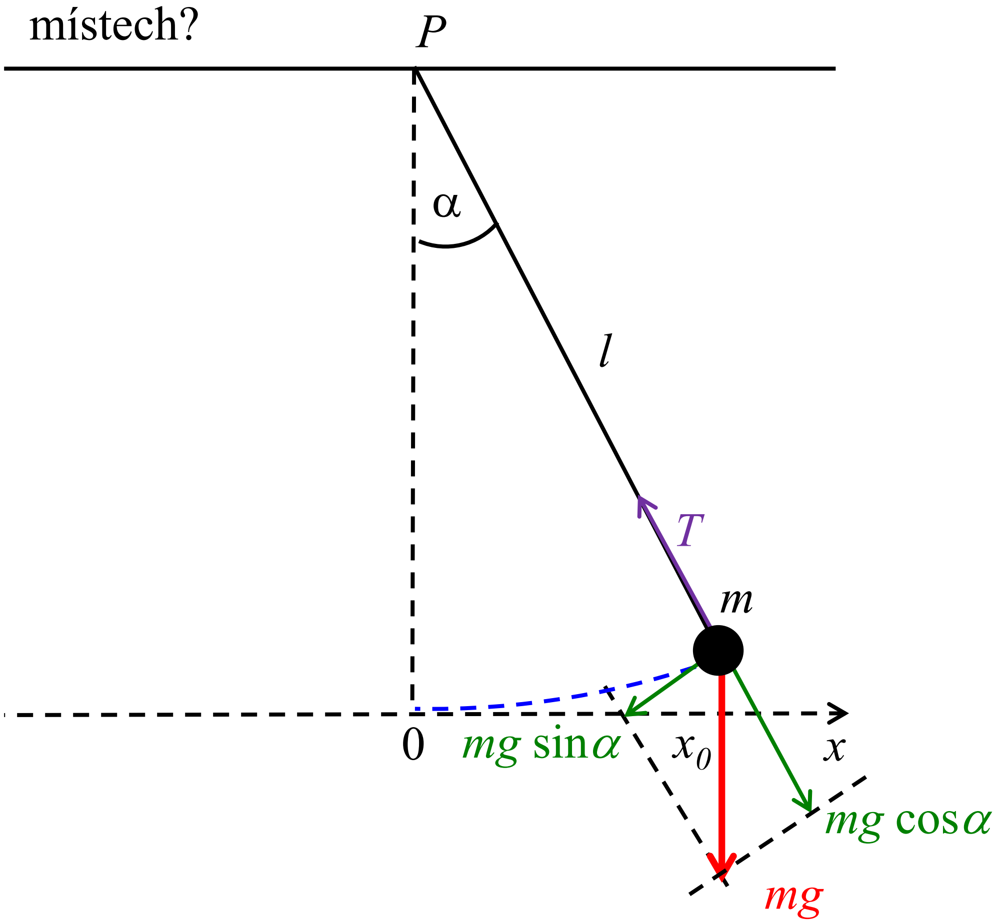
Kyvadlo

Matematické kyvadlo o hmotnosti *m* a délce závěsu *l* vychýlíme tak, že jeho *x*-ová souřadnice je x_0 a pustíme ho a necháme kývat. Během kývání ho v náhodně vybraných časech fotografujeme. Z fotografií potom uděláme histogram poloh kyvadla (jeho *x*-ové souřadnice). Jaký tvar bude tento histogram mít? Jinými slova jaká je hustota pravděpodobnosti výskytu kyvadla v různých místech?



moment síly vzhledem k bodu *P*: $\tau = lmg\sin\alpha$

2. impulsová věta: $\tau = I\varepsilon = I\ddot{\alpha}$

moment setrvačnosti: $I = ml^2$

$lmg\sin\alpha = -ml^2\ddot{\alpha} \longrightarrow \ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha$

aproximace malých kmitů: $\sin\alpha \approx \alpha$

pohybová rovnice: $\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\alpha$

obecné řešení: $\alpha(t) = C\cos(\omega t + \phi)$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

počáteční podmínky: $\alpha(t=0) = \alpha_0 = C\cos(\phi)$

$\dot{\alpha}(t=0) = 0 = -C\sin(\phi)$

Kyvadlo

Matematické kyvadlo o hmotnosti *m* a délce závěsu *l* vychýlíme tak, že jeho *x*-ová souřadnice je x_0 a pustíme ho a necháme kývat. Během kývání ho v náhodně vybraných časech fotografujeme. Z fotografií potom uděláme histogram poloh kyvadla (jeho *x*-ové souřadnice). Jaký tvar bude tento histogram mít? Jinými slova jaká je hustota pravděpodobnosti výskytu kyvadla v různých místech?

řešení: $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t)$ kde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

x-ová souřadnice: $x = \alpha l$

$x = x_0 \cos(\omega t)$ kde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

rychlost: $\dot{x} = -x_0 \omega \sin(\omega t)$

hustota pravděpodobnosti výskytu: $f(x) \approx \left|\frac{1}{\dot{x}}\right|$

$$f(x) \approx \left|\frac{-1}{x_0\omega \sin(\omega t))}\right| = \left|\frac{-1}{x_0\omega\sqrt{1-\cos^2(\omega t))}}\right| = \frac{1}{x_0\omega\sqrt{1-\cos^2(\omega t))}} = \frac{1}{x_0\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

Kyvadlo

Matematické kyvadlo o hmotnosti *m* a délce závěsu *l* vychýlíme tak, že jeho *x*-ová souřadnice je x_0 a pustíme ho a necháme kývat. Během kývání ho v náhodně vybraných časech fotografujeme. Z fotografií potom uděláme histogram poloh kyvadla (jeho *x*-ové souřadnice). Jaký tvar bude tento histogram mít? Jinými slova jaká je hustota pravděpodobnosti výskytu kyvadla v různých místech?

hustota pravděpodobnosti $f(x) \approx \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}$ normovací podmínka: $\int_{-x_0}^{x_0} f(x)\, dx = 1$

$$\int_{-x_0}^{x_0} K \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}\, dx = \frac{K}{\omega} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\frac{1}{x_0}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}}\, dx = \frac{K}{\omega} \left[\arcsin\left(\frac{x}{x_0} \right) \right]_{-x_0}^{x_0} =$$

$$= \frac{K}{\omega} (\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \frac{K}{\omega} 2\arcsin(1) = \frac{K}{\omega} 2 \frac{\pi}{2} = K \frac{\pi}{\omega} = 1 \longrightarrow K = \frac{\omega}{\pi}$$

hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}$

Kyvadlo – simulace v Excelu

`kyvadlo-hustota-pst.xlsx`

generátor náhodných čísel U(0,1)

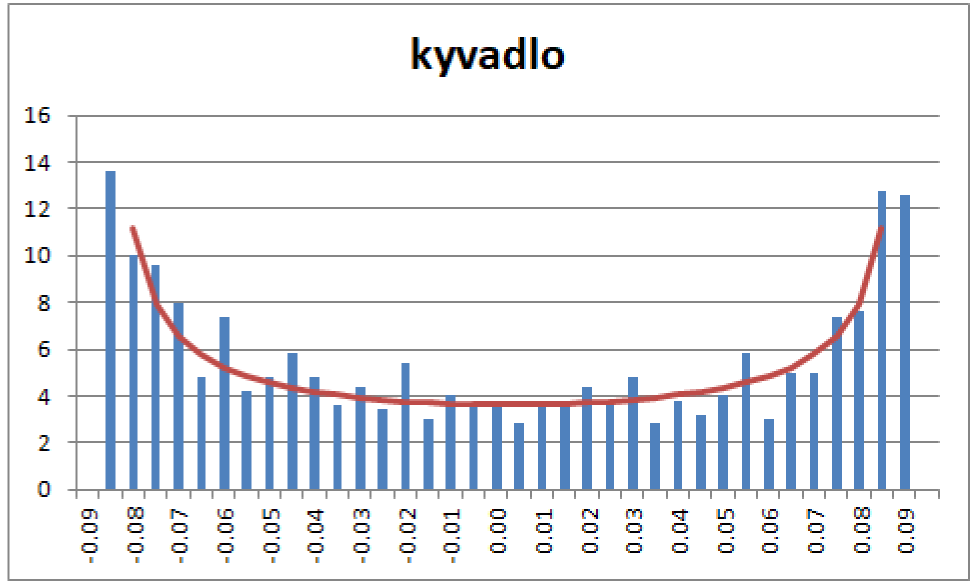
```
Di=NÁHČÍSLO()*T

Ei=x0*cos(Di*omega)
```

histogram

```
{=ČETNOSTI(D1:D1000,H3:H39)}
```

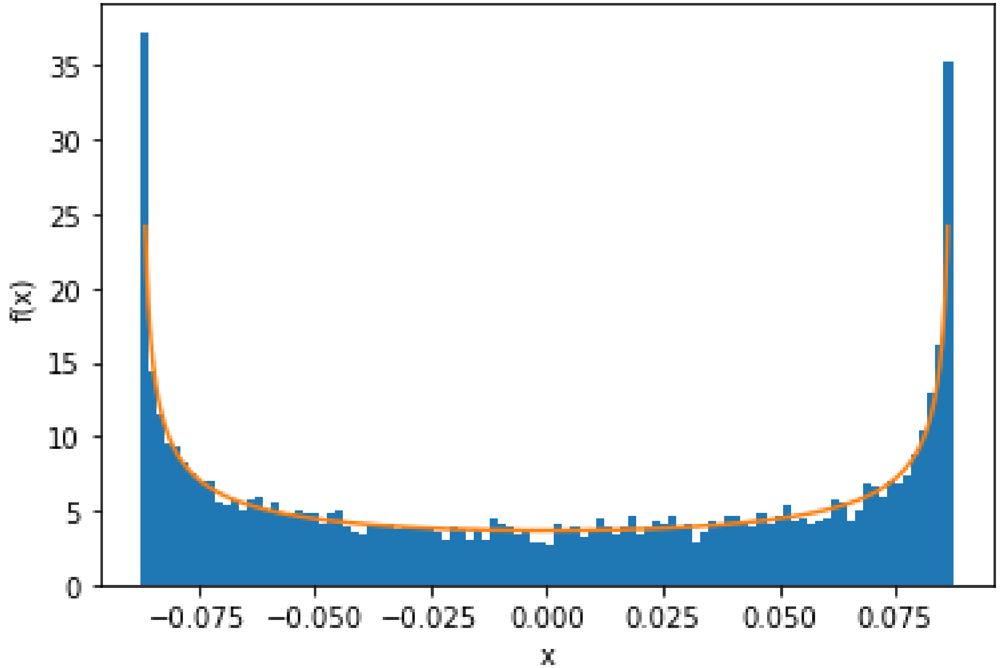
oblast vygenerovaných hodnot

biny



Kyvadlo

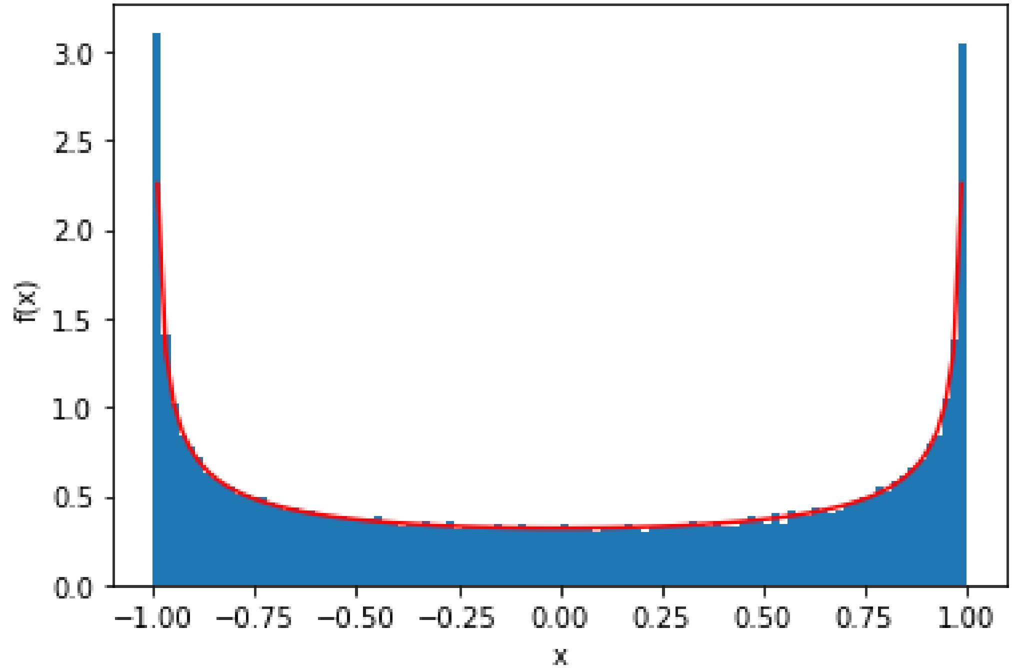
kyvadlo-hustota-pst.py




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n=10000 #number of simulated data
l=1 #delka zavesu (m)
g=9.81 #gravitacni zrychleni (m/s2)
omega=np.sqrt(g/l) #uhlova frekvecne
T=2*np.pi/omega #perioda
print("perioda",T,"s" )
alfa_0=5 #pocatecni uhel vychyleni (deg)
x_0=l*alfa_0*np.pi/180 #amplituda
print("amplituda",x_0,"m" )
t=np.array(n)
x=np.array(n)
t=T*np.random.random_sample(n)
x=x_0*np.cos(omega*t)
fig,ax=plt.subplots() #to je potreba abychom mohli pojmenovat osy
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("f(x)")
plt.hist(x,bins=100,density=True)
eps=1e-3 #to je protoze v x_0 neni f(x) definovana
xp=np.linspace(-x_0+eps,x_0-eps,1000)
f=1/np.pi*1/np.sqrt(x_0**2-xp**2)
plt.plot(xp,f)
```

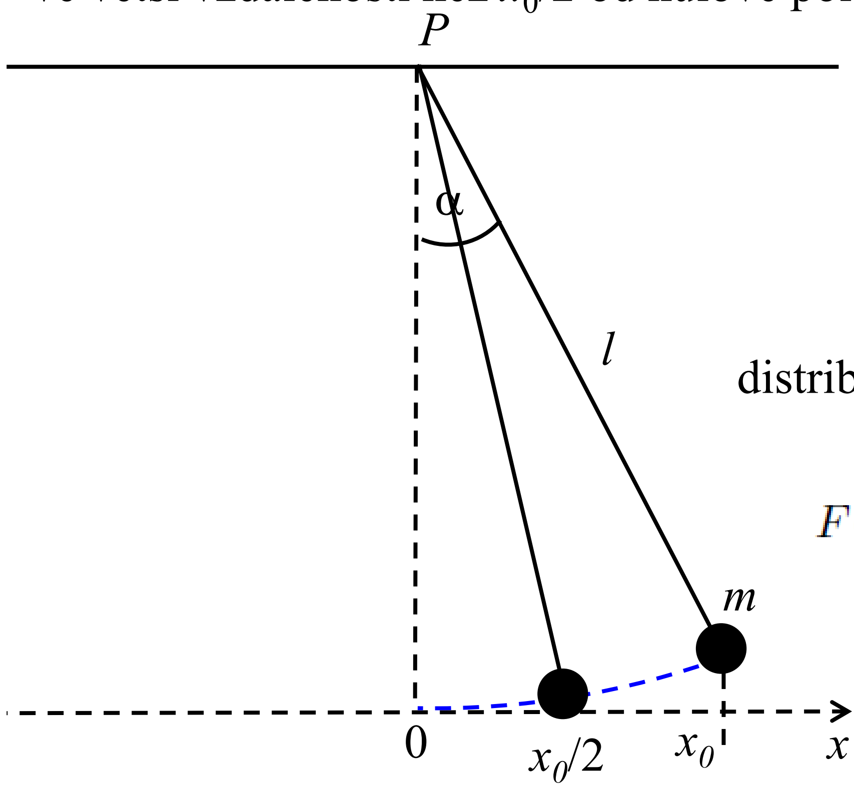
Kyvadlo – generátor harmonických kmitů `elektricke-kyvadlo.py`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
nbin=100
data=np.loadtxt("kyvadlo-1.db",usecols=(2))
print(data)
ndata=len(data)
data_min=np.amin(data)
data_max=np.amax(data)
print("precteno", ndata, "hodnot")
print("minimalni hodnota=",data_min)
print("maximalni hodnota=",data_max)
data=data/(0.5*(np.abs(data_min)+data_max))
fig,ax=plt.subplots()
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("f(x)")
plt.hist(data,bins=nbin,density=True)
eps=1e-2
x=np.linspace(-1+eps,1-eps,nbin)
f=1/np.pi*1/np.sqrt(1-x**2)
plt.plot(x,f,c="red")
```



Kyvadlo

Když maximální výchylka kyvadla je x_0, jaká je pravděpodobnost, že se kyvadlo bude nacházet ve větší vzdálenosti než $x_0/2$ od nulové polohy?



$$P\left(\left|x > \frac{x_0}{2}\right|\right) = 2{*}F\left(\frac{-x_0}{2}\right)$$

hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}$

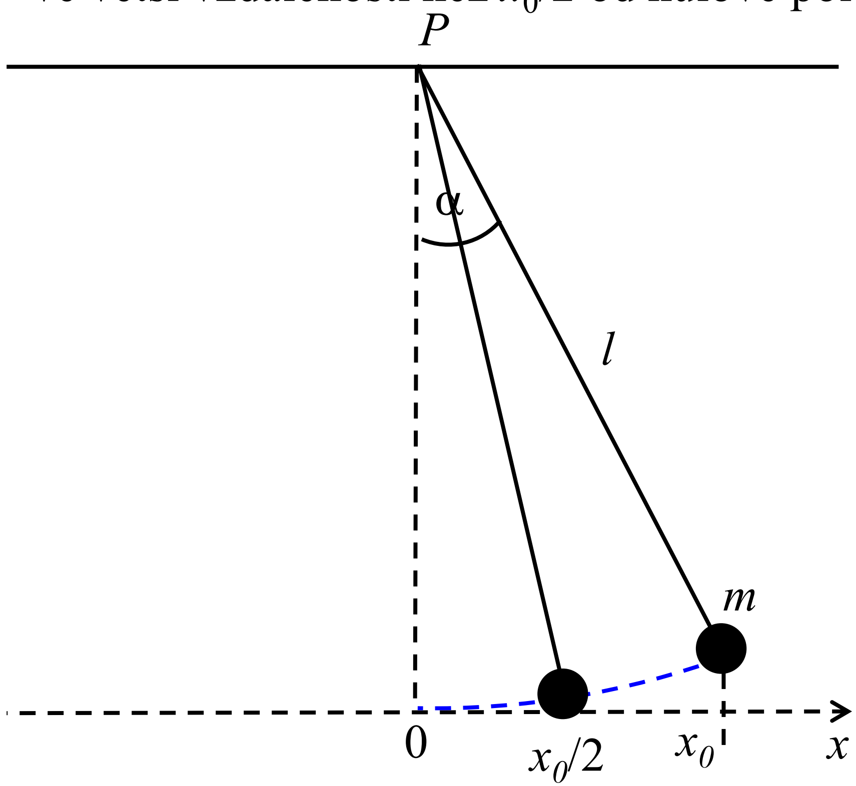
distribuční funkce: $F(x) = \int_{-x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{-x_0}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - t^2}}\,dt$

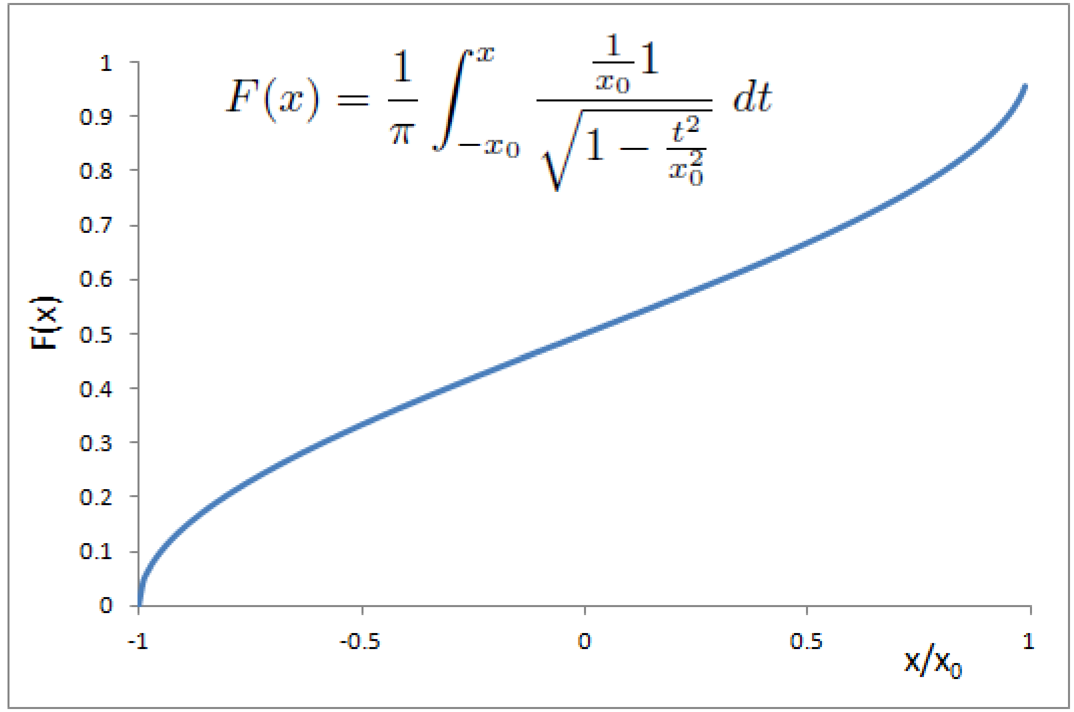
$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-x_0}^{x} \frac{\frac{1}{x_0}1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{x_0^2}}}\,dt$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{t}{x_0}\right)\right]_{-x_0}^{x} = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) - \arcsin(-1)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]$$

Kyvadlo

Když maximální výchylka kyvadla je x_0, jaká je pravděpodobnost, že se kyvadlo bude nacházet ve větší vzdálenosti než $x_0/2$ od nulové polohy?





$$F(x) = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{t}{x_0}\right) \right]_{-x_0}^{x} = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) - \arcsin(-1) \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) \right]$$

$$P\left(\left| x > \frac{x_0}{2} \right| \right) = 2 * F\left(\frac{-x_0}{2}\right) = 2\frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \right] = 2\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 2\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}$$