné rozdělení na intervalu (0, *x*). Vypočítejte korelaci náhodných proměnných *x*, *y*.

Řešení:

Nejprve je potřeba určit tvar funkce hustoty pravděpodobnosti $f(x,y)$. Ačkoliv x i y jsou na svých intervalech rozděleny rovnoměrně, $f(x,y)$ není konstantní funkce, ale závisí na x. (Pro dané $x = x_0$ je proměnná y rozdělena rovnoměrně na intervalu $(0, x_0)$, takže hustota pravděpodobnosti bude $\frac{1}{x_0}$). Na celém oboru tak bude $f(x,y) = \frac{1}{x}$. Funkce je normovaná, jak ověříme spočtením

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}(x-0)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$$

Pro výpočet korelace $\frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\sigma_x\sigma_y}$ nyní potřebujeme znát všech pět příslušných středních hodnot $\langle xy\rangle$, $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$, $\langle x^2\rangle$, a $\langle y^2\rangle$:

$$\langle xy\rangle = \int_0^1 \int_0^x xy\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

$$\langle x\rangle = \int_0^1 \int_0^x x\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\langle y\rangle = \int_0^1 \int_0^x y\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

$$\langle x^2\rangle = \int_0^1 \int_0^x x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

$$\langle y^2\rangle = \int_0^1 \int_0^x y^2\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{3}x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{9}$$

Dále spočítáme σ_x a σ_y jako

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{12}$$

Výsledný koeficient korelace je tak roven:

$$\rho(x, y) = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{12}}\frac{\sqrt{7}}{12}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{7}}{12}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$