1 Binomické rozdělení

Pravděpodobnost, že při N pokusech zaznamenáme právě k úspěchů, když p je pravděpodobnost 1 úspěchu, se rovná:

$$P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$P(k|N,p) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

Binomická věta:

$$(a+b)^N = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$$

Normovací podmínka

Při výpočtu použijeme definici normovací podmínky pro diskrétní náhodnou proměnnou k a binomickou větu.

$$1 = \sum_{k=0}^{N} P(k|N,p)$$
$$1 = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$1 = [p + (1-p)]^N$$

Očekávaná hodnota

Při výpočtu použijeme definici očekávané hodnoty $E[k] = \mu$ pro diskrétní náhodnou proměnnou k a normovací podmínku.

$$E[k] = \sum_{k=0}^{N} k P(k|N,p)$$
$$E[k] = \sum_{k=0}^{N} k \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$E[k] = 0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

substituce: $m = k - 1$

$$E[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N(N-1)!}{(N-1-m)!m!} p \cdot p^m (1-p)^{N-1-m}$$

substituce: $M = N - 1$

$$E[k] = Np \sum_{m=0}^{M} P(m|M,p)$$
$$E[k] = Np$$

Rozptyl

Při výpočtu použijeme vzorec pro výpočet rozptylu $V[k] = \sigma^2$ pro diskrétní náhodnou proměnnou k pomocí očekávaných hodnot $E\left[k^2\right]$ a $E[k]$ a normovací podmínku.

$$V[k] = E\left[(k-\mu)^2\right]$$
$$V[k] = E\left[k^2\right] - (E\left[k\right])^2$$

$$E\left[k^2\right] = \sum_{k=0}^{N} k^2 P(k|N,p)$$
$$E\left[k^2\right] = \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$E\left[k^2\right] = 0 + \sum_{k=1}^{N} \left[1 + (k-1)\right] \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$E\left[k^2\right] = \sum_{k=1}^{N} \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$+ 0 + \sum_{k=2}^{N} \frac{N!}{(N-k)!(k-2)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

substituce: $m = k-1$

$l = k-2$

$$E\left[k^2\right] = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N(N-1)!}{(N-1-m)!m!} p \cdot p^m (1-p)^{N-1-m}$$
$$+ \sum_{l=0}^{N-2} \frac{N(N-1)(N-2)!}{(N-2-l)!l!} p^2 \cdot p^n (1-p)^{N-2-l}$$

substituce: $M = N-1$

$L = N-2$

$$E\left[k^2\right] = Np \sum_{m=0}^{M} P(m|M,p) + N(N-1)p^2 \sum_{l=0}^{L} P(l|L,p)$$
$$E\left[k^2\right] = Np + N(N-1)p^2$$

$$
\begin{aligned}
V[k] &= Np + N(N-1)p^2 - (Np)^2 \\
V[k] &= Np + N^2p^2 - Np^2 - N^2p^2 \\
V[k] &= Np(1-p)
\end{aligned}
$$

2 Poissonovo rozdělení

V případě, že počet pokusů $N \to \infty$ a zároveň pravděpodobnost 1 úspěchu $p \to 0$, přičemž $\nu = Np$ je střední počet úspěšných pokusů, přechází binomické rozdělení limitně v rozdělení Poissonovo a pravděpodobnost, že zaznamenáme právě k úspěchů, je rovna:

$$P(k|N,p) = \frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}$$

Pro odvození pravděpodobnosti $P(k|\nu)$ použijeme tzv. Stirlingův vzorec:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N!}{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N} = 1,$$

neboli pro $N \to \infty$:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$$

A dále si napíšeme známou limitu vyjadřující Eulerovo číslo a exponenciální funkci.

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N &= e \\
\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N &= e^x
\end{aligned}
$$

$$P(k|N,p) = \frac{N!}{(N-k)!k!}p^k(1-p)^{N-k}$$

aproximace: $N \to \infty$

$$p = \frac{\nu}{N}$$

$$
\begin{aligned}
P(k|N,\nu) &\approx \frac{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N}{\sqrt{2\pi(N-k)}\left(\frac{N-k}{e}\right)^{N-k}k!}\left(\frac{\nu}{N}\right)^k\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{N-k} \\
P(k|N,\nu) &\approx \sqrt{\frac{N}{N-k}}\frac{N^N N^{-k}}{(N-k)^{N-k}}\frac{e^{-N}}{e^{-N+k}}\left[\frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}\right]\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{-k} \\
P(k|N,\nu) &\approx \left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k+\frac{1}{2}} e^{-k}\left[\frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}\right]\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{-k} \\
P(k|N,\nu) &\approx \left(1-\frac{k}{N}\right)^{-N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{k-\frac{1}{2}} e^{-k}\left[\frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}\right]\left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{-k}
\end{aligned}
$$

$$\text{limity:} \quad \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{-N} \approx \frac{1}{e^{-k}} = e^k$$
$$\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{k-\frac{1}{2}} \approx 1$$
$$\left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^{-k} \approx 1$$
$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

Normovací podmínka

Při výpočtu použijeme definici normovací podmínky pro diskrétní náhodnou proměnnou k a Taylorovu řadu exponenciální funkce.

$$e^x = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P(k|\nu)$$
$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$
$$1 = e^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!}$$
$$1 = e^{-\nu} e^{\nu}$$

Očekávaná hodnota

Při výpočtu použijeme definici očekávané hodnoty $E[k] = \mu$ pro diskrétní náhodnou proměnnou k a normovací podmínku.

$$E[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k|\nu)$$
$$E[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$
$$E[k] = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^k}{(k-1)!} e^{-\nu}$$

$$\text{substituce: } m = k - 1$$

$$E[k] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nu \cdot \nu^m}{m!} e^{-\nu}$$
$$E[k] = \nu \sum_{m=0}^{\infty} P(m|\nu)$$
$$E[k] = \nu$$

Rozptyl

Při výpočtu použijeme vzorec pro výpočet rozptylu $V[k] = \sigma^2$ pro diskrétní náhodnou proměnnou k pomocí očekávaných hodnot $E\left[k^2\right]$ a $E[k]$ a normovací podmínku.

$$E\left[k^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k|\nu)$$
$$E\left[k^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$
$$E\left[k^2\right] = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + (k-1)\right] \frac{\nu^k}{(k-1)!} e^{-\nu}$$
$$E\left[k^2\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^k}{(k-1)!} e^{-\nu} + 0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu^k}{(k-2)!} e^{-\nu}$$

substituce: $m = k - 1$
$l = k - 2$

$$E\left[k^2\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nu \cdot \nu^m}{m!} e^{-\nu} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\nu^2 \cdot \nu^l}{l!} e^{-\nu}$$
$$E\left[k^2\right] = \nu \sum_{m=0}^{\infty} P(m|\nu) + \nu^2 \sum_{l=0}^{\infty} P(l|\nu)$$
$$E\left[k^2\right] = \nu + \nu^2$$

$$V[k] = E\left[k^2\right] - \left(E\left[k\right]\right)^2$$
$$V[k] = \nu + \nu^2 - \nu^2$$
$$V[k] = \nu$$