Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 7. Tydzień rozpoczynający się 22. kwietnia

Zadania

1. Dane są niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie $U[0,1]$. Niech x, y będą wylosowanymi wartościami zmiennych X, Y. Odcinek $[0,1]$ podzielony jest zatem na trzy części (być może jedna część ma długość 0). Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można utworzyć trójkąt?

   [Do zadań 2–4] Niech (X_1, X_2) będzie dwuwymiarową zmienną losową o gęstości $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\pi}$, dla $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$.

2. Znaleźć gęstości brzegowe zmiennych X_1, X_2.
3. Wykazać że współczynnik korelacji zmiennych X_1, X_2 jest równy zero. Wykazać, że zmienne są zależne.
4. Niech $X_1 = Y_1 \cos Y_2$, $X_2 = Y_1 \sin Y_2$, gdzie $0 < Y_1 < 1$, $0 \leqslant Y_2 \leqslant 2\pi$. Znaleźć gęstość $g(y_1, y_2)$ zmiennej (Y_1, Y_2). Sprawdzić czy zmienne Y_1, Y_2 są niezależne.
5. Dana jest n-wymiarowa zmienna losowa $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$. Zmienną $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ określamy następująco:

$$Y_1 = \bar{\mathbf{X}}, \quad Y_k = X_k - \bar{\mathbf{X}} \text{ dla } k = 2, \ldots, n.$$

   Znaleźć postać (współczynniki) Jacobianu

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

6. Dane są zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$. Udowodnić, że:

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2 + n\,(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2. \tag{1}$$

   [Zadania 7–8] Zakładamy, że niezależne zmienne losowe X_k podlegają rozkładowi $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

7. Znaleźć (wraz z uzasadnieniem) rozkład zmiennej $M = \dfrac{n}{\sigma^2} \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2$
8. Załóżmy, że zmienne $\bar{\mathbf{X}} = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ oraz $S^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2$ są niezależne. Korzystając z równania (1) udowodnić, że $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \equiv \mathrm{Gamma}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{n-1}{2}\right)$

[Do zadań 9–10] Boki prostokąta są niezależnymi zmiennymi losowymi X_1 i X_2 o rozkładzie $U[1,2]$. $Y_1 = 2X_1 + 2X_2$ jest obwodem tego prostokąta, $Y_2 = X_1X_2$ oznacza pole tego prostokąta.

9. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Y_1, Y_2. (Odp.: 6, $^2/_3$ dla Y_1, $^9/_4$, $^{55}/_{144}$ dla Y_2).

10. Obliczyć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y_1, Y_2. (Odp.: $^{3\sqrt{330}}/_{55}$).

[Do zadań 11–12] Zmienna losowa X podlega rozkładowi normalnemu z parametrami jak poniżej:

$$N \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \right).$$

11. Niech $Y_1 = 3X_1 + X_2,\ Y_2 = -4X_1 + 2X_2$. Znaleźć rozkład zmiennej Y.

12. Niech $Y_1 = 2X_1 - 3X_2,\ Y_2 = 4X_1 + 2X_2$. Jaka jest wartość współczynnika korelacji ρ_{y_1,y_2}?

Witold Karczewski