Analiza numeryczna (M) - Pracownia 0
Zadanie P0.11
Tekst, wzory i wartości

Jakub Kuciński

Wrocław, Listopad 12, 2019

Spis treści

1 Wprowadzenie

Wzór Taylora – przedstawienie funkcji (n+1)-razy różniczkowalnej za pomocą wielomianu zależnego od kolejnych jej pochodnych oraz dostatecznie małej reszty. Twierdzenia mówiące o możliwości takiego przedstawiania pewnych funkcji (nawet dość abstrakcyjnych przestrzeni) noszą zbiorczą nazwę twierdzeń Taylora od nazwiska angielskiego matematyka Brooka Taylora, który opublikował pracę na temat lokalnego przybliżania funkcji rzeczywistych w podany niżej sposób. Ta własność funkcji różniczkowalnych znana była już przed Taylorem – w 1671 odkrył ją James Gregory.

2 Twierdzenie Taylora

Niech Y będzie przestrzenią unormowaną oraz $f : [a, b] \to Y$ będzie funkcją (n+1)-razy różniczkowalną na przedziale [a,b] w sposób ciągły (na końcach przedziału zakłada się różniczkowalność z lewej, bądź odpowiednio, z prawej strony). Wówczas dla każdego punktu x z przedziału (a,b) spełniony jest wzór zwany wzorem Taylora:

Twierdzenie. *Wzór Taylora.*
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + R_n(x, a)$ *gdzie* R_n *spełnia zależność:*
$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x, a)}{(x-a)^n} = 0$

3 Reszty we wzorze Taylora wyrażone w sposób jawny

3.1 Reszta w postaci całkowej

$R_n(x, a) = \int_a^x \frac{(\mathrm{x} - \mathrm{t})^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$

3.2 Reszta w postaci Lagrange'a

Istnieje takie $\theta \in [0, 1]$, że
$R_n(x, a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))$

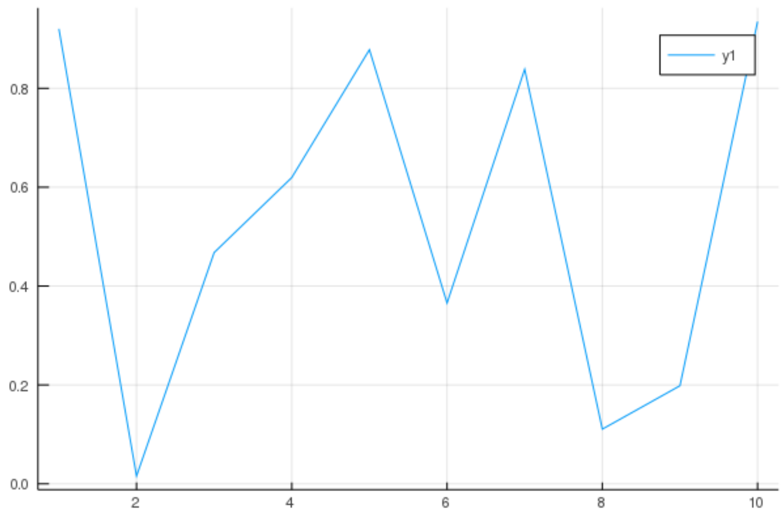
3.3 Reszta w postaci Cauchy'ego

Istnieje takie $\theta \in [0, 1]$, że
$R_n(x, a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} (1 - \theta)^n f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))$

4 Mniej lub bardziej przypadkowe liczby w tabeli

	2321	3
42	553	676
742608	834	96

5 Wykres



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x)$