Jevy

výsledky opakovaných měření nebo pozorování

Ω prostor jevů (prostor událostí)

výsledek ω - elementární jev (elementární událost), $\omega \in \Omega$

$A \subset \Omega$, jev (událost)

$\omega \in A$, výsledek příznivý jevu A

Náhodná proměnná

Přiřazení reálného čísla výsledku experimentu (zobrazení)

- **diskrétní náhodná proměnná**

  všechny možné výsledky lze seřadit do posloupnosti $x_1, x_2, \ldots x_N$

  - *konečná* diskrétní náhodná proměnná: N je přirozené číslo

    Příklad: házení kostkou – $\{1,2,3,4,5,6\}$

  - *nekonečná* diskrétní náhodná proměnná: N je nekonečno

    Příklad: počet rozpadů radioaktivního zářiče za jednotku času – $\{0,1,2,3,....\}$

- **spojitá náhodná proměnná**

  všechny možné výsledky tvoří nespočetnou množinu

  Příklad: měření hmotnosti vzorku – výsledek může být jakékoli kladné reálné číslo

Pravděpodobnost - Kolmogorovy axiomy

Nechť Ω je prostor jevů pro daný experiment. Potom **pravděpodobnost P** je každé zobrazení množiny všech podmnožin množiny Ω do množiny reálných čísel, které splňuje následující podmínky:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \geq 0$
3. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Některé vlastnosti pravděpodobnosti:

(i) $P(\emptyset) = 0$

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(iii) $0 \leq P(A) \leq 1$

(iv) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

(v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Pravděpodobnostní míra: příklad – $n\times$ házení korunou

prostor událostí: $\Omega=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n),\quad a_i=p,o\}$ $\quad 2^n$ prvků

počet podmnožin prostoru událostí: 2^{2^n}

pravděpodobnost:

$P(\{0\})=0 \qquad P(\Omega)=1$

$$P((p,o,o,p,\ldots,o,o))=\frac{1}{2^n}$$

pravděpodobnost, že nejpozději ve čtvrtém pokusu padne panna

doplněk $(o,o,o,o,x,x,x,\ldots,x)$: $P(\overline{A})=\dfrac{2^{n-4}}{2^n}=\dfrac{1}{16} \quad \Rightarrow P(A)=\dfrac{15}{16}$

Pravděpodobnost

náhodný výběr – každý z výsledků experimentu je stejně pravděpodobný

pravděpodobnost jevu A: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n_A}{n}$

n_A – počet výsledků příznivých jevu A

n – celkový počet možných výsledků experimentu

Klasická definice pravděpodobnosti – limita relativních četností jevu A

- opakujeme N – krát experiment
- N_A – počet výsledků, kdy nastal jev A
- **relativní četnost** jevu A : $X_A = \dfrac{N_A}{N}$

pravděpodobnost jevu A: $\mathrm{P}(A) = \lim_{N \to \infty} X_A$

Nezávislost

Jevy A, B jsou **nezávislé** pokud $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Výsledek jevu A nijak neovlivní pravděpodobnost jevu B.

- příklad: opakujeme N – krát experiment
  ve většině případů jsou jednotlivá měření nezávislá

Hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce

diskrétní náhodná proměnná

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$$ konečná

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$ nekonečná

$$P(x = x_i) \equiv P_i$$ pst. že nastane výsledek x_i

nornalizační podmínka

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$$ konečná

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$$ nekonečná

spojitá náhodná proměnná

Ω nespočetná

$$P\left(x \in \langle x_0, x_0 + \mathrm{d}x\rangle\right) \equiv f(x_0)\,\mathrm{d}x$$

pst. že nastane výsledek padne do intervalu $\langle x_0, x_0 + \mathrm{d}x\rangle$

$f(x)$ **hustota pravděpodobnosti**

$$F(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$ **distribuční funkce**

$$P\left(x \in \langle a, b\rangle\right) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

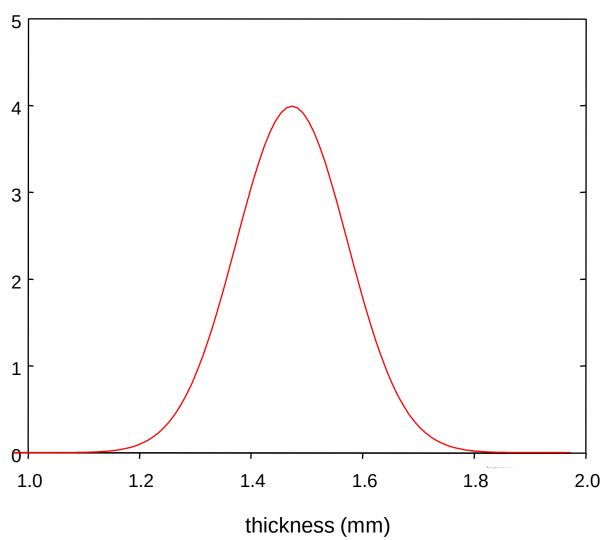
normalizační podmínka: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Hustota pravděpodobnosti – normální rozdělení

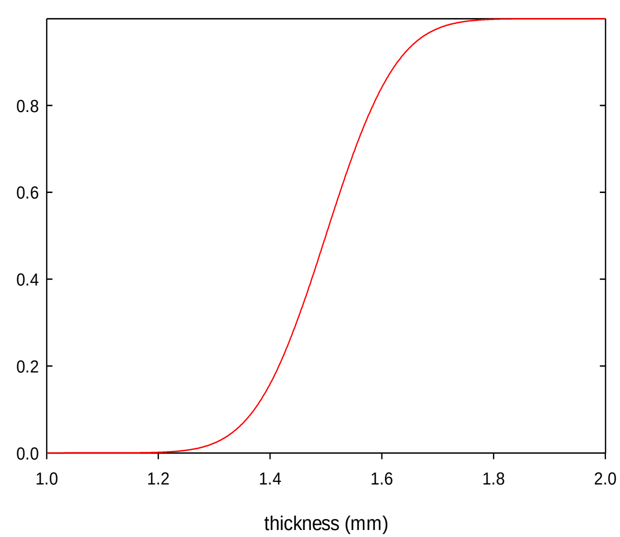
měření tloušťky vzorku **μ = 1.5 mm, σ = 0.1 mm**

- prostor událostí $\Omega = \mathbf{R}$
- hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
- distribuční funkce: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$

hustota pravděpodobnosti

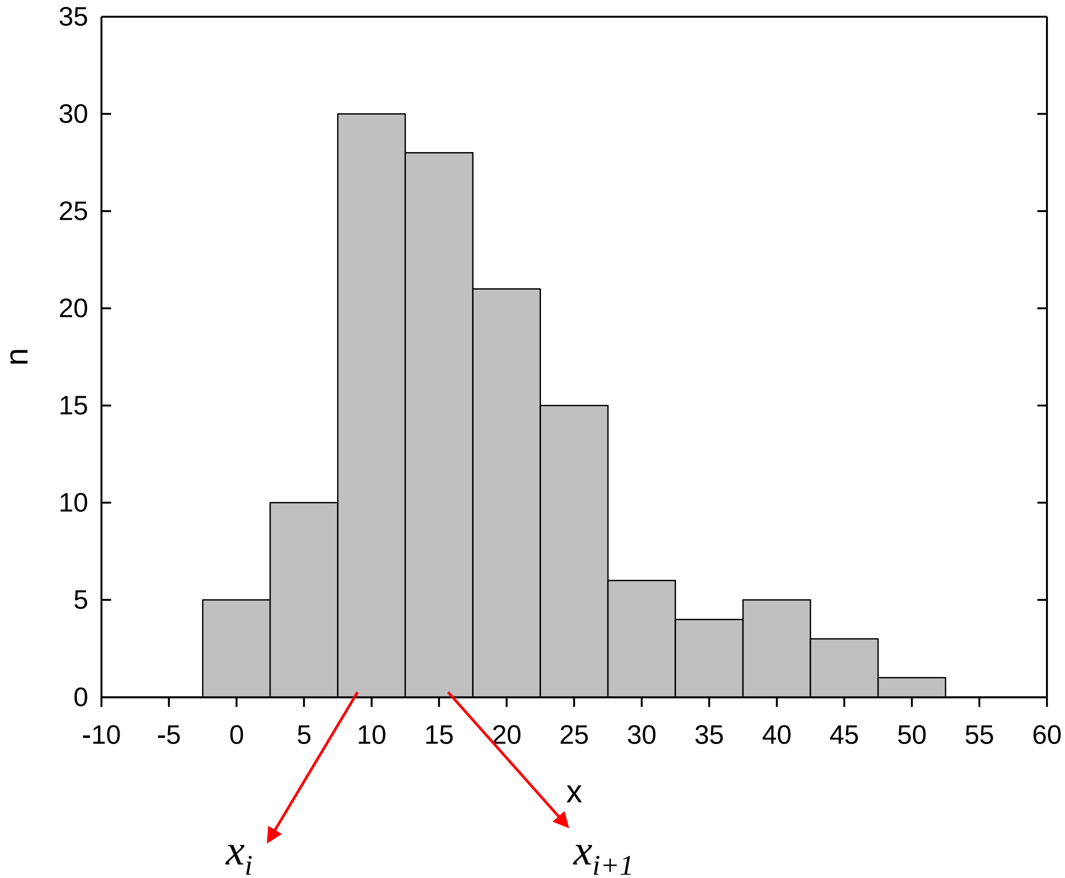


distribuční funkce



Histogram

Histogram – způsob jak experimentálně zjistit hustotu pravděpodobnosti z experimentálních dat



šířka binu: $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$

plocha histogramu: $\sum_{i=1}^{m} n_i \Delta_i$

$$\Downarrow$$

normalizovaný histogram:

$$\xi_i = \frac{n_i}{\Delta_i N}, \quad \text{kde} \quad N = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

plocha normovaného histogramu: $\sum_{i=1}^{m} \xi_i \Delta_i = 1$

hustota pravděpodobnosti:

$$f(x_i) = \lim_{\substack{\Delta_i \to 0 \\ N \to \infty}} \xi_i = \lim_{\substack{\Delta_i \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{n_i}{\Delta_i N}$$