Vlastnosti estimátorů

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $\qquad x_i \in f(x|\boldsymbol{\theta})$ nezávislé
- parametry rozdělení $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$
- odhad (estimátor) $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, ..., \hat{\theta}_m)$
- Cíl: Najít nejlepší odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ parametrů $\boldsymbol{\theta}$.

---

1. konzistence

   pro $n \to \infty$ konverguje $\hat{\boldsymbol{\theta}} \to \boldsymbol{\theta}$

2. předpojatost

   $b \equiv E[\hat{\theta}] - \theta$ $\qquad b = 0$ $\Rightarrow$ nevychýlený (nepředpojatý) odhad

3. efektivita

   $E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = V[\hat{\theta}] + b^2$ $\qquad$ statistická a systematická chyba estimátoru

Metoda maximální věrohodnosti

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $x_i \in f(x|\boldsymbol{\theta})$ nezávislé
- parametry rozdělení $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$
- odhad (estimátor) $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, ..., \hat{\theta}_m)$
- Cíl: Najít nejlepší odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ parametrů $\boldsymbol{\theta}$.

- pravděpodobnost $P\left(x \in (x_i, x_i + \mathrm{d}x)\right) = f(x_i|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x$
- pravděpodobnost, že naměříme hodnoty $(x_1, x_2, ..., x_n)$ $P = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x$

věrohodnostní funkce $L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) \equiv \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\boldsymbol{\theta})$

- hledáme hodnoty $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, pro které L nabývá maximum $\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0 \qquad k = 1, 2, ..., m$

Odhad parametrů normálního rozdělení

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$

- hustota pravděpodobnosti $f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$

- věrohodnostní funkce $L(\mu,\sigma|\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$

$$\ln L(\mu,\sigma|\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n} \ln(\sqrt{2\pi\sigma^2})$$

- odhad očekávané hodnoty $\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}\right|_{\mu=\hat{\mu}} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

- odhad rozptylu $\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\hat{\sigma}} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}$

Musíme znát skutečnou očekávanou hodnotu!

Odhad parametrů normálního rozdělení

- odhad očekávané hodnoty $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (aritmetický průměr)
- odhad rozptylu $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \equiv s_0^2$
- předpojatost?

$$E[\hat{\mu}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \mu$$

$\Rightarrow$ nepředpojatý odhad

$$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[(x_i - \mu)^2] = \sigma^2$$

$\Rightarrow$ nepředpojatý odhad

$$E[s_0^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[(x_i - \bar{x})^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$\Rightarrow$ předpojatý odhad

- nepředpojatý odhad rozptylu $\boxed{s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Odhad parametrů normálního rozdělení

$$\Delta = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \times 100\%$$