6. Udowodnij, że z grupy 9 osób w wieku od 1 do 55 da się wybrać dwie rozłączne podgrupy o tej samej sumie wieku.

Pasowałoby, żeby grupy były obiektami a możliwe sumy wieków pudełkami.

Ile jest wszystkich możliwych grup?

$$2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{4} \binom{9}{k}}$$

$\boxed{\text{II sposób}}$

$2^9 - 2$ ← Nie chcemy grup pustych

żeby uzyskać liczbę grup, to mnożymy to przez 2, bo z każdego takiego wyboru dostajemy dwie grupy.

Wybieramy 1, 2, 3, 4 osoby spośród 9-ciu a reszta już sama układa się w drugiej grupie.

$\boxed{\text{Czyli to jest :}}$

$$\binom{9}{1} = 9 \qquad \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot \cancel{8}^{4} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{7!}} = 36$$

$$\binom{9}{3} = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 84$$

$$\binom{9}{4} = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2} = 126$$

<u>Odp:</u> $2 \cdot (126 + 84 + 36 + 9) =$

$= 2 \cdot 255 = 510$

Ile będzie pudełek (możliwych sum wieków)?

Najmniejsza (grupa 1-os, gdzie ta osoba ma roczek):

$\boxed{\text{suma to}}$ 1

Największa (grupa 8-os, gdzie każda osoba ma 55 lat)

$\boxed{\text{Suma to}}$ $8 \cdot 55 = 440$

Czyli mamy:

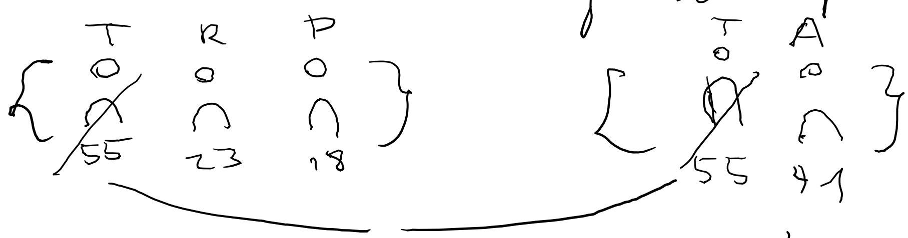
Obiektów – 510

Pudełek – 440 (od 1 do 440)

Z „UZD" $\left\lceil \frac{510}{440} \right\rceil = 2$,

czyli w którejś sumie wyglądają dwie grupy, ale niekoniecznie muszą być rozłączne. W takim razie jak udowodnić, że da się wybrać dwie rozłączne podgrupy o tej samej sumie wieku?

Osoby, które trafiają do grup mają taki sam wiek w każdej grupie w jakiej się znajdą. Dlatego nawet jeśli znajdziemy dwie grupy nachodzące na siebie o tej samej sumie, to:



Możemy taką osobę po prostu pominąć. Wtedy otrzymamy nowe grupy o ciągle równej sumie wieku, ale rozłączne. $\boxed{\text{C.N.D.}}$

Paweł Gryboś

3. **(9p.)** Ile jest 17-cyfrowych liczb, które mają w zapisie jedną 2 i jedną 4 oraz wyłącznie cyfry nieparzyste takich, które nie zawierają podciągu 12, 43 ani 23?

X - wszystkie liczby 17-cyfr z jedną dwójką, jedną czwórką i resztą cyfr wyłącznie niepa rz.

A_1 - liczba zawiera podciąg 12 że zbioru X

A_2 - liczba zawiera podciąg 43 z X

A_3 - liczba zawiera podciąg 23 z X

Odp: $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| =$

$= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (*)$

$|X| = \underbrace{17}_{\text{miejsce na 2}} \cdot \underbrace{16}_{\text{miejsce na 4}} \cdot 5^{15}$ } Pozostałe miejsca możemy obsadzić cyframi nieparzystymi {1, 3, 5, 7, 9}

$|A_1|$ $\boxed{12}$ _ _ _ _ _

$= \underbrace{16}_{\text{miejsce na blok } \boxed{12}} \cdot \underbrace{15}_{\text{miejsce na 4}} \cdot 5^{14}$ }

$|A_2|$ $\boxed{43}$ _ _ _ _

$= 16 \cdot \underbrace{15}_{\text{na 2}} \cdot 5^{14}$

$|A_3|$ $\boxed{23}$ _ _ _ _ _ _

$= 16 \cdot \underbrace{15}_{\text{na 4}} \cdot 5^{14}$

$|A_1 \cap A_2|$ $\boxed{12}\ \boxed{43}\ \_\ \_\ \_\ \_$

$$= \underbrace{15}_{\substack{\text{miejsce} \\ \text{na } \boxed{12}}} \cdot \underbrace{14}_{\substack{\text{miejsc.} \\ \text{na } \boxed{43}}} \cdot 5^{13}$$

$|A_1 \cap A_3|$:

1° Rozłączne bloki

$\boxed{12}\ \boxed{23}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

To jest niemożliwe (nie mamy dwóch dwójek)

2° Złączone bloki

$\boxed{123}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

$$= 15 \cdot \overbrace{14}^{\text{na } 4} \cdot 5^{13}$$

$|A_2 \cap A_3|$: $\boxed{43}\ \boxed{23}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

$$15 \cdot 14 \cdot 5^{13}$$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$:

1° Rozstawienie:

$\boxed{12}$ $\boxed{43}$ $\boxed{23}$

Niemożliwe, bo nie mamy dwóch dwójek

2° $\boxed{123}$ $\boxed{43}$ _ _ _ _ __

$14 \cdot 13 \cdot 5^{12}$

Odp: $(*) = 17 \cdot 16 \cdot 5^{15} -$

$- 3 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 5^{14} +$

$+ 3 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 5^{13} -$

$- 14 \cdot 13 \cdot 5^{12}$

Trudniejsze zadanie z ZWW:

Ustawiamy 10 dzieci na spacer gęsiego. Ile jest ustawień dzieci w ten sam sposób następnego dnia, aby żadne nie stało za dzieckiem, za którym stało w dzień poprzedni?

1° Każdemu dziecku nadajemy etykietę od 1 do 10

2° A_i - dziecko i-te stoi za dzieckiem i+1 (za tym za którym stało poprzedniego dnia)

$\forall i \in \{1, \ldots, 9\}$ (dziewiąte dziecko stoi na początku i nie stało za nikim)

3° X - wszystkie możliwości ustawienia dzieci gęsiego

$|X| = 10!$

4° Odp: $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_9| =$

$= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_9|$

5° $|A_i|$ $\boxed{1 \quad 2}$ _ _ _ _ _ _ _ _

$= 9! \quad \forall i \in \{1, \ldots, 9\}$

Przypadków jest: $\binom{9}{1} = 9$

6° $|A_i \cap A_j|$:

1' Wyb. 1 i 3

$\boxed{1 \quad 2}$ $\boxed{3 \quad 4}$ _ _ _ _ _ _

8!

Wyb. 1 i 2

2' $\boxed{1 \; 2 \; 3}$ _ _ _ _ _ _ _

8!

Niezależnie od tego, które dzieci wykluczymy (czy utworzą dwa osobne bloki, czy jeden sklejony) będzie taki sam wynik.

$\forall i,j \in \{1,\dots,9\} \mid i<j$

$|A_i \cap A_j| = 8!$

<u>Przypadków jest</u>: $\binom{9}{2}$

$|A_i \cap A_j \cap A_k|$

1' Wyb. 1, 3, 5:

$$\boxed{1\quad 2}\quad \boxed{3\quad 4}\quad \boxed{5\;6}\quad \_\ \_\ \_\ \_$$

$7!$

2' Wyb. 1, 2, 5

$$\boxed{1\;2\;3}\ \_\ \boxed{5\quad 6}\ \_\ \_\ \_\ \_ \qquad 7!$$

3' wyk. 1, 2, 3

$\boxed{1\ 2\ 3\ 4}$ _ _ _ _ _ _

7!

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 7!$

$\forall i,j,k \in \{1, \ldots, 9\} \mid i < j < k$

<u>Przypadków jest</u>: $\binom{9}{3}$

⋮

Podobnie

⋮

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots \cap A_9|$

$\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10}$

1 możliwość

1 przypadek, bo $\binom{9}{9}$

Odp: $10! - \binom{9}{1} \cdot 9! + \binom{9}{2} \cdot 8! -$

$- \binom{9}{3} \cdot 7! + \ldots - \binom{9}{9} \cdot 1!$

Paweł Gryboś

Na ile sposobów można wybrać na wyprawę k spośród n rycerzy okrągłego stołu jeśli nie wolno wybrać żadnych dwóch sąsiadów.

Warunki początkowe: $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

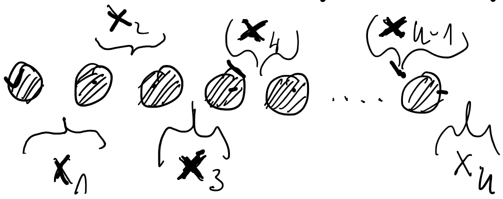
k spośród n rycerzy.

Rycerze są rozróżnialni

np 9 1 2 8 3 7 4 6 5

Rozwiązanie klasyczne:

Załóżmy że sobie wybraliśmy pewien pierwszy element który jedzie, w względem niego ustawiamy pozostałe które jadą: (na wyprawę)



⊘ - rycerze, których wybraliśmy

$\Downarrow$

$x_1 \geq 1$ (między wybranymi rycerzami musi być co najmniej jeden inny)

$\sum_{i=1}^{k} x_i = n-k$ (tylu rycerzy mamy jeszcze do rozmieszczenia)

$\Downarrow$ $y_1 \geq 0$, $y_1 = x_1 - 1$

$\sum_{i=1}^{k} y_1 = n-2k$ (tylu mamy jak wymusimy, żeby między wybranymi był co najmniej jeden inny)

$\sum_{i=1}^{k} x_i = m$ ~ liczba rozwiązań równania: $\binom{k+m-1}{m}$

Jest m jedynek i k-1 przedziałek wybieramy miejsca na przedziałki.

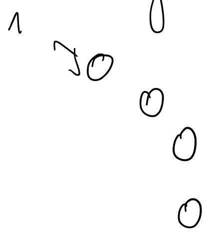
wybieramy pierwszego rycerza

$\binom{k+n-2k-1}{n-2k} = \binom{n-k-1}{k-1}$ | Wybieramy pierwszy element i kręcimy cykle: $\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$

Jan Jabrocki

Alternatywne rozwiązanie:

Jan Jabrocki



1) Pierwszy rycerz wybiera się na wyprawę

liczymy analogicznie jak w klasycznym rozwiązaniu tylko pierwszy rycerz jest pierwszym wybranym

$x_1 \quad \dots \quad x_k \quad x_{k-1}$: $\binom{n-k-1}{k-1}$

~ takich bloków $k-1$

O ~ $n-2k$ takich

$$\frac{(n-2k+k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!}$$

2) Pierwszy rycerz nie jedzie

a) po pierwszym rycerzu nie ma jadącego

k tego typu bloków

$n-2k-1$ tego typu bloków

$$\frac{(n-2k-1+k)!}{k!(n-2k-1)!} = \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k-1)!}$$

b) po pierwszym rycerzu jest jadący

Odp:

$$\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$$

$$= 2\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k} =$$

$$= 2\binom{n-k-1}{k-1} + \frac{n-2k}{k} \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} =$$

$$= \frac{n-2k+2k}{k}\binom{n-k-1}{k-1} = \frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$$

Kody kreskowe

Paweł Gryboś i Jan Jabrocki

poniedziałek, 24 listopada 2025 10:43

1. Aby się nie pomylić Święty Mikołaj wszystkie prezenty oznaczył kodami kreskowymi w postaci naprzemiennych czarnych i białych pasków szerokości 1 lub 2, zaczynających się i kończących się paskiem czarnym. Podaj wzór rekurencyjny opisujący ile mógł stworzyć różnych kodów kreskowych o sumarycznej szerokości n.

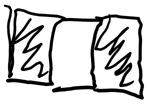
a_n – kody kończące się czarnym paskiem

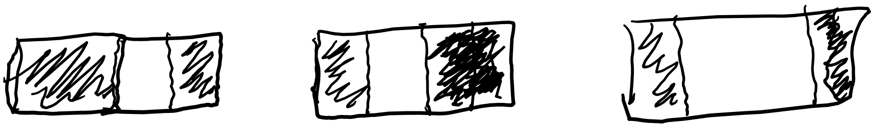
a_n' – kody kończące się białym paskiem

Tworzymy dwa ciągi a_n i a_n', bo one później się tak dobrze uzupełniają (żeby policzyć jeden, można skorzystać z drugiego)

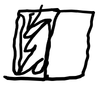
$a_1 = 1$ 

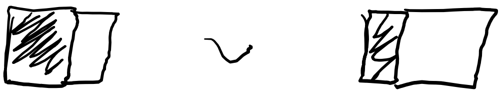
$a_2 = 1$  ← czarny szer. 2, bo muszą być naprzemiennie czarne i białe

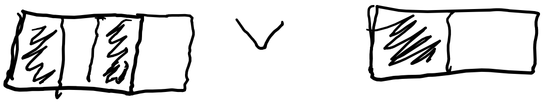
$a_3 = 1$ 

$a_4 = 3$ 

$a_1' = 0$

$a_2' = 1$ 

$a_3' = 2$ 

$a_4' = 2$ 

$$a_n' = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_n = a_{n-1}' + a_{n-2}'$$

Podstawiamy

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-3} + a_{n-4}$$

$$\boxed{a_n = a_{n-2} + 2a_{n-3} + a_{n-4}}$$

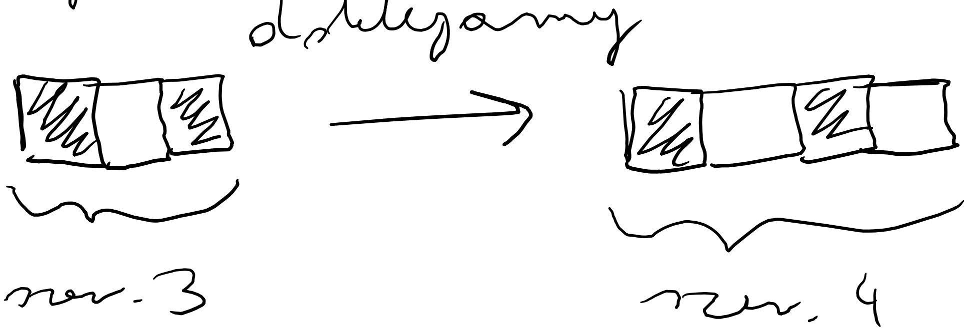
Zobacz na dalsze wytłumaczenie :)

Wytłumaczenie

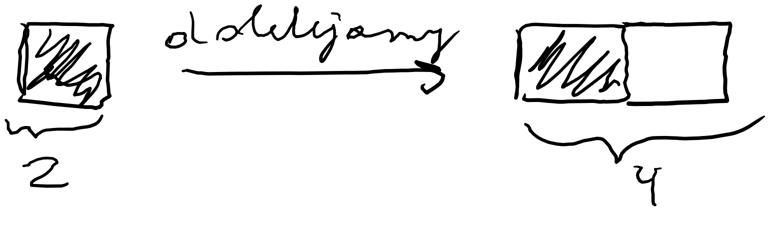
$$a_n' = \underbrace{a_{n-1}}_{1} + \underbrace{a_{n-2}}_{2}$$

1 Do każdego z kodów o 1 krótszych kończących się czarnym paskiem doklejamy biały pasek szer. 1

np.:

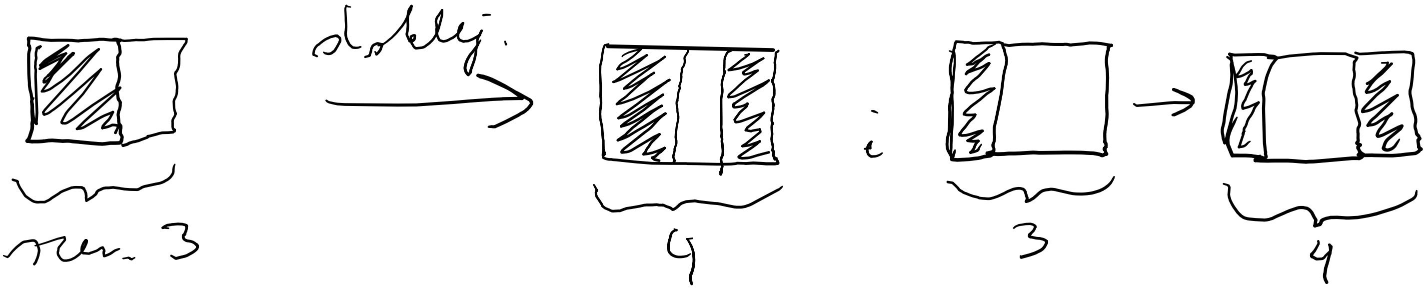


2 Do każdego z kodów o 2 krótszych i kończących się czarnym doklejamy biały pasek szer. 2

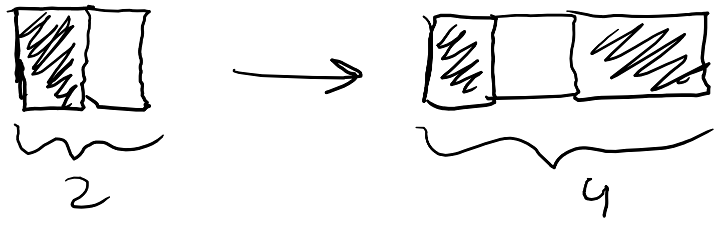


$$a_n = \underbrace{a_{n-1}'}_{1} + \underbrace{a_{n-2}'}_{2}$$

1 Do każdego kodu krótszego o 1 i kończ. się na białym pasku dokładamy czarny pasek szer. 1



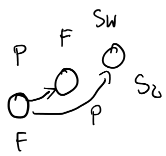
2 Do każdego kodu krótszego o 2 i kończ. się na białym pasku dokł. czarny o szer. 2



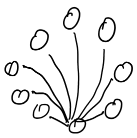
Jan Jabrocki

zad 5. Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych 100 różnych państw. Ambasadorowie usiedli przy stole w sposób losowy ale tak że żaden z nich nie usiadł na odpowiednim miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić okrągły stół, że co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporcach

Przy dyrichlecie zawsze zaczynaj od wizualizowania potencjalnych stanów



Można zauważyć że każda z flag przyjmuje 99 odległości względem ambasadora.



Niech naszymi szufladkami są odległości i kulkami kraje (ambasady)

z „2D" istnieje taka odległość, mająca dwa kraje. Wystarczy dokonać takiego obrotu stołu.

Zwracaj uwagę na (dwóch ambasadorów) = m

sugeruje co jest kulką

liczba kulek (100 ambasadorów) = n

Jak masz liczbę kulek w dowodzie i w poleceniu to wiesz ile jest szufladek

$(n-1)\cdot k + 1 = m$

k. szufladek

$k = 99$ (dla naszego przykładu)

Szukamy obiektów mających co najmniej k (różnych) wartości

Jan Jabrocki

Zestaw Pani Gorchowskiej z rekurencji

rażący błąd

b) b_n - liczba n-wyrazowych ciągów utworzonych z cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, takich że bezpośrednio przed każdą z cyfr $3, 4, 5$ stoi cyfra 1.

c) e_n - liczba sposobów, na które można zapełnić planszę o wymiarach ~~3 ×~~ n klockami 1×3 oraz $2 \times n$ (klocki można dowolnie obracać, ale nie mogą wystawać za planszę).

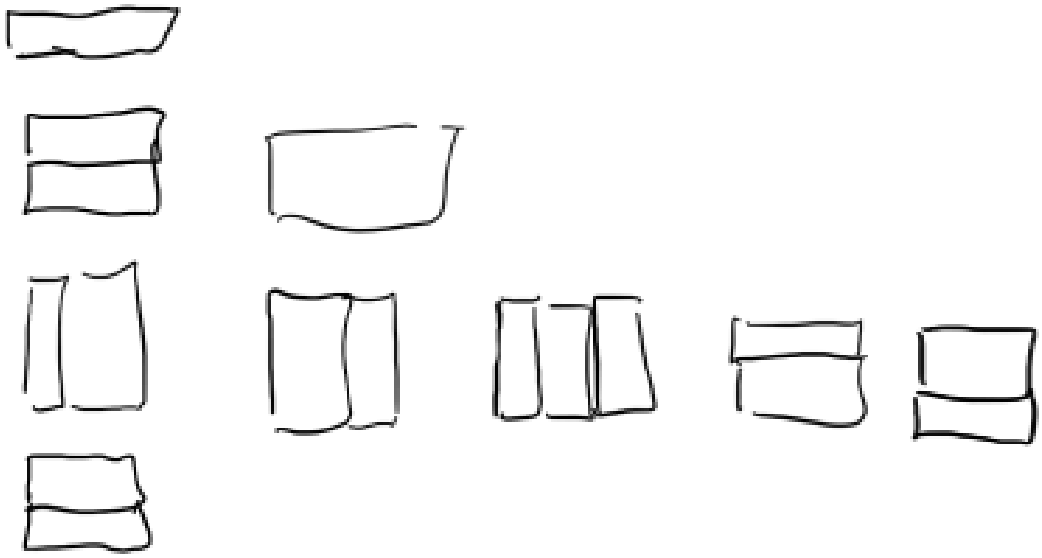
3×2 (ale też jest ten oryginalny)

c) e_n ~ bl kl 1x3 i 2x3 na planszy 3xn

$e_1 = 1$

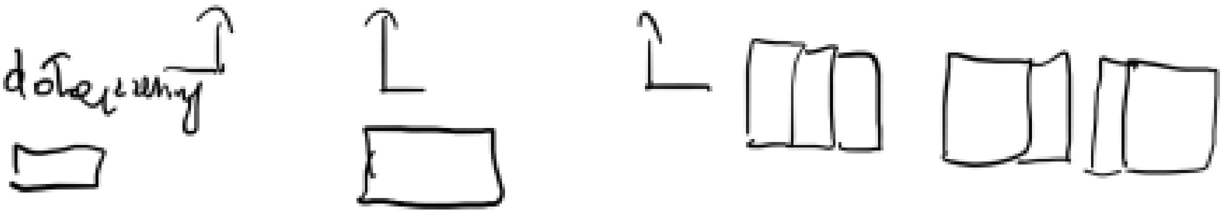
$e_2 = 2$

$e_3 = 6$



$$e_n = e_{n-1} + e_{n-2} + 3e_{n-3}$$

dołączony



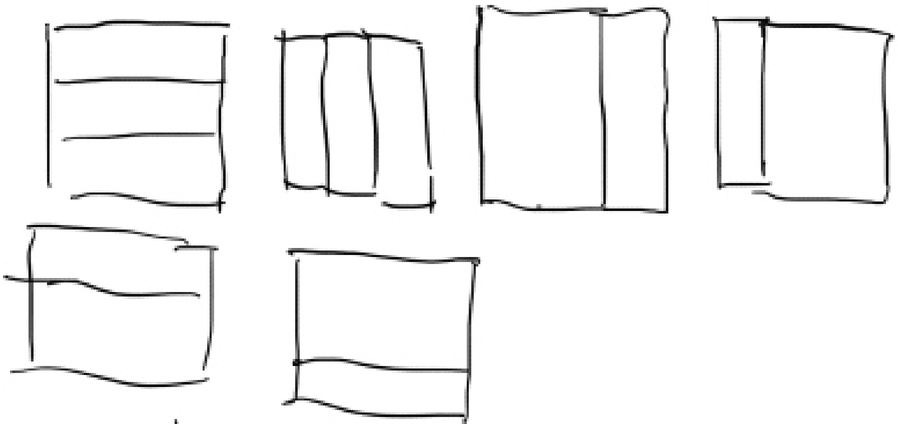
c) $e_1 = 1$ ~ mamy jeden blok 1×3 na planszy 3×1

orginał bez zmienionej treści

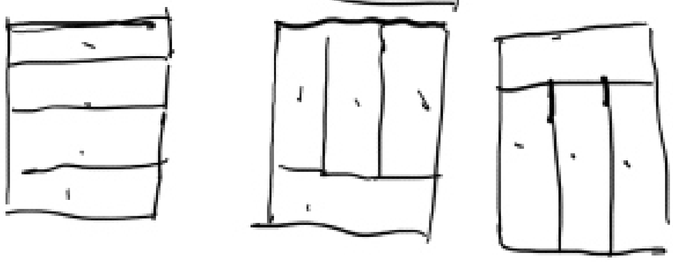
$e_2 = 1$ ~ mamy dwa bloki 1×3 na 3×2

Dobrym pomysłem jest rozrysowanie małych przypadków

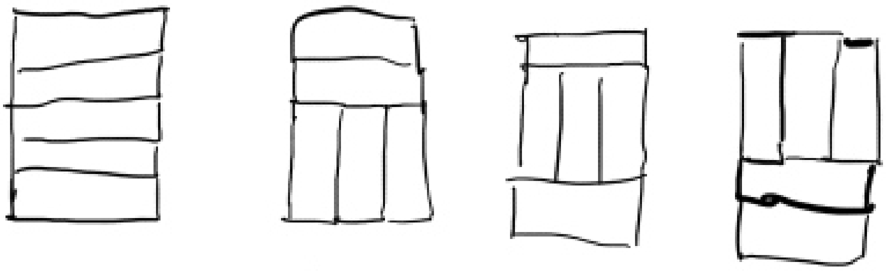
$e_3 = 6$



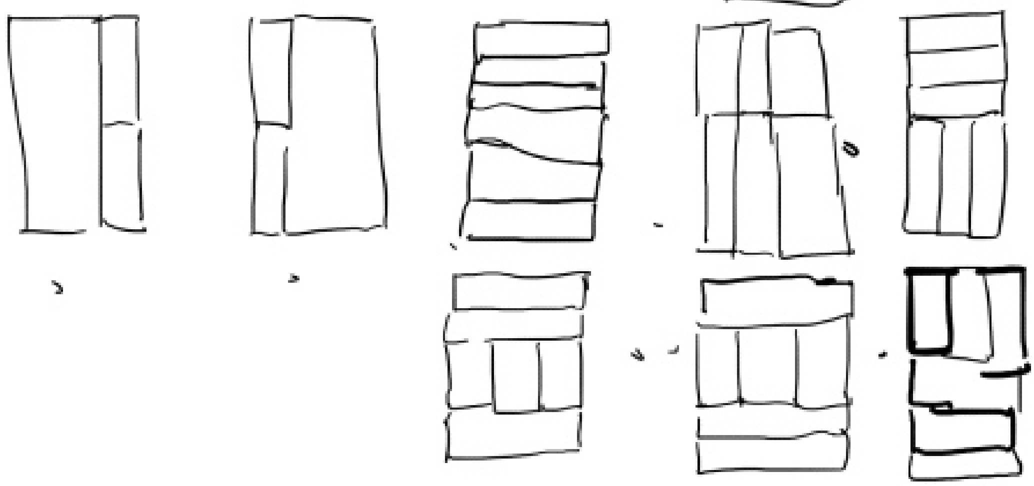
$e_4 = 3$



$e_5 = 4$



$e_6 = 8$



Rozważmy podciąg pomocniczy

f_n ~ liczba takich ułożeń 1×3 bloków na planszy $3 \times n$ elementarnej.

$f_1 = 1$

$f_2 = 1$

$f_3 = 2$

Możemy do góry dołożyć taki blok

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$$

dokładamy do góry płasko:

Zauważmy, że każdy blok może kończyć się pionowymi lub poziomymi

wyrażenie boolowskie

$$e_n = f_n + 2 \cdot [3 | n] + 2 \cdot [n = 3]$$

wyrażenie boolowskie

b) liczba n wyrazowych ciągów takich że bezpośrednio przed 2,3,4,5 stoi liczba 1 z cyfr 1,...,5

$b_1 = 2 \;:\; 1,2$

$b_2 = 3 + 2^{+2} : 1,3 \quad 1,4 \;,\; 1,5 \;,\; 2,2 \;,\; 2,1 \;,\; 1,2 \;,\; 1,1$

Niech b'_n - ciąg liczb kończących się na 1 o długości n : $b'_n = \underbrace{b_{n-1}}$

do dowolnego ciągu o długości n-1 możemy dopisać 1

każdy ciąg można zakończyć 1 lub 2

$$b_n = 3b'_{n-1} + 2b_{n-1} = \underbrace{3b_{n-2} + 2b_{n-1}}$$

kończymy te ciągi 3,4,5

Równanie ogólne: $q^2 = 2q + 3$

$$q^2 - 2q - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$q_1 = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$q_2 = 3$$

$$b_n = c_1(-1)^n + c_2 3^n$$

$$b_1 = 3c_2 - c_1 = 2$$

$$b_0 = c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 = 3c_2 - 2$$

$$4c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{4}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}$$

$$b_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}$$

3)

$e_{n+3} = 2e_{n+2} + e_{n+1} - 2e_n + 15\cdot 4^{n+2}$

Równanie jednorodne:

$x^3 = 2x^2 + x - 2$

$x^2(x-2) - x + 2 = 0$

$(x^2-1)(x-2) = 0$

$(x-1)(x+1)(x-2) = 0$

$e_{n_0} = c_1 + c_2(-1)^n + c_3 2^n$

Równanie niejednorodne:

$e_{n_s} = a\cdot 4^n$

$a4^{n+3} = 2a4^{n+2} + a4^{n+1} - 2a4^n + 15\cdot 4^{n+2}$

$(4^3 - 2\cdot 4^2 - 4 + 2)a4^n = 4^2\cdot 15\cdot 4^n$

$(16\cdot 2 - 4 + 2)a4^n = 4^2\cdot 15\cdot 4^n$

$a4^n = \frac{2^3\cdot \cancel{30}}{\cancel{30}}\cdot 4^n \Rightarrow a = 8$

$e_{n_s} = 8\cdot 4^n$

$\Downarrow$

$e_n = c_1 + c_2(-1)^n + c_3 2^n + 8\cdot 4^n$

$$\begin{cases} 4 = c_1 + c_2 + c_3 + 8 \\ -6 = c_1 - c_2 + 2c_3 + 32 \\ 64 = c_1 + c_2 + 4c_3 + 128 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = c_1 + c_2 + c_3 \\ -38 = c_1 - c_2 + 2c_3 \\ -64 = c_1 + c_2 + 4c_3 \end{cases}$$

$-60 = 3c_3$

$c_3 = -20$

$$\begin{cases} 16 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_1 - c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 9 \\ c_2 = 7 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} c_1 = 9 \\ c_2 = 7 \\ c_3 = -20 \end{cases} \Rightarrow e_n = 9 + 7\cdot(-1)^n - 20\cdot 2^n + 8\cdot 4^n$$

c) $c_n = 5c_{n-1} - 6c_{n-2} + 6\cdot 5^n + n + \frac{1}{2}$, $n \geq 2$

$c_0 = 2$

$c_1 = 50\frac{1}{2}$

Równanie jednorodne:

$x^2 = 5x - 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24$; $\sqrt{\Delta} = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$

$x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

$c_{n_s} = 2^n c_1 + c_2\cdot 3^n$

Równanie niejednorodne

$c_{n_0} = A\cdot 5^n + Bn + C$

$A\cdot 5^n + Bn + C = 5(A\cdot 5^{n-1} + Bn + C - B) - 6(A\cdot 5^{n-2} + Bn + C - 2B) + 6\cdot 5^n + n + \frac{1}{2}$

$\cancel{A\cdot 5^n} + Bn + C = \cancel{A\cdot 5^n} + 5Bn + 5C - 5B - 6\cdot A\cdot 5^{n-2} - 6Bn - 6C + 12B + 6\cdot 5^n + n + \frac{1}{2}$

$Bn + C = -Bn - C + 7B - 6\cdot A\cdot 5^{n-2} + 6\cdot 5^n + n + \frac{1}{2}$

$6A5^{n-2} + 2Bn + 2C - 7B = 6\cdot 5^n + n + \frac{1}{2}$

$A = 25$

$B = \frac{1}{2}$

$2C - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$

$2C = \frac{8}{2}$

$C = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 25 \\ B = \frac{1}{2} \\ C = 2 \end{cases}$$

$c_n = 2^n c_1 + c_2 3^n + 5^{n+2} + \frac{1}{2}n + 2$

$$\begin{cases} \cancel{2} = c_1 + c_2 + 25 + \cancel{2} \Rightarrow -25 = c_1 + c_2 \\ \frac{101}{2} = 2c_1 + 3c_2 + 125 + \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow -77 = 2c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

$+\ 150 = -2c_1 - 2c_2$

$$\begin{cases} -27 = c_2 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

$c_n = 2\cdot 2^n - 27\cdot 3^n + 25\cdot 5^n + \frac{1}{2}n + 2$

Jan Jabrocki

Jan Jabrocki

Znajdź wzór jawny ciągów, których funkcja tworząca to:

$$f(x) = \frac{4}{5-x} = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{x}{5}} = \left| \begin{array}{l} a_0 = \frac{4}{5} \\ q = \frac{x}{5} \end{array} \right| = \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{x}{5} + \dots =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{5}\cdot 5^{-i}\cdot x^i$$

$$a_n = \frac{4}{5}\cdot 5^{-n}$$

Alternatywnie rekurencja:

$$(5-x) f(x) = 4 \quad , \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$(5-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 4$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 4 \qquad f(0) = \frac{4}{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 4$$

$$5a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (5a_n - a_{n-1}) x^n = 4$$

$$\Downarrow\ f(0) = a_0 = \frac{4}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (5a_n - a_{n-1}) x^n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$5a_n = a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{5} a_{n-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{8x^2 - 6x + 1} =$$

1) Klasycznie:

$$8x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2$$

$$x_1 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{6+2}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8x^2 - 6x + 1} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{4x-1}$$

$$1 = A(4x-1) + B(2x-1)$$

$$\begin{cases} 4A + 2B = 0 \\ -A - B = 1 \end{cases}$$

$$B = -A - 1$$

$$4A - 2A - 2 = 0$$

$$2A = 2$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{1-4x} - \frac{1}{1-2x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} a_0 = 2 \\ q = 4x \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ q = 2x \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 2\cdot 4^i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (2\cdot 4^i - 2^i) x^i$$

$$a_n = 2\cdot 4^n - 2^n$$

Rekurencyjnie: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$f(x)\cdot(8x^2 - 6x + 1) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot 8x^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot 6x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 8a_{n-2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (8a_{n-2} - 6a_{n-1} + a_n) x^n - 6a_0 x + a_0 + a_1 x = 1$$

$$\Downarrow\ a_0 = f(0) = 1 \ , \ a_1 = 6a_0 = 6$$

$$a_n = 6a_{n-1} + 8a_{n-2},\ n \geq 2,\ a_0 = 1\ \ a_1 = 6 \ :$$

Podzbiory zawierające się

Jakub Karczewski

poniedziałek, 24 listopada 2025 20:40

POLECENIE:
Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów n elementowego zbioru zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaz ze w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, ze jeden zawiera się w drugim

ROZWIĄZANIE:
Wiemy, że wszystkich podzbiorów zbioru n elementowego jest 2^n. Rozpatrzmy teraz podzbiory nie zawierające n-tego elementu – mamy ich 2^(n-1), czyli dokładnie połowę.
Niech naszymi szufladkami będą ciągi binarne długości n-1, reprezentujące te "obcięte" podzbiory, a naszymi kulkami rozważana ponad połowa podzbiorów: k czyli np. k = 2^(n-1) + 1.
Dodatkowym warunkiem jest, że ciąg długości n może trafić do szufladki *i*, jeśli jego prefiks długości n-1 pasuje do szufladki.

ZSD (k > 2^(n-1)) wiemy, że do którejś szufladki trafią przynajmniej 2 elementy, a z racji tego, że podzbiory mają być z założenia różne, wiemy, że te 2 elementy będzie na pewno łączyć wspólny prefiks długości n-1, i na końcu pierwszego z nich będzie 0, a na końcu drugiego 1 (przypadki bierzemy/nie bierzemy ostatniego elementu)
W takim wypadku łatwo można zauważyć że ten do którego "dokleimy" 0 będzie zawierał się w tym, do którego "dokleiliśmy" 1 (bo ten z zerem nie będzie miał ostatniego elementu a ten z jedynką będzie miał)

Przykład:
Zbiór: {1, 2, 3}
dla n = 3, k = 2^2 + 1 > 2^2
Szufladki: 01, 10, 11, 00
Zakładamy, że 2 elementy trafiły do szufladki 01, wtedy otrzymujemy elementy: 010 i 011 odpowiadające podzbiorom : {2} i {2, 3}, pierwszy zawiera się w drugim

Baltazar odśnieżanie

Jakub Karczewski

poniedziałek, 24 listopada 2025 21:02

Pan Baltazar na przełomie 2023/2024 podpisał z miastem umowę na 3 miesiące odśnieżania lokalnych ulic w
okresie od grudnia do lutego (29 dni). Umowa przewidywała, że pan Baltazar będzie pracował co najmniej
1 godzinę dziennie, tak aby ulice były przejezdne. Planował jednak nie przekroczyć 12 godzin tygodniowo.
Wykaż, iż istnieje ciąg kolejnych dni kiedy śnieg padał tak mocno, że Pan Baltazar przepracował dokładnie
25 godzin tygodniowo.

I sposób

razem dni: $31+31+29 = 91 = 7 \cdot \boxed{13}$ tyle tygodni

a_i: ile pracował w i-tym dniu $\forall_i\, a_i \geq 1$

$A_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$, czyli np $A_4 = a_1+a_2+a_3+a_4$ (ile pracował do i-tego dnia)

$1 \leq A_1 < A_2 < A_3 \dots < A_{91} \leq 13 \cdot \underbrace{12}_{\text{max w tydzień}} = 156$

Stwórzmy nowy ciąg B_i, taki że $\forall_i\, B_i = A_i + 25$
rosnący

$26 \leq B_1 < B_2 \dots < B_{91} \leq 156 + 25 = 181$

jeśli rozważymy razem ciągi A i B
mamy $91 \cdot 2 = 182$ elementy i 181 możliwych sum
z SD istnieją 2 elementy o równej sumie
Wiedząc że w obrębie zarówno ciągów A_i jak i B_i
wyrazy są różne (bo do kolejnego zawsze coś dodajemy)
mamy wniosek, że te 2 elementy pochodzą z różnych ciągów

Zatem:
$\exists_{i,j}\, A_i = B_j = A_j + 25$ (z naszego założenia)

$\overbrace{A_j \quad\quad A_i}^{25}$

czyli $A_i - A_j = 25$,
zatem mamy spójny fragment
o sumie 25, od dnia j do dnia i

UWAGA:
nie ma możliwości, aby 2 elementy trafiły do szufladek
$[1, 25]$ oraz $[157, 181]$, co jednak nie psuje rozumowania

Baltazar odśnieżanie - c.d.

Jakub Karczewski

wtorek, 25 listopada 2025 12:02

II sposób: też ciągi A_i i 156 możliwych wartości
rozpatrzmy następujące szufladki:

[1, 26], [2, 27], [3, 28] ... [25, 50] → 25
[51, 76] [52, 77], [53, 78] ... [75, 100] → 25
[101, 126], [102, 127] ... [125, 150] → 25
[151], [152] ... [156] → 6

szufladek: 81 => 91 > 81 z SD
zatem do 1 szufladki trafią 2 elementy,
skoro wyrazy A_i są unikalne to te 2 elementy
będą miały różne wartości

$\underset{i,j}{\exists}\ A_i = A_j + 25$, dalej jak w sposobie 1

UWAGA:

2 elementy nie mogą trafić do szufladek pojedynczych,
co nie psuje rozwiązania

Grupa b

1. Pewne dziecko bawiło się n patyczkami o różnej długości. Na początek przełamało każdy z nich dokładnie na pół. Następnie wbiło je pionowo w ziemię w jednej linii. Stoisz na jednym z końców tej linii. Ze zdumieniem zauważasz, że dziecko przestrzegało dwóch zasad: po pierwsze, między dwoma patyczkami tej samej wysokości nigdy nie ma patyczków niższych; po drugie, dokładnie k razy (patrząc od Twojej strony) zdarzyło się, że za patyczkiem stał patyczek wyższy. Nurtuje Cię problem, na ile różnych sposobów mogło to zrobić. Ułóż zależność rekurencyjną.

$F(n,k) = ?$

Rys pom:

$n=4,\ k=3$

$k>0$ $F(1,k) = 0$

$F(1,0) = 1$

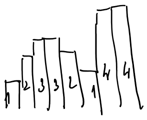
a) Budujemy to z $F(n-1,k-1)$

(Zasada do rekurencji dwu zmiennej raczej rozważamy takie przypadki patrz L. Stirlinga)

Weźmy dowolne ułożenie tego typu:

np z naszego $n=4, k=3$, budujemy $n=5, k=4$

Dokładamy najwyższy patyczek $n(5)$



Zauważmy, że nie możemy ich rozdzielić bo wszystkie patyczki są niższe co przeczyłoby pierwszemu warunkowi. To żeby dodanie nam się opłacało musimy wstawić w miejscu spadku (gdy wstawimy w miejscu wzrostu to nic nie zmienimy) (bądź nie rośnięcia)

Takich miejsc jest $2n-2-k+1 =$
$= 2n-k-1$

b) Budujemy z $F(n-1,k)$ (mamy nie zwiększyć liczby wzrostów) czyli możemy dać tylko tam gdzie wzrostu - mamy k takich miejsc (plus początkowe miejsce) $(k+1)$

$$F(n,k) = \underbrace{}_{(2n-k-1)} F(n-1,k-1) + \overbrace{}^{k+1} F(n-1,k)$$

Jako projektant gier komputerowych pragniesz stworzy¢ przygodow¡ gr¦ komputerowa mającą n poziomów
trudnosci o róznej skali trudno±ci (1...n). Aby gra wyróżniała się na tle innych (wszak chcesz mieć liczną sprzedaż) postanawiasz zastosowa¢ pewną zasadę: dokładnie między k poziomami skala trudno±cś będzie rosła (nie chcesz przeciez zniechecic graczy coraz trudniejszymi zagadkami na kolejnych
poziomach!). Na ile sposobów mozesz przypisa¢ skale trudnosci do poziomów? Znajdz zaleznos¢ rekurencyjną. (ale oni są nieśmieszni)

(zadanie analogiczne do poprzedniego)

Jan Jabrocki

$g(n,k) = ?$

jeden poziom

$g(1,0) = 1$ Π

$g(1,k) = 0$ dla $k \geq 1$

$$g(n,k) = (n-k)\, g(n-1,k-1) + (k+1)\, g(n-1,k-1)$$

a) $g(n-1,k-1)$ analogicznie jak w poprzednim

możemy umieścić tylko tam gdzie jest spadek poziomu trudności, miejsc takich jest

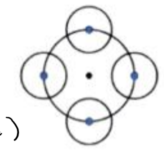
$n-1-k+1 = n-k$

b) $g(n-1,k)$ nie chcemy zwiększać wzrostu

$(k+1)$ miejsc (początek + miejsca wzrostu)

1. Na ile różnych sposobów można rozmieścić nk osób na k nierozróżnialnych n osobowych karuzelach, jeśli są one umieszczone równomiernie na też obracającym się okręgu?

Karuzele



iloczyn seryjny (jak suma)

$$\prod_{i=0}^{k-1} \binom{n(k-i)}{n} (n-1)! \quad \text{(dzielimy osoby na}$$

1 karuzele $\boxed{\text{plus}}$ dla 2 każdej obrót nie ma znaczenia, ale trzeba pomieszać osoby)

względem okręgu obrót karuzeli:

$$\frac{1}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \binom{n(k-i)}{n} (n-1)! = \frac{1}{k} \cdot \frac{(nk)!}{n! \cdot \cancel{(nk-n)!}}$$

$$\cdot (n-1)! \cdot \frac{\cancel{(n(k-1))!}}{n! \cdot \cancel{(n(k-1)-n)!}} \cdot (n-1)!$$

$$\cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{n!}}{n! \cdot 1!} \cdot (n-1)! = \frac{1}{k} \cdot \frac{(nk)! \cdot ((n-1)!)^k}{(n!)^k}$$

$$= \frac{(nk)! \cdot \cancel{((n-1)!)^k}}{k \cdot n^k \cdot \cancel{((n-1)!)^k}} = \frac{(nk)!}{kn^k}$$

Jan Jabrocki

III sposób zaproponowany na żywo przez jednego z kolegów

$$\frac{(nk)!}{n^k \cdot k}$$

1 — $(nk)!$, 2 — n^k, 3 — k

1. Permutujemy wszystkie osoby (tak jakby były w rzędzie)
2. Na każdej karuzeli jest n osób, więc eliminujemy obroty na każdej z k kar. dzieląc przez n
3. Eliminujemy obroty k kar. wokół dużego okr.

Jakub Karczewski

II sposób

$$\binom{nk}{n} \cdot \binom{n(k-1)}{n} \cdots \binom{n \cdot 1}{n} \leftarrow \text{PODZIAŁ NA GRUPY}$$

$$\frac{(nk)!}{n!\,\cancel{(nk-n)!}} \cdot \frac{\cancel{(nk-n)!}}{n!\,\cancel{(nk-2n)!}} \cdots \frac{\cancel{n!}}{n! \cdot \cancel{0!}}$$

$$= \frac{(nk)!}{(n!)^k}$$

ale KOLEJNOŚĆ WYBIERANIA

$$\frac{(nk)!}{(n!)^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

DALEJ DLA KAŻDEJ NIEZALEŻ. obracamy stół

$$\frac{(nk)!}{k! \cdot (n!)^k} \cdot (n-1)!^k \cdot \underbrace{(k-1)!}_{\text{wszystkie przy O}}$$

$$= \frac{(nk)!}{k \cdot n^k}$$

I podejście

$AW\underbrace{\sqcup}_{n-2}$

$\begin{smallmatrix}O\\W\end{smallmatrix}\underbrace{\sqcup}_{n-1}$

$\cancel{a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}}$

ALE to podejście pomija występowanie A więcej niż raz pod rząd

jak można to obejść: sumą xD

1° $\begin{smallmatrix}O\\W\end{smallmatrix}\underbrace{\sqcup}_{n-1}$

2° $\underbrace{AAAA\ldots}_{k}W\underbrace{\sqcup}_{n-k-1}$; $n-k-1 \geq 0$

3° $AAA\ldots\begin{smallmatrix}A\\W\end{smallmatrix}$

to $A\ldots W\sqcup$

można też nastąpić $a_0 = 2$

ciągi $\underbrace{AAA\ldots A}_{n}$ i $\underbrace{AA\ldots W}_{n}$

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{n-i} + 2 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 9-1 = 8 \end{cases}$$

dla $n=3$ mamy: $3^3 - (AO\_) - (\_AO) = 27 - 6 = 21$

$$a_3 = \underbrace{2a_2}_{O/W} + \underbrace{a_1}_{AW} + 2 = 21$$

$$O/W\begin{cases} AA \\ AW \\ OA \\ OW \end{cases} + AW\begin{cases} O \\ A \\ W \end{cases} + AAW + AAA$$

skrócenie sumy

$$a_3 = 2a_2 + a_1 + 2$$
$$a_4 = 2a_3 + a_2 + a_1 + 2$$
$$a_5 = 2a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + 2$$
$$a_5 = 5a_3 + 3(a_2 + a_1 + 2) =$$
$$= 3\underbrace{(2a_3 + a_2 + a_1 + 2)}_{a_4} - a_3$$

ZATEM
(z indukcji xD)

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$$

II sposób

rozpatrujemy 3 ciągi: a_n, w_n, o_n

a_n - zacz. od A
w_n -||- W
o_n -||- O

$A_n = a_n + w_n + o_n$
wszystkie

$A \to W$, $A \to A$

$O \to O$, $O \to W$, $O \to A$

$W \to O$, $W \to W$, $W \to A$

zatem:

$a_n = a_{n-1} + w_{n-1}$

$o_n = o_{n-1} + a_{n-1} + w_{n-1}$

$w_n = o_{n-1} + a_{n-1} + w_{n-1} = o_n$

sumujemy stronami

$$\underbrace{a_n + w_n + o_n}_{A_n} = 3a_{n-1} + 3w_{n-1} + 2o_{n-1}$$

$$A_n = 3(\underbrace{o_{n-1} + w_{n-1} + a_{n-1}}_{A_{n-1}}) - o_{n-1}$$

ponadto: $o_{n-1} = o_{n-2} + w_{n-2} + a_{n-2} = A_{n-2}$

zatem $A_n = 3A_{n-1} - A_{n-2}$!

III .

III SPOSÓB

a_n: ciągi poprawne dł. n

1° O, W, A $\underline{\quad a_{n-1} \quad}$ do ciągu pop. dł. $n-1$ dołączamy dowolną literkę

2° AO $\underline{\quad o_{n-2} \quad}$ można zauważyć, że jedyna sytuacja kiedy w 1° otrzymamy ciągi niepop. to wtedy kiedy dołączyliśmy A, a nasz ciąg a_{n-1} zaczynał się na O

zatem: $a_n = 1^\circ - 2^\circ$

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 8 \end{cases}$$

Ciągi ternarne/binarne z parzystą liczbą zer

poniedziałek, 24 listopada 2025 22:33

Jakub Karczewski

I binarne

2^n - wszystkie długości n

a_n - mają parz. liczbę zer

1°

1 $\underline{\quad\quad}$ liczba zer bez zmian

0 $\underline{\quad\quad}$ musi być poźniej NP zer

$$a_n = a_{n-1} + (\underbrace{2^{n-1} - a_{n-1}}_{ALL-P}) = 2^{n-1}$$

I bijekcja $0 \to 1$

dla ciągów bin dł. niepar istnieje tyle samo ciągów z par jak i niepar liczby zer

Możemy je generować w ten sposób:

wybieramy podział na grupy i potem wstawiamy 0/1

dla $n = 3$

000 → 111

001 → 110

010 → 101

100 → 011

zatem $\frac{2^3}{2} = 2^2$

1p 0np → 0p 1np

I najszybciej

bardziej

1010

1111

$\underline{\quad\quad\quad}$ $\underline{\quad}$

$n-1$ dowolnie 0/1

tylko na 1 sposób

Odp: 2^{n-1}

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

II ternarne

1, 2 $\underline{\quad\quad}$ bez zmian

0 $\underline{\quad\quad}$ wymuszamy NP

$$\begin{cases} a_n = \underbrace{2a_{n-1}}_{1/2} + (\underbrace{3^{n-1} - a_{n-1}}_{0,\ ALL-P}) \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} \wedge a_1 = 2$

RO

$r - 1 = 0$

$a'_n = c_1$

RS

$a'_n = A \cdot 3^n$

$A \cdot 3^n = A \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1}$

$3A = A + 1$

$A = \frac{1}{2}$

rozwiązanie ostateczne

$RO + RS = c_1 + \frac{1}{2} \cdot 3^n$

$a_1 = 2 = c_1 + \frac{3}{2}$

$c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$

Spr dla $n = 3$

$2^3 + 3 \cdot 2 = 14 = \frac{1}{2}(27+1)$

tylko {1,2}

00_

0_0

_00

Zespoły 3 osobowe, ale nie każdy musi

poniedziałek, 24 listopada 2025 22:56

Jakub Karczewski

Na ile sposobów można połączyć w trójki, jeśli nie każdy musi być gdzieś

n osób

$$s_n = \underbrace{s_{n-1}}_{\text{pora}} + \underbrace{\binom{n-1}{2} \cdot s_{n-3}}_{\text{bierzemy do trójki 2 inne osoby}}$$

$$s_6 = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}}{2!} + \binom{6}{3} + 1 = 31 = 11 + 2 \cdot 10$$

$s_i = 0 \quad i \le 2$

$s_3 = 2 \quad s_4 = 4 + 1 = 5 \quad s_5 = 10 + 1 = 11$

65 liczb, 9 podzielnych

wtorek, 25 listopada 2025 01:57

Jakub Karczewski

6. Udowodnij, że spośród 65 liczb naturalnych da się wybrać 9 takich, których suma jest podzielna przez 9.

reszty 0 – 8 mod 9

1° każda reszta wystąpiła min raz

$\forall_{i} \; r_i \geq 1$

wówczas z każdej bierzemy po 1 elemencie i otrzymujemy:

$0+1+2\ldots+8 = \frac{9\cdot 8}{2}$

2° któraś reszta nie wystąpiła

$\exists_{i} \; r_i = 0$

wówczas mamy 65 liczb i 8 reszt

$65 > 8 \cdot 8 \Rightarrow$ min 9 liczb ma tą samą resztę

z SD

Sumy cyfr

Jakub Karczewski

wtorek, 25 listopada 2025 02:06

I

4. … liczb n-cyfrowych podzielnych przez 9, w których żadna cyfra nie jest dziewiątką?

$\boxed{n \geq 2}$

Inaczej nie mogłaby być bez 9

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{n-1}$ $\underbrace{\quad}_{\text{na 1 sposób żeby} \equiv \text{mod } 9}$ (1)

$9^{n-1} - \underbrace{9^{n-2}}_{\text{rozpoczynające się od 0}} = 8 \cdot 9^{n-2}$

bez 9-tki

(1) Zawsze można za pomocą ostatniej cyfry dopełnić sumę $n-1$ cyfr, aby była podzielna przez 9.

2 1 3 4 5 | 3

8 1 2 4 8 | 6

II

7. Ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych, których suma cyfr wynosi osiem?

To, że oczekiwana suma ≤ 9 daje możliwość użycia komb z powt bez używania ZWW, ponieważ limit. Ile kulek może trafić do x_i nam to zaznacza (liczba kulek mówi jaką cyfrę mamy)

$$x_1 + x_2 \ldots + x_8 = 8$$

x_i to i-ta cyfra liczby

Aby się pozbyć zer wiodących:

$$\underbrace{y_1 + 1}_{\text{tutaj teraz może być } \langle 1,8 \rangle} + x_2 \ldots + x_8 = 8$$

(musi być co najmniej jedynka)

wynik: $\binom{7+8-1}{7} = \binom{14}{7}$

wiewiórka wiesia xd

wtorek, 25 listopada 2025 20:34

Jakub Karczewski i Paweł Gryboś

5. **(8p.)** Wiewiórka Wiesia chce pomalować każdy orzech w lesie jednym z 4 kolorów: czerwonym, niebieskim, zielonym lub żółtym. W lesie są małe i duże orzechy, które maluje na zmianę, zaczynając od małego. Wiesia ma mało czerwonej i niebieskiej farby, więc przyjmuje takie zasady kolorowania: dużych orzechów nie maluje na czerwono, jeśli mały orzech pomaluje na czerwono, to następny (duży) orzech nie może być niebieski. Ułóż zależność rekurencyjną na liczbę sposobów pomalowania $n \geqslant 1$ orzechów.

m D m D

$D \neq$

$(m = \ ) \Rightarrow (D \neq \ )$

---

a_n: Na początek ustawiamy parę mały – duży.

m	D	m
	2 opcje	
reszta: 3 kolorów	3 opcje	

$$a_n = \underbrace{(1 \cdot 2 + 3 \cdot 3)}_{\text{ustawiamy mały i duży orzech}} a_{n-2} =$$

$$= 11 a_{n-2}$$

$a_1 = 4$ (mały orzech może być w czterech kolorach)

$a_2 = mD$ = (tabelka powyżej) 11

ZATEM:

$$\begin{cases} a_n = 11 a_{n-2} \\ a_1 = 4 \\ a_2 = 11 \end{cases}$$

np.:

$a_3 - \{\underbrace{mD}_{11}\underbrace{m}_{4}\} = 44$

$a_4 - \{\underbrace{mD}_{11}\underbrace{mD}_{11}\} = 121$

$a_5 - \{\underbrace{mD}_{11} \cdot \underbrace{mDm}_{a_3 = 44}\} = \ldots$

wzór na nieporządki

wtorek, 25 listopada 2025 21:35

Jakub Karczewski

nieporządek: permutacja bez punktów stałych (cykli 1-elementowych)

P permutacja, $\forall_i \; P(i) \neq i$

np

$$(1\,2\,3)(4) \qquad \frac{2}{1}\;\frac{3}{2}\;\frac{1}{3}\;\frac{4}{4}$$

D_n: liczba niepor. dla perm. dł. n

1° n oraz jakaś inna liczba i są w cyklu 2-elementowym

$\frac{n}{i}$ — … $\frac{i}{n}$ wówczas zostaje nam $n-2$ elementów do uporządkowania

2° na miejscu n-tym jest jakaś inna liczba, ale cykl się nie zamyka

$- \; \frac{\overset{\neq i}{n}}{i} \; \dots \; \frac{i}{n}$

tutaj nie może stać $n = i$

wówczas n staje się nowym zabronionym elementem dla indeksu i, a z racji tego, że ze pozycji n i liczba i odpadają, możemy temu zabronionemu n nadać nową wartość i

1° $(n-1)\cdot D_{n-2}$, bo i można wybrać z $n-1$ liczb

2° $(n-1)\cdot D_{n-1}$, -||- oraz i nam nie znika, tylko n się w nie "zamienia"

WZÓR

$$D_n = (n-1)\cdot D_{n-1} + (n-1)\cdot D_{n-2}$$

$D_1 = 0$

$D_2 = 1$, bo $(2\,1)$

Krongłe stoły i krwawe gody

Jakub Karczewski

środa, 26 listopada 2025 01:08

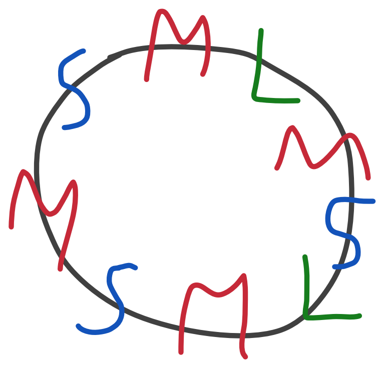
4. Na rozmowy pokojowe w Królewskiej Przystani przybyło s Starków, m Martellów i l Lannisterów, a każda z wymienionych delegacji była liczniejsza od poprzedniej.

   a) Na ile różnych sposobów można ich usadzić przy okrągłym stole tak, aby żadni Starkowie nie siedzieli obok siebie?

   b) Na ile różnych sposobów można ich usadzić przy okrągłym stole tak, aby żadni Starkowie nie siedzieli koło siebie, a po zamordowaniu Starków i wyniesieniu ich ciał i krzeseł nie okazało się, że jacyś Martellowie siedzą koło siebie?

$m + l \geq 3$

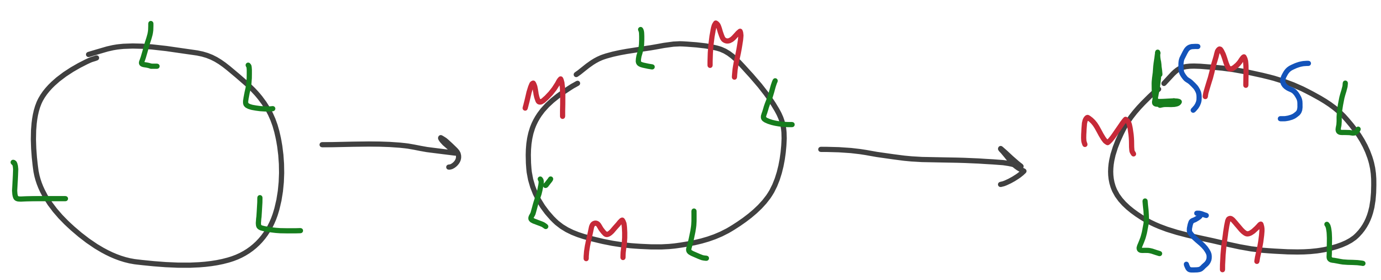
a)



Najpierw ustawiamy przy okrągłym stole Lannisterów i Martellów, następnie wybieramy pomiędzy nimi miejsca dla Starków i permutujemy Starków

$$(m+l-1)! \cdot \binom{m+l}{s} \cdot s!$$

b) $l \geq m \wedge l + m \geq 3$



najpierw sadzamy L przy okrągłym stole,
potem w miejsca pomiędzy M, a na
końcu pomiędzy wszystkimi wybieramy miejsca
dla S

$$(l-1)! \cdot \binom{l}{m} \cdot m! \cdot \binom{l+m}{s} \cdot s!$$

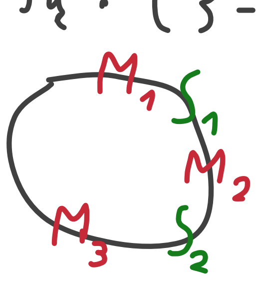
Uzasadnienie 1
Przez fakt, że jedną z grup umieszczamy na początku przy okrągłym stole, nasz dalszy problem sprowadza się do ławki.

Uzasadnienie 2
Przez to, że mamy warunki, że członkowie 1 grupy nie mogą być obok siebie, jedna z grup "przykleja" się do drugiej i tworzą się klocki, co oznacza, że ilość obrotów, które nadmiarowo zliczamy, jakbyśmy potraktowali ten stół jak ławkę jest mniejsza.

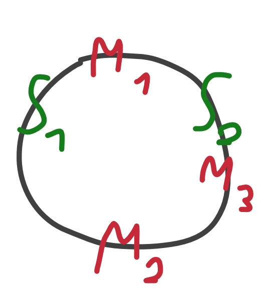
Rozważmy dla przykładu podpunkt a) dla sytuacji, kiedy mamy tylko 3 Martellów i 2 Starków

M_1 M_2 M_3 S_1 S_2

1° jeśli nie byłoby grup z warunków: $(3+2-1)!$
2° są: $(3-1)! \cdot \binom{3}{2} \cdot 2!$



Tutaj nie ruszając cykliczności M
możemy S ustawiać na (3 po 2) * 2!



Tutaj to samo co po lewej

Widzimy, że więcej możliwości już nie ma, bo byłyby powtórzone przypadki, natomiast można dostrzec, że w kontekście obrotów okrągłego stołu, znaczenie ma tylko ułożenie Martellów, stąd wynik (M-1)! * (M po S) * S!

Równanie - dowód

Paweł Gryboś

środa, 26 listopada 2025 17:46

3. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_8$ będą dowolnymi liczbami naturalnymi ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 25\}$. Udowodnij, że można tak dobrać współczynniki $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, 8$ aby nie wszystkie z nich były równe zero oraz

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_8x_8 = 0$$

1° Ustalamy $x_1, x_2, \ldots, x_8$ jako dowolne liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 25\}$.

2° Teraz możemy spróbować znaleźć dwa takie podzbiory x-sów, żeby miały równą sumę (wtedy x-som z jednego damy współczynniki $\boxed{1}$ a x-som z drugiego $\boxed{-1}$ i powinny się wyzerować)

3° Skorzystamy z „ZSD", czyli musimy określić co jest pudełkami a co obiektami.

Pudełka: (możliwe sumy): najmniejsza to 1 (jeden x, który przyjął wartość 1); największa to 200 (8 x-sów, które przyjęły wartość 25)

Czyli mamy ich: $\boxed{200}$

Obiekty: (różne podzbiory x-sów - bez pustego)

Mamy ich: $2^8 - 1 = \boxed{255}$.

Z „ZSD" $\left\lceil \frac{255}{200} \right\rceil = 2$, czyli do jakiegoś pudełka (sumy) trafiły co najmniej dwa podzbiory, więc mają tą samą sumę.

4° Teraz wiemy już, że takie dwa podzbiory istnieją, ale mogły nam się trafić bardzo różne, np.:

I° Zupełnie rozłączne

$$\{\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{2}_{x_2}, \underbrace{3}_{x_3}\} \quad \{\underbrace{6}_{x_4}\}$$

Tutaj sprawa jest prosta: elementom ze zbioru $\{1,2,3\}$ dajemy współczynniki $\boxed{1}$ a elementom ze zbioru $\{6\}$ dajemy $\boxed{-1}$. Pozostałym dajemy $\boxed{0}$.

II Nachodzące na siebie

$$\{\underbrace{\boxed{1}}_{x_1}, \underbrace{2}_{x_2}, \underbrace{3}_{x_3}\} \quad \{\underbrace{\boxed{1}}_{x_1}, \underbrace{1}_{x_5}, \underbrace{4}_{x_6}\}$$

nachodzi x_1

Dzięki ustalonym wartościom x-sów, jeżeli będzie taka sytuacja, to wiemy że x_1 mają taką samą wartość pod sobą. Wtedy wystarczy dać x_1 $\boxed{0}$ razem z pominiętymi. A resztom elementów dać $\boxed{1}$ i $\boxed{-1}$.

5° Pozostaje wytłumaczenie ostatniej sprawy. Dlaczego nigdy nie będziemy mieli zer przed wszystkimi x-ami.

I° Nie rozważamy pustego podzbioru.

II° Podzbiory, które rozważamy są różne (<u>nigdy</u> nie trafi nam się tak, że będziemy mieli , np.:

$\{\underbrace{1}_{x_1}\}$ i $\{\underbrace{1}_{x_1}\}$ i będziemy musieli wyzerować część wspólną.

Żadnych dwóch sumujących 101

środa, 26 listopada 2025 13:39

Jakub Karczewski

Zestaw A1

1. Ile jest różnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 100\}$ nie zawierających żadnych dwóch liczb sumujących się do 101?

I sposób

$$(1, 100), (2, 99) \ldots (50, 51)$$

Teraz dla każdej krotki mamy możliwości: bierzemy tylko jeden z elementów albo nie bierzemy żadnego, czyli po 3 opcje dla każdej z 50 krotek

Wynik: 3^{50}

II sposób

Wybór jednego elementu z krotki eliminuje nam z puli ten drugi, będziemy sprawdzać wszystkie możliwe liczności podzbiorów, i dla nich stosować wybieranie wg tej zasady

$$\underset{\text{pusty}}{1} + \sum_{n=1}^{50} \prod_{i=0}^{n-1} (100 - 2i) \cdot \frac{1}{n!}$$

kolejności wybierania

własności:

$$(2n)!! = 2^n \cdot n!$$

$$\sum_{n=0}^{k} 2^n \cdot \binom{k}{n} = 3^k$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{50} \frac{100!!}{(100-2n)!! \cdot n!} = 1 + \sum_{n=1}^{50} \frac{2^{50} \cdot 50!}{2^{50-n} \cdot (50-n)! \cdot n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{50} 2^n \cdot \frac{50!}{(50-n)! \cdot n!} = \sum_{n=0}^{50} 2^n \cdot \binom{50}{n} = 3^{50}$$

Przykład dla mniejszego n:

$\{1, \quad 6\}$

$(1,6), (2,5), (3,4) \Rightarrow n = 3$

1° len $= 0 \Rightarrow 1$

2° len $= 1 \Rightarrow \binom{6}{1} = 6$

3° len $= 2 \Rightarrow \frac{1}{2!}\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} = 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2!}$

4° len $= 3 \Rightarrow \frac{1}{3!}\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1} = 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3!}$

stąd dla len $= i$ mamy: $(2n) \cdot (2n-2) \cdots (2n - 2 \cdot (i-1)) \cdot \frac{1}{i!}$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (2n - 2k)}{i!}$$

Milicja PRL

środa, 26 listopada 2025 14:25

Jakub Karczewski

3. Na ile różnych sposobów może gęsiego maszerować konwój złożony z M milicjantów i A aresztowanych opozycjonistów, jeżeli każda dwójka aresztowanych opozycjonistów musi być rozdzielona przynajmniej dwójką milicjantów, a na początku i na końcu idzie milicjant?

Odp $\underbrace{\binom{M-A}{M-2A}}_{\text{wypełniamy „dziury"}} \cdot \underbrace{A! \cdot M!}_{\text{nadajemy rozróżnialność}}$

$\underbrace{MAM}\underbrace{MAM}\underbrace{MAM}$

$2A$ milicjantów

$\binom{M-2A+A+1-1}{M-2A}$

⊔A⊔A⊔A⊔

$x_1 + \dots x_{A+1} = M-2A$

Wyjaśnienie:

$M \circ A \underbrace{MM} A \underbrace{MM} A \circ M$

$A+1$ miejsc na dołożenie M

$2A$ już użytych milicjantów

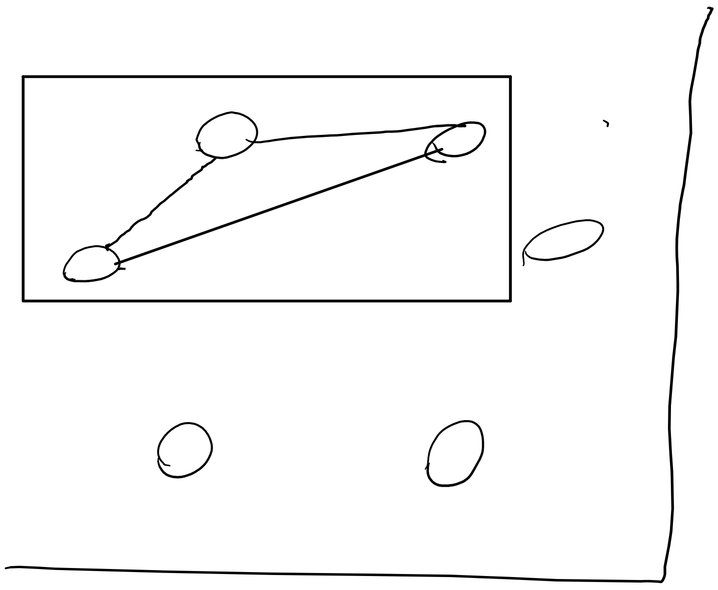
$x_1 + x_2 + \dots + x_{A+1} = M-2A$

Miasta

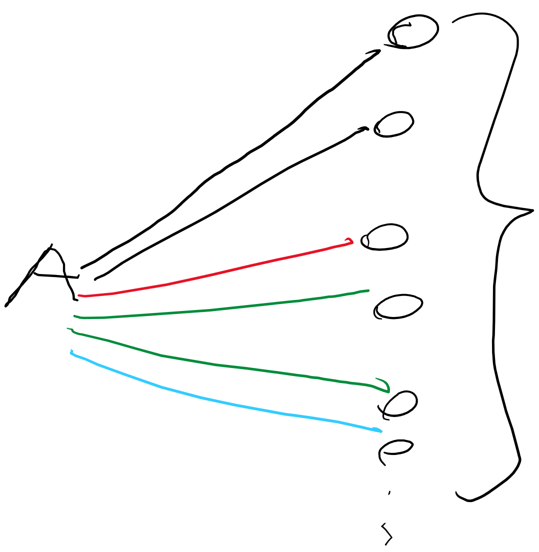
środa, 26 listopada 2025 23:39

4. W pewnym kraju jest 66 miast. Każde dwa połączone są jednym z czterech środków komunikacji (kolej, autobus, statek, samolot). Wykaż, że istnieją trzy miasta, takie, że można odbyć podróż pomiędzy nimi "po trójkącie" używając tylko jednego środka komunikacji.

Wytłumaczenie przy końcu nagrania z BIT'a + podobne zadanie w osobnym p-df.



66 miast → ·A

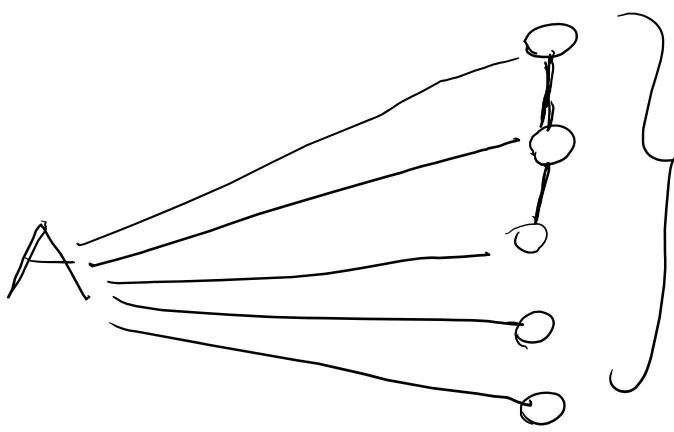


65

K A ST SA

$\left\lceil \frac{65}{4} \right\rceil$ UZD => 17

1°



17

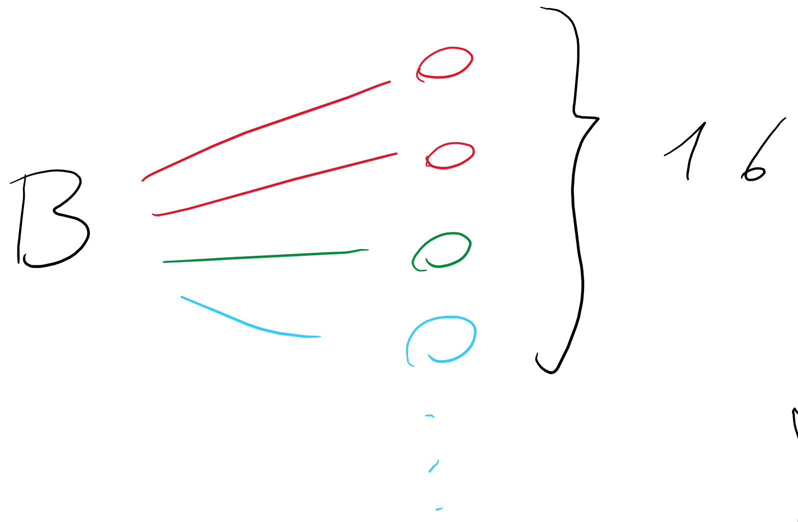
2° Pomiędzy 17 miast nie wystąpi kolej.

Zostają 3 środki transportu.

Miasta c.d.

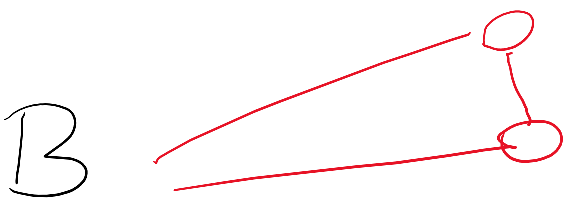
środa, 26 listopada 2025 23:48

$17 \rightarrow B$



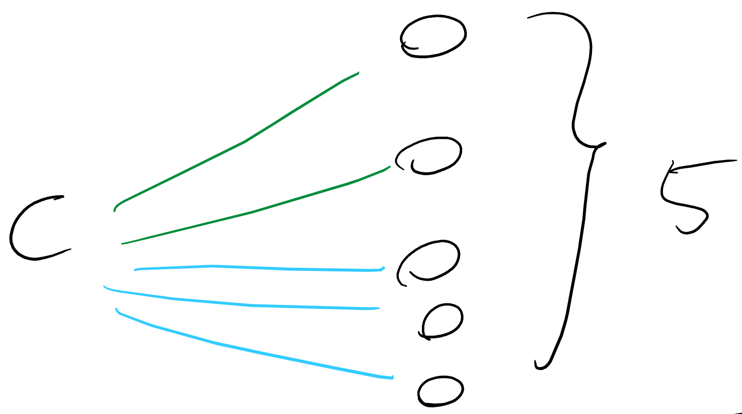
$\left\lceil \frac{16}{3} \right\rceil$ „ZSD” $\Rightarrow 6$

1°



2° Nie ma autobusu, zostaje 6 miast i dwa środki trans.

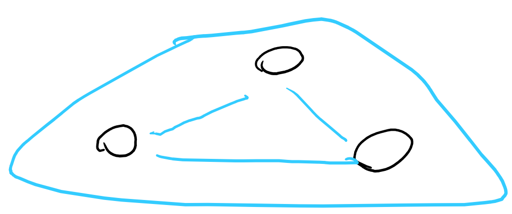
$6 \rightarrow C$



$\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$

1°

2°



Zadanie na żywo - ciąg rekurencyjny

środa, 26 listopada 2025 22:25

a_n ~ ciąg z {1,2,3} taki że iloczyn każdych dwóch kolejnych wyrazów jest parzysty ⇔ 1 i 3 zawsze sąsiadują z 2

a_n' ~ ciąg kończący się 1,3

a_n'' ~ ciąg kończący się 2

21

212 21

232 23

$a_n' = 2a_{n-1}''$ 21 3

$a_n'' = a_{n-1}'' + a_{n-1}' = a_{n-1}$ $a_{n-1}|2$

$\Rightarrow a_n'' = a_{n-1}$

$a_1 = 3$ 1 2 3

$a_2 = 5$ 12 22 32 21 23

$a_n = \underbrace{a_n'}_{\underbrace{2a_{n-1}''}_{2a_{n-2}}} + \underbrace{a_n''}_{a_{n-1}} = 2a_{n-2} + a_{n-1}$

n − 1

n − 2

22 12 32

21

23

21

23

a_{n-1}''

3 1 2 1/3 2 2

$a_1 = 3$ $aF_{n-1} + bF_{n-1}$

$a_2 = 5$

$a_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11$

21 2

23 2

22 2

32 2

12 2

1 2 1

1 2 3

1 2 1

2 2 3

3 2 1

3 2 3

222

Zadanie na żywo - opozycjoniści

środa, 26 listopada 2025 23:10

3. Na ile różnych sposobów $3k$ pozostałych na wolności opozycjonistów może:

   a) podzielić się na grupy trzyosobowe?

   b) podzielić się na grupy trzyosobowe po czym każda trójka zasiąść wokół identycznego okrągłego stołu by zastanowić się jak poradzić sobie dalej w tak trudnej sytuacji bez wpadania w panikę za to nawiązując do rzeczy już omawianych wspólnie w ostatnich tygodniach?

3k opozycjonistów

a)

$$= \frac{1}{k!}\binom{3k}{3}\binom{3k-3}{3}\dots\binom{3}{3} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{(3k)!}{3! \cancel{(3k-3)!}} \cdot \frac{\cancel{(3k-3)!}}{\cancel{(3k-6)!}\, 3!} \cdot \ldots \frac{3!}{3!\, 0} =$$

$$= \frac{(3k)!}{k!\,(3!)^k}$$

b)

$$\frac{(3k)!}{k!\,(3!)^k} \cdot \left(\frac{3!}{3}\right)^k = \frac{(3k)!}{k!\, 2^k \cancel{3^k}\, \cancel{3^k}} = \frac{(3k)!}{k! \cdot 2^k}$$

$$\frac{3!}{3} \qquad \frac{n!}{n} = n-1$$