

Normální a Breit-Wignerovo rozdělení

1. Nakreslete v Gnuplotu graf Gaussiánu a Lorentziánu s pološířkou 1 a maximem v bodě 0.
Dále nakreslete grafy distribučních funkcí obou rozdělení.
Jaká je pravděpodobnost, že $|x| > 2$ pro obě rozdělení?

• gaussián $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ FWHM: $w_g = 2\sigma\sqrt{2\ln 2}$
 $\Rightarrow \sigma = \frac{1}{2\sqrt{2\ln 2}}$

• lorentzián $l(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{(\gamma/2)^2 + x^2}$ FWHM: $w_l = \gamma$
 $\Rightarrow \gamma = 1$

• distribuční funkce ke gaussiánu $G(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$

• distribuční funkce k lorentziánu $L(x) = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{\gamma} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$

Normální a Breit-Wignerovo rozdělení

gaussian-lorentzian.gnu

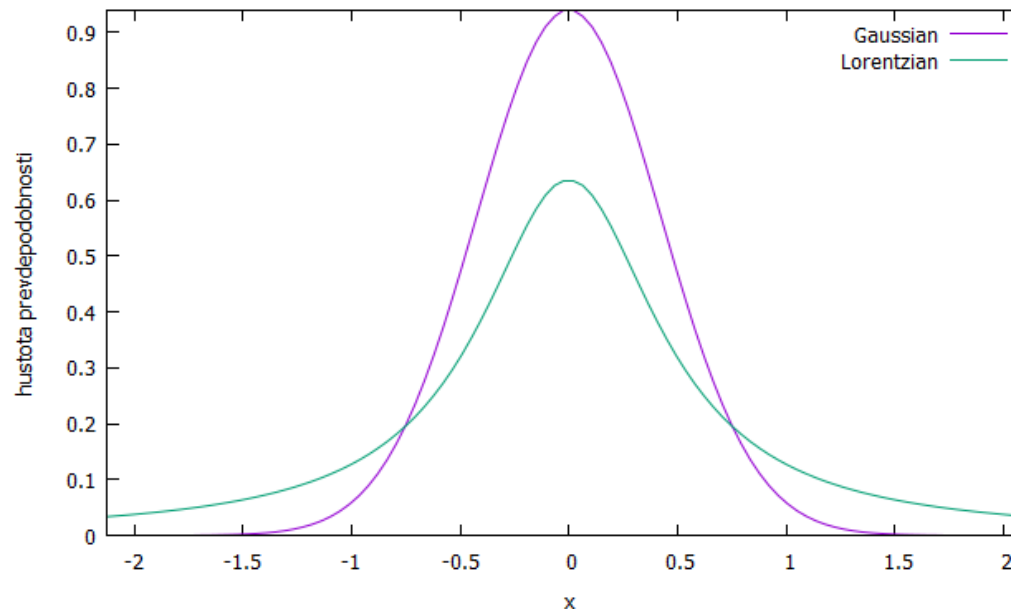
```
1 set term wxt 0
2 pi=3.1415926535897932384626433832795
3 mu=0      #poloha maxima
4 w=1       #FWHM
5 sigma=w/(2*sqrt(2*log(2)))
6 set xlabel 'x'
7 set ylabel 'hustota prevdepodobnosti'
8 set xrange [-5*sigma:5*sigma]
9 set yrange [0:1/(sqrt(2*pi)*sigma)]
10 # gaussian
11 g(x)=1/(sqrt(2*pi)*sigma)*exp(-(x-mu)**2/(2*sigma**2))
12 #lorentzian
13 l(x)=1/pi*w/2/(w**2/4.0+(x-mu)**2)
14 plot g(x) title 'Gaussian' with lines linestyle 1,l(x) title 'Lorentzian' with lines linestyle 2
15
16 set term wxt 1
17 set xlabel 'x'
18 set ylabel 'pravdepodobnost'
19 set xrange [-5*sigma:5*sigma]
20 set yrange [0:1]
21 #distribucni funkce normalni rozdeleni
22 G(x)=0.5*(1+erf((x-mu)/(sigma*sqrt(2))))
23 #distribucni funkce Breit-Wignerovo rozdeleni
24 L(x)=1/pi*(atan(2*x/w)+pi/2)
25 plot G(x) title 'G(x)' with lines linestyle 1, L(x) title 'L(x)' with lines linestyle 2
26
27 print sprintf('Normal distribution P(|x|>2)=%.10f',2*(1-G(2)))
28 print sprintf('Breit-Wigner distribution P(|x|>2)=%.10f',2*(1-L(2)))
```

Normální a Breit-Wignerovo rozdělení

1. Nakreslete v Gnuplotu graf Gaussiánu a Lorentziánu s pološířkou 1 a maximem v bodě 0.
Dále nakreslete grafy distribučních funkcí obou rozdělení.
Jaká je pravděpodobnost, že $|x| > 2$ pro obě rozdělení?

- gaussián
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \sigma = \frac{1}{2\sqrt{2\ln 2}}$$

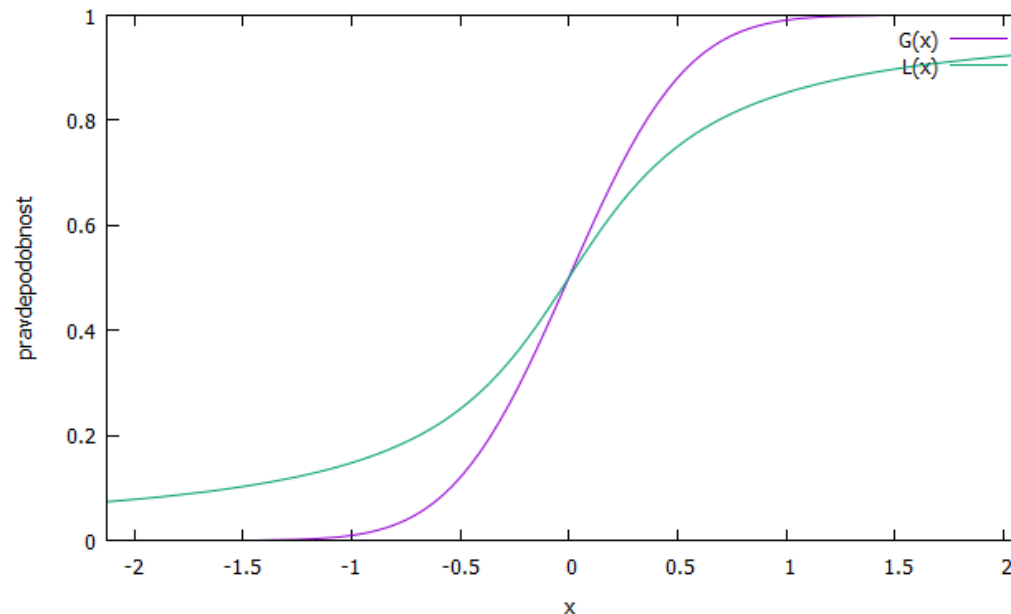
- lorentzián
$$l(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{(\gamma/2)^2 + x^2} \quad \gamma = 1$$



Normální a Breit-Wignerovo rozdělení

1. Nakreslete v Gnuplotu graf Gaussiánu a Lorentziánu s pološířkou 1 a maximem v bodě 0.
Dále nakreslete grafy distribučních funkcí obou rozdělení.
Jaká je pravděpodobnost, že $|x| > 2$ pro obě rozdělení?

- distribuční funkce ke gaussiánu $G(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$ $\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2 \ln 2}}$
- distribuční funkce k lorentziánu $L(x) = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{\gamma} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$ $\gamma = 1$



Normální a Breit-Wignerovo rozdělení

1. Nakreslete v Gnuplotu graf Gaussiánu a Lorenziánu s pološířkou 1 a maximem v bodě 0.
Dále nakreslete grafy distribučních funkcí obou rozdělení.
Jaká je pravděpodobnost, že $|x| > 2$ pro obě rozdělení?

- pravděpodobnost - normální rozdělení $P(|x| > 2) = 2(1 - G(2)) = 0.00000248$
- pravděpodobnost - Breit-Wignerovo rozdělení $P(|x| > 2) = 2(1 - L(2)) = 0.15595826$

Normální rozdělení

2. Průměrná hodnota IQ v ČR je 100. Vyšší IQ než 80 má 90 % lidí. Jaké musíte mít IQ, abyste byli geniální, což znamená, že vaše IQ je vyšší než 99.95 % populace?

- normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$

$$\mu = 100 \quad \sigma = ?$$

- distribuční funkce

$$G(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

- 90 % populace IQ > 80

$$G(80|\mu, \sigma) = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$\operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) = -0.8$$

$$\sigma = \frac{x - \mu}{\sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(-0.8)} \quad \begin{array}{l} x = 80 \\ \mu = 100 \end{array}$$

$$\sigma = 15.6$$

Normální rozdělení

2. Průměrná hodnota IQ v ČR je 100. Vyšší IQ než 80 má 90 % lidí. Jaké musíte mít IQ, abyste byli geniální, což znamená, že vaše IQ je vyšší než 99.95 % populace?

- normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$

$$\mu = 100 \quad \sigma = 15.6$$

- distribuční funkce

$$G(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

- hranice geniality x_g

$$G(x_g|\mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x_g - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] = 0.9995$$

$$x_g = \sigma\sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(2 \times 0.9995 - 1) + \mu \quad \mu = 100$$

$$\sigma = 15.6$$

$$x_g = 151$$

IQ.py

```
1 from scipy.special import erfinv
2 from numpy import sqrt
3 sigma=(80-100)/(sqrt(2)*erfinv(-0.80))
4 genius=100+sqrt(2)*sigma*erfinv(2*0.9995-1)
5 print('sigma=',sigma)
6 print('IQ =',genius)
```