Rozdělení pravděpodobnosti, distribuční funkce

diskrétní náhodná proměnná

Rozdělení pravděpodobnosti

$$p(x_i) \equiv p_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Distribuční funkce:

$$F(x) \equiv P(x_i < x)$$

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i) = \sum_{i \le k} p_i$$

spojitá náhodná proměnná

Hustota pravděpodobnosti

$$p \equiv f(x_0)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Distribuční funkce:

$$F(x') \equiv P(x < x')$$

$$F(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

Pravděpodobnost že $x \in \langle a, b \rangle$ je:

$$p = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

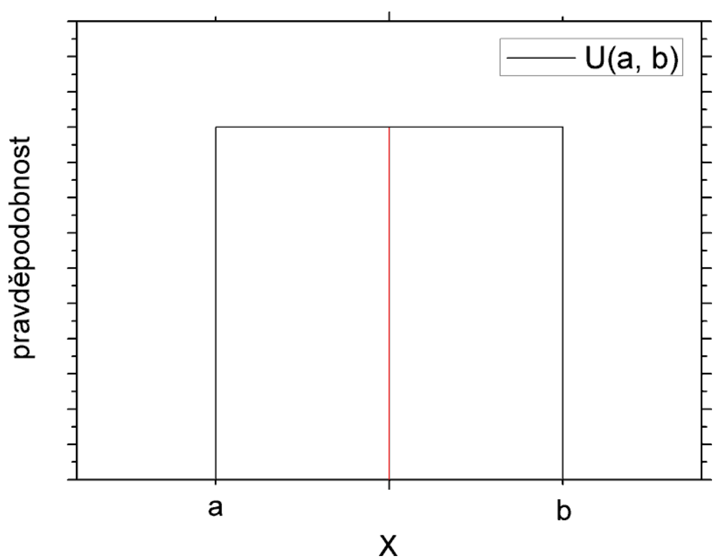
Distribuční funkce

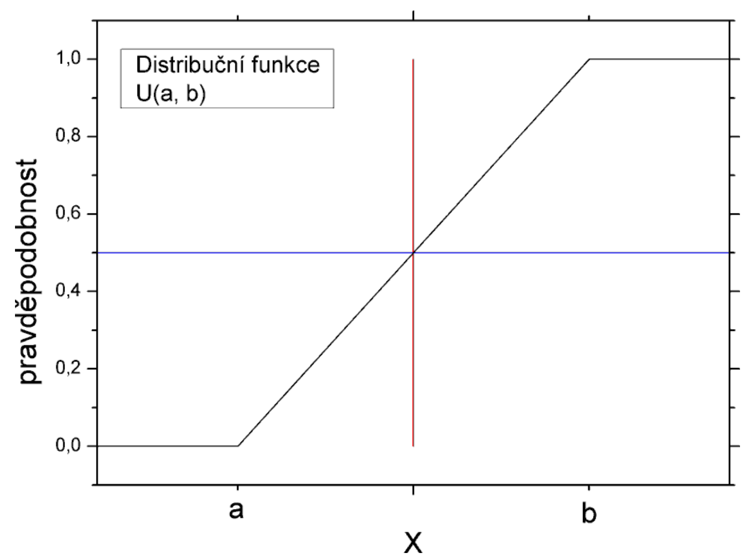
- příklad **rovnoměrné** rozdělení: $U(a,b)$

hustota pravděpodobnosti

distribuční funkce

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in\langle a,b\rangle\\ 0 & x\notin\langle a,b\rangle\end{cases} \xrightarrow{\int f(x)} F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & x\in\langle a,b\rangle\\ 1 & x>b\end{cases}$$





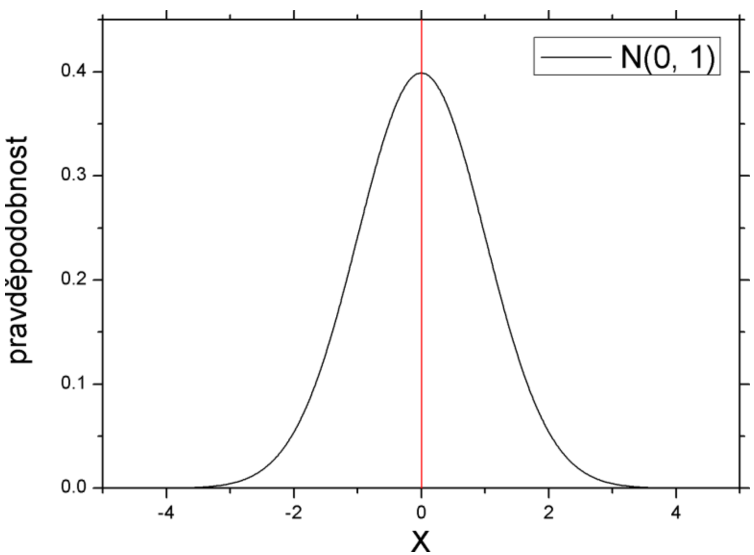
Distribuční funkce

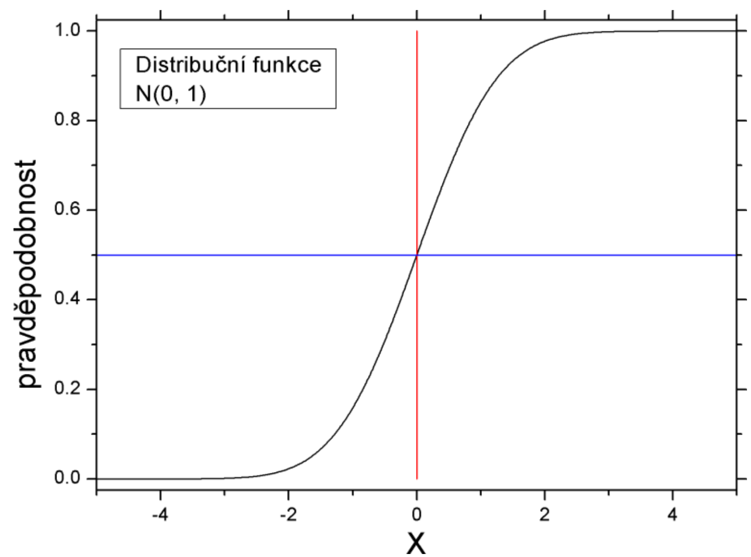
- příklad **normální** (Gaussovo) rozdělení: $N(\mu, \sigma)$

hustota pravděpodobnosti

distribuční funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow{\int f(x)} F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$





Momenty: střední hodnota a rozptyl

- operátor **střední hodnoty**: $E[\cdots] = \langle \cdots \rangle$

$$\mu \equiv E[x] = \sum_i x_i p_i \qquad \mu \equiv E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

- n-tý moment: $\mu_n \equiv E[x^n] = \sum_i x_i^n p_i \qquad \mu_n \equiv E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) \mathrm{d}x$

- n-tý **centrální** moment: $\mu_n' \equiv E[(x-\mu)^n]$

$$\mu_n' \equiv \sum_i (x_i - \mu_i)^n p_i \qquad \mu_n' \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f(x) \mathrm{d}x$$

- 1. centrální moment $\mu_1' = 0$
- 2. centrální moment - **disperze**, **rozptyl**, **variance**

$$\mu_2' = D(x) = V(x) = E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - (E[x])^2$$

„střední hodnota čtverce mínus čtverec střední hodnoty“

- **standardní** (směrodatná) **odchylka**: $\sigma = \sqrt{V(x)}$

fyzikální analogie:

hmotný střed:

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_i \vec{r}_i m_i$$

$$\vec{R}' = \frac{1}{M} \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) m_i = 0$$

moment setrvačnosti:

$$\vec{J} = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,2}$$

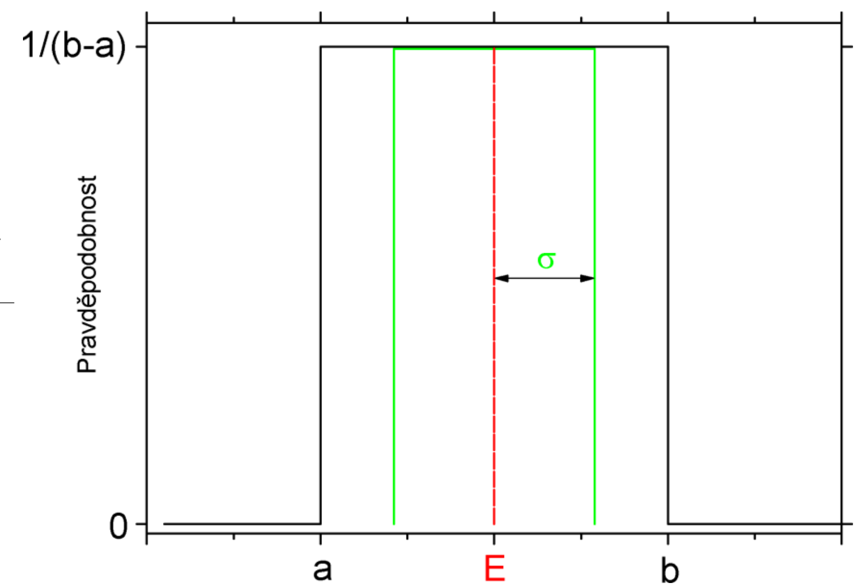
Rovnoměrné rozdělení

spojité náhodné veličiny

- rovnoměrné rozdělení spojité náhodné veličiny v intervalu (a,b)
- pravděpodobnost výskytu:

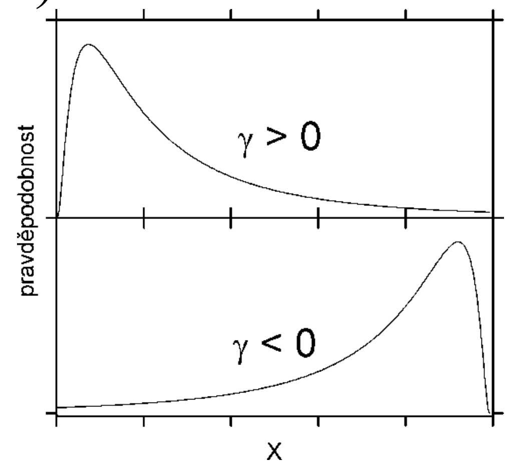
$$f(x)=\begin{cases} p & \text{pro } a \le x \le b \\ 0 & \text{pro } x < a, x > b \end{cases}$$

- normovací podmínka: $1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = p(b-a) \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{b-a}$
- střední hodnota: $\mathrm{E}=\int_a^b x\,p\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}$
- disperze: $\mathrm{V}=\int_a^b (x-E)^2 p\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{12}$
- standardní odchylka: $\sigma=\sqrt{V}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$



Vyšší momenty

- 3. centrální moment - asymetrie, šikmost (skewness)



$$\mu_3' \equiv E[(x-\mu)^3] \qquad \gamma_1 \equiv \frac{\mu_3'}{\sigma^3} = E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

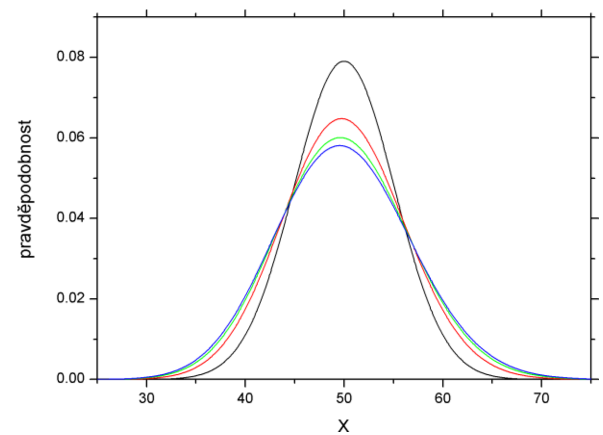
(3. standardizovaný centrální moment)

- 4. centrální moment - koef. špičatosti (kurtosis)

$$\mu_4' \equiv E[(x-\mu)^4]$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{\mu_4'}{\sigma^4} - 3 = E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^4\right] - 3$$

(4. standardizovaný centrální moment)



Medián, modus

- Charakteristiky významově podobné střední hodnotě $\bar{x}$.

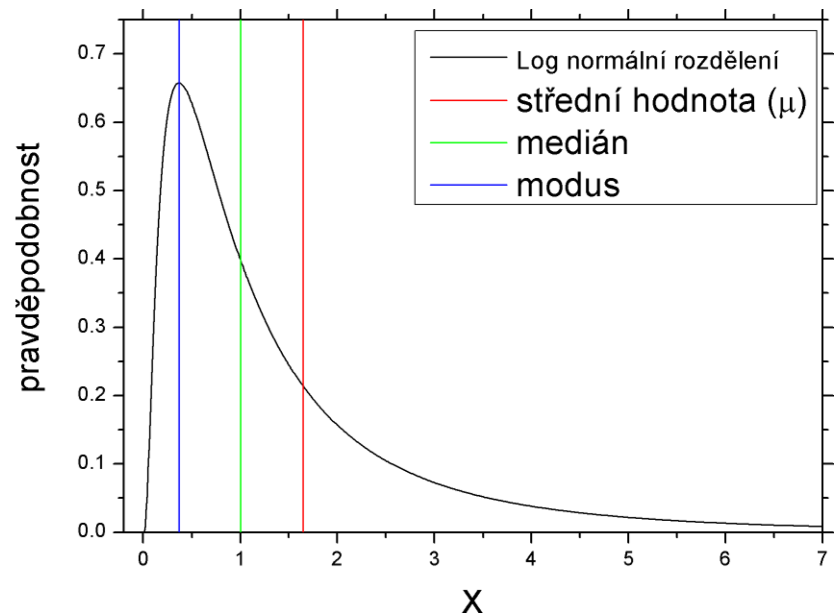
- **Medián**, $\tilde{x}$

  Pro medián $\tilde{x}$ náhodné veličiny x platí:

$$F(\tilde{x}) = \frac{1}{2}$$

  Je méně ovlivněn extrémními hodnotami.

  V některých případech nahrazuje střední hodnotu (Cauchyho rozdělení)



- **Modus**, $\hat{x}$

  Hodnota, která se v souboru vyskytuje nejčastěji,

$$\hat{x} = f^{-1}\big(\max\big(f(x)\big)\big)$$

  Rozdělení unimodální, bimodální, ...

$$|\tilde{x} - \bar{x}| \leq \sigma\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$|\tilde{x} - \hat{x}| \leq \sigma\sqrt{3}$$

Binomické rozdělení

diskrétní náhodné veličiny

- Pravděpodobnost jevu A je *p*.
- S jakou pravděpodobností se při *n*-násobném opakování experimentu jev A realizuje právě *k*-krát? $k = \langle 0, \ldots, n \rangle$

$$\mathrm{B}(n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- normalizační podmínka: $1 = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{B}(n, p)$
- střední hodnota: $\mathrm{E}[k] = \mu_1 = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{B}(n, p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k (1-p)^{n-k} = np$
- disperze: $\mathrm{V}[k] = \sum_{k=0}^{n} \left(k - \mathrm{E}[k]\right)^2 \mathrm{B}(n, p) = np(1-p)$

Binomické rozdělení

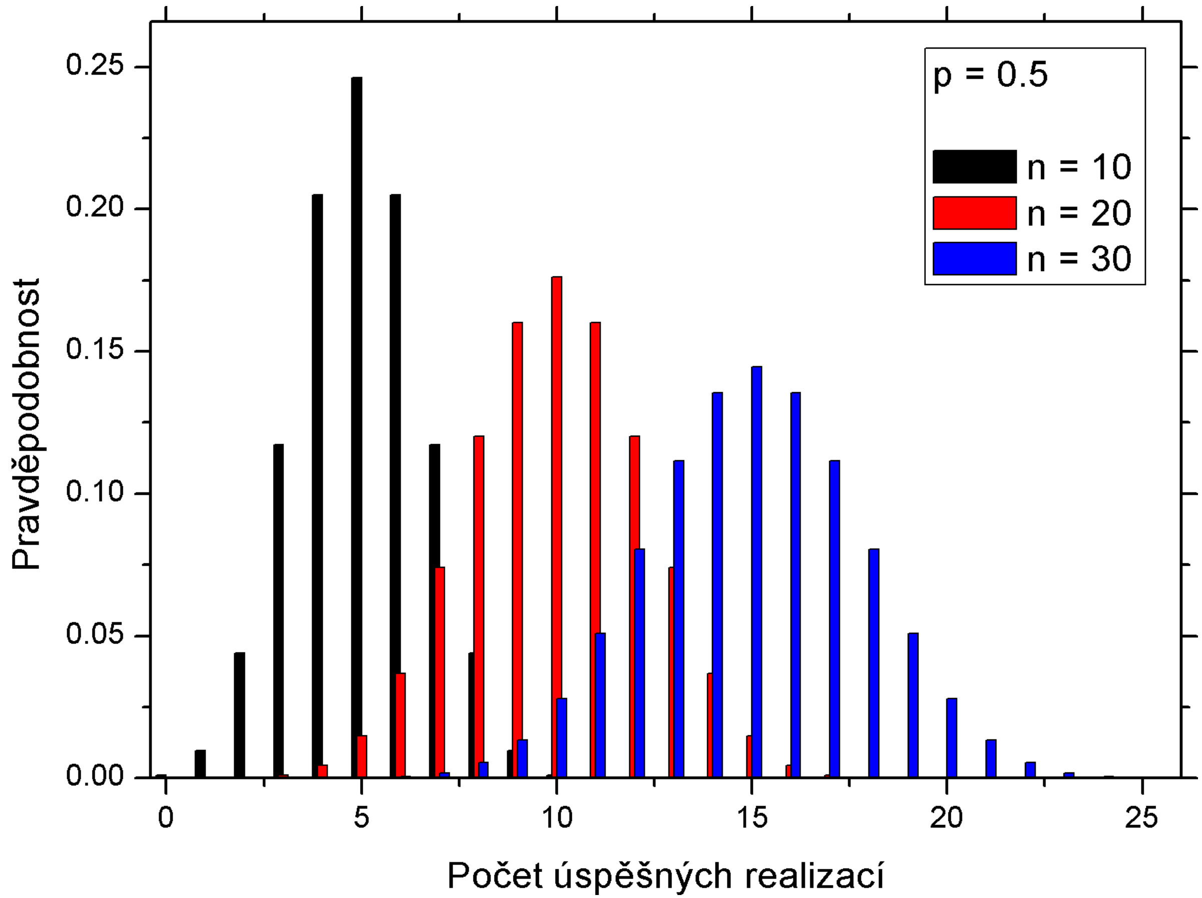
diskrétní náhodné veličiny

• příklad: $p = 0{,}5$
(např. házení mincí)

$n = 10$:
- stř. hodnota: $E = 5$
- disperze: $V = 2{,}5$

$n = 20$:
- stř. hodnota: $E = 10$
- disperze: $V = 5$

$n = 30$:
- stř. hodnota: $E = 15$
- disperze: $V = 7{,}5$

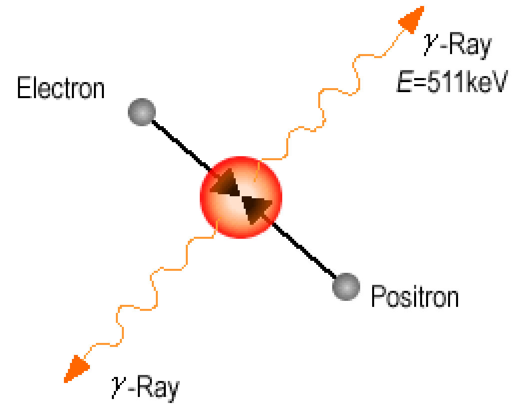


Binomické rozdělení – příklad: pozitrony

- anihilace páru elektron–positron:

$$e^- + e^+ \to 2\gamma \qquad P_2 = 0.9927$$

$$e^- + e^+ \to 3\gamma \qquad P_3 = 0.0073$$



Kolik opakovaných měření anihilace je nutné provést, abychom naměřili **alespoň jednu** tří-fotonovou s pravděpodobností > 99 %?

Poissonovo rozdělení

diskrétní náhodné veličiny

- Studujeme jev A s pravděpodobností p a rozdělením B(n, p).
- Co se stane, když: $\begin{matrix} p \to 0 \\ n \to \infty \end{matrix}$ $\quad pn = \mu = \text{konst.}$

- Potom pravděpodobnost, že se A realizuje k-krát, lze vyjádřit:

$$\mathrm{B}(n, k, p) = \mathrm{B}\left(n, k, \frac{\mu}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \equiv \mathrm{P}(\mu, k)$$

- normalizační podmínka: $1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(\mu, k)$
- střední hodnota: $\mathrm{E}[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathrm{P}(\mu, k) = \mu$
- disperze: $\mathrm{V}[k] = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \mu)^2 \mathrm{P}(\mu, k) = \mu$

Poissonovo rozdělení

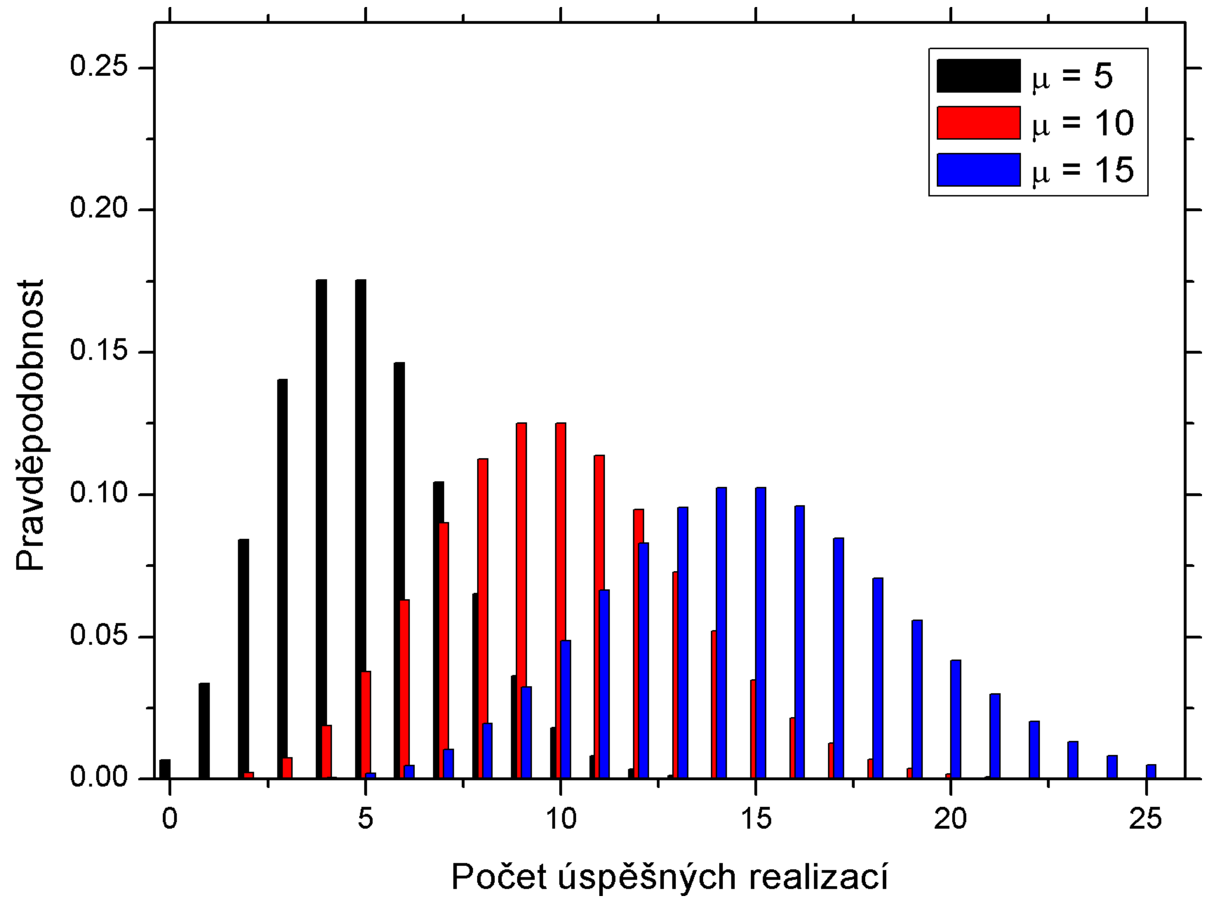
diskrétní náhodné veličiny

• příklad:

$\mu = 5$:
- stř. hodnota: $E = 5$
- disperze: $V = 5$

$\mu = 10$:
- stř. hodnota: $E = 10$
- disperze: $V = 10$

$\mu = 15$:
- stř. hodnota: $E = 15$
- disperze: $V = 15$



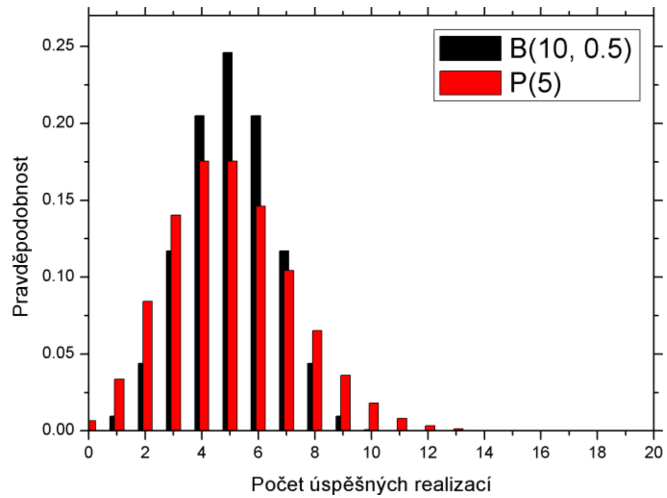
Poissonovo rozdělení

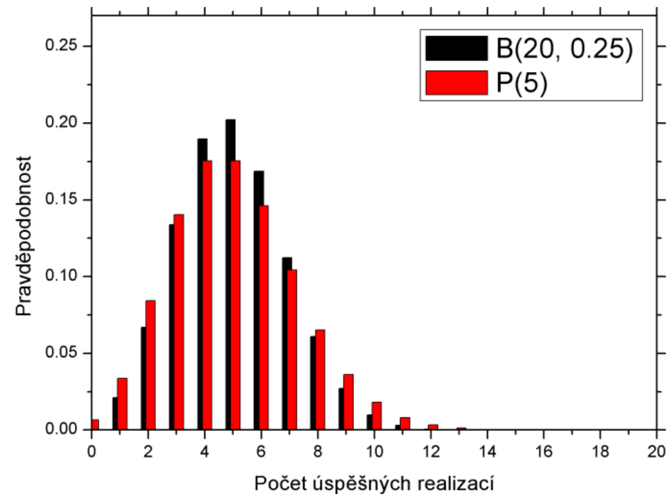
diskrétní náhodné veličiny

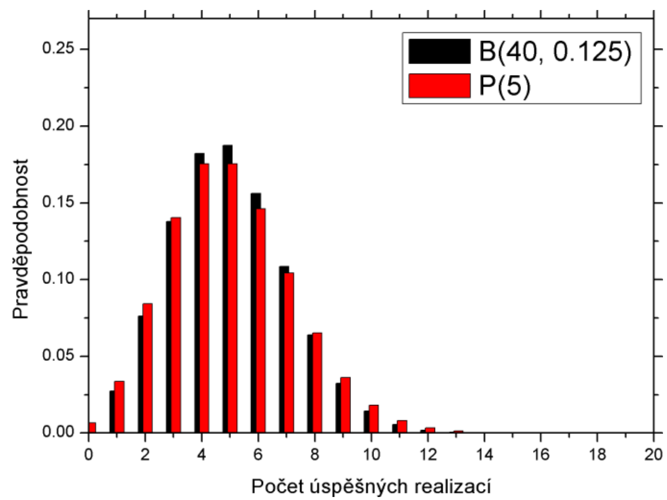
- srovnání

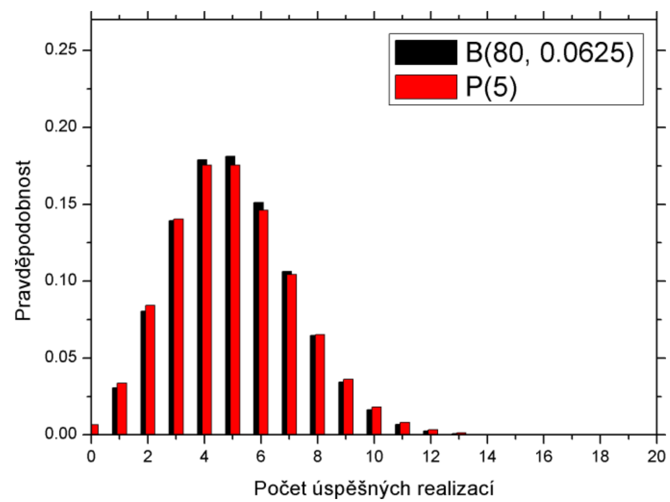
binomické
$n.p = 5$

Poissonovo
$\mu = 5$









Poissonovo rozdělení

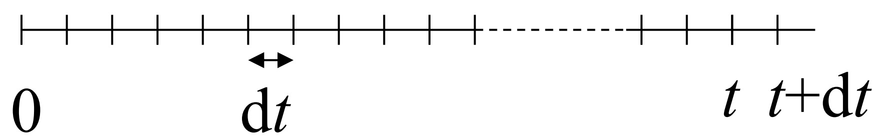
diskrétní náhodné veličiny

Alternativní odvození:

- Pravděpodobnost realizace na úseku (t, t+dt) je úměrná délce tohoto úseku, tj. ~ dt
- Pravděpodobnost realizace k-krát v intervalu (0, t) označíme $P_k(t)$.

- Pro k = 0 platí: $\mathrm{P}_0(t) = (1 - \mu\,\mathrm{d}t)^N$

$$N = \frac{t}{\mathrm{d}t}$$



- Pro $\mathrm{d}t \to 0$:

$$\mathrm{P}_0(t) = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} (1 - \mu\,\mathrm{d}t)^{\frac{t}{\mathrm{d}t}} = \mathrm{e}^{-\mu t}$$

- Pro k = 1 platí: $\mathrm{P}_1(t + dt) = \mathrm{P}_1(t)(1 - \mu \mathrm{d}t) + \mathrm{P}_0(t)\mu \mathrm{d}t$
- Obecně: $\mathrm{P}_k(t + dt) = \mathrm{P}_k(t)(1 - \mu \mathrm{d}t) + \mathrm{P}_{k-1}(t)\mu \mathrm{d}t$

- Vede na rovnici $\dfrac{\mathrm{dP}_k(t)}{\mathrm{d}t} = \mu\big(\mathrm{P}_{k-1}(t) - \mathrm{P}_k(t)\big)$, jejímž řešením je $\mathrm{P}_k(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\dfrac{(\mu t)^k}{k!}$

Rozdělení pravděpodobnosti

- **diskrétní náhodná proměnná**
  - rovnoměrné rozdělení
  - binomické rozdělení
  - Poissonovo rozdělení

- **spojitá náhodná proměnná**
  - rovnoměrné rozdělení
  - Cauchyho rozdělení
  - normální (Gaussovo) rozdělení

  - χ^2-rozdělení
  - (Studentovo) t-rozdělení
  - Boltzmannovo rozdělení