Zadanie nr 3 zamiast kolokwium

Jakub Kuciński 309881, grupa Pratik Ghosal

April 29, 2020

Założenia: X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz $X \sim N(0,1)$ i $Y \sim \chi(n)$. Wtedy $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ nazywamy rozkładem t-studenta z n stopniami swobody. Wiemy, że gęstości zmiennych X i Y są określone wzorami:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ f_Y(y) &= \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\Gamma(n/2)} y^{k/2-1} exp\left(-\frac{y}{2}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Wtedy zmienna losowa (X,Y) może zostać określona wzorem:

$$f_{(X,Y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\Gamma(n/2)} y^{k/2-1} exp\left(-\frac{y}{2}\right) \tag{2}$$

Wykonajmy zamianę zmiennych $(X,Y) \mapsto (T,W)$. Niech $W = Y$. Z rozkładów X i Y mamy $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (0, \infty)$. Stąd $w \in (0,\infty)$. Wyznaczmy x i y względem t i w.

$$y = w, \quad x = t\sqrt{y/n} \quad \Rightarrow \quad x = t\sqrt{w/n} \tag{3}$$

Policzmy Jakobian przekształcenia:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{w}{n}} & \frac{t}{2\sqrt{w \cdot n}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{w}{n}}$$

Możemy wykonać zamianę zmiennych:

$$\begin{aligned} g(t,w) &= f(x(t,w), y(t,w)) && (4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} \cdot w^{n/2\,-1} \cdot exp\left(-\frac{w}{2}\right) \cdot exp\left(-\frac{t^2 w}{2n}\right) && (5) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}\sqrt{n}} \cdot w^{n/2\,-1/2} \cdot exp\left(-\frac{w}{2}(1+\frac{t^2}{n})\right) && (6) \end{aligned}$$

Możemy teraz policzyć gęstość zmiennej T wyznaczając brzegową gęstość funkcji $g(t,w)$:

$$g_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}\sqrt{n}} \cdot \int_0^\infty w^{(n+1)/2\,-1} \cdot exp\left(-\frac{w}{2}(1+\frac{t^2}{n})\right) dw \tag{7}$$

Przyjmując oznaczenia

$$\begin{aligned} b &= \frac{n+1}{2} - 1 \\ p &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

dostajemy:

$$\begin{aligned} g_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}\sqrt{n}} \cdot \int_0^\infty w^{p-1} \cdot e^{-bw}\, dw && (9) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}\sqrt{n}} \cdot \frac{\Gamma(b)}{p^b} \cdot \int_0^\infty \frac{p^b}{\Gamma(b)} \cdot w^{p-1} \cdot e^{-bw}\, dw && (10) \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrażenie pod całką jest gęstością rozkładu gamma z parametrami b i p. Skoro całka zawiera cały zakres określoności rozkładu gamma, to jej wartość wynosi 1. Stąd dostajemy wzór na gęstość rozkładu t-Studenta:

$$\begin{aligned} g_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(n/2)\ 2^{n/2}\ \sqrt{n}} \cdot \frac{\Gamma(b)}{p^b} \cdot 1 && (11) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}(1+\frac{t^2}{n})\right)^{(n+1)/2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(n/2)\ 2^{n/2}\ \sqrt{n}} && (12) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(1+\frac{t^2}{n})^{(n+1)/2}} && (13) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} && (14) \end{aligned}$$