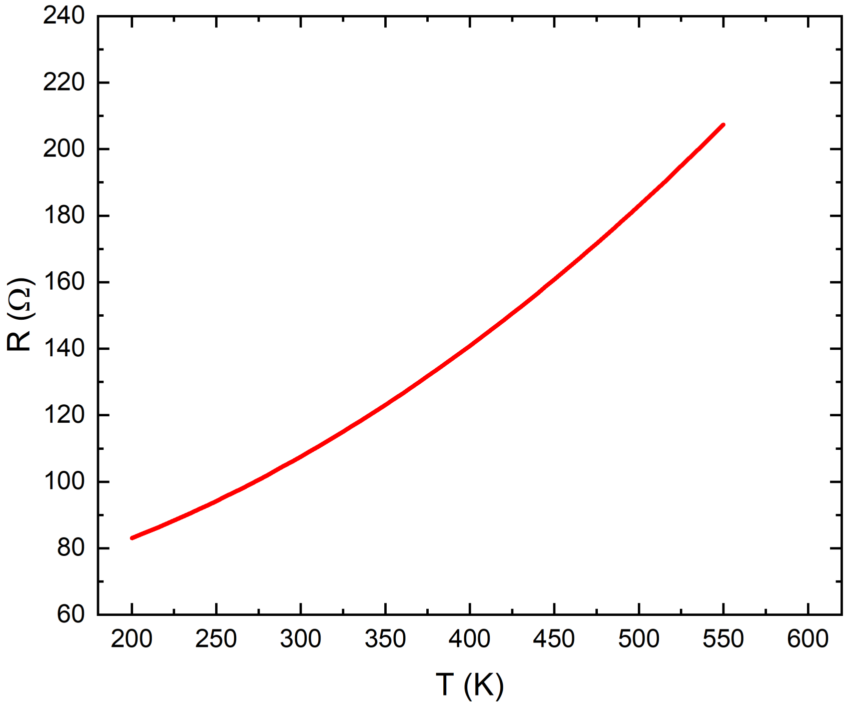
Opravný zápočtový test
(45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

Příklad 1 - interpolace a extrapolace

Zadání:
Podle údajů od výrobce závisí elektrický odpor R součástky na teplotě T kvadraticky podle funkce $R = a + bT + cT^2$ s následujícími nezávislými parametry:

$$
\begin{array}{ll}
a = 60.4\ \Omega & \sigma_a = 8.2\ \Omega \\
b = 25.2 \times 10^{-3}\ \Omega\,\mathrm{K}^{-1} & \sigma_b = 9.3 \times 10^{-3}\ \Omega\,\mathrm{K}^{-1} \\
c = 0.442 \times 10^{-3}\ \Omega\,\mathrm{K}^{-2} & \sigma_c = 0.048 \times 10^{-3}\ \Omega\,\mathrm{K}^{-2}
\end{array}
$$



Jaký je odpor součástky při teplotách $T_1 = 300$ K a $T_2 = 600$ K (očekávaná hodnota a chyba)? Výsledky zapište ve správném tvaru.

(10 bodů)

Řešení:
Spočítejme hodnoty odporů R_1 a R_2 dosazením teplot $T_1 = 300$ K a $T_2 = 600$ K do teoretického kvadratického vztahu.

$$R_1 = a + bT_1 + cT_1^2 = 107.74\ \Omega$$
$$R_2 = a + bT_2 + cT_2^2 = 234.64\ \Omega$$

Odpor R_1 jsme hledali uvnitř intervalu měřených teplot 200 - 550 K (interpolace), zatímco odpor R_2 jsme získali mimo tento interval (extrapolace).
V jednodušším případě nezávislých parametrů kvadratické funkce a, b, c jsou jejich vzájemné kovariance nulové. Chyby vypočítaných odporů R_1 a R_2 určíme pomocí metody přenosu chyb σ_a, σ_b, σ_c parametrů a, b, c.

$$\sigma_{R_1}^2 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial R_1}{\partial b}\sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial R_1}{\partial c}\sigma_c\right)^2$$
$$\sigma_{R_1}^2 = (\sigma_a)^2 + (\sigma_b T_1)^2 + \left(\sigma_c T_1^2\right)^2$$
$$\sigma_{R_1} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 T_1^2 + \sigma_c^2 T_1^4}$$
$$\sigma_{R_1} = 9.68\ \Omega$$

$$\sigma_{R_2}^2 = \left(\frac{\partial R_2}{\partial a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial b}\sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial c}\sigma_c\right)^2$$
$$\sigma_{R_2}^2 = (\sigma_a)^2 + (\sigma_b T_2)^2 + \left(\sigma_c T_2^2\right)^2$$
$$\sigma_{R_2} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 T_2^2 + \sigma_c^2 T_2^4}$$
$$\sigma_{R_2} = 19.92\ \Omega$$

Obě chyby σ_{R_1} a σ_{R_2} zaokrouhlíme na desítky Ω a podle nich zaokrouhlíme i očekávané hodnoty R_1 a R_2. Výsledné odpory můžeme zapsat ve tvaru:

$$R_1 = (110 \pm 10)\ \Omega$$
$$R_2 = (230 \pm 20)\ \Omega$$

nebo lépe[1] ve tvaru:

$$R_1 = (0.11 \pm 0.01)\ \text{k}\Omega$$
$$R_2 = (0.23 \pm 0.02)\ \text{k}\Omega$$

[1]Chyby ve tvaru $\sigma_{R_1} = 10\ \Omega$ a $\sigma_{R_2} = 20\ \Omega$ jsou uvedené na 2 platné číslice, což není správný výsledek. Proto je vhodnější je zapsat ve tvaru $\sigma_{R_1} = 0.01$ kΩ a $\sigma_{R_2} = 0.02$ kΩ obsahujícím pouze 1 platnou číslici. Poznamenejme, že výsledky zapsané na 2 platné číslice chyby jsou správně $R_1 = (108 \pm 10)\ \Omega$ a $R_2 = (235 \pm 20)\ \Omega$.

Příklad 2 - radioaktivní přeměna ^{64}Cu

Zadání:
Jádro radionuklidu ^{64}Cu se rozpadá s poločasem přeměny 12.7 h na:

(a) stabilní nuklid ^{64}Zn ve 38.4% případů (β^- rozpad)

(b) stabilní nuklid ^{64}Ni v 61.6% případů (β^+ rozpad a elektronový záchyt)

S jakou pravděpodobností bude produkt rozpadu 10 jader ^{64}Cu více než z poloviny tvořen jádry ^{64}Zn? Jaká je pravděpodobnost, že produktem rozpadu 10 jader ^{64}Cu bude právě 8 jader ^{64}Ni?

(5 bodů)

Řešení:
Pravděpodobnost, že produktem rozpadu 10 jader ^{64}Cu (počet „pokusů“ N) je právě k jader ^{64}Zn („úspěch“) a $(N-k)$ jader ^{64}Ni („neúspěch“), udává binomické rozdělení $P(k|N,p)$ s pravděpodobností $p = 0.384$.

$$P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Pravděpodobnost, že více než polovina přeměněných jader bude tvořena jádry ^{64}Zn, je rovna součtu pravděpodobností $P(k=6)$ až $P(k=10)$.

$$\begin{aligned} P(k>5) &= \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\ P(k>5) &= \binom{10}{6} 0.384^6 \times 0.616^4 + \binom{10}{7} 0.384^7 \times 0.616^3 \\ &+ \binom{10}{8} 0.384^8 \times 0.616^2 + \binom{10}{9} 0.384^9 \times 0.616^1 \\ &+ \binom{10}{10} 0.384^{10} \times 0.616^0 \end{aligned}$$

$$P(k>5) \doteq 0.141 = 14.1\%$$

Pravděpodobnost, že produktem rozpadu 10 jader bude právě 8 jader ^{64}Ni a 2 jádra ^{64}Zn, je:

$$\begin{aligned} P(k=2) &= \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 \\ P(k=2) &= 45 \times 0.384^2 \times 0.616^8 \end{aligned}$$

$$P(k=2) \doteq 0.138 = 13.8\%$$