Binomické rozdělení

Házím N-krát korunou (N sudé). Jaká je pravděpodobnost že mi padne N/2-krát panna?

$$P = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

- každá sekvence pannen a orlů stejně pravděpodobná
- počet sekvencí kdy padne N/2 pannen: $\dfrac{N!}{\left(N-\frac{N}{2}\right)!\,\frac{N}{2}!} = \dfrac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}$

Binomické rozdělení

Házím *N*-krát korunou (*N* sudé). Jaká je pravděpodobnost že mi padne *N*/2-krát panna?

$$P = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

- každá sekvence pannen a orlů stejně pravděpodobná
- počet sekvencí kdy padne *N*/2 pannen: $\dfrac{N!}{\left(N-\frac{N}{2}\right)!\,\frac{N}{2}!} = \dfrac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}$

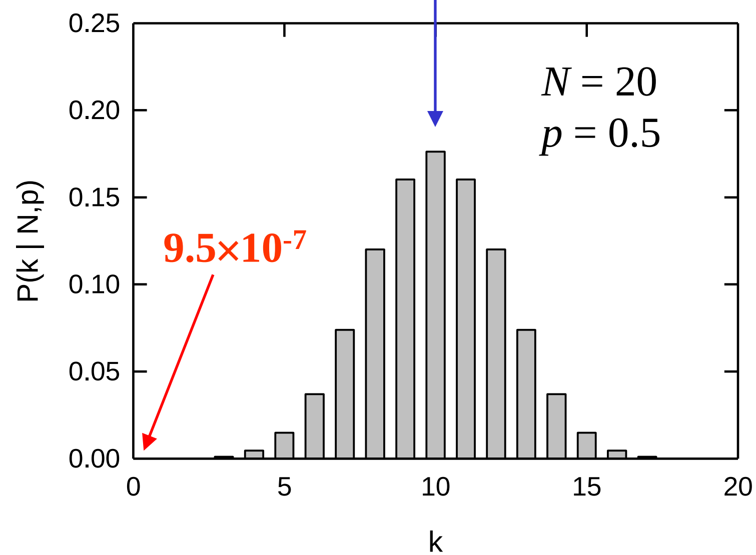
0.176

- obecný případ *k*-krát panna:

$$P(k|N,p) = \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k}$$

$$E[k] \equiv \mu = \sum_{k=0}^{N} \frac{k\,N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k} = Np$$

$$V[k] \equiv \sigma^2 = E[k^2] - (E[k])^2 = Np(1-p)$$



Binomické rozdělení

Házím N-krát korunou (N sudé). Jaká je pravděpodobnost že mi padne $N/2$-krát panna?

$$P = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

- každá sekvence pannen a orlů stejně pravděpodobná

- počet sekvencí kdy padne $N/2$ pannen: $$\frac{N!}{\left(N-\frac{N}{2}\right)!\,\frac{N}{2}!} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}$$

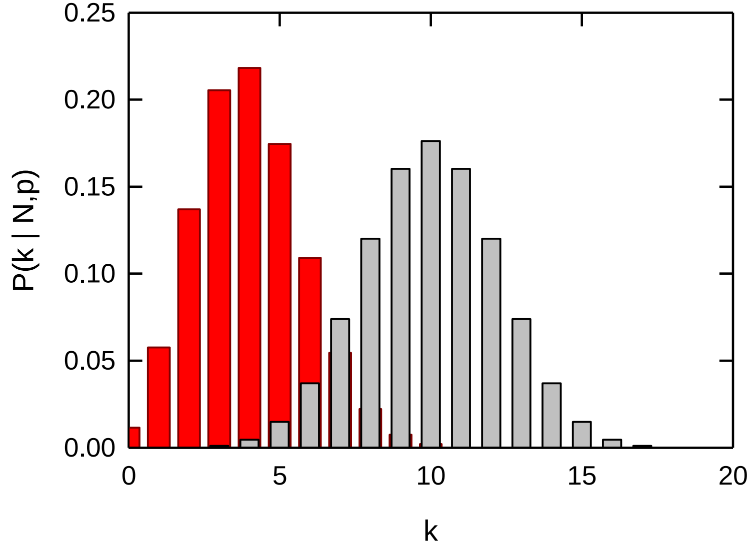
- obecný případ k-krát panna:

$$P(k|N,p) = \frac{N!}{k!(N-k)!}\,p^k(1-p)^{N-k}$$

$$E[k] \equiv \mu = \sum_{k=0}^{N} \frac{k\,N!}{k!(N-k)!}\,p^k(1-p)^{N-k} = Np$$

$$V[k] \equiv \sigma^2 = E[k^2] - (E[k])^2 = Np(1-p)$$

$N = 20$ $p = 0.2$ $N = 20$ $p = 0.5$



Binomické rozdělení

Házím *N*-krát korunou (*N* sudé). Jaká je pravděpodobnost že mi padne *N*/2-krát panna?

$$P = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

• každá sekvence pannen a orlů stejně pravděpodobná

• počet sekvencí kdy padne *N*/2 pannen:
$$\frac{N!}{\left(N-\frac{N}{2}\right)!\,\frac{N}{2}!} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}$$

• obecný případ *k*-krát panna:

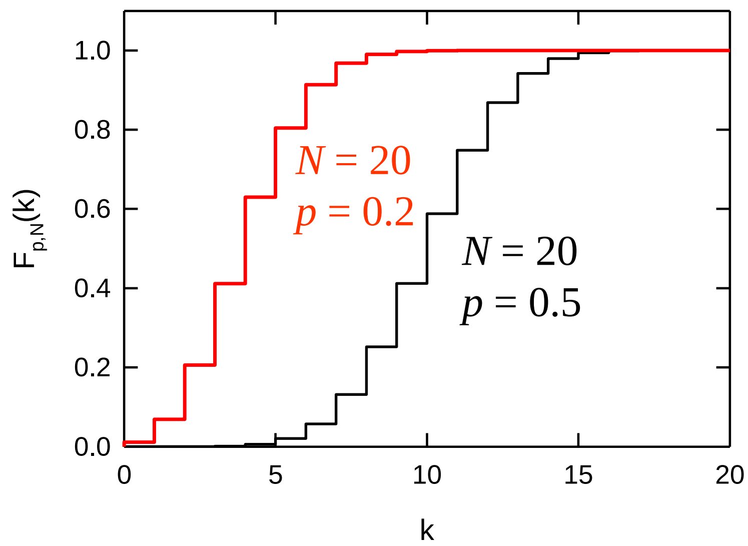
$$P\left(k\middle|N,p\right) = \frac{N!}{k!\left(N-k\right)!}\,p^k\left(1-p\right)^{N-k}$$

$$E[k] \equiv \mu = \sum_{k=0}^{N} \frac{k\,N!}{k!\left(N-k\right)!}\,p^k\left(1-p\right)^{N-k} = Np$$

$$V[k] \equiv \sigma^2 = E\left[k^2\right] - \left(E[k]\right)^2 = Np(1-p)$$

• distribuční funkce

$$F_{N,p}(k) = \sum_{l=0}^{k} P(l|N,p) = \sum_{l=0}^{k} \frac{N!}{(N-l)!\,l!}\,p^l(1-p)^{N-l}$$



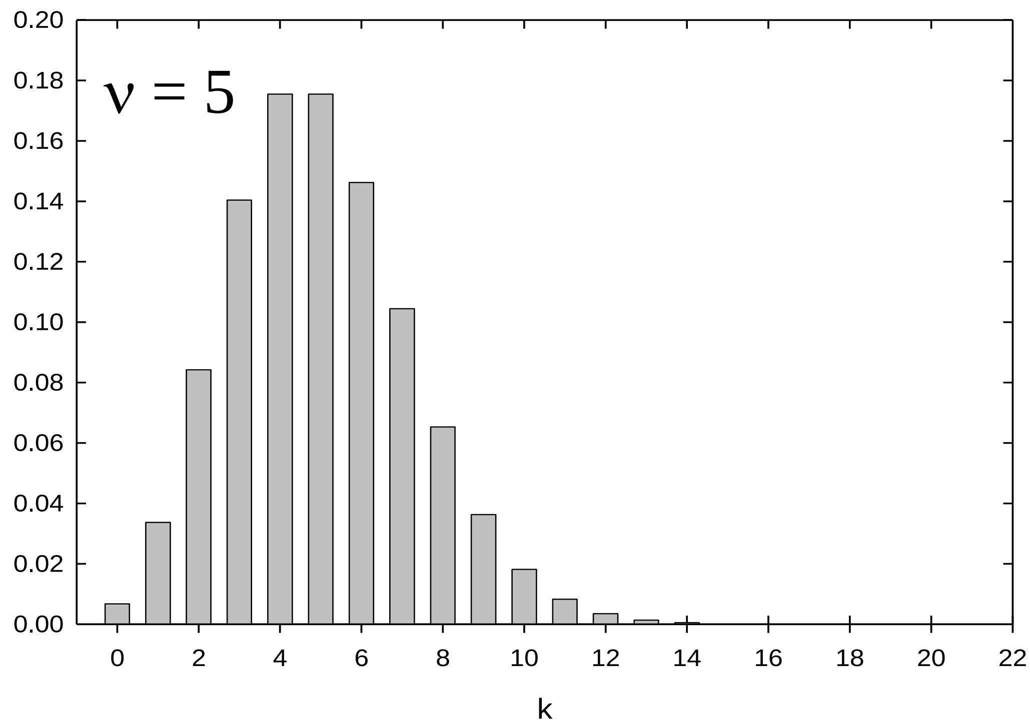
Poissonovo rozdělení

$$Np = \nu = \text{konst.},\ N \to \infty,\ p \to 0$$

$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

$$E[k] \equiv \mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} = \nu$$

$$V[k] \equiv \sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\nu)^2 \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} = \nu$$



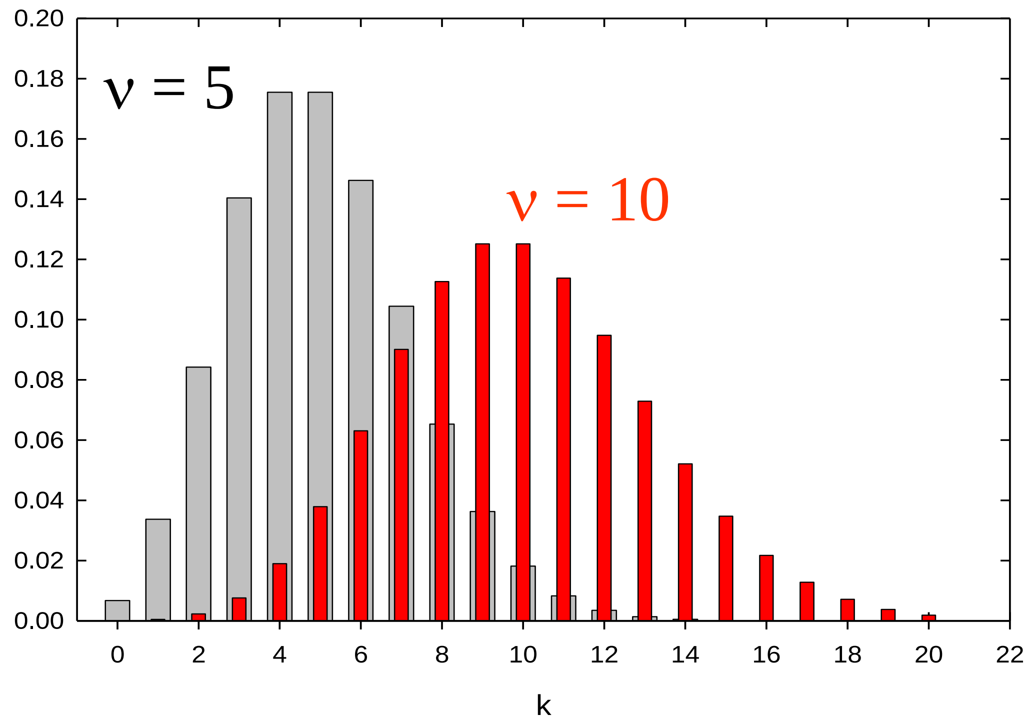
Poissonovo rozdělení

$$Np = \nu = \text{konst.},\ N \to \infty,\ p \to 0$$

$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

$$E[k] \equiv \mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} = \nu$$

$$V[k] \equiv \sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\nu)^2 \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} = \nu$$



Poissonovo rozdělení

$$Np = \nu = \text{konst.},\ N \to \infty,\ p \to 0$$

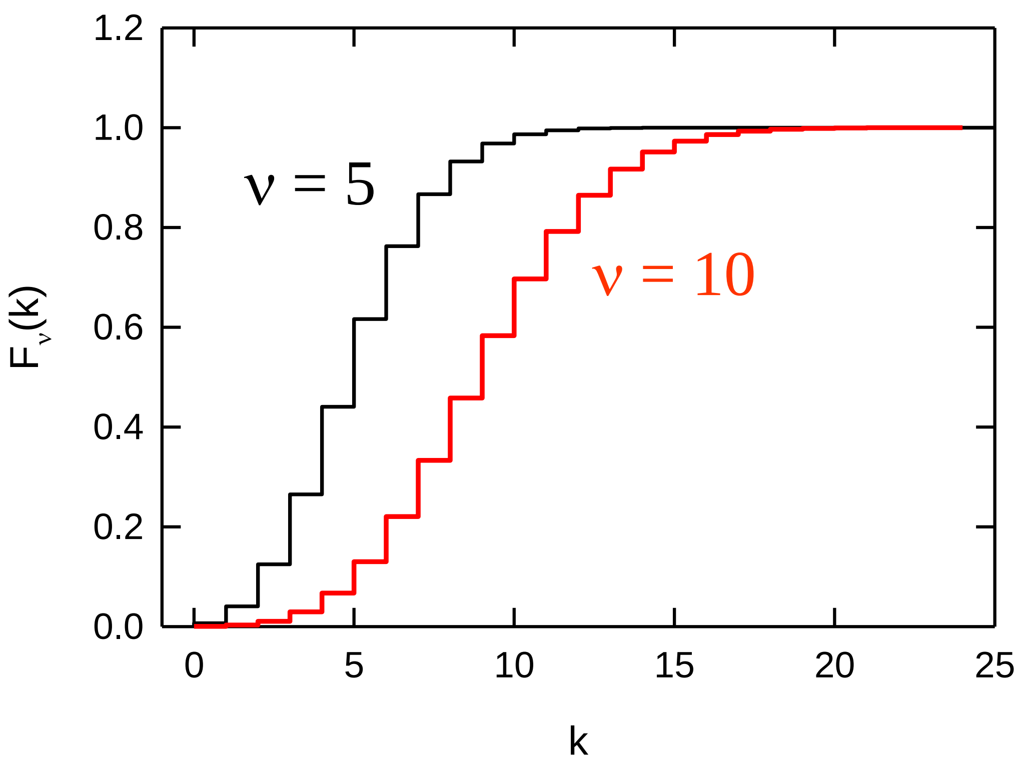
$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

$$E[k] \equiv \mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} = \nu$$

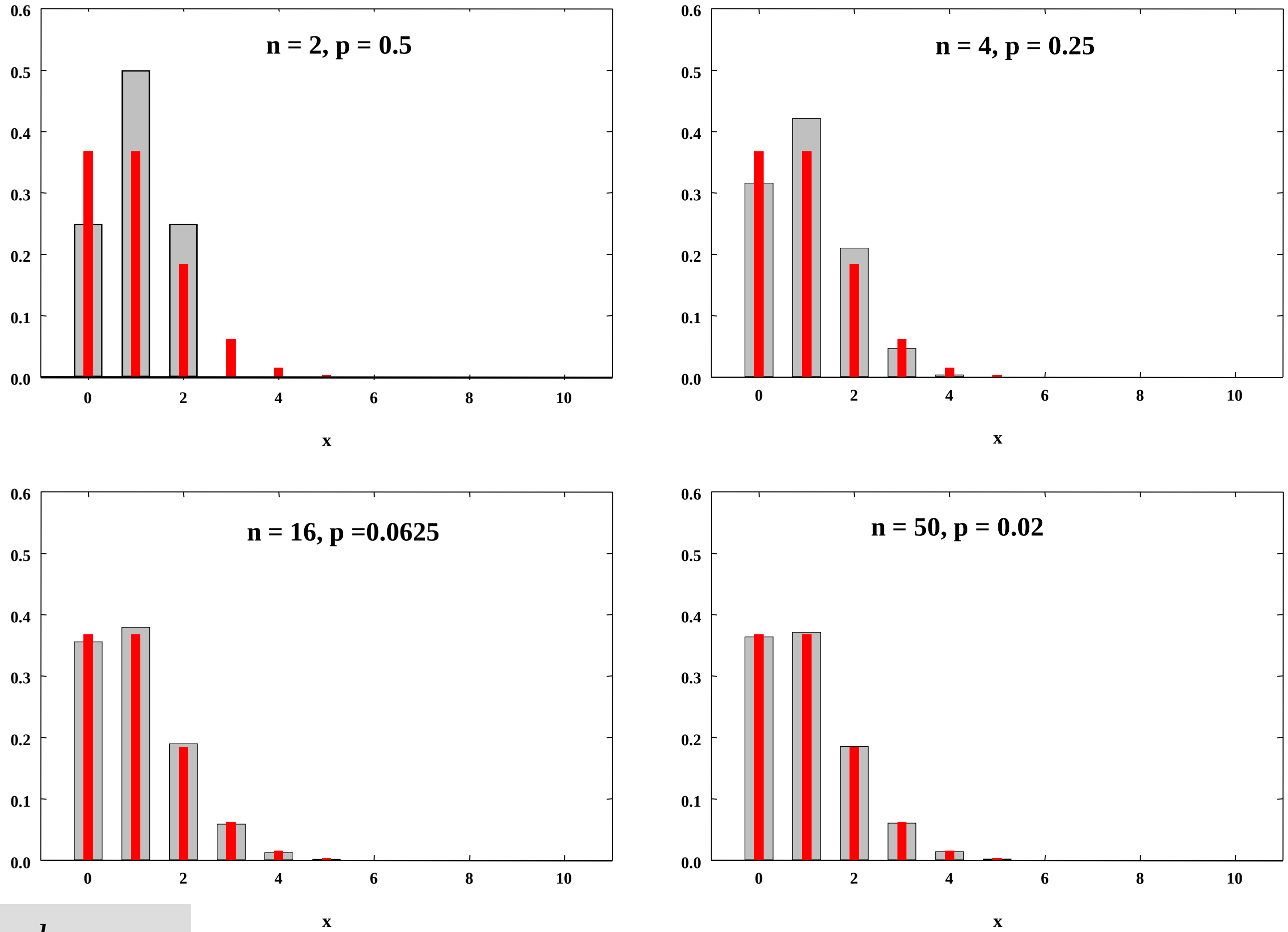
$$V[k] \equiv \sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\nu)^2 \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} = \nu$$

• **distribuční funkce:**

$$F_\nu(k) = \sum_{l=0}^{k} P(l|\nu) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\nu^l e^{-\nu}}{l!}$$



Poissonovo rozdělení

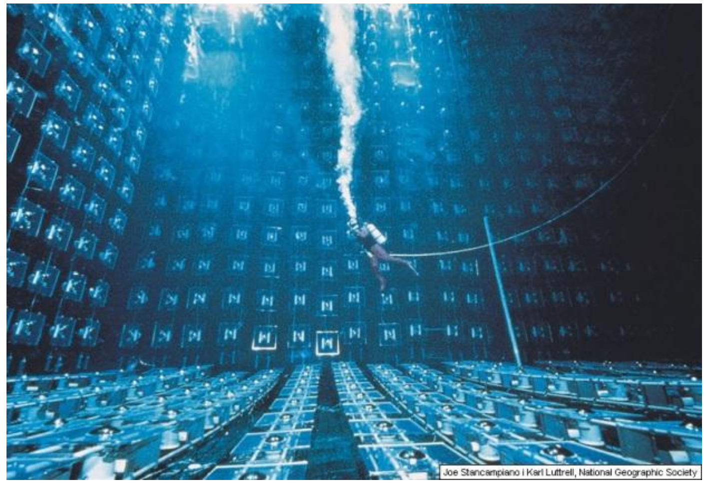


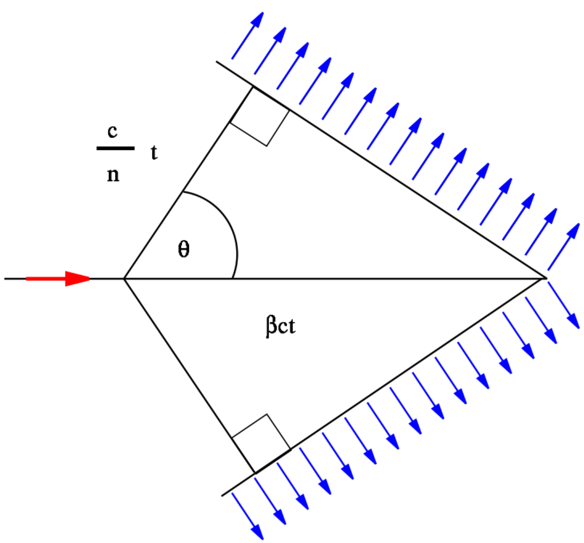
$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

$$\nu = 1$$

Irvine-Michigan-Brookhaven detektor

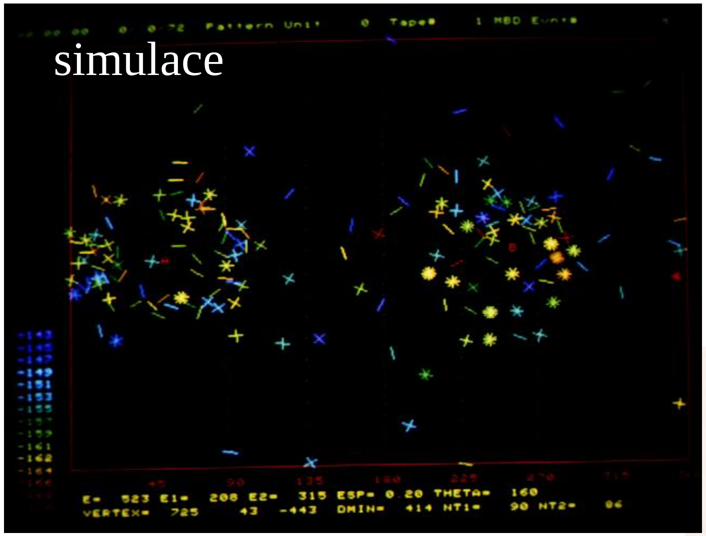
- detektor Čerenkovova záření
- bazén $17 \times 17.5 \times 23\ \mathrm{m}^3$ (6 842 500 l) ultra čisté vody
- v solném dolu 600 m pod zemí
- 2048 fotonásobičů

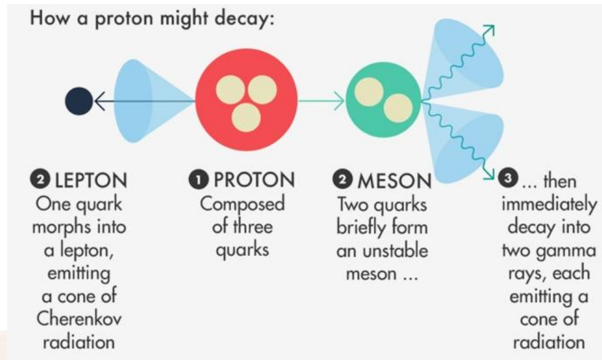


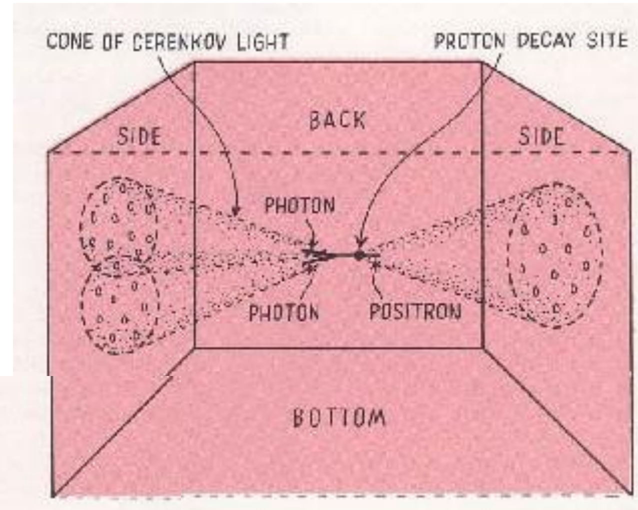


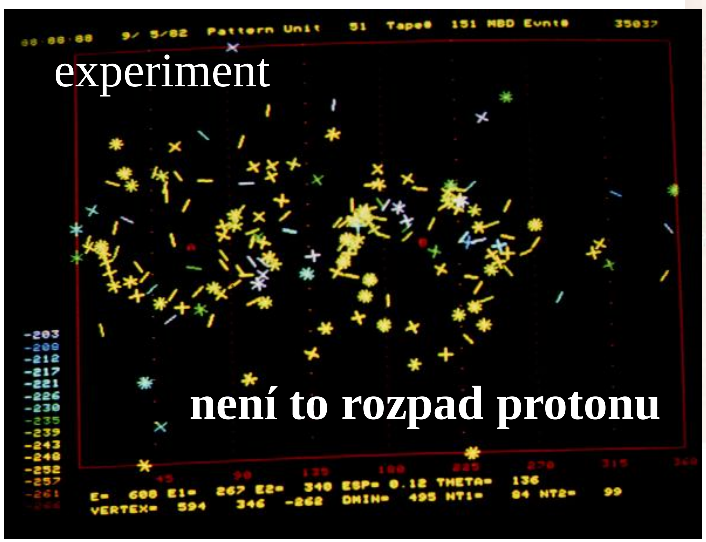
Irvine-Michigan-Brookhaven detektor

- **rozpad protonu:** $p^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$ $\quad 6.5 \times 10^{34}$ roku

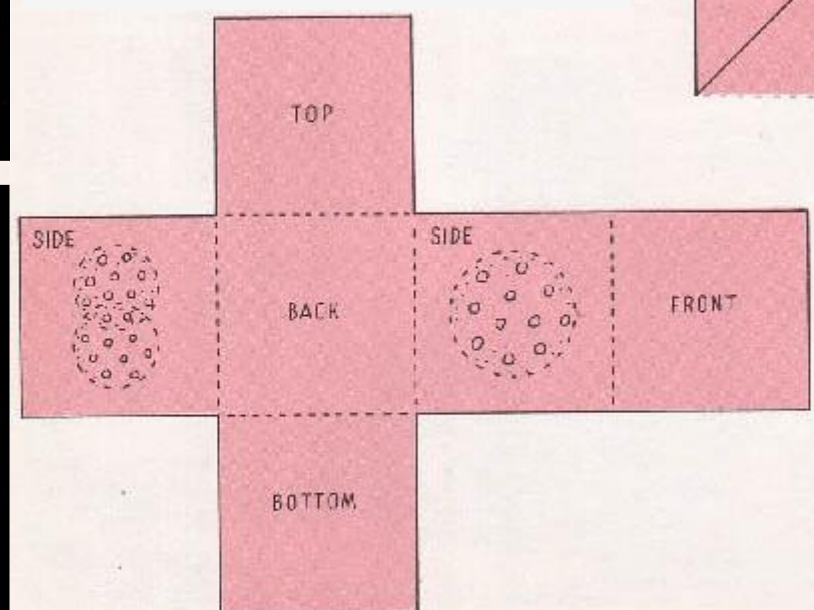




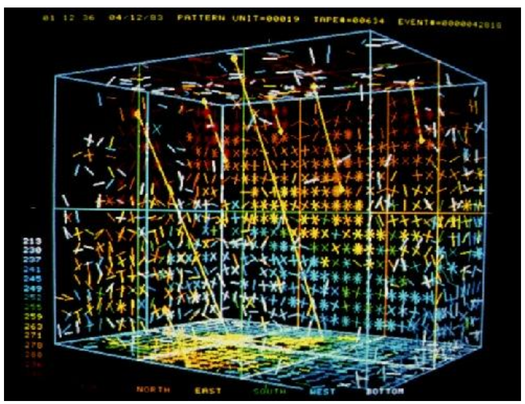




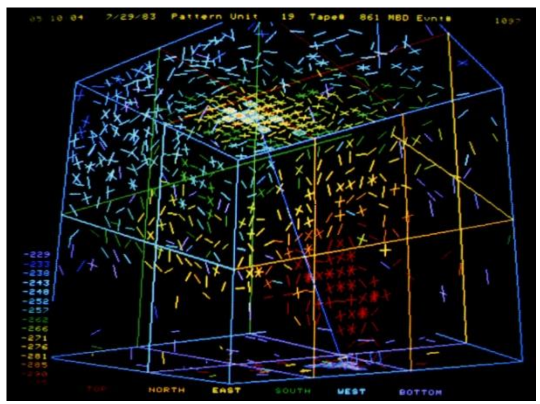
není to rozpad protonu



Detekce neutrin



7 mionů z kosmického záření



mion vytvořený neutrinem

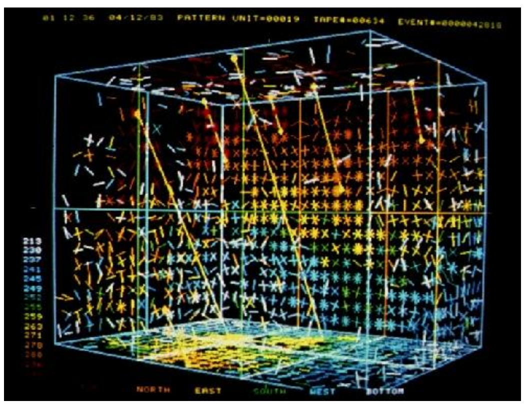
Detekce neutrin

Irvine-Michigan-Brookhaven, 23.2. 1987

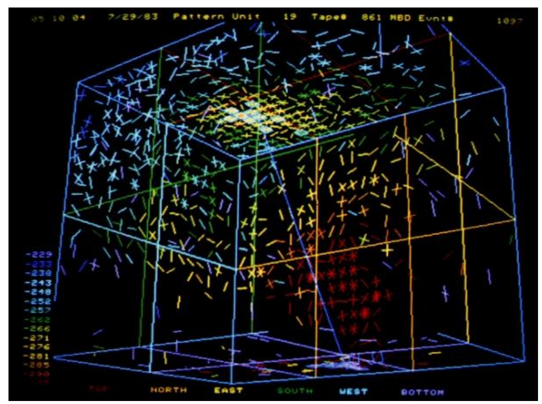
• detekce neutrin: interval = 10 s

No. of events	0	1	2	3	4	5	6	7	8
No. of intervals	1042	860	307	78	15	3	0	0	1

Jaká je pravděpodobnost, že v jednom intervalu bude detekováno 8 nebo více neutrin?



7 mionů z kosmického záření



mion vytvořený neutrinem

Detekce neutrin

Irvine-Michigan-Brookhaven, 23.2. 1987

• detekce neutrin: interval = 10 s

No. of events	0	1	2	3	4	5	6	7	8
No. of intervals	1042	860	307	78	15	3	0	0	1

Jaká je pravděpodobnost, že v jednom intervalu bude detekováno 8 nebo více neutrin?

vážený průměr:

$(0\times1042+1\times860+2\times307+3\times78+4\times15+5\times3+6\times0+7\times0+8\times1)\ /(1042+860+307+78+15+3+1)=0.777$

Poissonovo rozdělení : $\hat{\nu} = 0.777$

Počet intervalů: N = 2306

Detekce neutrin

Irvine-Michigan-Brookhaven, 23.2. 1987

• detekce neutrin: interval = 10 s

supernova SN1987a

P = 1.7×10^{-6}

No. of events	0	1	2	3	4	5	6	7	8
No. of intervals	1042	860	307	78	15	3	0	0	1
Poisson prediction	1061	824	320	83	16	2	0.3	0.04	0.003

Velké Magellanovo mračno
51 kpc

$$N\frac{\hat{\nu}^k e^{-\hat{\nu}}}{k!}$$

Poissonovo rozdělení : $\hat{\nu} = 0.777$

Počet intervalů: *N* = 2306

Pravděpodobnost, že detekujeme 8 nebo ještě více neutrin

$$P(k \geq 8) = 1 - \sum_{k=0}^{7} \frac{\hat{\nu}^k e^{-\hat{\nu}}}{k!} = 1.7 \times 10^{-6}$$

Detekce neutrin

supernova SN1987a

Velké Magellanovo mračno
51 kpc

záblesk neutrin ~2.5 h před světelným zábleskem

SNEWS: SuperNova Early Warning System