

$$1^{\circ} x_2 = 2 \Rightarrow 2x_2 = 4$$

$$2^{\circ} x_2 = 4 \Rightarrow 2x_2 = 8$$

$$1^{\circ} x_1, x_3 \geq 1$$

$$n \geq 3$$

$$x_1 + 4x_3 = 4n - 4$$

$$4x_1 + 4x_3 = 4n - 4$$

$$4x_1 + 4 + 4x_3 + 4 = 4n - 4$$

$$x_1 + x_3 = n - 3$$

$$\binom{n-3-2-1}{n-3} = n-2$$

$$2^{\circ} \text{too } x_3, x_1 \geq 1$$

$$x_1 + 4x_3 = 4n - 8$$

$$4x_1 + 4x_3 + 4 + 4 = 4n - 8 \quad n \geq 4$$

$$x_1 + x_3 = n - 4$$

$$\binom{n-4+2-1}{n-4} = n-3$$

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

$$a_3 = 1$$

$$a = 2n-5 \quad \text{dla } n > 4$$

$$a_n - a_{n-1} = 2n-5 - (2n-2-5)$$

$$a_n - a_{n-1} = 2$$

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

$$A(x) = \sum_{n=4}^{\infty} (a_{n-1} + 2)$$

numer od $n=4$, bo 4 pierwsze wyrazy obliczono
+ jakaś zmiana numeru od $n=3$ to zmiana
mianowicie, mimo że dla $n=3$ mamy obliczony wynik, dla $n=4$ obliczamy nowy, bo $1 = 2 \cdot 3 - 5$

$$A(x) = 1 \cdot x^3 + x \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=4}^{\infty} x^n$$

zmienne zmienne.

$$A(x) = 1 \cdot x^3 + x (A(x) - a_0 - a_1 \cdot x - a_2 x^2) + \frac{2x^4}{1-x}$$

$$(A(x) = \frac{2x^4}{(1-x)^2} + \frac{1 \cdot x^3}{1-x})$$

$$= x^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)x^n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)x^{n+4}$$

$$= x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} x^n (1 + 2n-6)$$

$$= x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} (2n-5)x^n$$

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{ dla } n < 3 \\ 1, \text{ dla } n = 3 \\ 2n-5 \text{ dla } n \geq 4 \end{cases}$$

czyli tak jak mówią myślę

$$x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)x^{n+4}$$

$n' = n+4 \quad n' \geq 4$
 $2n+2 = 2n'-6$

$$\sum_{n'=0}^{\infty} (2n'-6)x^{n'}$$

TERMIN 3, Z 1.02.2023

1. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f : X \mapsto Y$, $g : Y \mapsto X$.

• Liczba tych odwzorowań g , które są słabo rosnące oraz $g(2) < g(5)$ wynosi: **181**

• Liczba tych odwzorowań f , dla których $f(5) = f(1) \cdot f(3)$ wynosi: **14 · 6³**

• Liczba tych odwzorowań f , które są słabo monotoniczne, ale nie są silnie monotoniczne wynosi:

• Liczba tych odwzorowań g , które nie są ani suriejkcjami, ani iniekcjami wynosi:

k: liczba czterech dostępnego

1)

1

1-2

1-3

y(1)

1

2

3

y(1)

k ∈ {4, 6}

x₁ + x₂ + ... + x_k = 2

k ∈ {4, 5}

x₂ + ... + x₅ = 2

k = 4

x₃ + ... + x₆ = 2

y(3), y(4)

monotonie:

marcin:

4-6

5-6

6

g(5)

6-k+1

opzyj

6

5

4

3

2

1

0

y(6)

g(6)

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

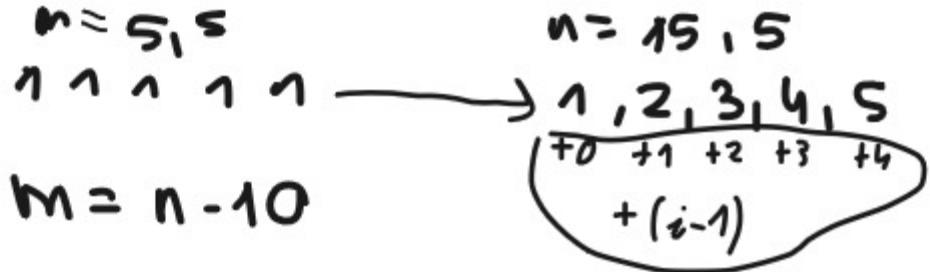
180

181

182

183

184



2. Niech $P(n, k)$ oznacza liczbę podziałów liczby n na k składników, natomiast $P(n)$ liczbę wszystkich podziałów liczby n .

- Dla każdego $n \geq 2$, $P(n, 2) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- Dla każdego $n \geq 6$, $P(n, n-3) = 3$
- Dla $0 < k < n$ zachodzi zależność $P(n) = \sum_{i=0}^{n-k} P(n, i) + W$, gdzie wyrażenie oznaczone symbolem W ma postać:
- Liczba podziałów liczby n , $n \geq 15$, na pięć różnych składników jest równa liczbie podziałów liczby m na pięć składników, gdzie $m = n - \binom{5}{2}$, bo jest taka bijekcja
 $p(m, k) = p_r(n + \binom{k}{2}, k)$

3. Niech \mathcal{L} będzie listą, w porządku leksykograficznym, wszystkich permutacji zbioru

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Każda permutacja ma jednoznacznie przypisaną pozycję i na tej liście, $i = 1, 2, 3, \dots$

- Permutacja $(15)(2)(3)(6874)$ występuje na pozycji: $4 \cdot 7! + 6! + 5! + 2 \cdot 4! + 2 \cdot 2!$
- Liczba tych permutacji w \mathcal{L} , których rozkłady na cykle składają się z samych transpozycji wynosi: $\frac{(8)(6)(4)(2)}{4!}$, bo kolejność nie ma znaczenia
- Następnikiem permutacji $(2, 5, 4, 8, 7, 6, 3, 1)$ jest permutacja:
- Poprzednikiem permutacji $(7, 4, 2, 5, 1, 3, 6, 8)$ jest permutacja:

(25613478)

$\rightarrow (74238651)$

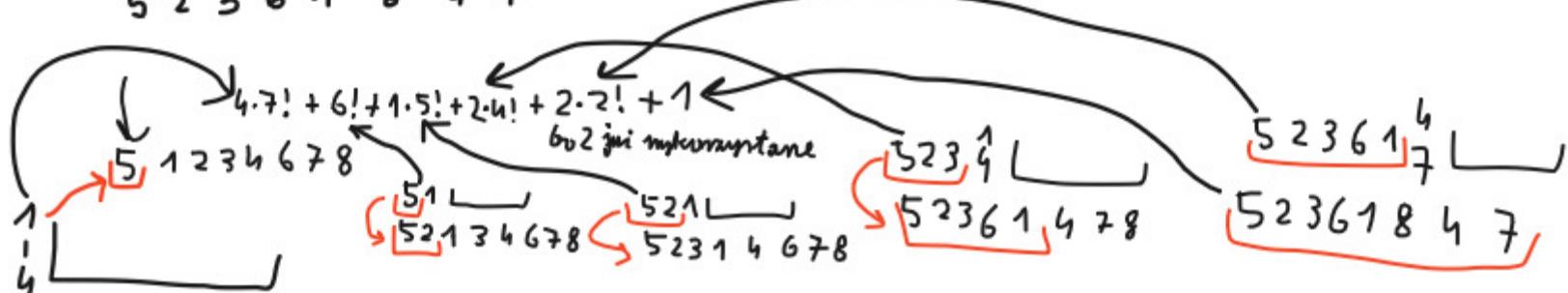
przykładowe:

$\begin{array}{l} \langle 5, 1, 6, 3 | 2, 4, 7, 8 \rangle \\ \langle 5, 1, 6, 2 | 8, 7, 4, 3 \rangle \end{array}$

$742 \underline{(5)} 8631$

a)

$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$
 $5 \ 2 \ 3 \ 6 \ 1 \ 8 \ 4 \ 7$

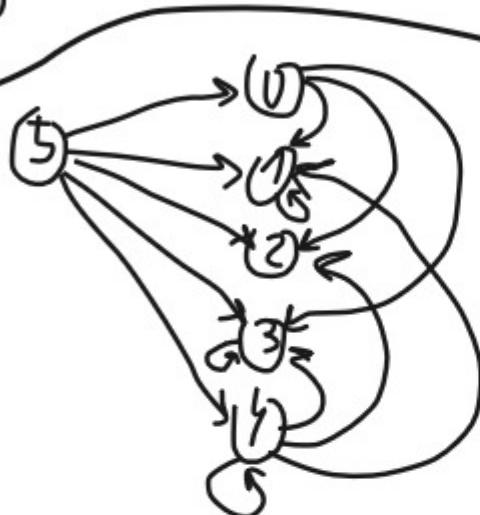
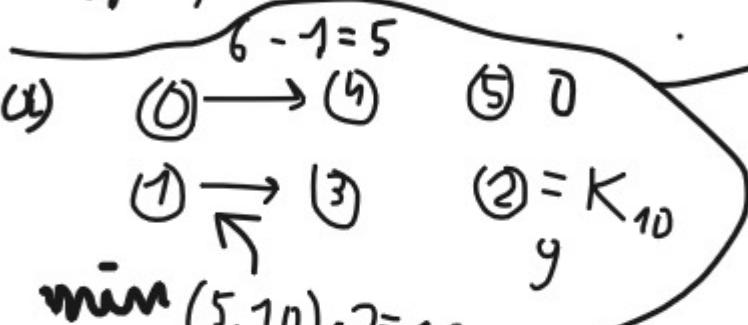


6. Niech G będzie grafem rzędu $n = 2^5$, w którym wierzchołki są wyznaczone przez pary różne ciągi binarne długości 5. Dwa wierzchołki w G są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy liczba jedynek w konkatenacji ciągów odpowiadających tym wierzchołkom wynosi cztery. Niech \bar{G} oznacza dopełnienie grafu G .

- Ścieżka o maksymalnej długości w G ma długość: ~~10, bo graf $K_{5,10}$~~
- Minimalna liczba krawędzi, jakie należy dodać do \bar{G} , aby otrzymany graf był eulerowski wynosi: ~~nie da się, bo (5) ma uleg nieparzystym i jest pojedynczy ze wszystkimi, a nie może być multimedialny~~
- Maksymalna liczba krawędzi jakie można usunąć z \bar{G} , aby otrzymany graf był nadal spójny wynosi: ~~365~~
- W dekompozycji grafu \bar{G} na ścieżki P_3 liczba części dekompozycji wynosi: $\frac{396}{3} = 132 \times 1?$

ilosc jedynek

ile	0	1	2	3	4	5
	1	5	10	10	5	1
deg(V)	5	10	9	5	1	0



\bar{G} ile	1	5	10	10	5	1
deg	1	5	10	10	5	1
	26	21	22	26	30	31

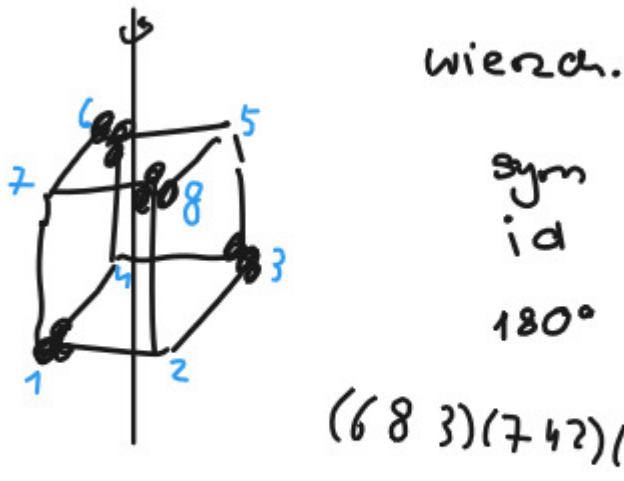
- (0) bez 4
- (1) bez 3
- (2) mrs
- (3) bez 1
- (4) bez 0
- (5) mrs

$$|E| = \frac{26 + 105 + 220 + 260 + 150 + 31}{2} = 396$$

$$\frac{480 + 162 + 150}{2} = \frac{792}{2} = 396$$

$$(396 - 31) = 365$$

BURNSIDE (część tu)



sym
id

180°

$$(6\ 8\ 3)(7\ 4\ 2)(1)(5)$$

monomiany
 z_1^8

$$3z_2^4$$

$$4z_3^2 z_1^2$$

$$\frac{1}{8} (z_1^8 + 3z_2^4 + 4z_3^2 z_1^2)$$

5. Niech F oznacza szkielet bryły będącej sześcianem (foremnym), otrzymany w wyniku sklejenia 12 zapalek w ten sposób, że dla każdej zapalce główka łączy się jedynie z główkami innych zapalek.

- Liczba parami nierównoważnych pokolorowań wierzchołków szkieletu F za pomocą co najwyżej trzech kolorów wynosi:
- Cykliczny indeks grupy symetrii szkieletu F na zbiorze wierzchołków ma postać:
- Liczba parami nierównoważnych pokolorowań wierzchołków szkieletu F za pomocą dwóch kolorów, w których trzy wierzchołki pokolorowane są jednym kolorem, a pięć pozostałych innym wynosi:

16

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \frac{1}{8}(3^8 + 3 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4) \\
 \text{b)} & \frac{1}{8}(z_1^8 + 3z_2^4 + 4z_3^2 z_1^2) \\
 \text{c)} & z_1^3 z_2^5 \wedge z_1^5 z_2^3 ?
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8} ((u_1+u_2)^8 + 0 + 4(u_1^3+u_2^3)^2(u_1+u_2)^2)$$

\downarrow \uparrow $4 \cdot 2u_1^3 u_2^3 \xrightarrow{u_2^2} u_1^2$
 $(\frac{8}{3}) \cdot 2$

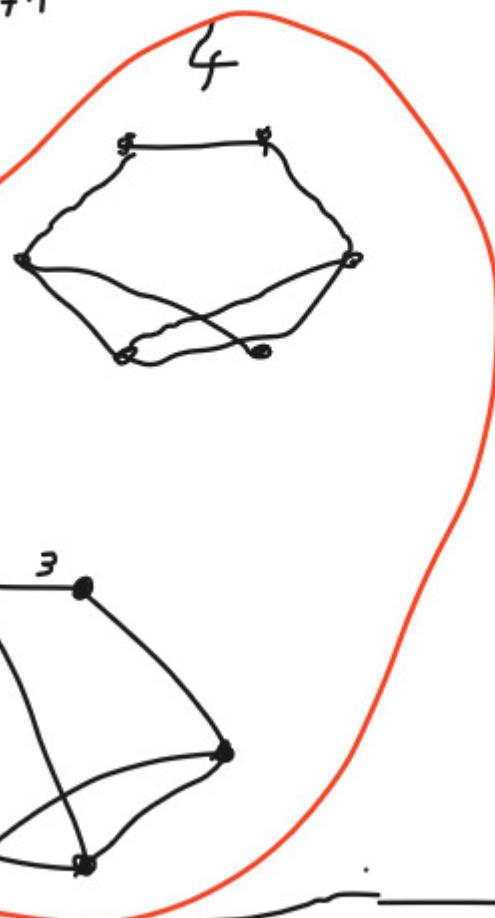
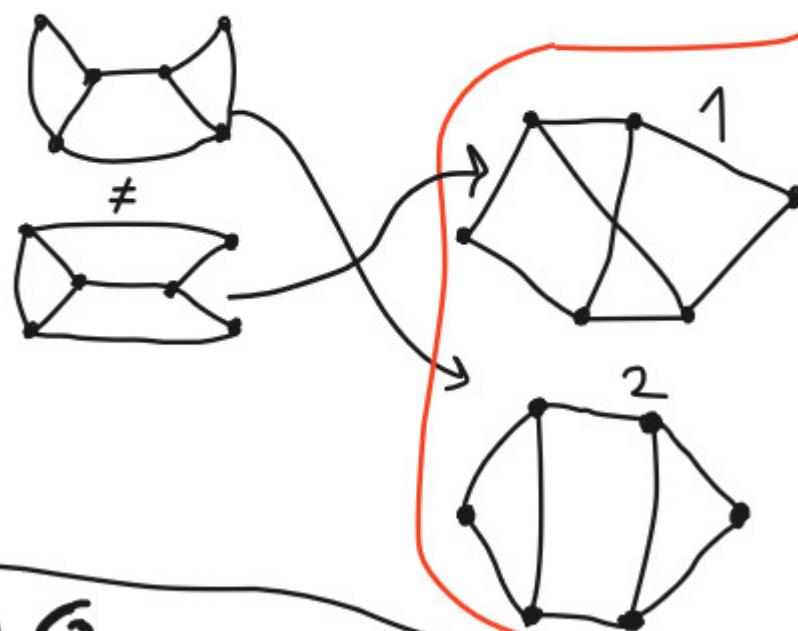
$$\frac{1}{8} \left(2 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{8} + 16 \right) = \frac{128}{8} = 16 ?$$

7. Dla każdej takiej pary liczb naturalnych $n \neq k$, że $2 \leq k < n - 1$, niech $\mathcal{G}_{n,k}$ oznacza rodzinę grafów rzędu n , w których dokładnie k wierzchołków ma stopień 2, natomiast pozostałe $n - k$ wierzchołków mają stopień 3.

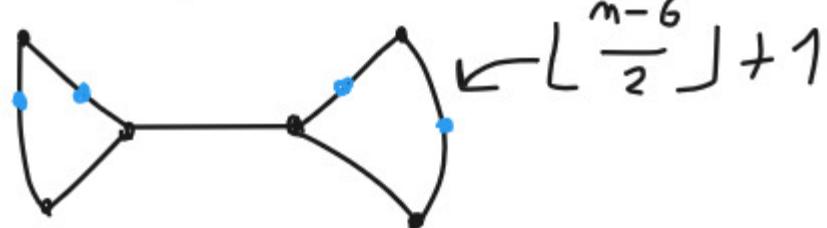
- Liczba parmi różnicomorficznych grafów w $\mathcal{G}_{6,2}$ wynosi 4
- Dla każdego $n \geq 6$, liczba tych parmi różnych różnicomorficznych grafów w $\mathcal{G}_{n,2}$, które są spójne i w których wierzchołki stopnia 3 są sąsiednie wynosi $(\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor + 1) + (\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor + 1)$ dla $\mathcal{G}_{n,n-2}$?
- Dla każdego $n \geq 6$, spośród wszystkich grafów spójnych $\forall G \in \mathcal{G}_{n,n-2}$, $\text{diam}(G)$ przyjmuje wartość maksymalną równą: $n - 6 + 3 = n - 3$
- Dla każdego $n \geq 10$, liczba składowych spójnych grafu uzyskanego z dowolnego grafu w $\mathcal{G}_{n,k}$ w wyniku usunięcia jednego wierzchołka (wraz z incydentnymi krawędziami) może wynosić co najwyżej: $\lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor + 1$

a) $\mathcal{G}_{6,2}$

$2 \neq 2 \quad 4 \neq 3$

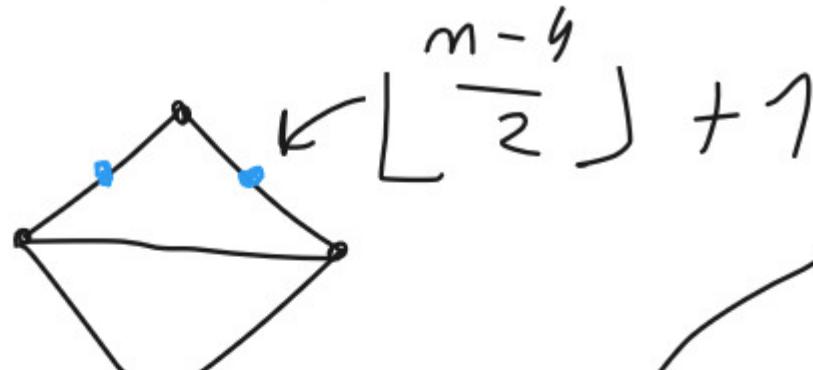


b) $\mathcal{G}_{n,n-2}$

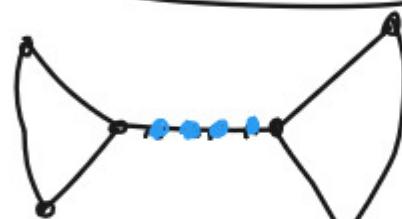


$\mathcal{G}_{n,2}$

Czy jeśli jest tych 3-stopniowych
jest więcej niż 2 to ma być
klucz?



c)



$$n - 6 + 3 = n - 3$$

d)



I $k = n - 4$

• - dla niespełnionych

II $k = n - 2$



$$\lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor + 1$$

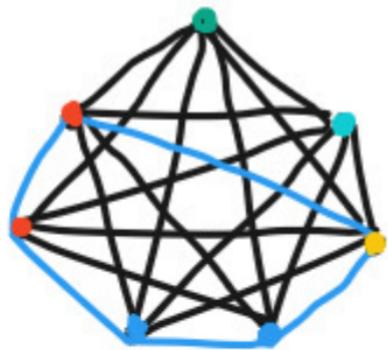
mniej przynajmniej od 2, k = n - 4, bo dla innej lub k = n - 2

3 nie działa

8. Niech G będzie grafem rzędu n , $n \geq 5$, otrzymanym z grafu pełnego K_n poprzez usunięcie krawędzi tworzących cykl C_5 .

- Dla każdego $n \geq 5$, $\chi(G_n) = n - 2$
- Dla każdego $n \geq 5$, $\mu(G_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- Dla każdego $n \geq 5$, $\alpha(G_n) = 2$
- Dla każdego $n \geq 5$, $\chi'(G_n) = \begin{cases} 3, & n=5 \\ n-1, & n>5 \end{cases}$

$$n = 6$$



9. Niech $P_{n,p}$ oznacza częściowy kwadrat łaciński rzędu $n \geq 3$ zawierający p pustych komórek, $0 \leq p \leq n^2$.

- Dla każdego $n \geq 3$, maksymalna wartość p , dla której każdy $P_{n,p}$ może zostać uzupełniony do kwadratu łacińskiego wynosi: 1

- Spośród wszystkich kwadratów łacińskich L rzędu $n > 3$, minimalna liczba wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich ortogonalnych do L wynosi: 4

- $P_{3,8}$ może zostać uzupełniony do kwadratu łacińskiego na co najmniej x różnych sposobów, gdzie $x =$

- Dla każdego $n \geq 4$, wartości p , dla których istnieje $P_{n,p}$ uzupełnialny do kwadratu łacińskiego na co najmniej 2 różne sposoby tworzą zbiór: $\{p \in \{4, \dots\} : ?\}$

dla $n=6$ nie istnieje \square tac

dla każdego innego n istnieje co najmniej 1 \square tac atog.

do naszego L

c) $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ da się uzupełnić max na 4 sposoby

2! te cztery wyznaczone jednoznacznie

d)

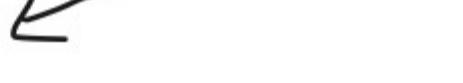
$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \langle 4, n^2 \rangle$

suma ciągu arytmetycznego, ponieważ w każdym kolejnym wierszu/kolumnie możemy zostawić o jeden więcej pusty kwadrat niż wcześniej a zaczynamy o 1 pustego kwadraciku

1	2	3	
2	3		
3			

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2+n}{2}$$

1	2	3	4
2	3		
3			
4			



1	2	3	4
2	3	4	
3	4		
4			

to powielamy aż nie będzie pełnego kwadratu łacińskiego

d) $\langle 4, \frac{n^2+n}{2} + 1 \rangle$

chyba w zadaniu powinno być co najwyżej 2 sposoby

bo co najmniej jest odpowiedź za prostą

1	2		
2	3		
3			



1	2		
2	3		
3			
4			



1	2		
2	3		
3			
4			

, to na dwa sposoby można uzupełnić z terminu 2 z dyskretnej

10. Dla danego $S = \text{STS}(v)$, niech G_S oznacza graf przecięć systemu S , czyli graf rzędu $n = \frac{v(v-1)}{6}$ utworzony w taki sposób, że wierzchołki w G_S odpowiadają trójkom w S i ponadto dwa wierzchołki w G_S są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im trójkim mają niepuste przecięcie.

- Stopnie wierzchołków w G_S tworzą zbiór: $\{3, \frac{v-1}{2}\}$
- Dla każdego dopuszczalnego $v \geq 7$, $\omega(G_S) = 3$
- W (v, k, λ) -BIBD każda trójka występuje w co najwyżej y blokach, gdzie $y = \lambda$
- Bloki bazowe cyklicznego STS(15) tworzą zbiór: $\{(0, 2, 8), (0, 1, 4), (0, 5, 10)\}$

1 2 3 4 5 6 7

2, 6, 7 \rightarrow 0, 2, 8

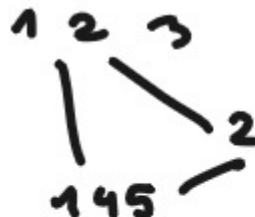
1, 3, 4 \rightarrow 0, 1, 4

$$6k+3, k=2$$

$$\{0, 2k+1, 4k+2\}$$

$$0, 5, 10$$

4 6



Występnik i poprzednik permutacji

$\langle 25 \underline{4} \underline{87} \underline{6} \underline{31} \rangle$ następ

$\langle 25 \underline{6} \underline{13} \underline{4} \underline{78} \rangle$

$\langle 742\underline{5}1\underline{3}68 \rangle$ poprzed

$\langle 742\underline{3}\underline{86}\underline{5}1 \rangle$

Stirlingi julkiesi :

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1) \cdot S(n-1, k)$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \left(k^n - \binom{k}{1} \cdot (k-1)^n + \binom{k}{2} \cdot (k-2)^n \dots \right)$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n \cdot (-1)^i$$

$$S(n, 3) = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 1^n}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2!}$$

$$S(n, 2) = \frac{2^{n-2}}{2!} = 2^{n-1} - 1$$

$$S(n, n-5)$$

domyślnie $n-5$ jestemek

$p(5)$ na ostateczkome

$$5 \rightarrow \binom{n}{5}$$

$$41 \rightarrow \binom{n}{5} \cdot \binom{n-5}{2}$$

$$32 \rightarrow \binom{n}{4} \cdot \binom{n-4}{3}$$

$$311 \rightarrow \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot \binom{n-4}{4} \cdot \frac{1}{2!}$$

$$221 \rightarrow \binom{n}{3} \cdot \binom{n-3}{3} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \binom{n-6}{2}$$

$$2111 \rightarrow \dots$$

$$11111 \rightarrow \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \dots \binom{n-6}{2} \cdot \frac{1}{5!}$$

6. Miech G będzie grafem nieskierowanym o $n = 2^k$ w którym wierzchołki są wyznaczone przez jądrę G' zagi
Hamiota drugie. 7. Dla wierzchołka $v \in G'$ w pokazanej krawędzi skierowanej tylko wtedy, gdy ciąg odpowiadający tym wierzchołkom zmienia się na co najwyżej dwa dni pojętych. Miech G' posiada jądro o rozmiarze
przez 2.

• Szukaj oznakowania drzewa w G z jądrkiem: **32**

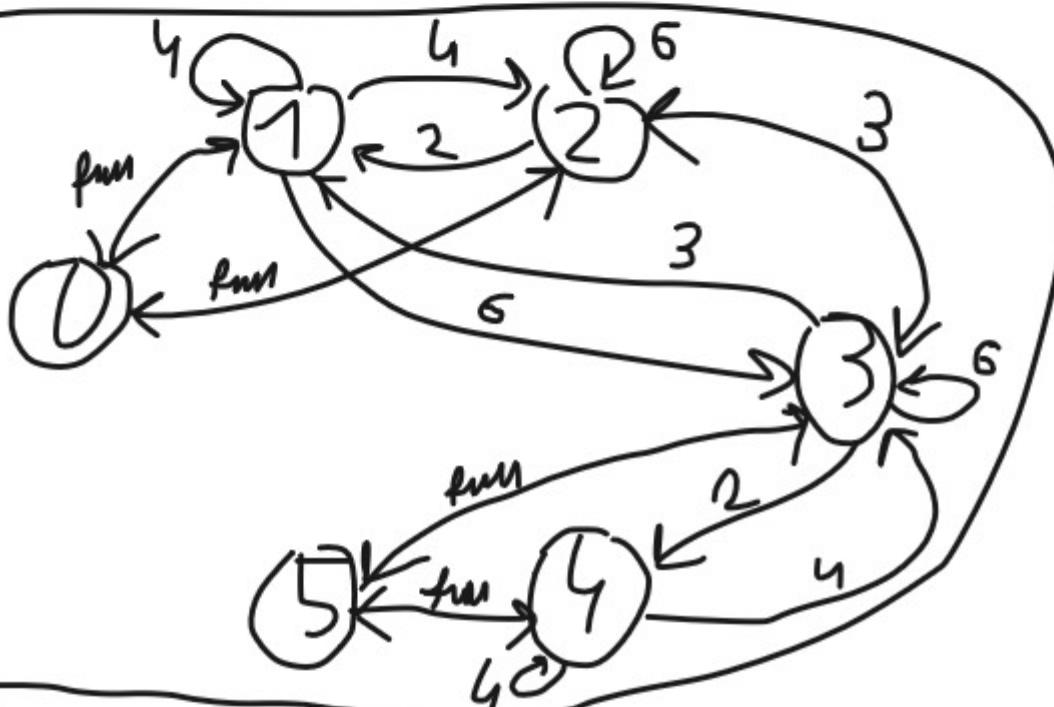
- Czyli oznakowanie drzewa w G z jądrkiem:
- Kierunek jądra konsekwentny, jakie należy dodać do G, aby otrzymać graf typu edmondsa i karpisa
- Kierunek jądra konsekwentny, jakie należy dodać do G, aby otrzymać graf typu edmondsa i karpisa
- W dedykowanych grafom G' do jądra konsekwentnego dodajemy krawędzie skierowanej wewnątrz
- W dedykowanych grafom G' do jądra konsekwentnego dodajemy krawędzie skierowanej wewnątrz
- W dedykowanych grafom G' do jądra konsekwentnego dodajemy krawędzie skierowanej wewnątrz
- W dedykowanych grafom G' do jądra konsekwentnego dodajemy krawędzie skierowanej wewnątrz
- W dedykowanych grafom G' do jądra konsekwentnego dodajemy krawędzie skierowanej wewnątrz
- W dedykowanych grafom G' do jądra konsekwentnego dodajemy krawędzie skierowanej wewnątrz

$$|V|=32$$

BĘDZIE
WKRÓTCE

$$\begin{array}{c} \text{ile } \begin{matrix} (0) & (1) & (2) \\ 1 & 5 & 10 \end{matrix} \quad \text{ile } \begin{matrix} (3) & (4) & (5) \\ 10 & 5 & 1 \\ 15 & 15 & 15 \end{matrix} \\ \text{dla } \begin{matrix} 15 & 1+6+8 & 2+1+2 \cdot 3+3+3 \\ " & " & " \\ 15 & 15 & 15 \end{matrix} \end{array}$$

$$|E| = 39 = \frac{\sum x_i \cdot d_{\text{avg}}(i)}{2}$$



(2) do (3)

$$11000 \quad (3)$$

$$11100$$

(3) do (2)

$$11100 \quad (3)$$

$$11000$$

(2) do żebie

$$11000$$

$$10100$$

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1}$$

(2) do (1)

$$11000 \quad (3)$$

$$11110$$

(1) do (3)

$$10000 \quad (4)$$

(3) do (1) = (2) do (4)

$$11100 \quad (3)$$

(1) do (2)

$$10000 \quad (4)$$

(2) do (1)

$$11000 \quad (3)$$

Mniej dla mniejszych
n Lepiej mniej xi)