

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 6. Tydzień rozpoczynający się 15. kwietnia

Zadania

- Niech $X \sim \text{Geom}(p)$ (rozkład geometryczny). Wykazać, że $M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$.
- Niech $X \sim \text{Geom}(p)$. Korzystając z funkcji $M_X(t)$ obliczyć $E(X)$ oraz $V(X)$.
- Dla $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mamy $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że postać $M_X(t)$ jest następująca: $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$.
- Zmienne X_1, \dots, X_n są niezależne i $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć funkcję tworzącą momenty $M_{\bar{X}}(t)$ zmiennej \bar{X} (\bar{X} to średnia z X_1, \dots, X_n), a następnie zidentyfikować rozkład zmiennej \bar{X} .
[Z. 5–6] Zmienna $Z \sim \text{Gamma}(b, p)$ ma MGF postaci $M_Z(t) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-p}$. Dodatkowo wiemy że: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2$.
- Zmienne X_1, \dots, X_n są niezależne oraz $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Z_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2$.
[Z. 7–8] Znaleźć rozkład, któremu podlega zmienna $Z = \sum_{k=1}^n X_k$. O występujących w tych zadaniach zmiennych zakładamy, że są niezależne. Rozwiązujemy zadania używając "MGFy" (funkcje generujące momenty).
- $X_k \sim \text{Gamma}(b, p_k)$, $k = 1, \dots, n$.
- $X_k \sim \text{B}(m_k, p)$, $k = 1, \dots, n$.
- Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość $f(x, y) = \frac{15}{2}x^2y$ (na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$). Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $T = X/Y$.
- Zakładamy, że zysk firmy jest zmienną losową U . MGF tego zysku przedstawia się wzorem $M_U(t) = \frac{2}{2 - 3t}$. Wyznaczyć:
 - wartość oczekiwaną zysku,
 - wariancję zysku,
 - MGF podatku od zysku, przy założeniu stopy podatkowej liniowej, 90%.
- Zmienna losowa X ma MGF o postaci $M_X(t)$. Zmienna losowa Y jest pewną funkcją zmiennej X . Co można powiedzieć o Y (założenia i od jakich zmiennych zależy Y) jeżeli:
 - $M_Y(t) = M_X(2t) \cdot M_X(4t)$,
 - $M_Y(t) = e^{2t} M_X(t)$,
 - $M_Y(t) = 4M_X(t)$.