2. zápočtový test
(45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

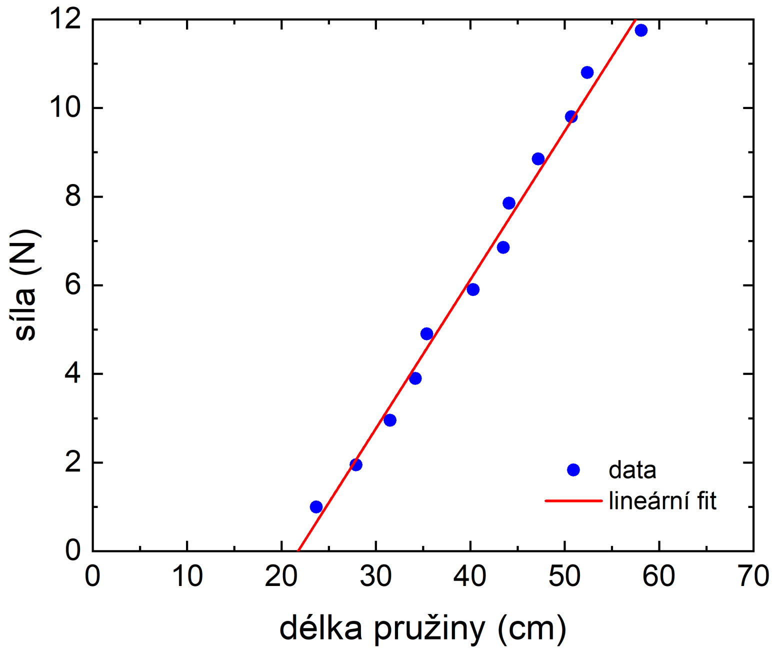
Příklad 1 - lineární regrese

Zadání:
V experimentu byla změřena závislost síly, napínající pružinu, na její délce. Pro velikost síly, působící na pružinu, platí lineární vztah

$$F = k \cdot \Delta y,$$

kde k je tuhost pružiny a Δy je prodloužení pružiny v důsledku síly F.

Naměřená závislost byla proložena obecnou přímkou danou rovnicí $\lambda(x) = ax + b$ s následujícími parametry: $a = 0.3354$, $\sigma_a = 0.0014$, $b = -7.2931$, $\sigma_b = 0.0603$, $\mathrm{cov}(a, b) = -0.000084$.
Určete tuhost pružiny a její délku v nezatíženém stavu.



Poznámky k řešení:

(a) Jaké jsou jednotky veličin a, σ_a, b, σ_b a $\mathrm{cov}(a, b)$?

(b) Jaký je vztah mezi tuhostí pružiny k, délkou nezatížené pružiny y_0 a nafitovanými parametry a, b? Pro výpočet chyb k a y_0 použijte tyto vztahy a metodu přenosu chyb.

(c) Výsledky zapište **ve správném tvaru** a se správnou jednotkou!

(10 bodů)

Řešení:
Označme si sílu jako F a délku pružiny jako y. Závislost $F(y)$ jsme nafitovali lineární funkcí s předpisem $F = ay + b$. Z obrázku vidíme, že jednotkou síly je $[F] = \mathrm{N}$, zatímco jednotkou délky je $[y] = \mathrm{cm}$. Parametr a má tudíž jednotku $[a] = \mathrm{N\ cm^{-1}}$ a parametr b má jednotku $[b] = \mathrm{N}$. Totéž samozřejmě platí i pro (absolutní) chyby těchto parametrů σ_a a σ_b. Kovariance $\mathrm{cov}(a, b)$ má stejnou jednotku jako součin chyb $\sigma_a\sigma_b$, tj. $[\mathrm{cov}(a, b)] = \mathrm{N^2cm^{-1}}$.

Lineární závislost působící síly na prodloužení pružiny si upravíme následovně.

$$F = k(y - y_0)$$
$$F = ky - ky_0 \tag{1}$$

Rovnice (1) tedy odpovídá lineární funkci se směrnicí $a = k$ a konstantním členem $b = -ky_0$. Dosazením do těchto vztahů vypočítáme tuhost pružiny k a její délku v nenapjatém stavu y_0.

$$k = a \tag{2}$$
$$k = 0.3354\ \mathrm{N\ cm^{-1}} = 33.54\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$

$$y_0 = -\frac{b}{a} \tag{3}$$
$$y_0 = 21.74\ \mathrm{cm} = 0.2174\ \mathrm{m}$$

Chyba tuhosti σ_k se přímo rovná chybě σ_a parametru a. Musíme si dát jen pozor na jednotku a zaokrouhlit výslednou chybu na 1 platnou číslici.

$$\sigma_k = \sigma_a \tag{4}$$
$$\sigma_k = 0.0014\ \mathrm{N\ cm^{-1}} = 0.14\ \mathrm{N\ m^{-1}} \doteq 0.1\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$

Chybu délky σ_{y_0} získáme použitím metody přenosu chyb na rovnici (3).

$$\sigma_{y_0}^2 = \left(\frac{\partial y_0}{\partial a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial b}\sigma_b\right)^2 + 2\left(\frac{\partial y_0}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial y_0}{\partial b}\right)\mathrm{cov}(a, b)$$
$$\sigma_{y_0}^2 = \left(\frac{b}{a^2}\sigma_a\right)^2 + \left(-\frac{1}{a}\sigma_b\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)\mathrm{cov}(a, b)$$
$$\sigma_{y_0} = \sqrt{\left(\frac{b}{a^2}\sigma_a\right)^2 + \left(-\frac{1}{a}\sigma_b\right)^2 - 2\frac{b}{a^3}\mathrm{cov}(a, b)} \tag{5}$$
$$\sigma_{y_0} = 0.09\ \mathrm{cm} = 0.0009\ \mathrm{m}$$

Zapišme výsledek ve správném tvaru.

$$k = (33.5 \pm 0.1)\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$
$$\text{případně: } k = (33.5 \pm 0.1)\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$$

$$y_0 = (21.74 \pm 0.09)\ \mathrm{cm}$$
$$\text{případně: } y_0 = (217.4 \pm 0.9) \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

Příklad 2 - odhady parametrů

Zadání:
V tabulce je uvedeno 10 hodnot měření tloušťky tenké hliníkové vrstvy pomocí kontaktního profilometru.
Jaká je tloušťka tenké vrstvy?

n	d (nm)
1	211
2	213
3	212
4	212
5	218
6	205
7	215
8	220
9	225
10	228

Poznámky k řešení:

(a) Předpokládáme, že d je náhodná proměnná s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma)$. Určete parametry μ a σ jako nejlepší odhady těchto parametrů.

(b) Jaký typ neurčitosti (typ A nebo B) je standardní odchylka σ?

(c) Vypočítejte chybu odhadu očekávané hodnoty μ.

(d) Výsledek zapište **ve správném tvaru**!

(5 bodů)

Řešení:

(a) Očekávanou hodnotu odhadneme jako aritmetický průměr $\bar{d}$ naměřených hodnot tloušťky d_i. Standardní odchylku odhadneme pomocí vzorce pro nepředpojatý odhad.

$$\hat{\mu} = \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \tag{6}$$

$$\hat{\mu} = \bar{d} = 215.9 \text{ nm}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2\right)}$$

$$\hat{\sigma} = 6.9 \text{ nm}$$

Poznamenejme, že vztah (3), který lze získat jednoduchou úpravou vztahu (2), umožňuje jednodušší výpočet odhadu standardní odchylky $\hat{\sigma}$.

(b) Odchylku $\hat{\sigma}$ jsme zpracovali statistickými metodami, jedná se o neurčitost typu A.

(c) Každá naměřená hodnota d_i je zatížena pouze statistickou chybou $\hat{\sigma}$. Chybu aritmetického průměru spočítáme známým vzorcem, kde za chybu jednoho měření dosadíme chybu jednoho měření $\hat{\sigma}$.

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{d}} = 2.2 \text{ nm} \doteq 2 \text{ nm}$$

(d) Zapišme výsledek ve správném tvaru, tj. s průměrnou tloušťkou $\bar{d}$ i s chybou $\sigma_{\bar{d}}$ zaokrouhlenými na nanometry.

$$d = (226 \pm 2) \text{ nm}$$

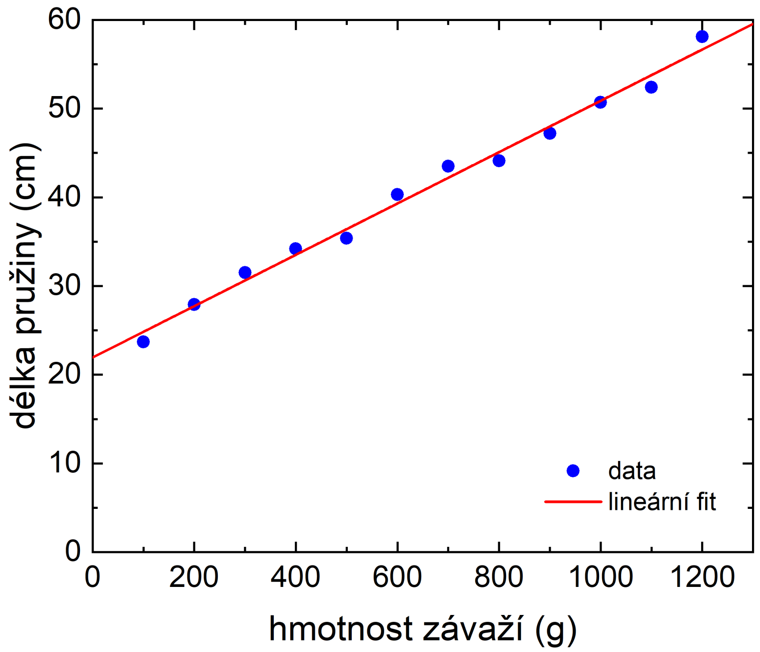
Příklad 3 - lineární regrese

Zadání:
V experimentu byla změřena závislost délky pružiny na hmotnosti závaží, kterým byla pružina zatížena. Pro velikost síly, působící na pružinu, platí lineární vztah

$$F = k \cdot \Delta y,$$

kde k je tuhost pružiny a Δy je prodloužení pružiny v důsledku síly F.

Naměřená závislost byla proložena obecnou přímkou danou rovnicí $\lambda(x) = ax+b$ s následujícími parametry: $a = 0.02894$, $\sigma_a = 0.00017$, $b = 21.94$, $\sigma_b = 0.12$. Určete tuhost pružiny a její délku v nezatíženém stavu. Počítejte s velikostí tíhového zrychlení $g = 9.81$ m s^{-2}.



Poznámky k řešení:

(a) Jaké jsou jednotky veličin a, σ_a, b, σ_b?

(b) Jaký je vztah mezi tuhostí pružiny k, délkou nezatížené pružiny y_0 a nafitovanými parametry a, b? Pro výpočet chyb k a y_0 použijte tyto vztahy a metodu přenosu chyb.

(c) Výsledky zapište **ve správném tvaru** a se správnou jednotkou!

(5 bodů)

Řešení:
Označme si délku pružiny jako y a hmotnost závaží jako m. Závislost $y(m)$ jsme nafitovali lineární funkcí s předpisem $y = am + b$. Z obrázku vidíme, že jednotkou délky je $[y] = \mathrm{cm}$, zatímco jednotkou hmotnosti je $[m] = \mathrm{g}$. Parametr a má tudíž jednotku $[a] = \mathrm{cm\ g^{-1}}$ a parametr b má jednotku $[b] = \mathrm{cm}$. Totéž samozřejmě platí i pro (absolutní) chyby těchto parametrů σ_a a σ_b.
Lineární závislost působící síly na prodloužení pružiny si upravíme následovně.

$$\begin{aligned} mg &= k(y - y_0) \\ y &= \frac{g}{k}m + y_0 \end{aligned} \tag{7}$$

Rovnice (1) tedy odpovídá lineární funkci se směrnicí $a = g/k$ a konstantním členem $b = y_0$. Dosazením do těchto vztahů vypočítáme tuhost pružiny k a její délku v nenapjatém stavu y_0.

$$k = \frac{g}{a} \tag{8}$$

$$k = 338.98\ \mathrm{m\ s^{-2}\ g\ cm^{-1}} = 33.898\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$$

$$y_0 = b \tag{9}$$

$$y_0 = 21.94\ \mathrm{cm} = 0.2194\ \mathrm{m}$$

Chybu tuhosti σ_k získáme použitím metody přenosu chyb na rovnici (2).

$$\sigma_k^2 = \left(\frac{\partial k}{\partial a}\sigma_a\right)^2$$

$$\sigma_k = \frac{g}{a^2}\sigma_a \tag{10}$$

$$\sigma_k = 1.96\ \mathrm{m\ s^{-2}\ g\ cm^{-1}} = 0.196\ \mathrm{kg\ s^{-2}} \doteq 0.2\ \mathrm{kg\ s^{-2}} \tag{11}$$

Chyba délky σ_{y_0} se přímo rovná chybě σ_b parametru b.

$$\sigma_{y_0} = \sigma_b \tag{12}$$

$$\sigma_{y_0} = 0.12\ \mathrm{cm} \doteq 0.1\ \mathrm{cm}$$

Zapišme výsledek ve správném tvaru, tj. s chybami zaokrouhlenými na 1 platnou číslici a středními hodnotami zaokrouhlenými na stejný řád platné číslice jako příslušné chyby.

$$k = (33.9 \pm 0.2)\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$$

$$y_0 = (21.9 \pm 0.1)\ \mathrm{cm}$$

$$\text{případně: } y_0 = (219 \pm 1) \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

Příklad 4 - odhady parametrů

Zadání:
V tabulce je uvedeno 10 hodnot měření tloušťky tenké hliníkové vrstvy pomocí kontaktního profilometru. S ohledem na drobné nerovnosti povrchu vrstvy (drsnost) a nedokonalost samotné měřicí metody, odhadujeme nepřesnost, jakou je dodatečně zatíženo každé měření, na 8 nm.
Jaká je tloušťka tenké vrstvy?

n	d (nm)
1	244
2	257
3	268
4	271
5	266
6	269
7	262
8	261
9	255
10	286

Poznámky k řešení:

(a) Předpokládáme, že d je náhodná proměnná s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma)$. Určete parametry μ a σ jako nejlepší odhady těchto parametrů.

(b) Definujte konfidenční interval pomocí 3σ-kriteria, tj. interval hodnot $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$. Ověřte, že podle tohoto kriteria nejsou naměřené hodnoty zatíženy hrubou chybou.

(c) Jaký typ neurčitosti (typ A nebo B) je standardní odchylka σ, vypočítaná v úloze (a)?

(d) Jaký typ neurčitosti (typ A nebo B) je dodatečná nepřesnost 8 nm, uvedená v zadání?

(e) Vypočítejte celkovou neurčitost σ_C jednoho měření tloušťky d.

(f) Vypočítejte chybu odhadu očekávané hodnoty μ, vypočítané v úloze (a).

(g) Výsledek zapište **ve správném tvaru**!

(10 bodů)

Řešení:
(a) Očekávanou hodnotu odhadneme jako aritmetický průměr $\bar{d}$ naměřených hodnot tloušťky d_i. Standardní odchylku odhadneme pomocí vzorce pro nepředpojatý odhad.

$$\hat{\mu} = \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \tag{13}$$

$$\hat{\mu} = \bar{d} = 263.9 \text{ nm}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2\right)}$$

$$\hat{\sigma} = 11.2 \text{ nm}$$

Poznamenejme, že vztah (3), který lze získat jednoduchou úpravou vztahu (2), umožňuje jednodušší výpočet odhadu standardní odchylky $\hat{\sigma}$.

(b) Konfidenční interval definovaný pomocí 3σ kritéria je tedy $d \in [230.3 \text{ nm}, 297.5 \text{ nm}]$. Vidíme, že všech 10 naměřených hodnot leží v tomto intervalu, předpokládáme tedy, že žádné měření nebylo zatíženo hrubou chybou.

(c) Odchylku $\hat{\sigma}$ jsme zpracovali statistickými metodami, jedná se o neurčitost typu A.

(d) Dodatečnou nepřesnost měřicí metody jsme odhadli jako 8 nm, jedná se o neurčitost typu B.

(e) Každá naměřená hodnota d_i je zatížena statistickou chybou (typu A) i systematickou chybou (typu B). Celková neurčitost jednoho měření σ_C je dána jako odmocnina součtu kvadrátů neurčitostí typu A a B.

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

$$\sigma_C = 13.8 \text{ nm}$$

(f) Chybu aritmetického průměru spočítáme známým vzorcem, kde za chybu jednoho měření dosadíme neurčitost typu C.

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_C}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{d}} = 4.35 \text{ nm} \doteq 4 \text{ nm}$$

(g) Zapišme výsledek ve správném tvaru, tj. s průměrnou tloušťkou $\bar{d}$ i s chybou $\sigma_{\bar{d}}$ zaokrouhlenými na nanometry.

$$d = (264 \pm 4) \text{ nm}$$