Tworzące zwykle skrypt

Jakub Karczewski

November 2025

1 Wprowadzenie

Prawdodobnie na wykładzie z matematyki dyskretnej został podany następujący wzór:

$$\underbrace{(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots)}_{k \text{ nawiasów}}$$

$$\left(1+x+x^2+\cdots\right)^k = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right)^k = \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n$$

1.1 Wytłumaczenie wzoru

Każdy z nawiasów mozemy okreslić jako rozróżnialną szufladkę, do której wrzucamy kulki - krotności x-ów, które wybierzemy z danego nawiasu. Dzięki temu, w momencie kiedy mamy ustalonego n-a, którego chcemy uzyskać, nasz problem można sprowadzić do postaci:

$$x_1 + x_2 \cdots + x_k = n$$

Dzięki czemu możemy łatwo wyprowadzić, że jest to:

$$\binom{n+k-1}{n}$$

2 Tylko parzyste potęgi w nawiasach

2.1 I sposób

Rozważmy następującą funkcję tworzącą:

$$\underbrace{(1+x^2+x^4+\cdots)\,(1+x^2+x^4+\cdots)\,\cdots\,(1+x^2+x^4+\cdots)}_{k\text{ nawiasów}}$$

Możemy zauważyć, że ta funkcja tworząca na pewno zeruje się dla wyrazów nieparzystych. Dodatkowo każdy z nawiasów jest identyczny, a jego zawartość różni się od przykładu powyżej tym, że iksy "skaczą" o 2, zamiast o 1.
Z racji tego, że nasze niezerowe wyrazy również "skaczą" o 2 można się zastanowić czy tej dwójki nie dałoby się skrócić z obu stron.
Mamy następuje równanie:

$$2*x_1+2*x_2+\ \dots\ +2*x_k=n$$

Dalej korzystamy z tego, że n musi być podzielne przez 2, skoro tylko dla takich indeksów otrzymujemy niezerowe współczynniki:

$$2*x_1+2*x_2+\ \dots\ +2*x_k=2*n'$$

Następnie albo możemy sobie podzielić obie strony przez 2 i tyle,
albo możemy sobie pomyśleć tak:
$2*x_1$ zapewnia nam x_1 dwójek, $2*x_2$ zapewnia nam x_2 dwójek ... $2*x_k$ zapewnia nam x_k dwójek

Łącznie chcemy otrzymać n' dwójek (na podstawie prawej strony równania), gdzie n' to po prostu $\frac{n}{2}$. Zatem otrzymujemy następujący wzór na kombinacje z powtórzeniami:

$$\binom{n'+k-1}{n'}=\binom{\frac{n}{2}+k-1}{\frac{n}{2}}$$

Tutaj jednak pojawia się problem taki, że o ile łatwo jest za pomocą tego wzoru rozpisać ciag a_n to trudniej jest rozpisać elegancką sumę tutaj.
Jest jednak na to sposób:
Możemy napisać sumę, również do nieskończoności, które będzie "skakała" po indeksach parzystych.
Dla przykładu, jeśli chcemy rozpisać sumę liczb parzystych do $2*i$ można to zrobić następująco:

$$\sum_{n=0}^{i}2*n=0+2+4+\ \dots\ +2*i$$

Tak samo możemy postąpić dla potęg iksów. Oznaczmy sobie n jako $2 * n'$ i zróbmy sumę po wyrazie n'. Wówczas otrzymujemy:

$$\sum_{n'=0}^{\infty} x^{2n'} \binom{\frac{2*n'}{2} + k - 1}{\frac{2*n'}{2}}$$

Co w rezultacie daje nam:

$$\sum_{n'=0}^{\infty} x^{2n'} \binom{n' + k - 1}{n'}$$

2.2 II sposób

Rozpatrujemy to samo równanie co w I sposobie, jednak zastosujemy tutaj podstawienie $t = x^2$.

$$\underbrace{(1 + t + t^2 + \cdots)(1 + t + t^2 + \cdots)\ \cdots\ (1 + t + t^2 + \cdots)}_{k \text{ nawiasów}}$$

Następnie możemy rozwiązać tą funkcję tworzącą ze względu na zmienną t:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \binom{n + k - 1}{n}$$

Dalej podstawiając za t z powrotem x dostajemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \binom{n + k - 1}{n}$$

Co okazuje się być tym samym co w sposobie I

3 Uogólnienie na tylko liczby podzielne przez i

$$\underbrace{(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} \cdots)(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} \cdots) \cdots (1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} \cdots)}_{k \text{ nawiasów}}$$

Dalej otrzymujemy równanie:

$$i * x_1 + i * x_2 \cdots + i * x_k = n = i * n'$$

A na końcu dostajemy sumę:

$$\sum_{n'=0}^{\infty} x^{in'} \binom{n' + k - 1}{n'}$$

W tym przypadku rozpiszmy również a_n dla tej funkcji tworzącej:

$$a_n = \begin{cases} \binom{\frac{n}{i} + k - 1}{\frac{n}{i}}, & \text{gdy } n \text{ jest podzielne przez i} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

4 Przykładowe trudniejsze zadania

4.1 Zadanie 2 termin egzaminu 24/25

4. Dla każdego $n \geq 0$, niech a_n oznacza liczbę dodatnich, całkowitoliczbowych rozwiązań równania $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4n$.

- $a_5 =$
- Rekurencyjna zależność na n-ty wyraz ciągu ma postać:
- Funkcja tworząca dla ciągu $\{a_n\}$ ma postać:
- Nierekurencyjny wzór na n-ty wyraz ciągu, dla $n \geq 0$, ma postać:

Pierwsze co można zauważyć to to, że wyrażenie z x_1 na pewno musi być parzyste, ze względu na podzielność prawej strony przez 2.
Podstawiamy zatem $x_1 = 2 * x_1'$, aby to wymusić

$$2x_1' + 2x_2 + 4x_3 = 4n \wedge x_1', x_2, x_3 \geq 1$$

Kolejna obserwacja jest taka, że rozwiązania mają być dodatnie, zatem do każdego z naszych iksów dodajemy 1, jednak musimy pamiętać o odpowiednim przeskalowaniu:

$$2(x_1' + 1) + 2(x_2 + 1) + 4(x_3 + 1) = 4n$$

Co dalej daje nam:

$$2x_1' + 2x_2 + 4x_3 = 4n - 8 \wedge x_1', x_2, x_3 \geq 0$$

Niech kolejną obserwacją będzie to, że współczynnik zarówno przy x_3 jak i przy n jest równy 4, i jest on wielokrotnością 2, czyli współczynnika przy pozostałych iksach.
Możemy teraz spróbować przenieść $4x_3$ na prawą stronę równania, jednak dalej pamiętając, że x_3 to zmienna.
Aby chwilowo pozbyć się tego problemu, przypisujemy x_3 jakąś stałą wartość, która będzie się na pewno znajdować w przedziale $[0, n-2]$
Dlaczego takim? Wynika to z prawej strony równania

$$x_3 = i, \quad i \in [0, n-2]$$
$$2x_1' + 2x_2 = 4n - 4i - 8$$

Następnie możemy, analogiczne jak w rozdziale 2, wyciągnąć dwójkę przed nawias i podzielić równanie obustronnie.

$$x_1' + x_2 = 2n - 2i - 4$$

Z tego wniosek, że dla tego ustalonego i otrzymujemy następujący wzór za pomocą kombinacji z powtórzeniami:

$$\binom{(2n-2i-4)+2-1}{2n-2i-4} = 2n-2i-3$$

Wiedząc, ze x_3 może przyjmować wiele wartości i przyjęcie przez niego jakiejś konkretnej wartości jest przypadkiem rozłącznym z pozostałymi, możemy napisać:

$$\sum_{i=0}^{n-2}(2n-2i-3)$$

Widzimy, że jedyną uzmiennioną częścią tego równania jest wyrażenie $2i$ oraz że pozostałe części zliczamy w niezmienionej postaci tyle razy, ile jest iteracji sumy. Przekształcając dalej:

$$\sum_{i=0}^{n-2}(2n-2i-3) = -2\sum_{i=0}^{n-2} i + (n-2+1)*(2n-3)$$

Dalej korzystając z wzoru na sumę ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$-2\sum_{i=0}^{n-2} i + (n-1)*(2n-3) = (-2)*\frac{(n-2)*((n-2)+1)}{2} + 2n^2-5n+3$$

$$= -(n^2-3n+2)+2n^2-5n+3 = n^2-2n+1 = (n-1)^2$$

Otrzymujemy $a_n = (n-1)^2$ z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Warunki poczatkowe dla a_1 i a_2 nie są konieczne, bo wynikają ze wzoru

Następnie mozemy przejsc do wyznaczenia wzoru rekurencyjnego:

$$a_n - a_{n-1} = (n-1)^2 - (n-2)^2 = 2n-3$$
$$a_n = a_{n-1} + 2n - 3$$

Funkcję tworzącą na podstawie ciagu w tym przypadku wyznacza sie standardowo bez wiekszych skonplikowań, tylko żmudne liczenie, które tutaj nie będzie przedstawione.

4.2 Customowe zadanie z 3n po prawej stronie

POLECENIE: znajdź ciąg opisujący następujące równanie, dodatkowo rozwiązania muszą być dodatnie

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3n \land x_1, x_2, x_3 \geq 1$$

Tutaj od razu możemy zauważyć, że aby lewa strona równania również była podzielna przez 3, x_3 należy przedstawić w postaci $3x_3'$

$$3x_1' + 3x_2 + 6x_3 = 3n \land x_1', x_2, x_3 \geq 1$$

Następnie możemy pozbyć się warunku o dodatnich rozwiązań, dodajac do każdego iksa jedynkę

$$3(x_1' + 1) + 3(x_2 + 1) + 6(x_3 + 1) = 3n$$

Otrzymujemy:

$$3x_1' + 3x_2 + 6x_3 = 3n - 12 \land x_1', x_2, x_3 \geq 0$$

Następnie dzielimy całe równanie przez 3 i zauważamy, że x_3 warto by było przenieść na prawą stronę z racji tego, że stoi przy nim współczynnik różny niż przy pozostałych.

$$x_1' + x_2 + 2x_3 = n - 4$$

$$x_1' + x_2 = (n - 4) - 2x_3$$

Teraz pojawia się nam problem z ustaleniem przedziału wartości dla x_3, ponieważ wymagało to symbolu podłogi typu $x_3 \in < 0, \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor >$.

W tym przypadku wartość tego wyrażenia będzie zależała od parzystości n.

4.2.1 n parzyste

Oznaczmy $n = 2k$. Nasze równanie przyjmuje postać:

$$x_1' + x_2 = (2k - 4) - 2x_3$$

Dalej parametryzujemy x_3 i wyznaczamy mu przedział wartości

$$x_3 = i, \quad i \in [0, \frac{2k-4}{2}]$$
$$x_1' + x_2 = 2k - 4 - 2i$$

Czyli dla ustalonego i otrzymujemy następujący wzór z komb z powt.

$$\binom{(2k - 2i - 4) + 2 - 1}{2k - 2i - 4} = 2k - 2i - 3$$

Ostatecznie wprowadzmy sumę zgodną z wyznaczonym zakresem wartości:

$$\sum_{i=0}^{k-2} (2k - 2i - 3)$$

Następnie postępujemy jak w rozdziale wyżej i rozbijamy sumę na wartości zależne i niezależne od zmiennej.

$$\sum_{i=0}^{k-2} (2k - 2i - 3) = (2k - 3) * (k - 2 + 1) - 2 \sum_{i=0}^{k-2} i$$
$$= 2k^2 - 5k + 3 - 2 * \frac{(k-2) * (k-1)}{2} = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$$

Uwzględniając $k = \frac{n}{2}$ otrzymujemy:

$$(\frac{n}{2} - 1)^2 = \frac{(n-2)^2}{4}$$

4.2.2 n nieparzyste

Oznaczmy $n = 2k + 1$. Dalej analogicznie jak wyżej.

$$x_1' + x_2 = ((2k + 1) - 4) - 2x_3$$

$$x_3 = i, \quad i \in [0, \frac{(2k-3)-1}{2}]$$

Wyżej dodatkowe -1 wynika z parzystości

$$x_1' + x_2 = 2k - 3 - 2i$$

$$\binom{(2k-2i-3)+2-1}{2k-2i-3} = 2k - 2i - 2$$

$$\sum_{i=0}^{k-2}(2k-2i-2) = (2k-2) * (k-1) - 2\sum_{i=0}^{k-2} i$$

$$= 2k^2 - 4k + 2 - 2 * \frac{(k-2)*(k-1)}{2} = k^2 - k = k * (k-1)$$

Następnie korzystając z faktu, że $n = 2k + 1$, wyznaczamy: $k = \frac{n-1}{2}$
Możemy wstawić to do naszego wyniku:

$$k * (k-1) = \frac{n-1}{2} * \frac{n-3}{2} = \frac{(n-1)*(n-3)}{4}$$

4.2.3 Rozwiązanie

Nasz kompletny wynik to:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(n-2)^2}{4}, & \text{dla n parzystego} \\ \frac{(n-1)(n-3)}{4}, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Pozostały warunki początkowe:

$$a_i = 0 \; dla \; i \leq 1$$