Seminární úlohy 4

1. Náhodná proměnná x má rozdělení popsané hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Vypočítejte medián této náhodné proměnné. Pozn. medián je taková hodnota x pro které je distribuční funkce F = ½.

Řešení:

Distribuční funkce je definovaná jako $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ v tomto konkrétním případě je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 2te^{-t^2}dt = \left[-e^{-t^2}\right]_0^x = 1 - e^{-x^2}$$

Pro medián x_m platí $F(x_m) = 1/2$. Pro náš konkrétní tvar funkce F dostáváme

$$1 - e^{-x_m^2} = 1/2$$

Zlogaritmováním této rovnice dostaneme

$$x_m = \sqrt{ln2}$$

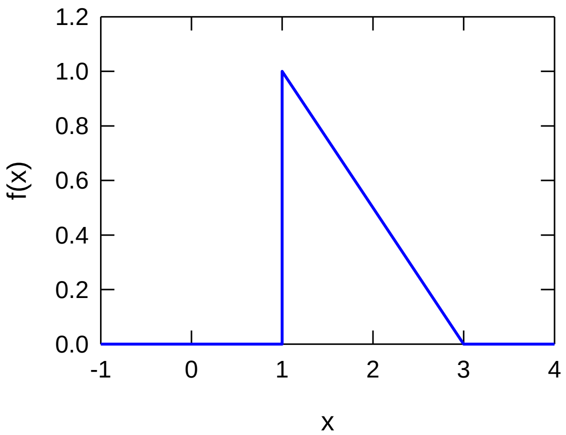
2. Vypočítejte očekávanou hodnotu rozdělení náhodné proměnné x popsané hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{2}(3 - x) \qquad \text{pro } x \in \langle 1,3 \rangle$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{jinak}$$

Řešení:

Hustota pravděpodobnosti vypadá takto:



Ověříme, že hustota pravděpodobnosti je normovaná

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{1}^{3} \frac{1}{2}(3 - x)dx = \frac{1}{2}\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(9 - \frac{9}{2} - 3 + \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Očekávanou hodnotu náhodné proměnné x spočítáme jako integrál

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{3} x\frac{1}{2}(3 - x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$