Seminární úlohy 6

1. Měření náhodné proměnné x, která je výběrem z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, opakujeme 20-krát. Jaká je pravděpodobnost, že více než 2/3 naměřených hodnot bude ležet v intervalu $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$, tj. intervalu jedné standardní odchylky od očekávané hodnoty?

Řešení:

Pravděpodobnost, že náhodná proměnná z normálním rozdělením bude ležet v intervalu $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ je $p \equiv P(x \in (\mu-\sigma, \mu+\sigma)) = F_{\mu,\sigma}(\mu+\sigma) - F_{\mu,\sigma}(\mu-\sigma) = erf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong 0.683$

Pravděpodobnost, že k hodnot z N měření padne do intervalu $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ je dána binomickým rozdělením: $P(k|N,p) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$, kde $N = 20$, $p = 0.683$.

Protože 2/3 z 20 je 13.333 je hledaná pravděpodobnost

$$P(k>13) = \sum_{k=14}^{20} P(k|20, 0.683) = \sum_{k=14}^{20} \frac{20!}{(20-k)!k!} 0.683^k 0.317^{N-k} = 0.543.$$

2. Náhodná proměnná x má exponenciální rozdělení popsané hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} \quad \text{pro } x \ge 0,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{pro } x < 0.$$

Vypočítejte

(a) očekávanou hodnotu této náhodné proměnné $\mu = \mathrm{E}[x]$

(b) distribuční funkci $\mathrm{F}(x)$ tohoto rozdělení.

(c) Jaké hodnoty nabývá distribuční funkce pro $x = \mu$?

(d) Jaká je pravděpodobnost, že x bude větší než μ?

Řešení:

Nejdříve ověříme, že hustota pravděpodobnosti je normalizovaná

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} dx = 0 + \left[-e^{-\frac{x}{\tau}}\right]_0^{\infty} = 1.$$

(a) Střední hodnota je

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} dx = 0 + \left[-xe^{-\frac{x}{\tau}}\right]_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\tau}} dx = 0 + 0 + \left[-\tau e^{-\frac{x}{\tau}}\right]_0^{\infty} = \tau.$$

Integrace byla provedena metodou *per partes*.

(b) Distribuční funkce je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \left[-e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{x} = 1 - e^{-\frac{x}{\tau}}.$$

(c) Hodnota distribuční funkce pro $x = \mu$ je $F(\mu) = F(\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} = 1 - e^{-1}$.

(d) Pravděpodobnost, že $x > \mu$ je $P(x > \mu) = P(x > \tau) = 1 - F(\tau) = e^{-1}$.