# Cvičný 1. zápočtový test (45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

# Příklad 1

**Zadání:**
Pomocí digitálního multimetru jsme změřili odpory dvou rezistorů: odpor $R_1 = 98.2\ \Omega$ s maximální chybou $\varepsilon_1 = 0.7\ \Omega$, odpor $R_2 = 54\ \Omega$ s maximální chybou $\varepsilon_2 = 2\ \Omega$.

(a) Jaká bude maximální absolutní chyba odporu $R_s$ obou rezistorů zapojených sériově?

$$R_s = R_1 + R_2$$

(b) Jaká bude maximální absolutní chyba odporu $R_p$ obou rezistorů zapojených paralelně?

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

(c) Pro oba odpory $R_s$ a $R_p$ zapište výsledek měření ve správném tvaru $R = (\mu_R \pm \sigma_R)\ [R]$.

(5 bodů)

**Řešení**:
Maximální absolutní chyba součtu je rovna součtu jednotlivých maximálních absolutních chyb. Pro odpor $R_s$ rezistorů zapojených sériově tedy platí:

$$R_s = R_1 + R_2 = 152.2\ \Omega \doteq 152\ \Omega$$

$$\varepsilon_{R_s} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2.7\ \Omega$$

$$\sigma_{R_s} = \frac{\varepsilon_{R_s}}{\sqrt{3}} = 1.56\ \Omega \doteq 2\ \Omega$$

Výsledný odpor pro sériové zapojení zapíšeme ve tvaru $R_s = (152 \pm 2)\ \Omega$.

Pro paralelní zapojení si nejprve odvoďme obecný vztah pro maximální chybu převrácené hodnoty veličiny $1/x$:

$$\varepsilon_{1/x} = \frac{\varepsilon_x}{x^2},$$

$$\eta_{1/x} = \eta_x.$$

Potom můžeme počítat opět maximální absolutní chybu součtu jako součet maximálních absolutních chyb:

$$\varepsilon_{1/R_p} = \varepsilon_{1/R_1} + \varepsilon_{1/R_2},$$

$$\frac{\varepsilon_{R_p}}{R_p^2} = \frac{\varepsilon_{R_1}}{R_1^2} + \frac{\varepsilon_{R_2}}{R_2^2}.$$

Pro odpor $R_p$ rezistorů zapojených paralelně tedy platí:

$$R_p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = 34.84\ \Omega \doteq 34.8\ \Omega$$

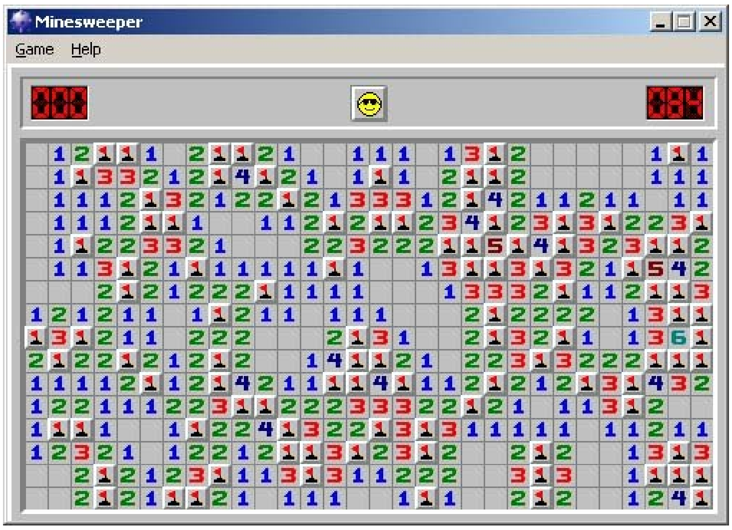
$$\varepsilon_{R_p} = \left(\frac{\varepsilon_{R_1}}{R_1^2} + \frac{\varepsilon_{R_2}}{R_2^2}\right) R_p^2 = 0.92\ \Omega$$

$$\sigma_{R_p} = \frac{\varepsilon_{R_p}}{\sqrt{3}} = 0.53\ \Omega \doteq 0.5\ \Omega$$

Výsledný odpor pro paralelní zapojení zapíšeme ve tvaru $R_p = (34.8 \pm 0.5)\ \Omega$.

# Příklad 2

**Zadání:**




Ve hře „hledání min" připadá v průměru na 5 políček 1 mina. Předpokládejme, že hru hrajeme tak, že náhodně klikáme na jednotlivá políčka. Dále pro jednoduchost předpokládejme, že ubývající počet prázdných políček a min můžeme během hry zanedbat.

(a) Jaký je očekávaný počet min, na které narazíme při náhodném kliknutí na 30 políček?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že při 5 náhodných kliknutích narazím právě na 1 minu?
(c) Jaká je pravděpodobnost, že při 10 náhodných kliknutích narazím na minu až při posledním pokusu?
(d) Předpokládejte, že hru hrajeme celkem 50-krát. Vypočítejte četnosti $n_0$, $n_1$ až $n_{10}$ pokusů, po kterých skončí hra šlápnutím na minu v prvním, druhém až desátém pokusu. V kolika hrách skončí hra později než v desátém pokuse? Načrtněte histogram hodnot četností pokusů $n_k$. Hodnotu $n_{11}$ položte rovnu případu, kdy hra skončí v jedenáctém pokusu NEBO později.

(10 bodů)

**Řešení**:
Pravděpodobnost, že při jednom pokusu šlápnu na minu je $p = 0.2$ a předpokládáme, že se během hry nemění. Pravděpodobnost, že při $N$ pokusech „uspěji", tj. šlápnu na minu, celkem $k$-krát je daná binomickým rozdělením.

$$P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Očekávaná hodnota binomického rozdělení je $\mu = Np$. Pro $N = 30$ pokusů je tedy očekávaný počet min roven 6.
Pravděpodobnost, že z 5 pokusů narazím na minu právě 1-krát je:

$$P(1|5,0.2) = \binom{5}{1} 0.2 \cdot 0.8^4 \doteq 0.4 \ .$$

Případ, kdy při 10 kliknutích narazím na minu právě v posledním pokusu, odpovídá situaci s pravděpodobností $(1-p)^9$, kdy v prvních 9 pokusech nenarazím na minu ani jednou, a „úspěšnému“ 10-tému pokusu, kdy s pravděpodobností $p$ kliknu na minu. Dohromady:

$$P_{10} = (1-p)^9 p = 0.8^9 \cdot 0.2 \doteq 0.0268.$$

Obecně lze případ, kdy v až $k$-tém pokusu narazím poprvé na minu, psát následovně:

$$P_k = (1-p)^{k-1} p,$$

při celkovém počtu $n = 50$ her jsou tedy četnosti $n_k = nP_k$ rovny:

$$\begin{aligned}
n_1 &= np = 10\\
n_2 &= n(1-p)p = 8\\
n_3 &= n(1-p)^2 p = 6.4\\
n_4 &= n(1-p)^3 p = 5.1\\
n_5 &= n(1-p)^4 p = 4.1\\
n_6 &= n(1-p)^5 p = 3.3\\
n_7 &= n(1-p)^6 p = 2.6\\
n_8 &= n(1-p)^7 p = 2.1\\
n_9 &= n(1-p)^8 p = 1.7\\
n_{10} &= n(1-p)^9 p = 1.3\\
n_{11} &= n - \sum_{k=1}^{10} n_k = 50 - 44.6 = 5.4\ ,
\end{aligned}$$

10 náhodných kliknutí „přežiji“ tedy v 5.4 případech a výsledný histogram četností $n_k$ vypadá následovně.