Test č. 1 čtvrtek 5.12.2019 17:20

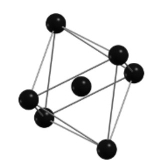
Úloha 1. (5 bodů) Geigerův-Müllerův detektor umístěný v blízkosti radioaktivního vzorku cesia (obsahující isotop ^{137}Cs) naměřil během jedné hodiny 9 216 událostí – rozpadů $ß^-$. Radionuklid ^{137}Cs má dlouhý poločas rozpadu (cca 30 let) a vzorek obsahuje obrovské množství těchto radioaktivních jader.
Jaký je očekávaný počet událostí za sekundu? Jaká je standardní odchylka? Vypočítejte pravděpodobnost, že během jedné sekundy detekujeme **právě čtyři** události.

Řešení: Ze zadání je patrné, že lze situaci popsat Poissonovým rozdělením. Počet událostí za sekundu je μ = 9216/3600 = 2,56. Standardní odchylka je rovna $\sqrt{\mu} = 1{,}6$. Pravděpodobnost, že nastanou právě čtyři události za sekundu je dána:

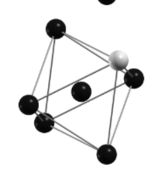
$$P(k = 4, \mu = 2{,}56) = \frac{2{,}56^4 e^{-2{,}56}}{4!} \doteq 0{,}138$$

Úloha 2. (10 bodů) Do krystalické látky tvořené atomy typu **X** byla přimíchána malá příměs ve formě atomů typu **Y**. Každý atom zkoumané látky má ve svém nejbližším okolí *n*=6 stejně vzdálených atomů a atomy typu **X** a **Y** obsazují polohy v krystalu zcela nahodile (nedochází tedy např. k nějakému shlukování).
Experimentální metodou jaderné magnetické rezonance jsme dokázali rozlišit dva signály:

a) Jeden intenzivní signál (o intenzitě I_a) odpovídjící případům, kdy byl atom **X** obklopen 6 atomy typu **X** (černé atomy); I_a je tedy přímo úměrná počtu situací na obrázku:



b) a jeden slabý signál (o intenzitě I_b) odpovídající případům, kdy je atom **X** obklopen 5 atomy typu **X** a jedním atomem příměsi **Y** (světle obarvený atom);
intenzita I_b je tak přímo úměrná počtu těchto situací na obrázku:



Poměr intenzity signálu v případech b) vůči intenzitě signálu případů a) vyšel: I_b/I_a = 0,02.
Vypočítejte **koncentraci** $\boldsymbol{c}$ příměsi **Y** (koncentraci atomů **Y** v látce).
Vypočítejte pravděpodobnost případů, kdy se v nejbližším okolí nacházejí **právě dva** atomy příměsi **Y**.

Řešení: Pravděpodobnost situací v případě a) je dána binomickým rozdělením, a tedy intensita je rovna

$I_a = K.\binom{6}{0} c^0(1-c)^6$, kde *K* je konstanta úměrnosti intenzity a četnosti situací a), a *c* je hledaná koncentrace. Podobně lze vyjádřit případy b) jako $I_b = K.\binom{6}{1} c(1-c)^5$. Známe poměr intensit, takže neznámou konstantu K lze eliminovat:

$$0{,}02 = \frac{I_b}{I_a} = \frac{K.\binom{6}{1} c(1-c)^5}{K.\binom{6}{0} c^0(1-c)^6} = \frac{6c}{1-c}$$

Hledaná koncentrace tak je $c = \frac{0{,}02}{6{,}02} \doteq 0{,}003$. Pravděpodobnost, že v nejbližším okolí jsou dvě příměsi je:

$$p = \binom{6}{2} c^2(1-c)^4 \doteq 0{,}0033$$