

4. Dla każdego $n \geq 0$, niech a_n oznacza liczbę nieujemnych całkowitoliczbowych rozwiązań równania: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4n$.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4n$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4n$$

$$0, 2, 4, \dots \quad 0, 2, 4, \dots \quad 0, 4, 8, \dots$$

przy ustalonym x_3

$$x_3 = i \quad i = 0, \dots, n$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4i = 4n$$

$$2x_1 + 2x_2 = 4(n-i)$$

$$x_1 + x_2 = 2(n-i) \text{ komb. 1 punkt}$$

$$\binom{2n-2i+1}{2n-2i} = 2n-2i+1$$

$$a_n = (n+1)^2$$

$$a_n - a_{n-1} = 2n+1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2n+1$$

f. tworząca

$$\frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{(1-x^4)}$$

$\uparrow x_1 \quad \uparrow 2x_2 \quad \uparrow 4x_3$

=

$$\sum_{i=0}^{4n} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{4n-i}{2} \rfloor} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{4n-i-2j}{4} \rfloor} 1 \right) \right\}$$

dla ustalonego i

dla j
komb. rozwiązań

$$x_1 \text{ punkt}$$

$(2(x_1+x_2) + 4x_3) \text{ punkt}$

$$0, 2, 4, \dots \quad 0, 2, 4, \dots \quad 0, 4, 8, 12, \dots$$

$a_4 \rightarrow \text{suma } 16 \quad a_4 = 25 \text{ jako suma}$

$$(16, 0, 0) \quad (12, 0, 4) \quad (8, 0, 8) \quad (4, 0, 12) \quad (0, 0, 16)$$

9 (14, 2, 0) 7 (10, 2, 4) 5 (6, 2, 8) 3 ... 1 ...

(12, 4, 0) ... (0, 12, 4) (0, 8, 8)

$a = 9 + 7 + 5 + 1 = 25$

$a_4 ?$

$(0,0,16) \cdot 3$	$(6,2,8) \cdot 2$	$(6,6,4) \cdot 1$
$(4,0,12) \cdot 3!$	$(10,2,4) \cdot 2$	ten sposób jest leż sensu
$(2,2,12) \cdot 1$	$(14,2,0) \cdot 2$	
$(4,4,8) \cdot 3$	$(8,0,8) \cdot 3$	

3

Termin 1, 2025-02-06

1. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$.

- Liczba tych odwzorowań f , które są słabo monotoniczne:

- Liczba tych odwzorowań g , które są słabo monotoniczne:

- Liczba tych odwzorowań f , które są silnie rosnące oraz $f(3) = 4$:

- Liczba tych odwzorowań g , które są malejące i $g(3) = 2$:

- Liczba tych odwzorowań f , dla których $|f(X)| = 3$:

- Liczba tych odwzorowań g , dla których $|g(Y)| = 3$:

- Liczba tych odwzorowań f , w których $f(1) \neq f(4)$:

- Liczba tych odwzorowań g , dla których $g(1) \neq g(3)$:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 4 \quad \text{przykłady } (1,1,1,1), (2,2,2,2), \dots$$

1) $2 \cdot \binom{5+4-1}{4} - 5$ ← silnie ⊂ słabie

2) $x_1 + x_2 + \dots + x_4 = 5, \quad \binom{8}{5} \cdot 2 - 4$

3) $\dots 45 \quad \binom{3}{2}$

4) $\dots 2 \dots \text{Udp: D}$

5) $\binom{5}{3} \left(3^4 - \binom{3}{1} \cdot 2^4 + \binom{3}{2} \cdot 1^4 \right) \quad \begin{array}{l} \text{zw W, bo} \\ \text{mogliśmy kiedykolwiek} \\ \text{nie wykonać, da się} \\ \text{zastąpić } S(4,3) \cdot 3! \end{array}$

6) $\binom{4}{3} \left(3^5 - \binom{3}{1} \cdot 2^5 + \binom{3}{2} \cdot 1^5 \right)$

7) $\frac{5}{\underline{\text{opisie}}} - \frac{4}{\underline{\text{opisie}}} = 5 \cdot 4 \cdot 5^2$

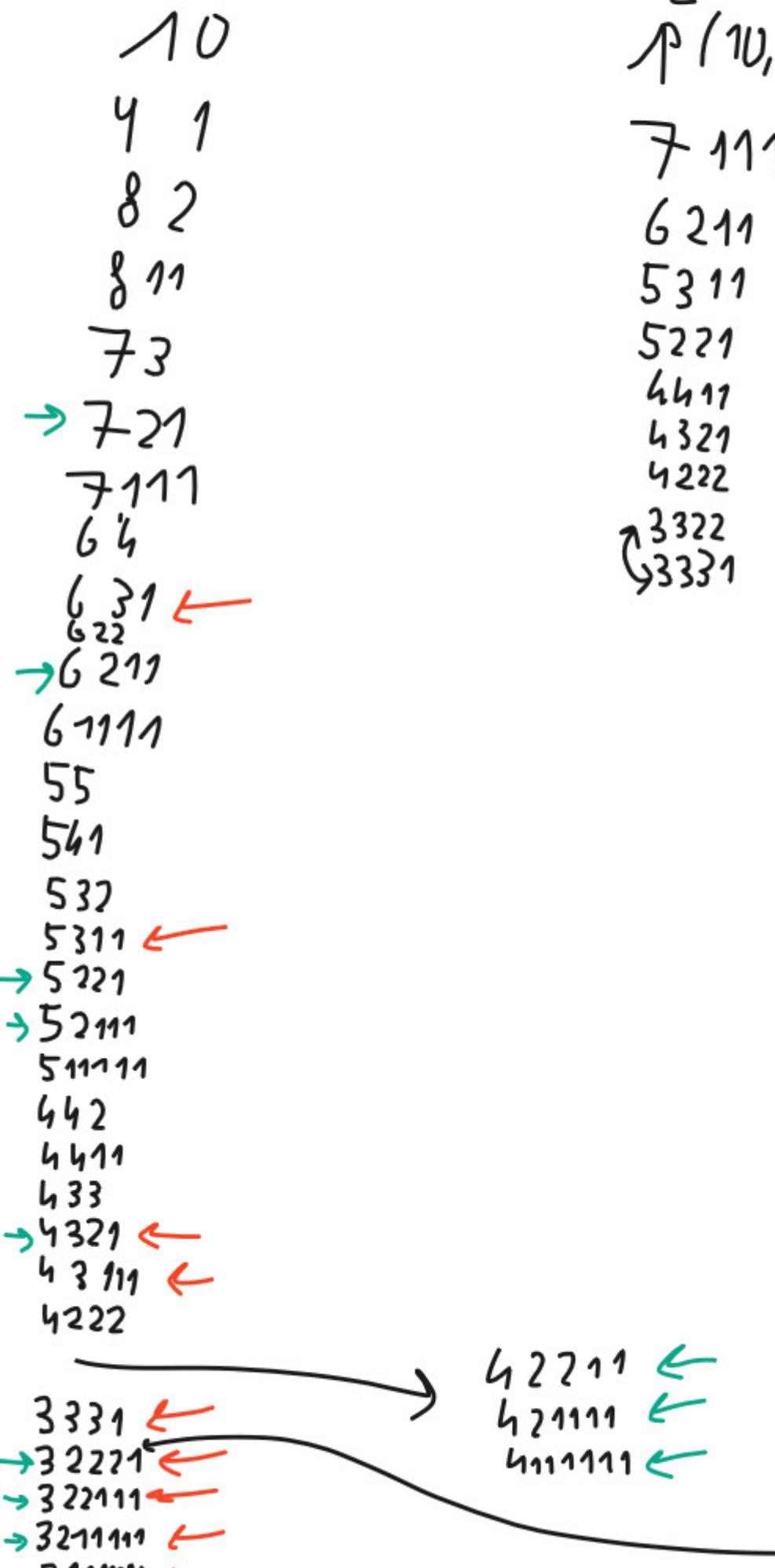
8) $\frac{4}{\underline{\text{opisie}}} - \frac{3}{\underline{\text{opisie}}} = 4 \cdot 3 \cdot 4^3$

3. Niech L będzie listą w porządku antyleksykograficznym tych podziałów liczby 20, w których każdy składnik jest parzysty: każdy podział ma nierosnąco uporządkowane składniki oraz jednoznacznie przypisana pozycję i ($i = 1, 2, 3, \dots$) na tej liście.

- Podział $(8, 8, 2, 2)$ występuje na pozycji: $\cancel{(4, 4, 4, 1)}$ 21
- Podział $(12, 6, 2)$ występuje na pozycji: $\cancel{(6, 3, 1)}$ 9
- Liczba tych podziałów w L , w których występują dokładnie cztery składniki wynosi: 10
- Następnikiem podziału $(12, 6, 2)$ jest podział: $(6, 2, 2) \rightarrow (12, 4, 4)$
- Następnikiem podziału $(8, 8, 2, 2)$ jest podział: $(4, 3, 3) \rightarrow (8, 6, 6)$
- Liczba tych podziałów w L , w których 6 oraz 8 występują jednocześnie: $\cancel{\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} \cancel{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}$ 11
- Liczba tych podziałów w L , w których 4 oraz 8 występują jednocześnie: $\cancel{\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} \cancel{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}$ 15

$$\mathcal{P}(20, \text{parzyste}) \Rightarrow \mathcal{P}(10, \text{normalne})$$

$$\mathcal{P}(10, 4) = 9$$



3 razy rozbijamy liczbę ulożyc

$$\begin{matrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

in
 $(17)(28)(35)(64) \cdot 2$
 $(13)(24)(75)(86)$
 $(1234)(876)$
 $(4321)(5678)$
 ~~$(15)(26)(48)(37) \cdot 2$~~
 $(18)(36)(47)(25) \cdot 2$

out
 $\frac{1}{8} (5x_2^4 + 2x_2^2 + x_1^8)$
 $(AB)(D)(E)(F) \cdot 2$
 $(A)(B)(E)(DF)$
 $(B)(A)(E)(D)(CF)$
 $(A)(B)(ED)(F)$

$\frac{1}{8} (2x_1^2 x_4 + 2x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2 + x_1^6)$

$(AB)(CE)(DF) \cdot 2$

5. Niech F oznacza bryłę, która jest graniastosłupem o podstawie kwadratu, w którym ściany boczne nie są kwadratami.

• Cykliczny indeks grupy symetrii graniastosłupa F na zbiorze ścian ma postać: \checkmark

• Liczba paru niemówoważnych pokolorowań wierzchołków graniastosłupa F za pomocą co najwyżej 2 kolorów wynosi: $C = 2$

• Liczba paru niemówoważnych pokolorowań ścian graniastosłupa F , w którym cztery ściany pokolorowane są jednym kolorem, a dwie pozostałe innymi wynosi:

• Liczba paru niemówoważnych pokolorowań ścian graniastosłupa F za pomocą 3 kolorów wynosi:

• Liczba paru niemówoważnych pokolorowań wierzchołków graniastosłupa F , w którym sześć wierzchołków jest pokolorowanych jednym kolorem, a dwa pozostałe innym wynosi:

• Cykliczny indeks grupy symetrii graniastosłupa F na zbiorze wierzchołków ma postać:



kombinatoryczne

$1^\circ (22)(11) \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \rightarrow 3x_1^2 x_2^2$
 $2^\circ (4)(11) \rightarrow 1 \cdot 1 2x_1^2 x_4$
 $3^\circ (2)(22) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} 2x_2^3 \quad \times$
 $4^\circ (1111)(11) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 1 x_1^6$

$\frac{(6) \cdot (2)}{8} + \frac{(2) \cdot 2}{8} \cdot \frac{(3) \cdot 3}{8} = 5$

c) Wypisujemy permutacje

$$(A)(B)(C)(D)(E)(F) \quad \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{1} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 2 = 30$$

$$\left. \begin{array}{l} (BFDE)(A)(C) \\ (FBED)(A)(C) \end{array} \right\} \times 2 \cdot \binom{2}{1} = 4$$

$$\frac{1}{8} \cdot 40 = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} (FD)(BE)(AC) \\ (\times \times)(\times \times)(\times \times) \end{array} \right\} 0 \quad (\text{nie da się})$$

$$(BD)(FE)(A)(C)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\times \times)(\times \times)(\times)(\times) \\ (\times \times)(\times \times)(\times)(\times) \end{array} \right\} \times 3 \cdot \binom{2}{1} = 6$$

$$(\times \times)(\times \times)(\times)(\times)$$

e) $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) \quad \binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

Obroty dookoła A:

$$90^\circ: (1234)(5678) x_4^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \quad \boxed{\frac{1}{8}(48) = 6}$$

$$180^\circ: (13)(42)(57)(86) x_2^4 \rightarrow 0$$

$$270^\circ: (2143)(6587) x_1^2 \rightarrow 0$$

Obroty dookoła B (x_2^2)

$$180^\circ: (18)(45)(27)(36) x_2^4 \rightarrow 2 \cdot \binom{4}{3} = 8$$

Obroty dookoła C

$$180^\circ: (17)(35)(26)(48) x_2^4 \rightarrow 2 \cdot \binom{4}{3} = 8$$

6. Niech graf G będzie grafem $n = 2^5$ rzędu, w którym wierzchołki są wyznaczone przez pary różne ciągi binarne o długości 5. Dwa wierzchołki w G są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy ilość jedynek w konkatenacji ciągów odpowiadających tym wierzchołkom jest liczbą nieparzystą. Niech \bar{G} oznacza dopełnienie grafu G .

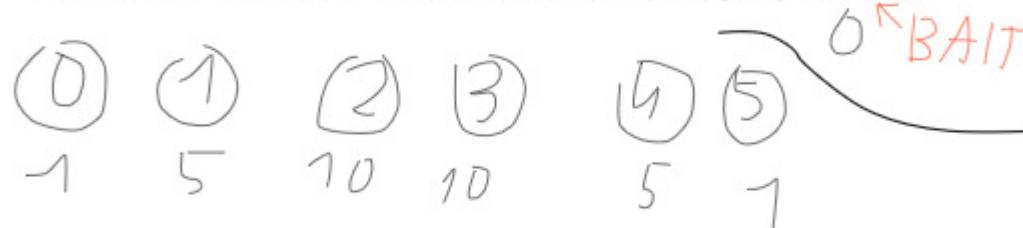
• Ścieżka o maksymalnej długości w G ma długość: 31 $\left\{ \begin{array}{l} 60 \\ K_{16,16} \end{array} \right.$

• Cykl o maksymalnej długości w G ma długość: 32

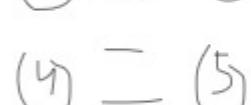
• Minimalna liczba krawędzi jakie należy dodać do \bar{G} , aby otrzymany graf posiadał dekompozycję na pełne skojarzenia wynosi: 0

• Minimalna liczba krawędzi jakie należy usunąć z \bar{G} , aby otrzymany graf był eulerowski: $\frac{16 \cdot 15}{2} + \frac{16}{2} = 120 + 8 = 128$

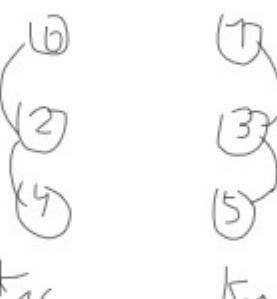
• Minimalna liczba krawędzi jakie należy usunąć z G , aby otrzymany graf był dwudzielny:



Wynik: minimalna liczba krawędzi
jednego pełnego + skojarzenie
z drugiego

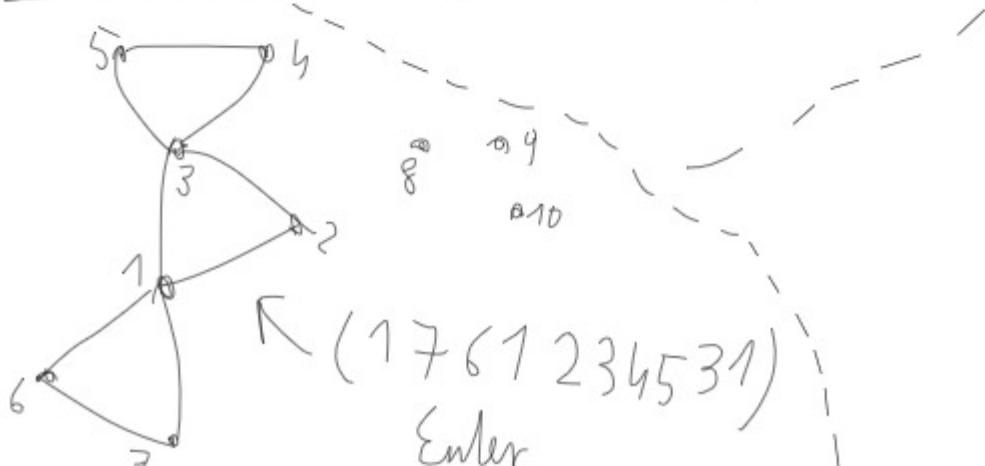


$K_{16,16}$



$$|\text{pełne skoj.}| = \frac{32}{2} = 16$$

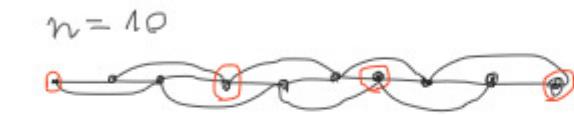
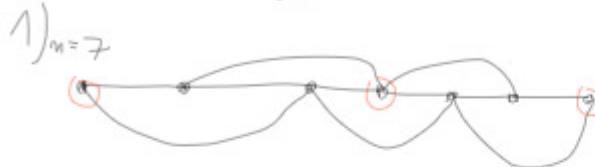
$$\frac{15 \cdot 32}{2} = 240 = |E|$$



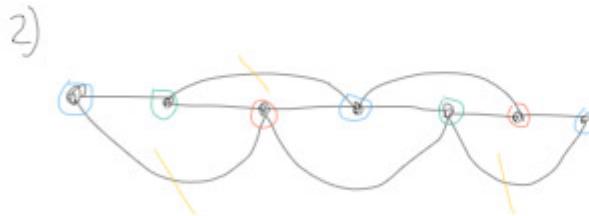
Euler

8. Niech G będzie grafem rzędu n o rozmiarze $2n - 3$, $n \geq 3$, utworzonym ze ścieżki P_n poprzez dodanie, dla każdej pary wierzchołków x, y znajdujących się w odległości 2 w P_n (wersja B w odległości 3 i $n \geq 4$), krawędzi $\{x, y\}$.

- Dla każdego $n \geq 3$, $\alpha(G) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, Tarczycy co 3
- Dla każdego $n \geq 3$, $\chi(G) = 3$
- Dla każdego $n \geq 3$, $\chi'(G) = 4$ dla $n \geq 5$, 3 dla $n < 5$
- Dla każdego $n \geq 3$, $\mu(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

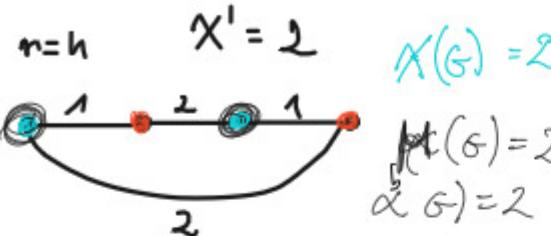


Co trzy dodane wierzchołki, kolejny wierzchołek dochodzi do zbioru niezależności



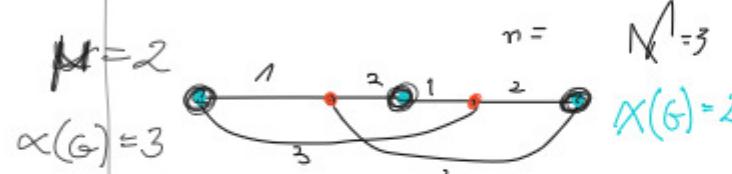
Wersja B:

Wersja potyczomych co 3:

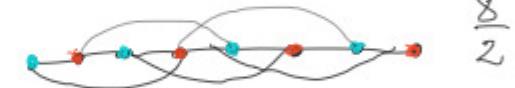
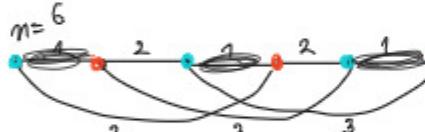


$$\frac{4}{2} \quad \left[\frac{4}{2} \right] = [3, 5] = 4$$

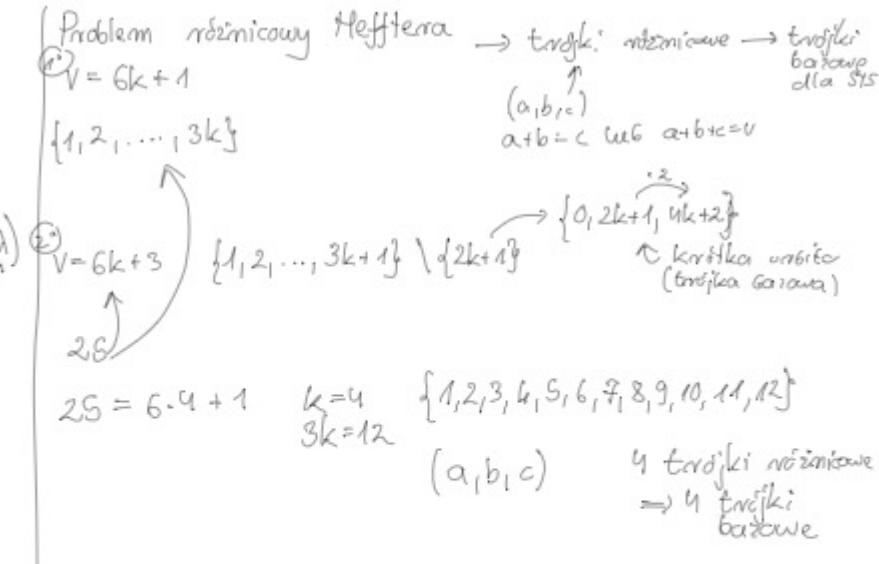
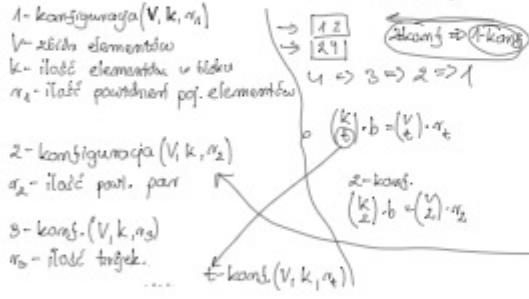
$$\frac{9}{2} = 2,5$$



$$\chi'(G) = \begin{cases} \text{dla } m=4: 2 \\ \text{dla } 5 \leq m < 7: 3 \\ \text{dla } m \geq 7: 4 \end{cases} \quad \left[\frac{m}{2} \right]$$



Skuteczne rozwiązywanie metodą indukcyjną dla STS(27) i 2-konfiguracji dla parzystych
 1) STS(27) - rozwiązać metodą indukcyjną dla parzystego $V = 27$
 2) 2-konfiguracja dla parzystego $V = 24$ (zadanie 3.4.2)
 3) 2-konfiguracja dla parzystego $V = 26$ (zadanie 3.4.4)



$$STS(V) = 2\text{-konf}(V, 3, 1)$$

$$10) \text{ liczba trójk w } STS(27) \rightarrow 2\text{-konf}(27, 3, 1)$$

$$\binom{3}{2} \cdot b = \binom{57}{2} \cdot 1$$

$$b = \binom{57}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \binom{3}{2} \cdot b &= \binom{27}{2} \cdot 1 \\ 3b &= \frac{27 \cdot 26 \cdot 25!}{27! \cdot 2} \\ b &= 9 \cdot 13 = 117 \end{aligned}$$

$$63 = 6 \cdot 10 + 3$$

$$k = 10$$

$$3k+1 = 31$$

$$2k+1 = 21$$

$$\{1, 2, \dots, 31\} \setminus \{21\}$$

10 trojek różnic. \Rightarrow
 \Rightarrow 10 trojek baz.

+ krytyka orb.
 $= 11$

$$STS(25) = 2\text{-konf}(25, 3, 1)$$

$$\binom{k}{1} \cdot 0 = \binom{V}{1} \cdot n_1 \Leftrightarrow k \cdot b = V \cdot n_1$$

$$\binom{25}{2} \cdot b = \binom{25}{2} \cdot 1 \quad 3b = 300 \quad b = 100 \quad 300 = 25 \cdot n_1 \quad n_1 = 12$$

$$\frac{25 \cdot 24}{2} =$$

$$\frac{25}{2} \cdot 12 =$$

$$\frac{25}{2} \cdot 5 =$$

$$\frac{25}{2} \cdot 0 =$$

$$STS(27) = 2\text{-konf. } (27, 3, 1)$$

$$\binom{k}{1} \cdot b = \binom{V}{1} \cdot n_1 \Rightarrow \binom{27}{1} \cdot 117 = \binom{27}{1} \cdot n_1$$

$$\binom{27}{2} \cdot b = \binom{27}{2} \cdot 1 \quad b = 117$$

$$\Downarrow$$

$$n_1 = 13$$