

# Druhý opravný zápočtový test (45 minut)

Úvod do praktické fyziky  
NOFY055

# Příklad 1

## Zadání:

Dva studenti naměřili nezávisle na sobě 10 hodnot rychlosti proudící kapaliny  $v$ . Výsledky měření jsou uvedeny v následující tabulce. Předpokládáme, že náhodná proměnná  $v$  má normální rozdělení.

$n$	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )	$n$	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )
1	3.89	1	5.39
2	3.38	2	4.88
3	7.08	3	10.56
4	3.32	4	6.22
5	4.40	5	3.83
6	1.76	6	2.03
7	5.85	7	6.20
8	3.07	8	5.49
9	4.96	9	5.32
10	5.88	10	4.81

Pro oba studenty zvlášť:

- (a) spočítejte odhad očekávané hodnoty  $\hat{\mu}_v$ .
- (b) spočítejte odhad standardní odchylky  $\hat{\sigma}_v$ .
- (c) spočítejte chybu průměrné rychlosti  $\bar{v}$ .
- (d) запиште výsledek (průměrná rychlost a její chyba) ve **správném** tvaru.

Poznámka: Za 5 bodů navíc vyřešte úlohy (a) – (d) pro všechny naměřené hodnoty dohromady.

(10 bodů)

## Řešení:

Předpokládáme-li, že rychlost  $v$  má normální rozdělení, potom její očekávanou hodnotu a standardní odchylku můžeme odhadnout jako:

$$\hat{\mu}_v = \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i,$$
$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}.$$

Očekávaná (průměrná) hodnota rychlosti změřená 1. a 2. studentem jsou tedy aritmetickými průměry naměřených hodnot.

$$\hat{\mu}_{v_1} = \bar{v}_1 = 4.36 \text{ cm s}^{-1}$$
$$\hat{\mu}_{v_2} = \bar{v}_2 = 5.47 \text{ cm s}^{-1}$$

Vzorec pro výpočet odhadu standardní odchylky si ještě můžeme zjednodušit jako:

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 - n\bar{v}^2 \right)}.$$

$$\hat{\sigma}_{v_1} = 1.60 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_{v_2} = 2.17 \text{ cm s}^{-1}$$

Chyba aritmetického průměru, spočítaná metodou přenosu chyb, je rovna podílu standardní odchylky a odmocniny z počtu naměřených hodnot.

$$\hat{\sigma}_{\bar{v}_1} = \frac{\hat{\sigma}_{v_1}}{\sqrt{n}} \doteq 0.5 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{v}_2} = \frac{\hat{\sigma}_{v_2}}{\sqrt{n}} \doteq 0.7 \text{ cm s}^{-1}$$

Výsledek měření, tj. průměrné hodnoty rychlosti a jejich chyby zapíšeme v následujícím tvaru.

$$v_1 = (44 \pm 5) \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$$

$$v_2 = (55 \pm 7) \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$$

Počítáme-li se všemi hodnotami, naměřenými oběma studenty, získáme na základě předchozích vzorců tyto hodnoty  $\hat{\mu}_v$ ,  $\hat{\sigma}_v$  a  $\hat{\sigma}_{\bar{v}}$ .

$$\hat{\mu}_v = 4.92 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_v = 1.94 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{v}} = 0.43 \text{ cm s}^{-1}$$

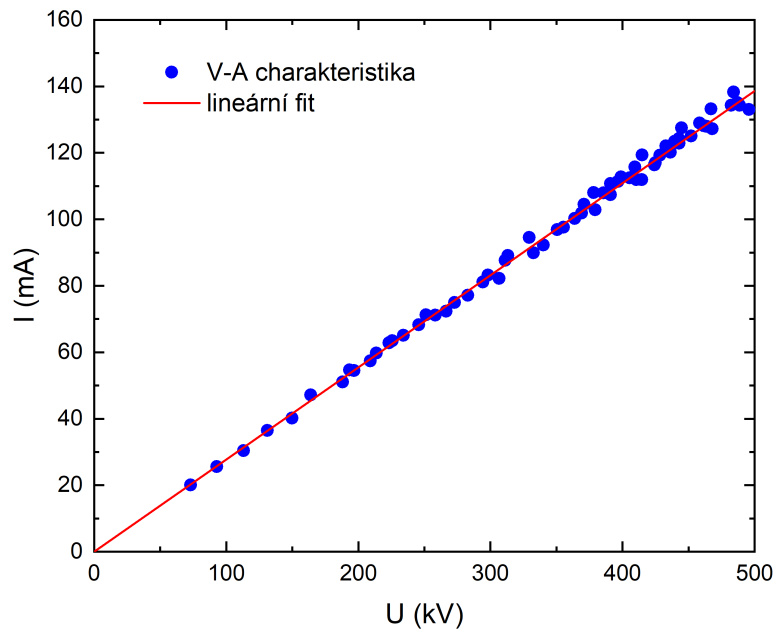
$$v = (49 \pm 4) \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$$

Poznámka: Vidíme, že průměrná rychlost je rovna průměru rychlostí  $\bar{v}_1$  a  $\bar{v}_2$ , nebo obecněji váženému průměru rychlostí  $\bar{v}_1$  a  $\bar{v}_2$  při různém počtu naměřených hodnot. Průměrné hodnoty počítáme pouze z naměřených hodnot. Nezáleží tedy na tom, jestli nejprve spočítáme průměry pro první a druhé měření zvlášť a z nich následně výslednou průměrnou hodnotu, nebo jestli spočítáme výslednou průměrnou hodnotu pro všechny hodnoty najednou. Výsledek je v obou případech stejný.

Totéž ovšem **nemůžeme** tvrdit o odchylkách  $\hat{\sigma}_v$  a  $\hat{\sigma}_{\bar{v}}$ . Ty jsou na rozdíl od průměrů dány nejen naměřenými hodnotami, ale i samotnými průměrnými hodnotami. Odchylky  $\hat{\sigma}_{v_1}$  a  $\hat{\sigma}_{v_2}$ , resp.  $\sigma_{\bar{v}_1}$  a  $\sigma_{\bar{v}_2}$  **nelze** spojit v jedinou výslednou odchylku, aniž bychom se přitom nedopustili dodatečné chyby při výpočtu.

## Příklad 2

Na obrázku je graf závislosti elektrického proudu procházejícího rezistorem na přivedeném elektrickém napětí (modré body). Lineární regresí naměřených hodnot byla nalezena přímka (červená čára) procházející počátkem. Směrnice této přímky je číselně  $a = 0.27727$  s chybou  $\sigma_a = 0.00055$ .



- (a) Jakou jednotku (SI) má směrnice  $a$  a chyba  $\sigma_a$ ?
- (b) Vypočítejte odpor  $R$  rezistoru a jeho chybu  $\sigma_R$ .
- (c) Zapište výsledek ve **správném** tvaru.

(5 bodů)

### Řešení:

(a) Z grafu na obrázku vidíme, že jednotkou elektrického napětí jsou kV, zatímco jednotkou elektrického proudu jsou mA. Směrnice a její chyba má tudíž jednotku:

$$[a] = \frac{[I]}{[U]} = \frac{\text{mA}}{\text{kV}} = 10^{-6} \text{ A V}^{-1} = 10^{-6} \Omega^{-1}$$

(b) Směrnice závislosti proudu  $I$  na napětí  $U$  je rovna vodivosti rezistoru. Elektrický odpor  $R$  je roven převrácené hodnotě této směrnice.

$$R = \frac{1}{a} = 3.607 \times 10^6 \Omega$$

Chybu odporu  $\sigma_R$  získáme metodou přenosu chyb.

$$\sigma_R^2 = \left( \frac{\partial R}{\partial a} \sigma_a \right)^2$$

$$\sigma_R = \frac{\sigma_a}{a^2}$$

$$\sigma_R = 0.007 \times 10^6 \, \Omega$$

(c) Chybu  $\sigma_R$  zaokrouhlíme na 1 platnou číslici, očekávanou hodnotu odporu  $R$  zaokrouhlíme na stejný řád platné číslice jako u chyby  $\sigma_R$  a zapíšeme výsledek ve tvaru:

$$R = (3.607 \pm 0.007) \times 10^6 \, \Omega$$