

$$1^0 x_2 = 2 \Rightarrow 2x_2 = 4$$

$$2^0 x_2 = 4 \Rightarrow 2x_2 = 8$$

$$1^0 x_1, x_3 \geq 1 \quad n \geq 3$$

$$x_1 + 4x_3 = 4n - 4$$

$$4x'_1 + 4x_3 = 4n - 4$$

$$4x'_1 + 4 + 4x_3 + 4 = 4n - 4$$

$$x'_1 + x_3 = n - 3$$

$$\binom{n-3-2-1}{n-3} = n-2$$

$$2^0 \text{ też } x_3, x_1 \geq 1$$

$$x_1 + 4x_3 = 4n - 8$$

$$4x'_1 + 4x_3 + 4 + 4 = 4n - 8 \quad n \geq 4$$

$$x'_1 + x_3 = n - 4$$

$$\binom{n-4+2-1}{n-4} = n-3$$

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

$$a_3 = 1$$

$$a = 2n - 5 \quad \text{dla } n \geq 4$$

$$a_n - a_{n-1} = 2n - 5 - (2n - 2 - 5)$$

$$a_n - a_{n-1} = 2$$

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

$$A(x) = \sum_{n=4}^{\infty} (a_{n-1} + 2)$$

suma od $n=4$, bo 4 pierwsze wyrazy dane ($a_0 - a_3$)

+ jak się dostać sumę od $n=3$ to się symulato, minus ile dało, mniej ostatni dawało, bo $1 = 2 \cdot 3 - 5$

$$A(x) = 1 \cdot x^3 + x \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=4}^{\infty} x^n$$

symulacja powt.

$$A(x) = 1 \cdot x^3 + x(A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2) + \frac{2x^4}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{2x^4}{(1-x)^2} + \frac{1 \cdot x^3}{1-x}$$

$$= x^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) x^n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) x^{n+4}$$

$$= x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} x^n (1 + 2n - 6)$$

$$= x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} (2n-5) x^n$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{dla } n < 3 \\ 1, & \text{dla } n = 3 \\ 2n-5 & \text{dla } n \geq 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{czyli} \\ \text{tak jak} \\ \text{miałoby być} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) x^{n+4} \\ & n' = n+4 \quad n' \geq 4 \\ & 2n+2 = 2n' - 6 \\ & \sum_{n'=0}^{\infty} (2n' - 6) x^{n'} \end{aligned}$$

1. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$.

Liczba tych odwzorowań g , które są słabo rosnące oraz $g(2) \mid 3 \leq g(5)$ wynosi: 181

Liczba tych odwzorowań f , dla których $f(5) = f(1) \cdot f(3)$ wynosi: $14 \cdot 6^3$

Liczba tych odwzorowań f , które są słabo monotoniczne, ale nie są silnie monotoniczne wynosi: $6^6 - \sum_{i=0}^5 \binom{6}{i} (6-i)^6 (-1)^i$: liczba odwzorowań w których min 1 wartości nieprzyjmuje bo 6 nie odjmuje

Liczba tych odwzorowań g , które nie są ani suriekcjami, ani iniekcjami wynosi:

k : liczba użytych dostępnych

0)	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	1	$k \in \langle 4, 6 \rangle$ $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 2$ $k \in \langle 4, 5 \rangle$ $x_2 + \dots + x_5 = 2$ $k = 4$ $x_3 + \dots + x_6 = 2$	$\begin{array}{ c } \hline 4-6 \\ \hline \end{array}$	$6-k+1$ opcji, bo dla $g(5) = 4$ są 3 opcje przekładano
	$\begin{array}{ c } \hline 1-2 \\ \hline \end{array}$	2		$\begin{array}{ c } \hline 5-6 \\ \hline \end{array}$	6-1 opcji, bo dla $g(5) = 5: k = 4$ i są 2 opcje
	$\begin{array}{ c } \hline 1-3 \\ \hline \end{array}$	3		$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline \end{array}$	1 opcja, bo tylko 6
	$\underbrace{\quad}_{g(1)}$		$\underbrace{\quad}_{g(3), g(4)}$	$\underbrace{\quad}_{g(5)}$	$\underbrace{\quad}_{g(6)}$

$$\binom{k+2-1}{2} = \binom{k+1}{2} \text{ dla } g(3), g(4)$$

możemy wyliczyć, gdzie k to liczba dostępnych użytych

$$1^0 + 2^0 + 3^0$$

$$= 3 \cdot 10 + 30 + 21$$

$$+ (20 + 15) \cdot 2$$

$$+ 3 \cdot 10$$

$$= 181 \text{ Odp}$$

przekład dla (1): $(6-k+1) \cdot \binom{k+1}{2}$

$$(1) \quad 1 \cdot (3 \cdot \binom{5}{2} + 2 \cdot \binom{6}{2} + 1 \cdot \binom{7}{2})$$

$$(2) \quad (2 \cdot \binom{5}{2} + 1 \cdot \binom{6}{2}) \cdot 2$$

$$(3) \quad 3 \cdot (1 \cdot \binom{5}{2})$$

$$b) \quad f(5) = f(1) \cdot f(3)$$

$$14 \cdot 6^3$$

$$\begin{array}{l} 1 = 1 \cdot 1 \\ 2 = 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \\ 3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 \\ 4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4 \\ 5 = 1 \cdot 5 \\ 6 = 3 \cdot 2 = 1 \cdot 6 \end{array}$$

$$c) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 6$$

$$2 \cdot \binom{11}{6} - 6 - 2 = 2 \cdot \binom{11}{6} - 8 \text{ Odp}$$

silnie monotoniczne

ciąg stały

$$d) \quad 6^6 - \text{iniekcje}$$

$$|A \cap B| = 6!$$

$$A - \text{iniekcje} = 6!$$

$$B - \text{suriekcje} = \sum_{i=0}^5 \binom{6}{i} (6-i)^6 (-1)^i$$

$$6^6 - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$= 6^6 - \sum_{i=0}^5 \binom{6}{i} (6-i)^6 (-1)^i \text{ Odp}$$

$$n = 5, 5 \rightarrow 1, 1, 1, 1, 1$$

$$n = 15, 5 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5$$

$$m = n - 10$$

$$\begin{matrix} +0 & +1 & +2 & +3 & +4 \\ & & & & + (i-1) \end{matrix}$$

2. Niech $P(n, k)$ oznacza liczbę podziałów liczby n na k składników, natomiast $P(n)$ liczbę wszystkich podziałów liczby n .

- Dla każdego $n \geq 2$, $P(n, 2) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- Dla każdego $n \geq 6$, $P(n, n-3) = 3$
- Dla $0 < k < n$ zachodzi zależność $P(n) = \sum_{i=0}^{n-k} P(n, i) + W$, gdzie wyrażenie oznaczone symbolem W ma postać:
- Liczba podziałów liczby n , $n \geq 15$, na pięć parami różnych składników jest równa liczbie podziałów liczby m na pięć składników, gdzie $m = n - \binom{5}{2}$, bo jest taka bijekcja

$$p(m, k) = p_r(n + \binom{k}{2}, k)$$

3. Niech \mathcal{L} będzie listą, w porządku leksykograficznym, wszystkich permutacji zbioru

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Każda permutacja ma jednoznacznie przypisaną pozycję i na tej liście, $i = 1, 2, 3, \dots$

- Permutacja $(15)(2)(3)(6874)$ występuje na pozycji: $4 \cdot 7! + 6! + 5! + 2 \cdot 4! + 2 \cdot 2! + 1$
- Liczba tych permutacji w \mathcal{L} , których rozkłady na cykle składają się z samych transpozycji wynosi: $\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{4!}$, bo kolejność wyliczenia
- Następnikiem permutacji $\langle 2, 5, 4, 8, 7, 6, 3, 1 \rangle$ jest permutacja:
- Poprzednikiem permutacji $\langle 7, 4, 2, 5, 1, 3, 6, 8 \rangle$ jest permutacja:

(25613478)

$\rightarrow (74238651)$

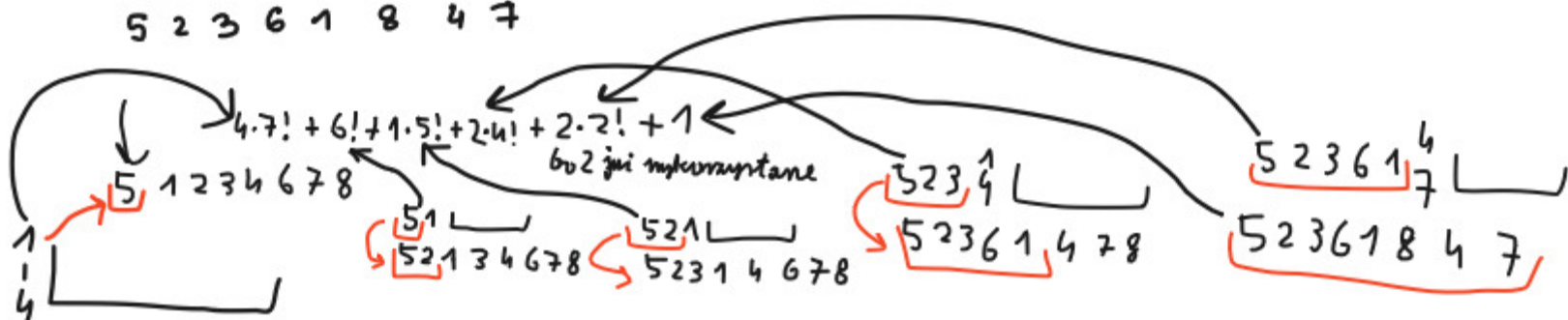
przykładowe:

$\langle 5, 1, 6, 3 | 2, 4, 7, 8 \rangle$
 $\langle 5, 1, 6, 2, 8, 7, 4, 3 \rangle$

742 15 8631

a)

1 2 3 4 5 6 7 8
 5 2 3 6 1 8 4 7



6. Niech G będzie grafem rzędu $n = 2^5$, w którym wierzchołki są wyznaczone przez parami różne ciągi binarne długości 5. Dwa wierzchołki w G są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy liczba jedynek w konkatencji ciągów odpowiadających tym wierzchołkom wynosi cztery. Niech \bar{G} oznacza dopełnienie grafu G .

• Ścieżka o maksymalnej długości w G ma długość: **10, bo graf $K_{5,10}$**

• Minimalna liczba krawędzi, jakie należy dodać do \bar{G} , aby otrzymany graf był eulerowski wynosi: **nie da się, bo 5 ma**

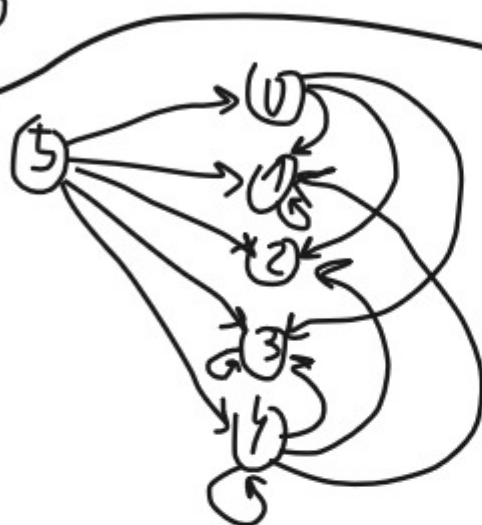
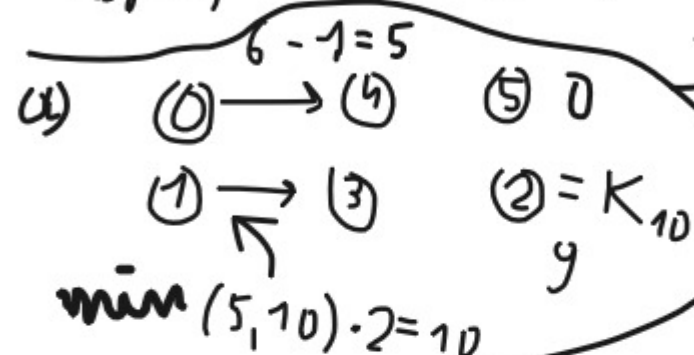
• Maksymalna liczba krawędzi jakie można usunąć z \bar{G} , aby otrzymany graf był nadal spójny wynosi: **365**

• W dekompozycji grafu \bar{G} na ścieżki P_3 liczba części dekompozycji wynosi: **$\frac{396}{3} = 132$ XD?**

ale nieparzyste
i jest połączony
ze wszystkimi
a nie może
być multigraf

ile jedynek
ile
 $\deg(V)$

0	1	2	3	4	5
1	5	10	10	5	1
5	10	9	5	1	0



b)

\bar{G} ile	1	5	10	10	5	1
1	0	1	2	3	4	5
\deg	26	21	22	26	30	31

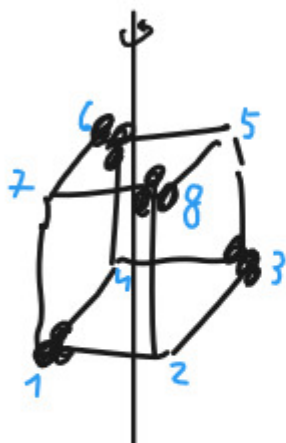
- 0: bez 4
- 1: bez 3
- 2: mra
- 3: bez 1
- 4: bez 0
- 5: mra

$$|E| = \frac{26 + 105 + 220 + 260 + 150 + 31}{2} = 396$$

$$\frac{480 + 162 + 150}{2} = \frac{792}{2} = 396$$

$$(396 - 31) = 365$$

BURNSIDE (będzie tu)



wierzch.

sym

id

180°

monomiany

z_1^8

$3z_2^4$

$4z_3^2 z_1^2$

$$\frac{1}{8} (z_1^4 + 3z_2^2 + 4z_1 z_3)$$

$(683)(742)(1)(5)$

5. Niech F oznacza szkielet bryły będącej sześcianem (foremny), otrzymany w wyniku sklejenia 12 zapalek w ten sposób, że dla każdej zapalki główka łączy się jedynie z główkami innych zapalek.

- Liczba parami nierównoważnych pokolorowań wierzchołków szkieletu F za pomocą co najwyżej trzech kolorów wynosi:
- Cykliczny indeks grupy symetrii szkieletu F na zbiorze wierzchołków ma postać:
- Liczba parami nierównoważnych pokolorowań wierzchołków szkieletu F za pomocą dwóch kolorów, w których trzy wierzchołki pokolorowane są jednym kolorem, a pięć pozostałych innym wynosi:

16

$$a) \frac{1}{8} (3^8 + 3 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4)$$

$$b) \frac{1}{8} (z_1^8 + 3z_2^4 + 4z_3^2 z_1^2)$$

$$c) z_1^3 z_2^5 \wedge z_1^5 z_2^3 ?$$

$$\frac{1}{8} ((n_1+n_2)^8 + 0 + 4(n_1^3+n_2^3)^2(n_1+n_2)^2)$$

\downarrow \uparrow
 $\binom{8}{3} \cdot 2$ przez $4 \cdot 2n_1^3 n_2^3 \rightarrow n_1^2 n_2^2$

$$\frac{1}{8} (2 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{8} + 16) = \frac{128}{8} = 16 ?$$

7. Dla każdej takiej pary liczb naturalnych n i k , że $2 \leq k < n-1$, niech $\mathcal{G}_{n,k}$ oznacza rodzinę grafów rzędu n , w których dokładnie k wierzchołków ma stopień 2, natomiast pozostałe $n-k$ wierzchołków stopień 3.

• Liczba parami nieizomorficznych grafów w $\mathcal{G}_{n,2}$ wynosi 4

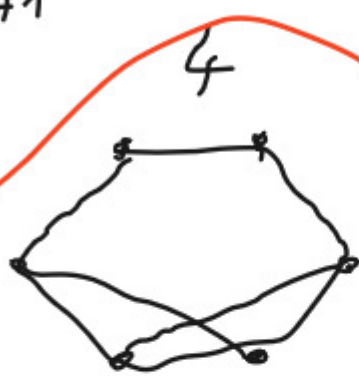
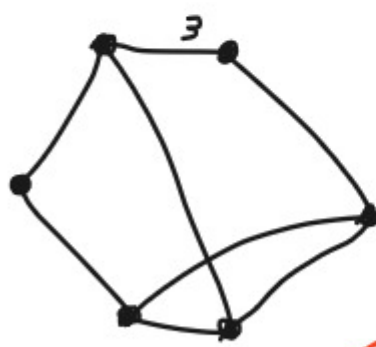
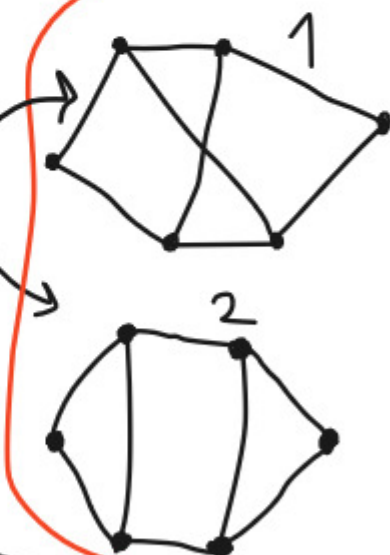
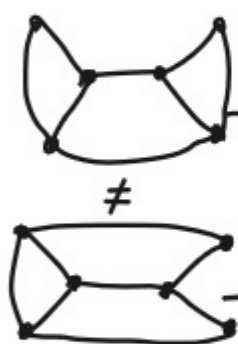
• Dla każdego $n \geq 6$, liczba tych parami różnych nieizomorficznych grafów w $\mathcal{G}_{n,2}$, które są spójne i w których wierzchołki stopnia 3 są sąsiednie wynosi $(\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor + 1) + (\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor + 1)$ dla $\mathcal{G}_{n,n-2}$?

• Dla każdego $n \geq 6$, spośród wszystkich grafów spójnych w $\mathcal{G}_{n,n-2}$, $\text{diam}(G)$ przyjmuje wartość maksymalną równą: $n-6+3 = n-3$

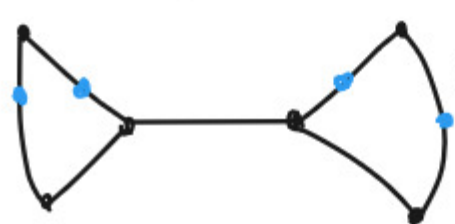
• Dla każdego $n \geq 10$, liczba składowych spójnych grafu uzyskanego z dowolnego grafu w $\mathcal{G}_{n,k}$ w wyniku usunięcia jednego wierzchołka (wraz z incydującymi krawędziami) może wynosić co najwyżej: $\lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor + 1$

a) $\mathcal{G}_{6,2}$

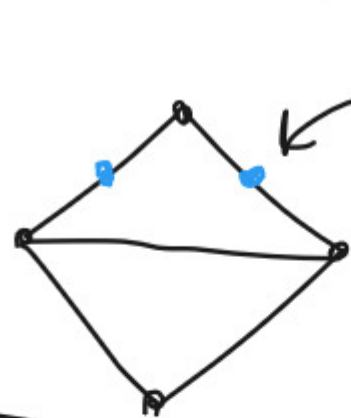
2x2 4x3



b) $\mathcal{G}_{n,n-2}$



$$\left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor + 1$$

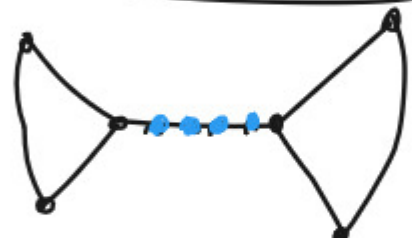


$$\left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor + 1$$

$\mathcal{G}_{n,2}$

Czy jeśli jest tych 3-stopniowych jest więcej niż 2 to ma być kłopot?

c)



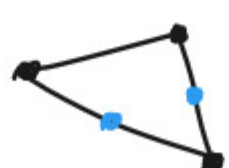
$$n-6+3 = n-3$$

d)

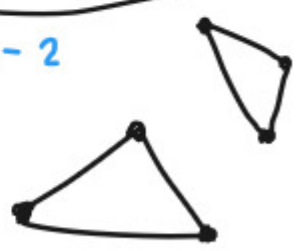


I $k = n-4$

• - dla niepodzielnych



II $k = n-2$



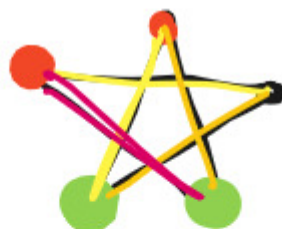
$$\left\lfloor \frac{n-4}{3} \right\rfloor + 1$$

najmiejsciej dla $k = n-4$, bo dla innych lub $k = n-2$ ilość stopnia 3 nie działa

8. Niech G będzie grafem rzędu n , $n \geq 5$, otrzymanym z grafu pełnego K_n poprzez usunięcie krawędzi tworzących cykl C_5 .

- Dla każdego $n \geq 5$, $\chi(G_n) = n - 2$
- Dla każdego $n \geq 5$, $\mu(G_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- Dla każdego $n \geq 5$, $\alpha(G_n) = 2$
- Dla każdego $n \geq 5$, $\chi'(G_n) = \begin{cases} 3, & n=5 \\ n-1, & n>5 \end{cases}$

$n=6$



9. Niech $P_{n,p}$ oznacza częściowy kwadrat łaciński rzędu $n \geq 3$ zawierający p pustych komórek, $0 \leq p \leq n^2$.

• Dla każdego $n \geq 3$, maksymalna wartość p , dla której każdy $P_{n,p}$ może zostać uzupełniony do kwadratu łacińskiego wynosi:

• Spośród wszystkich kwadratów łacińskich L rzędu $n \geq 3$, minimalna liczba wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich ortogonalnych do L wynosi: **1**

• $P_{3,8}$ może zostać uzupełniony do kwadratu łacińskiego na co najmniej x różnych sposobów, gdzie $x = 4$

• Dla każdego $n \geq 4$, wartości p , dla których istnieje $P_{n,p}$ uzupełnialny do kwadratu łacińskiego na co najmniej 2 różne sposoby tworzą zbiór: $p \in \langle 4, \dots \rangle$?

dla $n=6$ nie istnieje \square Tac

dla każdego innego n istnieje co najmniej 1 \square Tac ortog. do naszego L

c) $2! \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{pmatrix}$ da się uzupełnić max na 4 sposoby
te cztery wyznaczone jednoznacznie

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \langle 4, n^2 \rangle$

q) $\frac{n^2+n}{2}$ suma ciągu arytmetycznego, ponieważ w każdym kolejnym wierszu/kolumnie możemy zostawić o jeden więcej pusty kwadrat niż wcześniej a zaczynamy o 1 pustego kwadraciku

1	2	3	
2	3		
\square			

 $\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2+n}{2}$

1	2	3	4
2	3		
\square			
4			

1	2	3	4
2	3	4	
\square	4		
4			

to powielamy aż nie będzie pełnego kwadratu łacińskiego

h) $\langle 4, \frac{n^2+n}{2} + 1 \rangle$ chyba w zadaniu powinno być co najwyżej 2 sposoby
bo conajmniej jest odpowiedź za prosta

1	2		
2	3		
\square			

1	2		
2	3		
\square	4		
4			

1	2		
2	3		
\square	4		
4	7		

, to na dwa sposoby można uzupełnić z terminu 2 z dyskretniej

10. Dla danego $S = \text{STS}(v)$, niech G_S oznacza graf przecięć systemu S , czyli graf rzędu $n = \frac{v(v-1)}{6}$ utworzony w taki sposób, że wierzchołki w G_S odpowiadają trójkom w S i ponadto dwa wierzchołki w G_S są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im trójki mają niepuste przecięcie.

- Stopnie wierzchołków w G_S tworzą zbiór: $3 \cdot \frac{v-1}{2}$
- Dla każdego dopuszczalnego $v \geq 7$, $\omega(G_S) = 3$
- W (v, k, λ) -BIBD każda trójka występuje w co najwyżej y blokach, gdzie $y = 2$
- Bloki bazowe cyklicznego $\text{STS}(15)$ tworzą zbiór: $\{(0, 2, 8), (0, 1, 4), (0, 5, 10)\}$

1 2 3 4 5 6 7

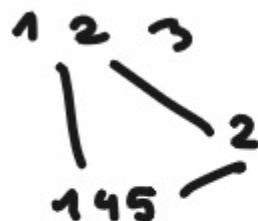
2, 6, 7 \rightarrow 0, 2, 8

1, 3, 4 \rightarrow 0, 1, 4

$6k+3, k=2$

$\{0, 2k+1, 4k+2$
 $0, 5, 10$

4 6



Wstępnie i poprzednik permutacji

$\langle 2\ 5\ \underline{4}\ \underline{876}\ 3\ 1 \rangle$

Nast

$\langle 2\ 5\ \underline{6}\ 1\ 3\ \underline{4}\ 7\ 8 \rangle$

$\langle 7\ 4\ 2\ \underline{5}\ 1\ \underline{3}\ 6\ 8 \rangle$

popr

$\langle 7\ 4\ 2\ \underline{3}\ 8\ 6\ \underline{5}\ 1 \rangle$

Podziaty I i II termin

$$p(20, \text{parz}) \Leftrightarrow p(10, \text{zwr. i zero})$$

$$p(24, 4, \text{np}) \Leftrightarrow p\left(\frac{24-4}{2}, 4, \text{zwr. i zero}\right)$$

3. Stach z łopatek i tyn, w porównaniu analitycznym tych podziałów liczy 24 na cztery dziesiątki w których każdy składnik jest nieparzysty, każdy podział ma maksymalną uporządkowaną składniki oraz jednostki przysługujące i nie tej ilości: $i = 1, 2, 3, \dots$

- Podział (1, 1, 7, 3, 1) występuje na pozycji 14
- Podział (1, 1, 9, 3, 1) występuje na pozycji 13
- Następnym podziałem (1, 1, 9, 3, 1) jest podział (11, 7, 5, 1)
- Następnym podziałem (1, 1, 7, 3, 1) jest podział (13, 5, 5, 1)
- Liczba tych podziałów w 2, w których składnik 8 oraz 8 występuje jednostkowo wynosi 3
- Liczba tych podziałów w 2, w których składnik 7 oraz 8 występuje jednostkowo wynosi 4
- Ograniczonym podziałem (9, 9, 3, 1) jest podział (11, 5, 3, 3)
- Ograniczonym podziałem (7, 7, 7, 8) jest podział (9, 5, 5, 5)

24, 4, np

1 1 1 1

$$p(10, 4, \text{zwr. i zero})$$

(20, 4, parz, ale minimum nie może być i zostanie 1)

a) $(11, 7, 5, 1) \rightarrow (5, 3, 2, 0)$

b) $(11, 4, 3, 1) \rightarrow (5, 4, 1, 0)$

10 0 0 0

4 1 0 0

8 2 0 0

8 1 0 0

7 3 0 0

7 2 1 0

7 1 1 1

6 4 0 0

6 3 1 0

6 2 2 0

6 2 1 1

5 5 0 0

→ 5 4 1 0 nr 13

→ 5 3 2 0 nr 14

e) $4 \cdot 3 \rightarrow 4 \cdot 1$

$10 - 5 = 5$ $p(5, 2, \text{zwr. i zero})$

50

4

32

1

f) $7 \cdot 3 \rightarrow 3 \cdot 1$

60

51

42

33

Stirling's formula:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1) \cdot S(n-1, k)$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} (k^n - \binom{k}{1} \cdot (k-1)^n + \binom{k}{2} \cdot (k-2)^n \dots)$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n \cdot (-1)^i$$

$$S(n, 3) = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 1^n}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2!}$$

$$S(n, 2) = \frac{2^{n-2}}{2!} = 2^{n-1} - 1$$

$$S(n, n-5)$$

domagajmo się n-5 jednerek

p(5) ma ośmiu członków

$$5 \rightarrow \binom{n}{5}$$

$$41 \rightarrow \binom{n}{5} \cdot \binom{n-5}{2}$$

$$32 \rightarrow \binom{n}{4} \cdot \binom{n-4}{3}$$

$$311 \rightarrow \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot \binom{n-4}{4} \cdot \frac{1}{2!}$$

$$221 \rightarrow \binom{n}{3} \cdot \binom{n-3}{3} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \binom{n-6}{2}$$

$$2111 \rightarrow \dots$$

$$11111 \rightarrow \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \dots \binom{n-8}{2} \cdot \frac{1}{5!}$$

