AGH University of Science and Technology

Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

Wykład 07

Filtry typu FIR

Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej

dr inż. Przemysław Sypka

sypka@agh.edu.pl

https://iet-agh.webex.com/meet/przemyslaw.sypka

home.agh.edu.pl/~sypka/dydaktyka/lato_2ntwk_cps/

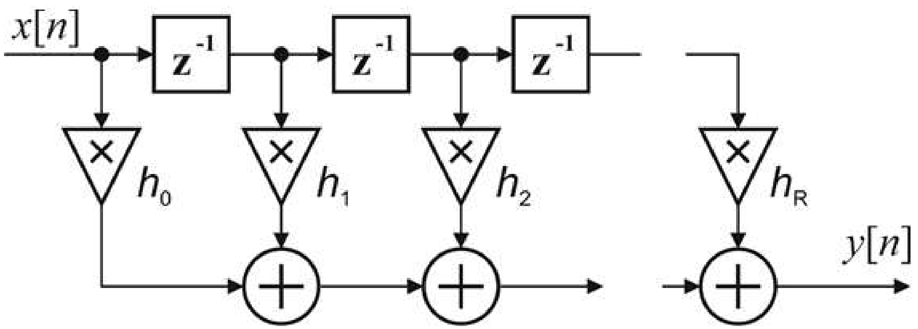
Plan wykładu

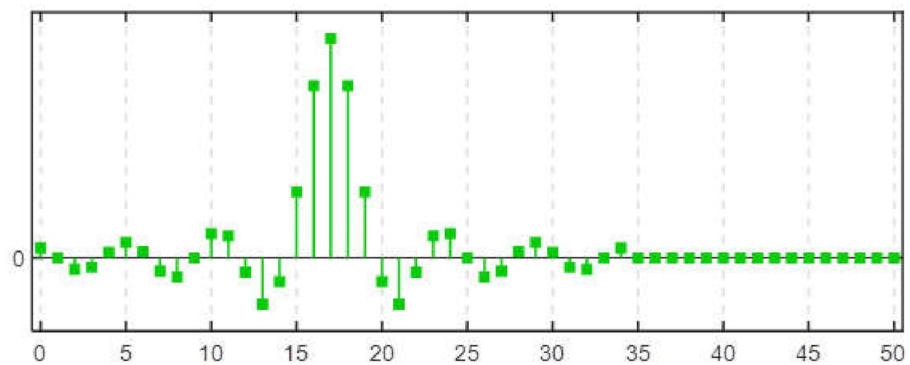
1. Filtry typu FIR
2. Metody projektowania filtrów FIR
    a. Filtr idealny
    b. Metoda okien czasowych
    c. Metoda okien czasowych połączona z DFT
    d. Projektowanie przy pomocy szeregu Fourier'a
    e. Metody aproksymacyjne
3. Przekształcenia filtrów
    a. Filtr wszechprzepustowy

Filtry FIR
ang. *Finite Impulse Respond*

FIR

- przyczynowy system cyfrowy **LTI NIEREKUSRYWNY**
  - bez sprzężenia zwrotnego
  - **skończona** odpowiedź impulsowa
  - równanie różnicowe
    $$y[n] = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot x[n-r]$$
  - transmitancja
    $$H(z) = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot z^{-r}$$
  - R – rząd filtru (krotność bieguna)
  - $R+1$ – liczba współczynników
  - odpowiedź na wymuszenie
    $y[n] = h[n] * x[n] \Leftrightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$
  - **asymptotycznie stabilne** $\sum |h[n]| < \infty$ (jeśli realizowalne)





Filtry FIR
charakterystyka częstotliwościowa (1)

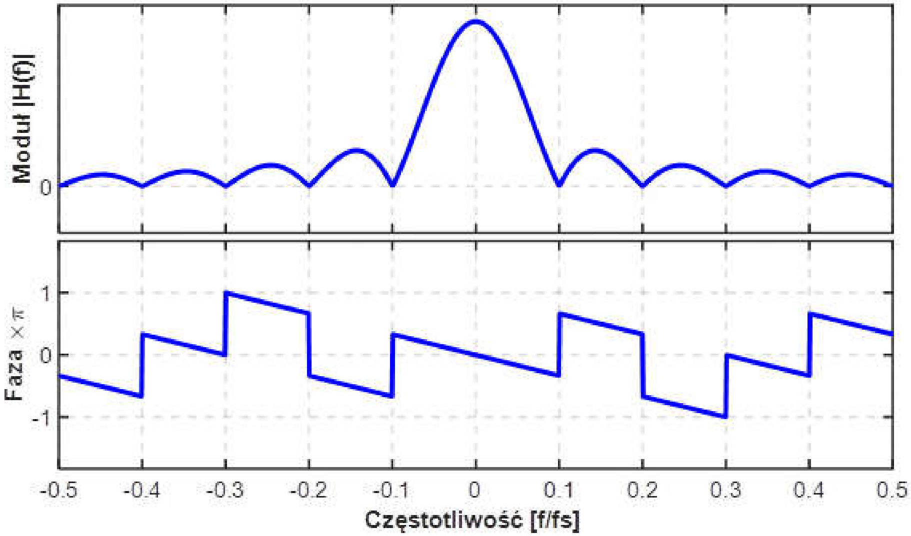
$$H(f) = H[k] = H(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

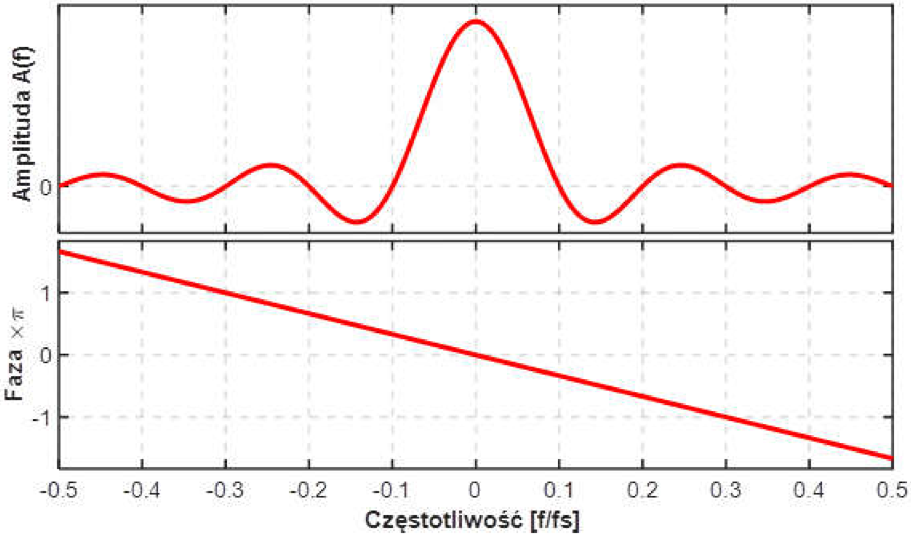
$$H(f) = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot z^{-r} = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot e^{-j2\pi f r}$$

$$H(f) = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot \cos(2\pi f r) - j \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot \sin(2\pi f r)$$

$$\boxed{H(f) = A(f) \cdot e^{j\varphi(f)} \quad \text{dla} \quad f \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]}$$

$$\boxed{H(f) = |H(f)| \cdot e^{j\varphi(f)} \quad \text{dla} \quad f \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]}$$





Filtry FIR
charakterystyka częstotliwościowa (2)

$$H(f) = H[k] = H(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$\boxed{H(f) = A(f)\cdot e^{j\varphi(f)} \quad \text{dla} \quad f \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]}$$

$$H(f) = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot z^{-r} = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot e^{-j2\pi f r}$$

$$\boxed{H(f) = |H(f)|\cdot e^{j\varphi(f)} \quad \text{dla} \quad f \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]}$$

$$H(f) = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot \cos(2\pi f r) - j\sum_{r=0}^{R} h_r \cdot \sin(2\pi f r)$$

$$\boldsymbol{Y(f)} = |H(f)|\cdot e^{j\varphi_H(f)} \cdot |X(f)|\cdot e^{j\varphi_X(f)} = |\boldsymbol{H(f)}|\cdot|\boldsymbol{X(f)}| \cdot e^{j\{\boldsymbol{\varphi_H(f)+\varphi_X(f)}\}}$$

$|H(f)|$ - wzmocnienie (tłumienie) amplitud harmonicznych

$\varphi(f)$ - opóźnienie harmonicznych (zmiana kształtu)

$\boxed{G(f) = -\frac{d\varphi(f)}{df}}$ – opóźnienie grupowe

Filtry FIR
liniowa charakterystyka fazowa

$$G(f) = -\frac{d\varphi(f)}{df} = const \Leftrightarrow \varphi(f) = -2\pi \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot f$$ ogólnie: $\varphi(f) = \alpha \cdot f + \beta$

SYMETRYCZNA
odpowiedź impulsowa

$$\boxed{\boldsymbol{h_r = h_{R-r}}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{R}{2}}$$

$$\varphi(f) = -2\pi\frac{R}{2}f = -\pi R f$$

$$\boxed{H\left(\underline{f}\right) = e^{-j\pi R\underline{f}} \cdot 2\sum_{n=0}^{\frac{R-1}{2}} h_n \cdot \cos\left((2n-R)\pi\underline{f}\right)}$$

ASYMETRYCZNA
odpowiedź impulsowa

$$\boxed{\boldsymbol{h_r = -h_{R-r}}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{R}{2}}$$

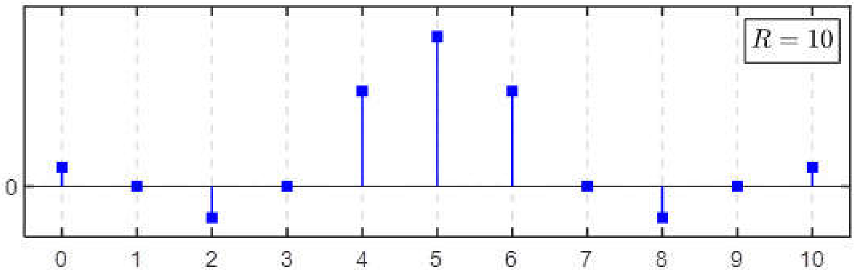
$$\varphi(f) = -2\pi\frac{R}{2}f \pm \frac{\pi}{2} = -\pi R f \pm \frac{\pi}{2}$$

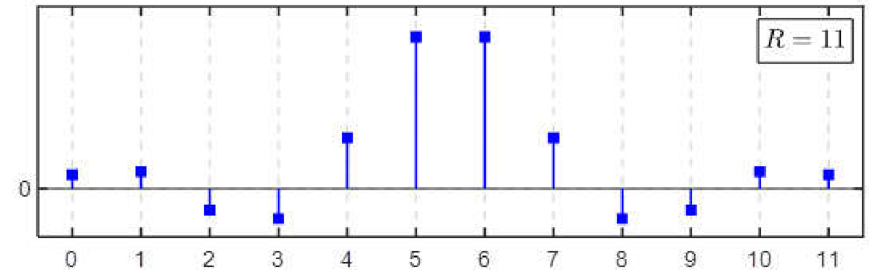
$$\boxed{H\left(\underline{f}\right) = e^{-j\pi R\underline{f} \pm j\frac{\pi}{2}} \cdot j2\sum_{n=0}^{\frac{R-1}{2}} h_r \cdot \sin\left((2n-R)\pi\underline{f}\right)}$$

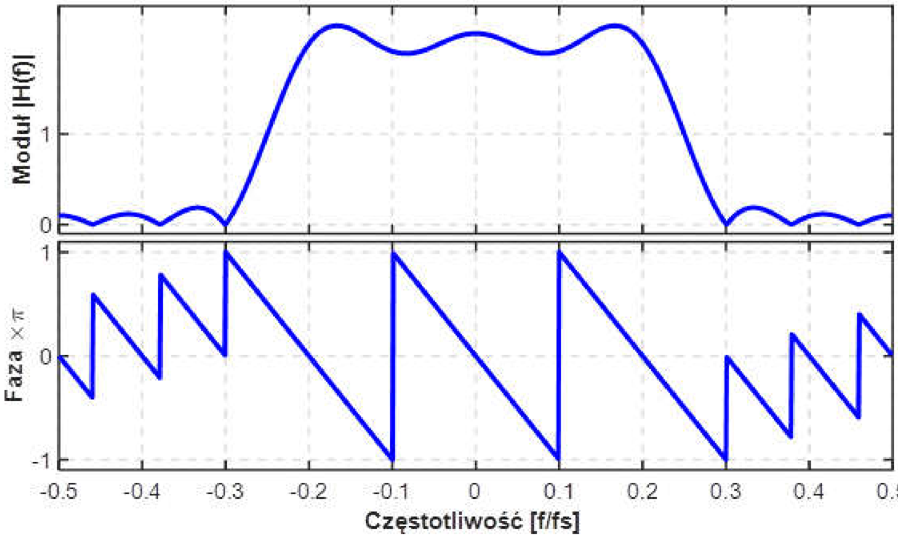
$$\underline{f} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

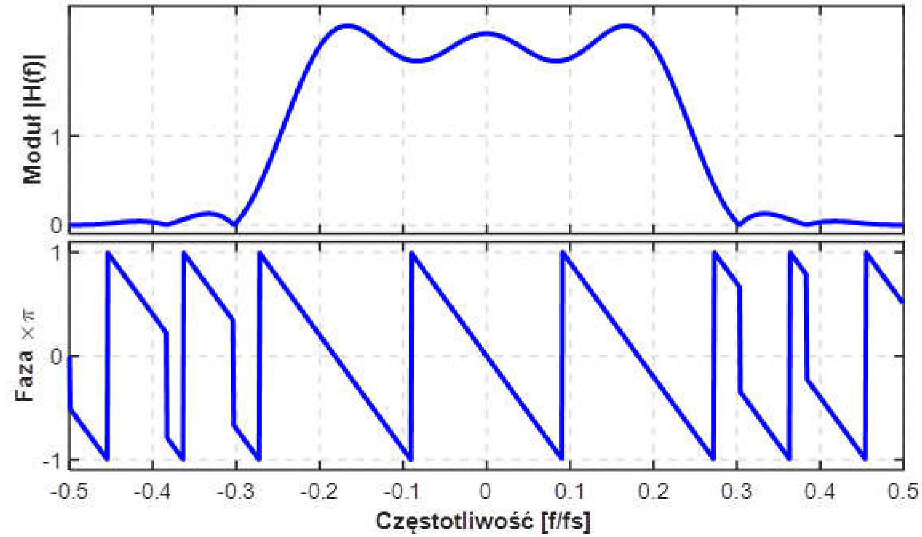
Filtry FIR
symetryczna odpowiedź impulsowa

$$h_r = h_{R-r}$$



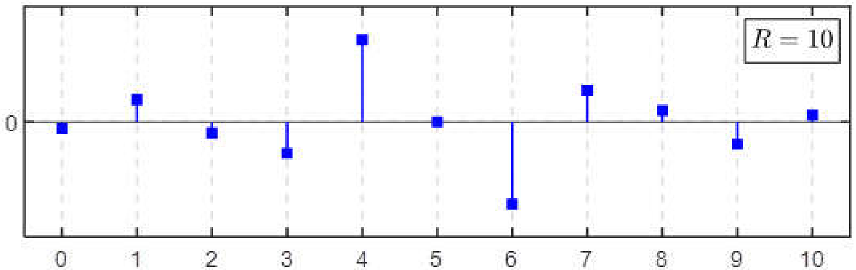


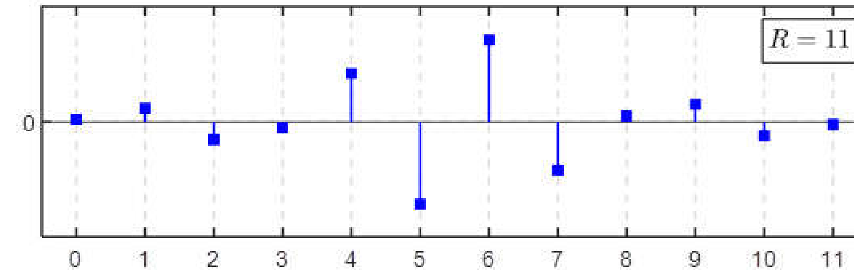


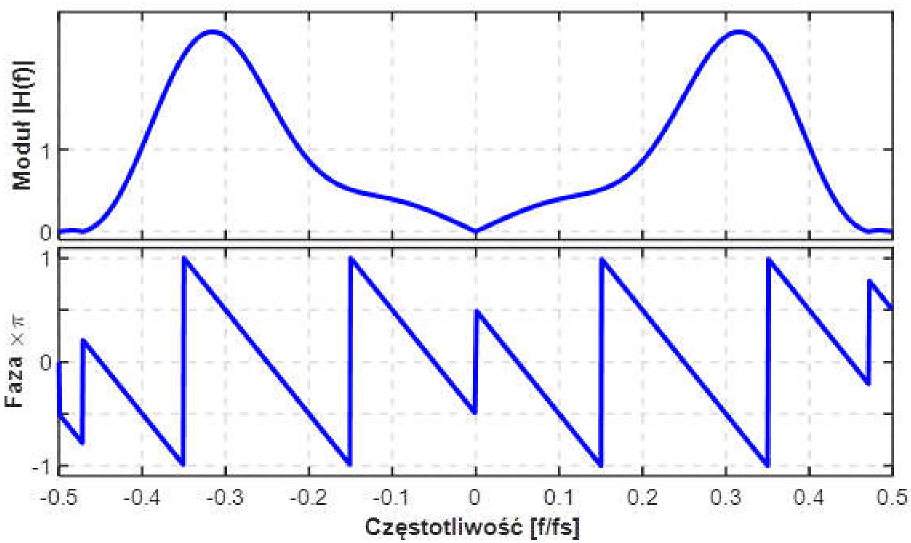


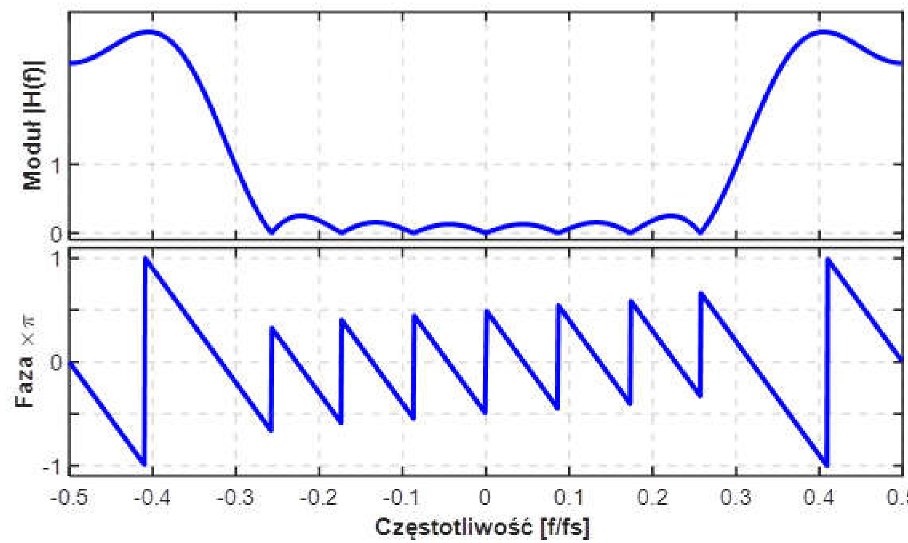
Filtry FIR
asymetryczna odpowiedź impulsowa

$$h_r = -h_{R-r}$$









Co to znaczy zaprojektować filtr?

Założenia:

dolnopasmowy, górnopasmowy, pasmowoprzepustowy, pasmowozaporowy

f_p, f_r - granice pasm

R_p - dopuszczalne oscylacje w paśmie przepustowym

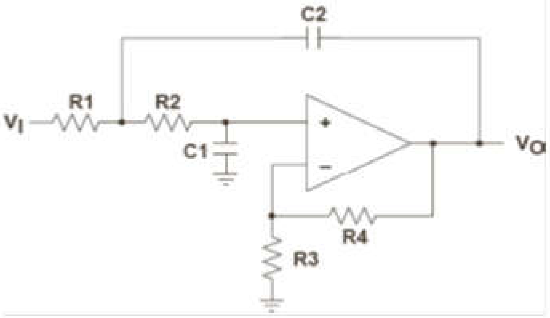
R_r - wymagane minimalne tłumienie w paśmie zaporowym

$$H(z) = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot z^{-r} \qquad H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

Realizacja:

filtr analogowy (układ elektroniczny):

- **pasywny RLC**
- **aktywny**

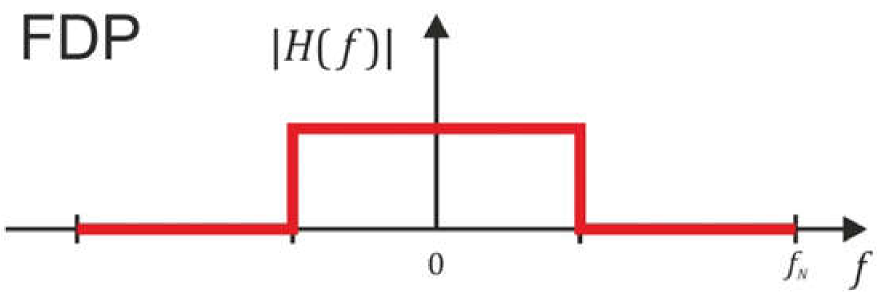


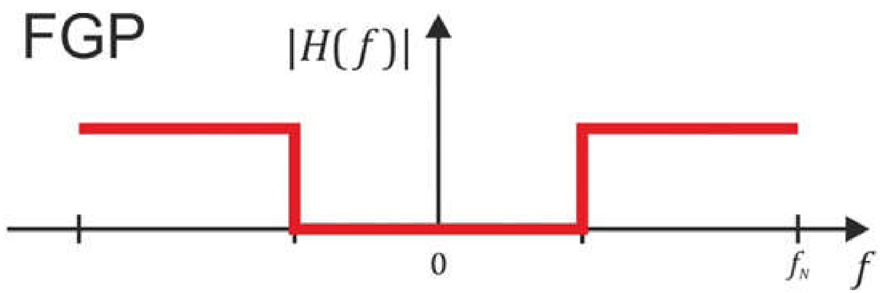
filtr cyfrowy:

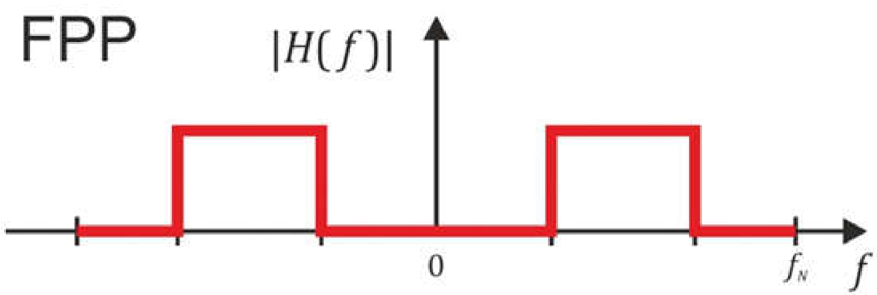
- **Przetwarzanie sygnałów cyfrowych (teoria)**
- **Mikroprocesory sygnałowe, układy FPGA**
- **Informatyka (PC i C++)**

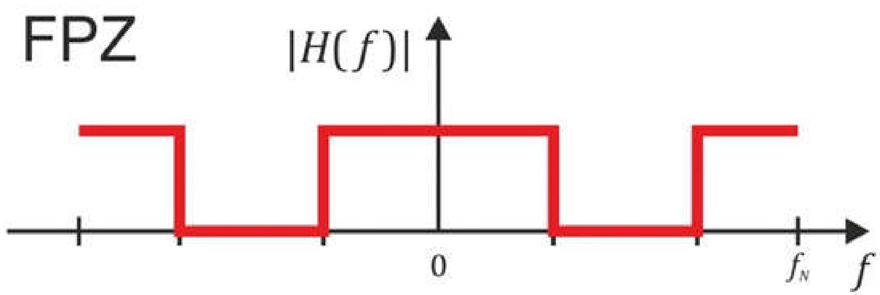
Typy filtrów

$$Y(f) = |H(f)| \cdot |X(f)| \cdot e^{j\{\varphi_H(f)+\varphi_X(f)\}}$$

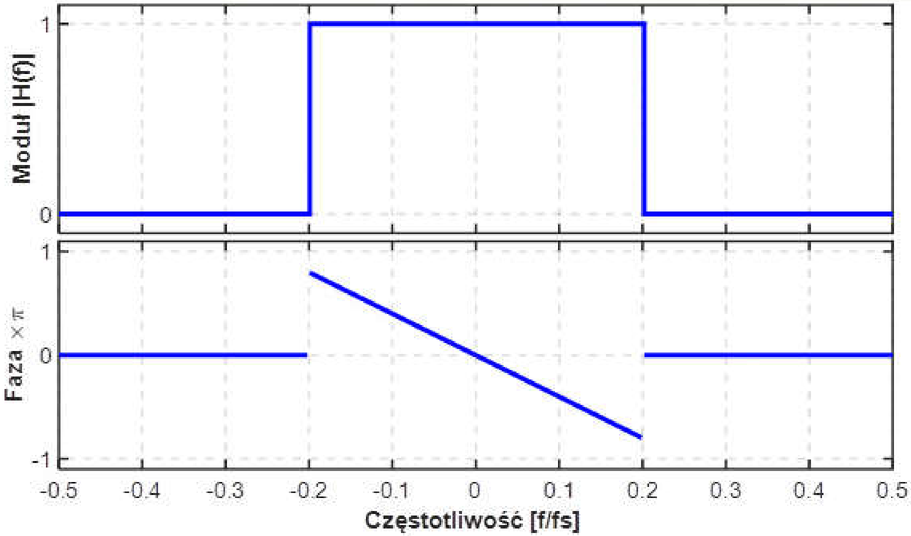


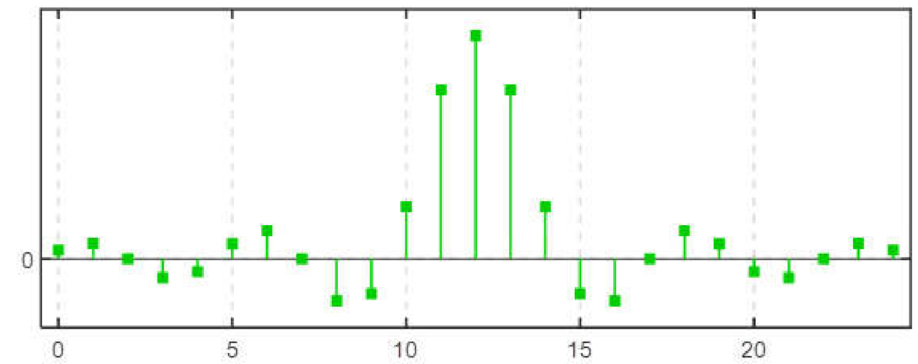


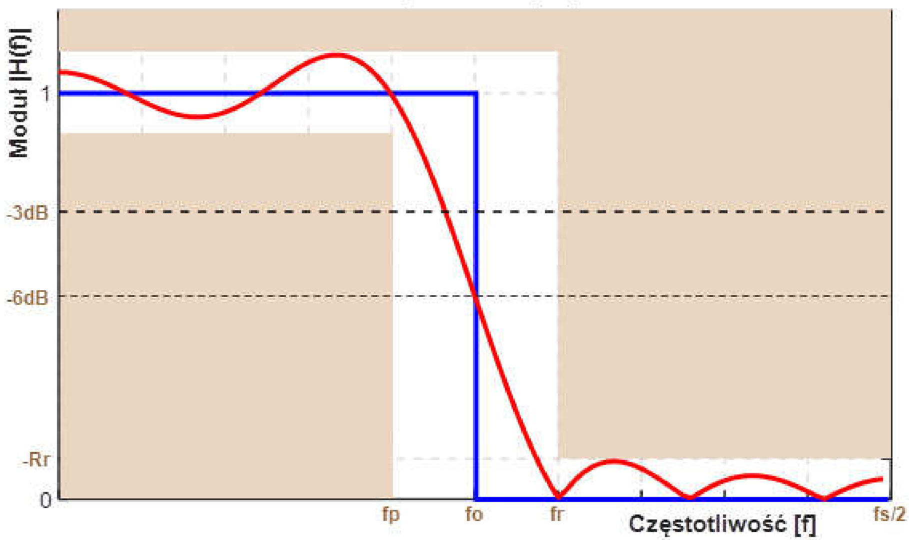


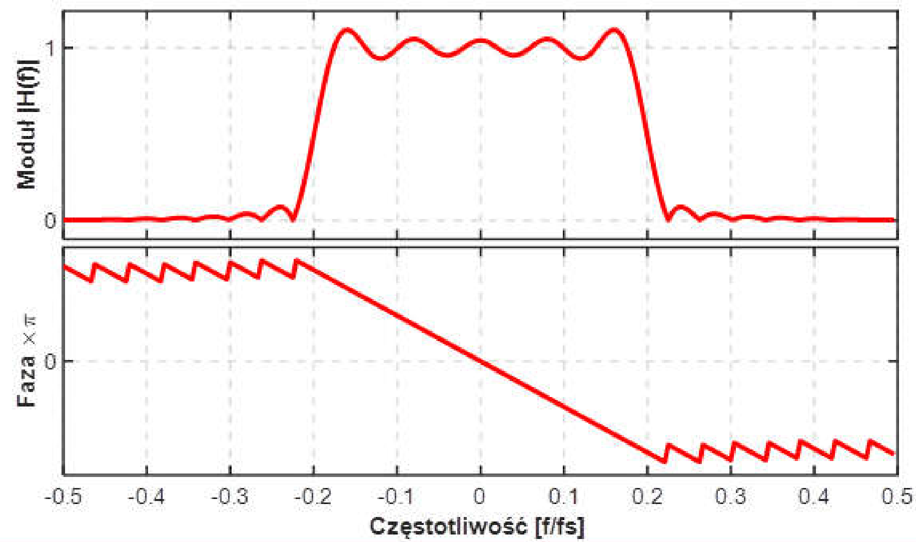


Filtr idealny a rzeczywisty (dolnopasmowy)





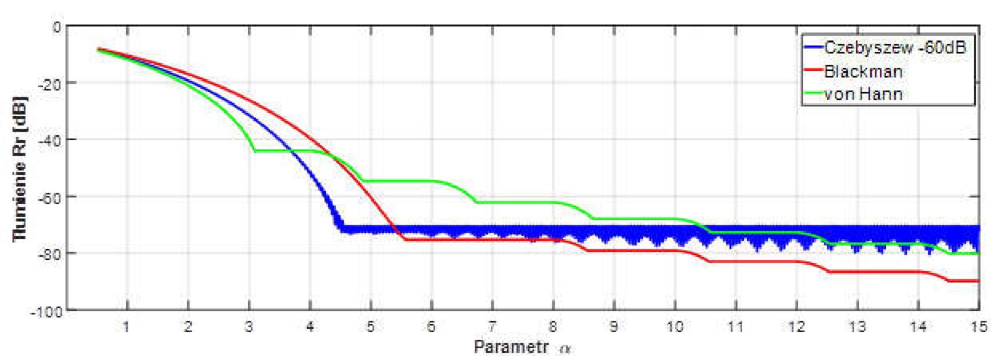




Projektowanie FIR
Metoda okien czasowych - algorytm

1. **Założenia (typ, parametry: f_p, f_r, R_r, f_s?)**
2. **R_r-> okno (tłumienie listków bocznych)**
3. **Rząd filtru** $R \geq \left\lceil \alpha \cdot \frac{f_s}{f_r - f_p} \right\rceil$
   a. **RTS – czas obliczeń**
4. **Liczba współczynników:** $K = R + 1$
5. **Charakterystyka** $H(f)$ **- idealna**
6. **Odpowiedź impulsowa** $h_a(t) = ICFT\{H(f)\}$
7. **Próbkowanie:** $h_a(t) \xrightarrow{f_s} h_x[n]$
8. **Okno:** $h[n] = h_x[n] \cdot okno[R+1]$
9. **TEST**

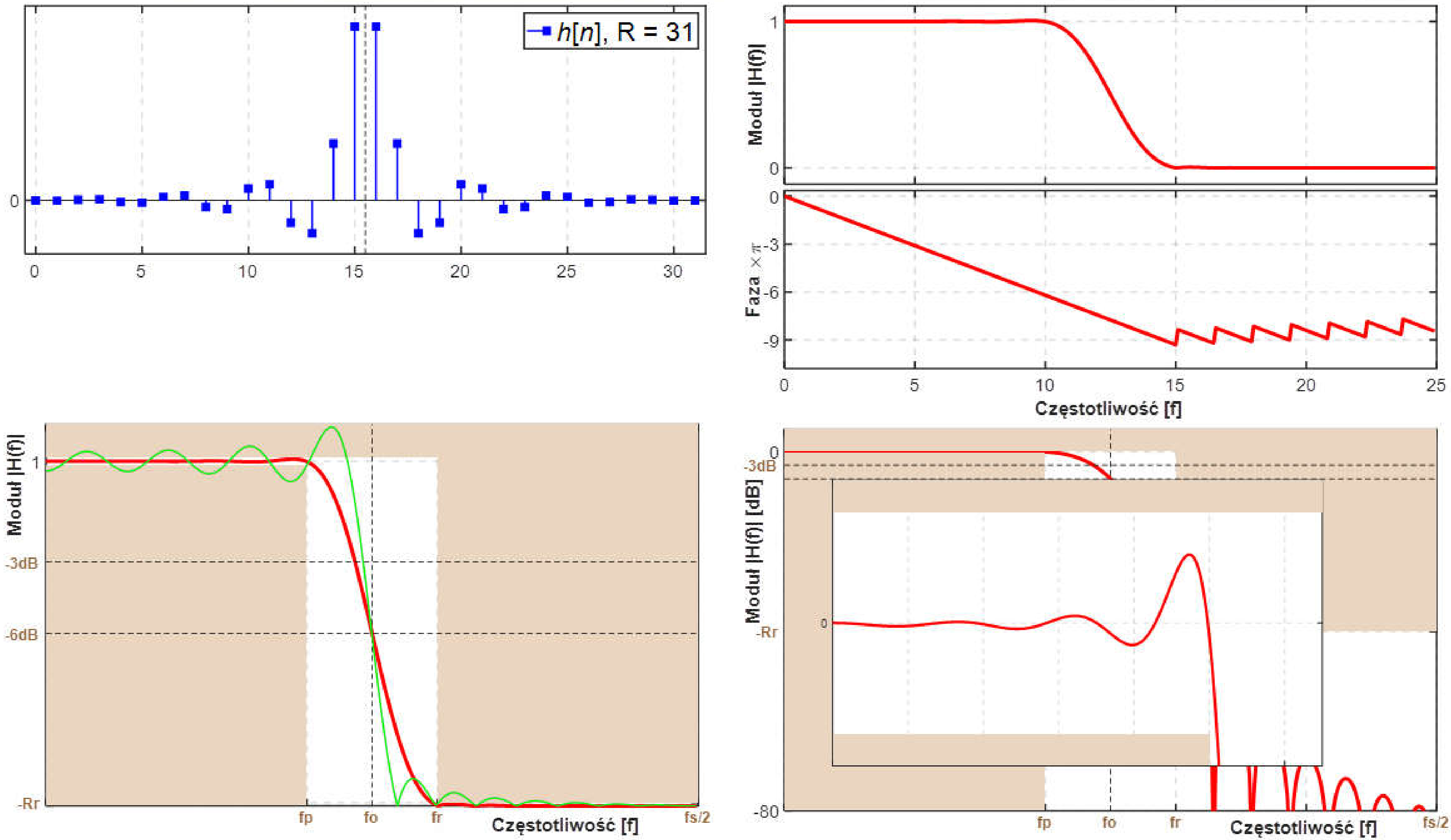
Okno	R_r [dB]	α
prostokątne	-21	0.9
Bartlett'a	-26	3.3
von Hann'a	-44	3.1
Hamming'a	-53	3.3
Blackman'a	-75	5.6
Parzen'a	-56	7.0
flattop	-115	9.7
Chebyszew, -60dB	-70	4.6



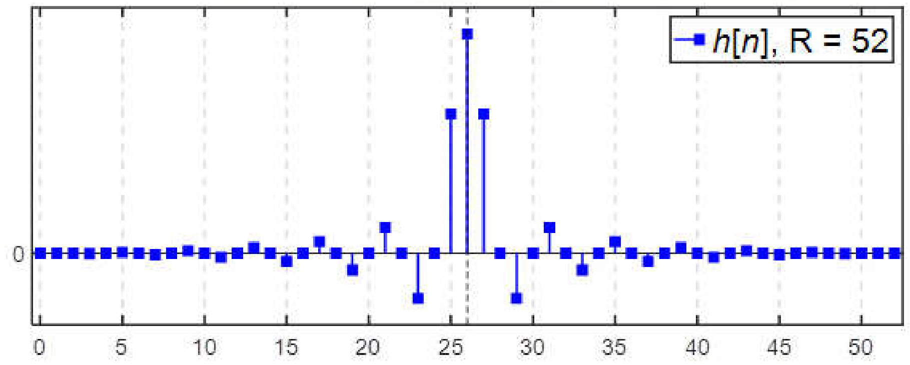
Projektowanie FIR
Metoda okien czasowych - przykład

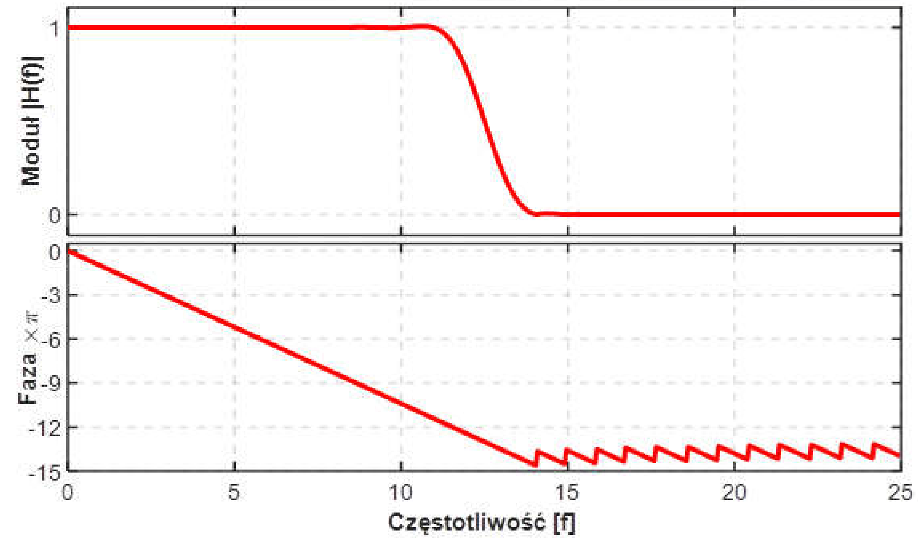
1. **Założenia: FDP,** $f_p = 10$**,** $f_r = 15$**,** $R_r = 40$**,** $f_s = 50$ **=>** $f_0 = 12.5$
2. $R_r = 40$ **-> okno von Hann'a (-44dB)**
3. **Rząd filtru** $R \geq \left\lceil 3.1 \cdot \frac{50}{15-10} \right\rceil \Rightarrow R = 31$
4. **Liczba współczynników:** $K = R + 1 = 32$
5. **Charakterystyka** $H(f) = \prod\left(\frac{f}{2\frac{f_0}{f_S}}\right) \cdot e^{-j2\pi f \cdot \frac{R}{2}}$
6. **Odpowiedź impulsowa** $h_a(t) = 2\frac{f_0}{f_s} \cdot \mathrm{sinc}\left(2\frac{f_0}{f_s}\pi\left(t - \frac{R}{2}\right)\right)$
7. **Próbkowanie:** $h_x[n] = 2\underline{f_0} \cdot \mathrm{sinc}\left(2\underline{f_0}\pi\left(n - \frac{R}{2}\right)\right)$ gdzie $n = 0{:}R$ oraz $\underline{f_0} = \frac{f_0}{f_s}$
8. **Okno:** $h[n] = h_x[n] \cdot okno[R+1]$
9. **TEST**

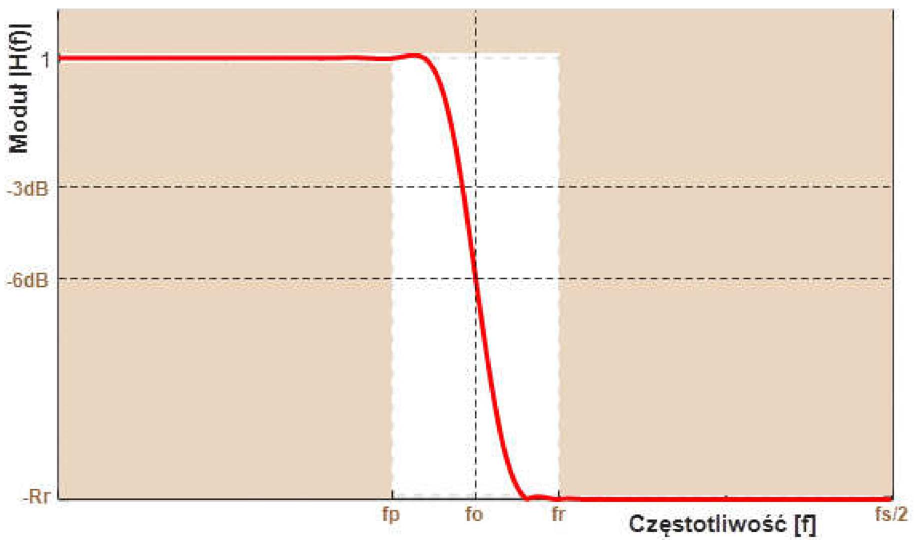
Projektowanie FIR
Metoda okien czasowych – TEST (1)

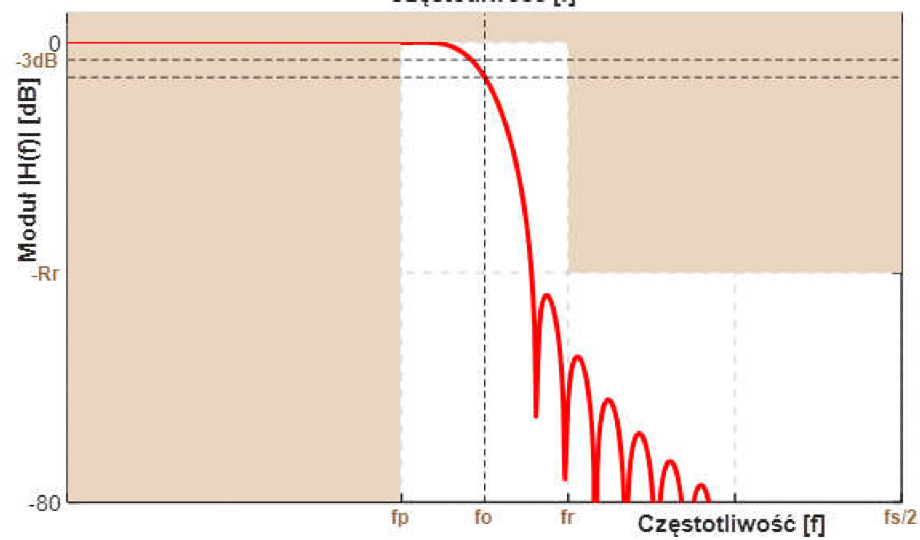


Projektowanie FIR
Metoda okien czasowych – TEST (2)









Projektowanie FIR
Metoda okien czasowych z DFT - algorytm

1. **Założenia: (typ, parametry:** f_p**,** f_r**,** R_r**,** f_s?**)**
2. R_r**-> okno (tłumienie listków bocznych)**
3. **Rząd filtru** $R \geq \left\lceil \alpha \cdot \frac{f_s}{f_r - f_p} \right\rceil$
   a. **RTS – czas obliczeń**
4. **Liczba współczynników:** $K = R + 1$
5. **Liczba prążków:** $\boldsymbol{M} \geq 2 \cdot \boldsymbol{K}$ **(IFFT?)**
6. **Charakterystyka** $H_M[m]$ **– idealna, faza?**
7. **Odpowiedź impulsowa** $h_x[m] = IDFT\{H_M[m]\}$, **fftshift?**
8. **Okno:** $h[n] = h_x[n] \cdot okno[R + 1]$ **– korelacja!**
9. **TEST**

Projektowanie FIR
Metoda okien czasowych z DFT - przykład

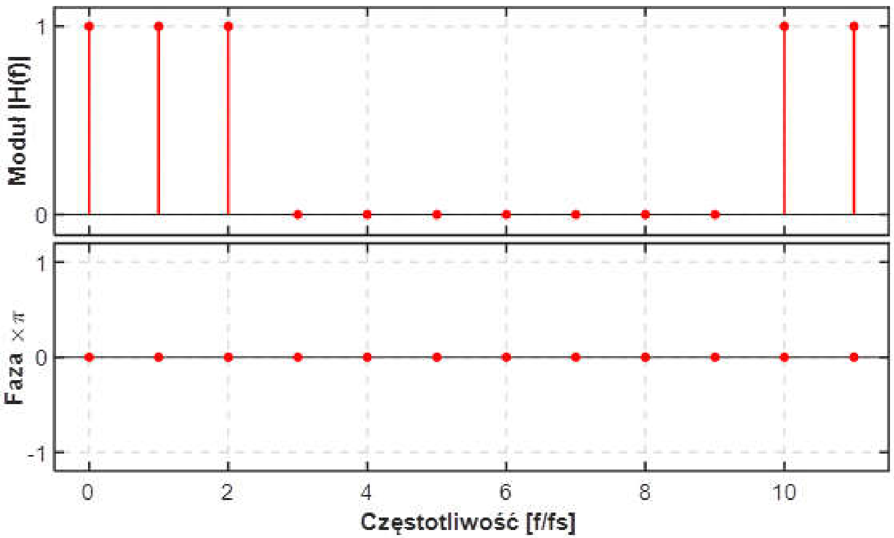
1. **Założenia : FDP,** $f_p = 10$**,** $f_r = 15$**,** $R_r = 40$**,** $f_s = 50$ **=>** $f_0 = 12.5$
2. $\boldsymbol{R_r = 40}$ **-> okno von Hann'a (-44dB)**
3. **Rząd filtru** $R \geq \left\lceil 3.1 \cdot \frac{50}{15-10} \right\rceil \Rightarrow R = 31$
4. **Liczba współczynników:** $K = R + 1 = 32$
5. **Liczba prążków:** $\boldsymbol{M = 64 \geq 2 \cdot K}$ **(IFFT)**
6. **Charakterystyka** $H_M[m] = [\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1}]$
7. **Odpowiedź impulsowa** $h_x[m] = IDFT\{H_M[m]\}$, skoro $\varphi = 0$ to **fftshift !**
8. **Okno:** $h[n] = h_x[n] \cdot okno[R+1]$ **– korelacja!**
9. **TEST**

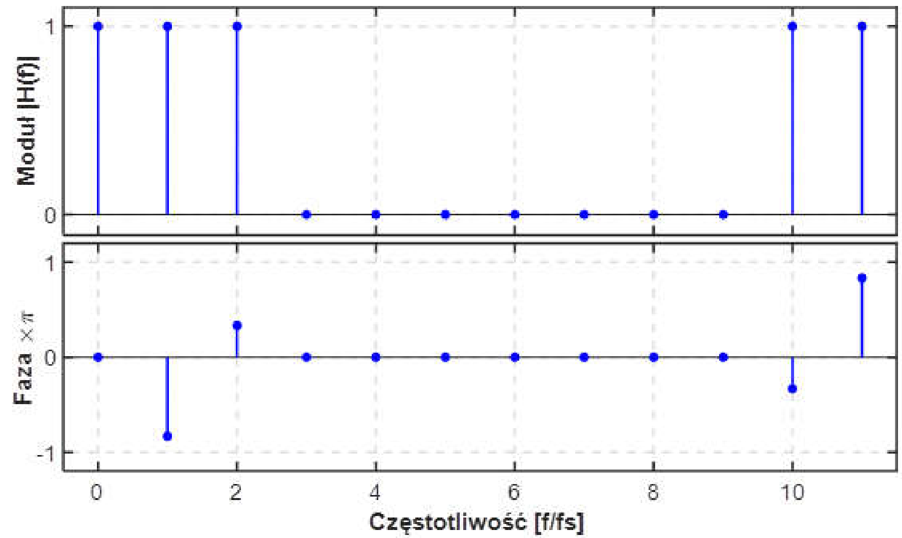
Projektowanie FIR
Metoda okien czasowych z DFT – przykład - faza

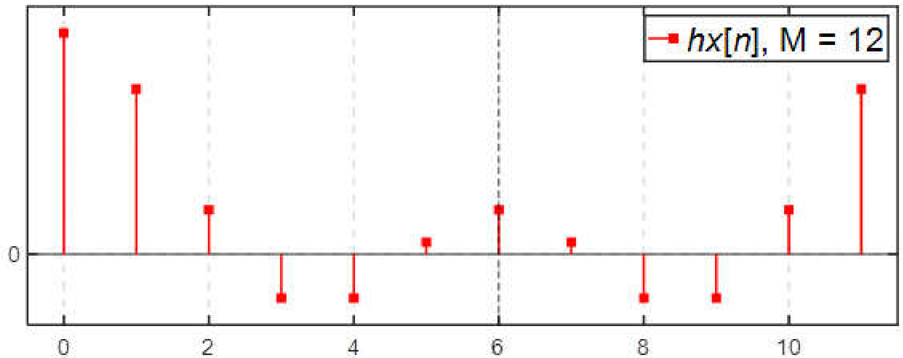
$H_M[m] = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1]$ $\quad M\!: \; m = 0 \ldots M-1$ $\quad M = 12 \rightarrow L = \dfrac{M-2}{2} = 5$

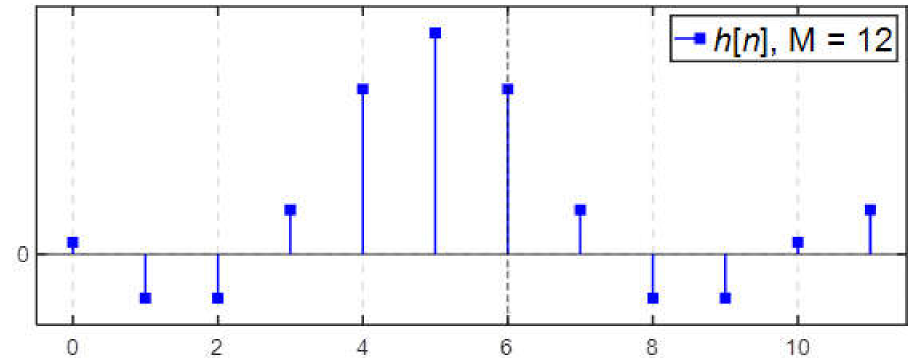
$H_x[m] = H_M[m]$ a potem **fftshift**

$H_x[m] = H_M[m] \cdot \exp\left\{-j2\pi \cdot \dfrac{m}{M} \cdot L\right\}$

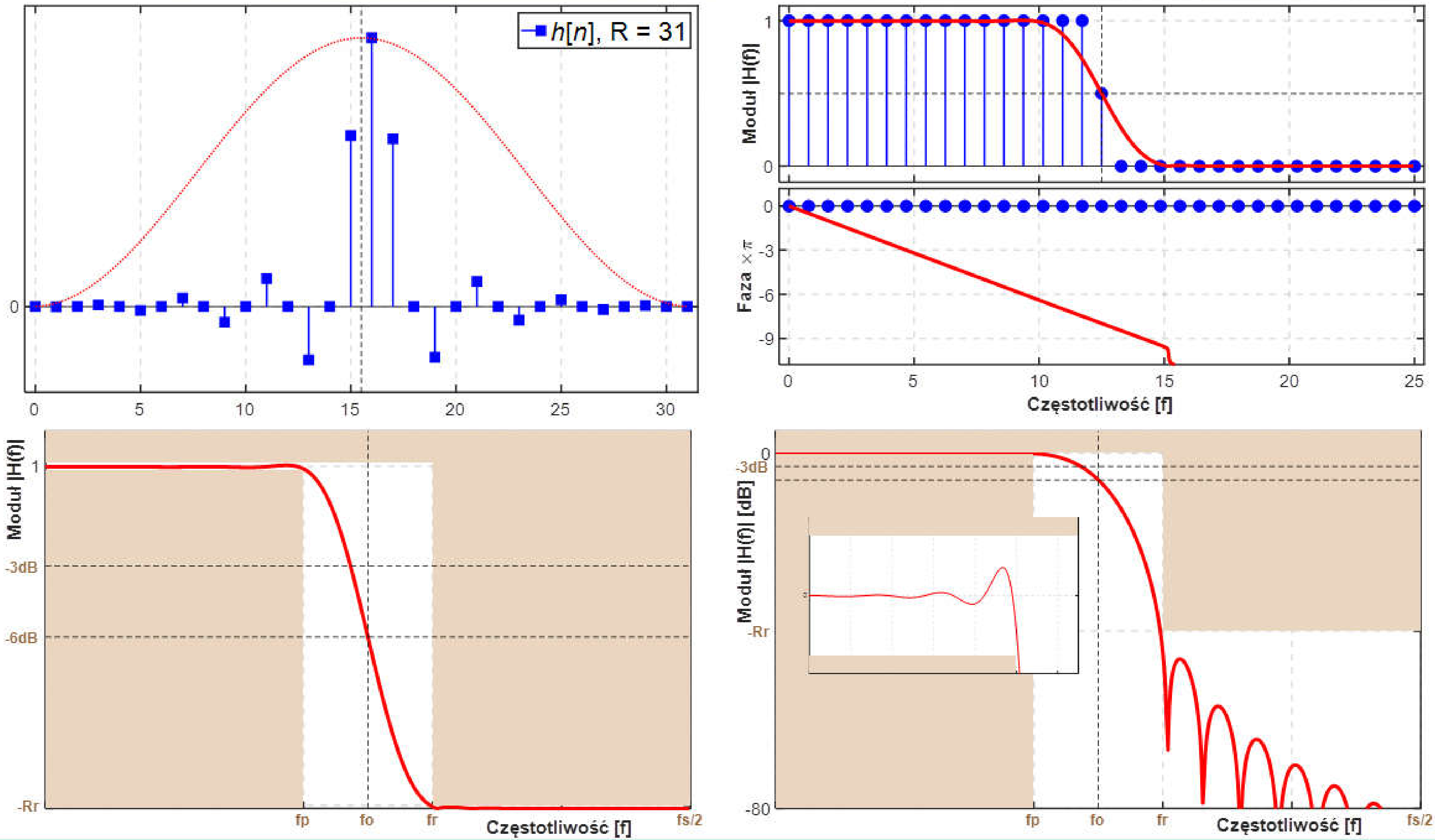








Projektowanie FIR
Metoda okien czasowych z DFT – TEST ?



Projektowanie FIR
przy pomocy szeregu Fourier'a - algorytm

1. **Założenia: punkty charakterystyki częstotliwościowej**
2. **Założenie:** $H(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k \cdot e^{-j2\pi fk}$ **gdzie** $f \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
   a. **warunki:** $|H(f)| = |H(-f)|$ **oraz** $\varphi(f) = -\varphi(-f)$
   b. **przyczynowość:** $h[0]\ \ldots h[R]$
3. **Wyznaczenie** $h[n]$: $H(f) = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot e^{-j2\pi fr}$
4. **TEST**

Projektowanie FIR
przy pomocy szeregu Fourier'a - przykład

Założenia: $\boldsymbol{H}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{4}\right) = -\mathbf{1}$, $\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, liniowa faza

Warunki: $|H(f)| = |H(-f)|$ **oraz** $\varphi(f) = -\varphi(-f)$ **a także** $f \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$R = 4 \Longrightarrow r = 0 \dots 4$ zatem $h[n] = [h_0, h_1, h_2, h_3, h_4]$ oraz $h_0 = h_4$ i $h_1 = h_3$

Wyznaczenie: $h[n]$: $H(f) = \sum_{r=0}^{R} h_r \cdot e^{-j2\pi fr}$

$$f = 0 \Longrightarrow H(0) = h_0 e^0 + h_1 e^0 + h_2 e^0 + h_3 e^0 + h_4 e^0 = \mathbf{2}\boldsymbol{h_0} + \mathbf{2}\boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{h_2} = \mathbf{1}$$

$$f = 1/4 \Longrightarrow H(1/4) = h_0 e^0 + h_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} + h_2 e^{-j\pi} + h_3 e^{-j\frac{3}{2}\pi} + h_4 e^{-j2\pi} = \mathbf{2}\boldsymbol{h_0} - \boldsymbol{h_2} = -\mathbf{1}$$

$$f = 1/2 \Longrightarrow H(1/2) = h_0 e^0 + h_1 e^{-j\pi} + h_2 e^{-j2\pi} + h_3 e^{j3\pi} + h_4 e^{-j4\pi} = \mathbf{2}\boldsymbol{h_0} - \mathbf{2}\boldsymbol{h_1} - \boldsymbol{h_2} = \mathbf{1/2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/16 \\ 1/8 \\ 7/8 \end{bmatrix} \Longrightarrow h[n] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

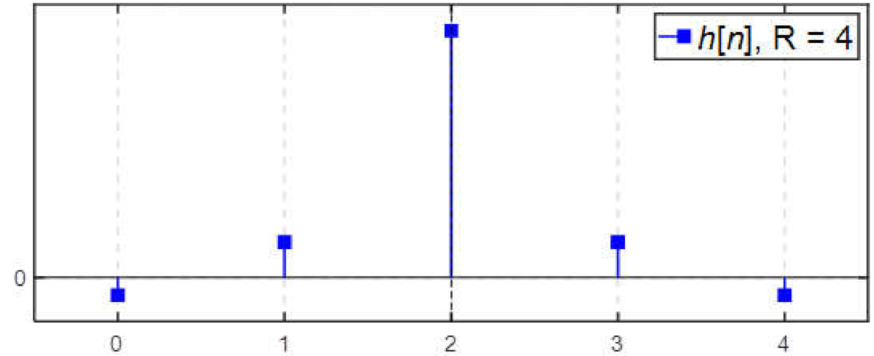
Projektowanie FIR
przy pomocy szeregu Fourier'a - TEST

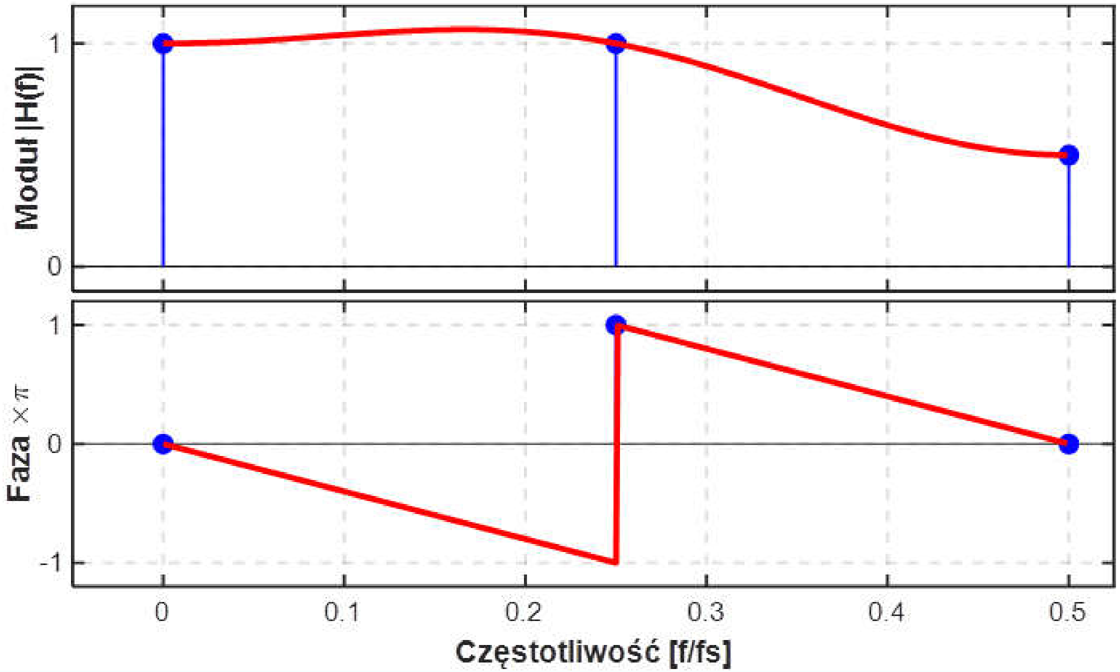
Założenia:

$$\boldsymbol{H(0) = 1,\ H\left(\tfrac{1}{4}\right) = -1,\ H\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}}$$

$R = 4$, liniowa faza

$$h[n] = \left[-\frac{1}{16} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{1}{8} \quad -\frac{1}{16}\right]$$

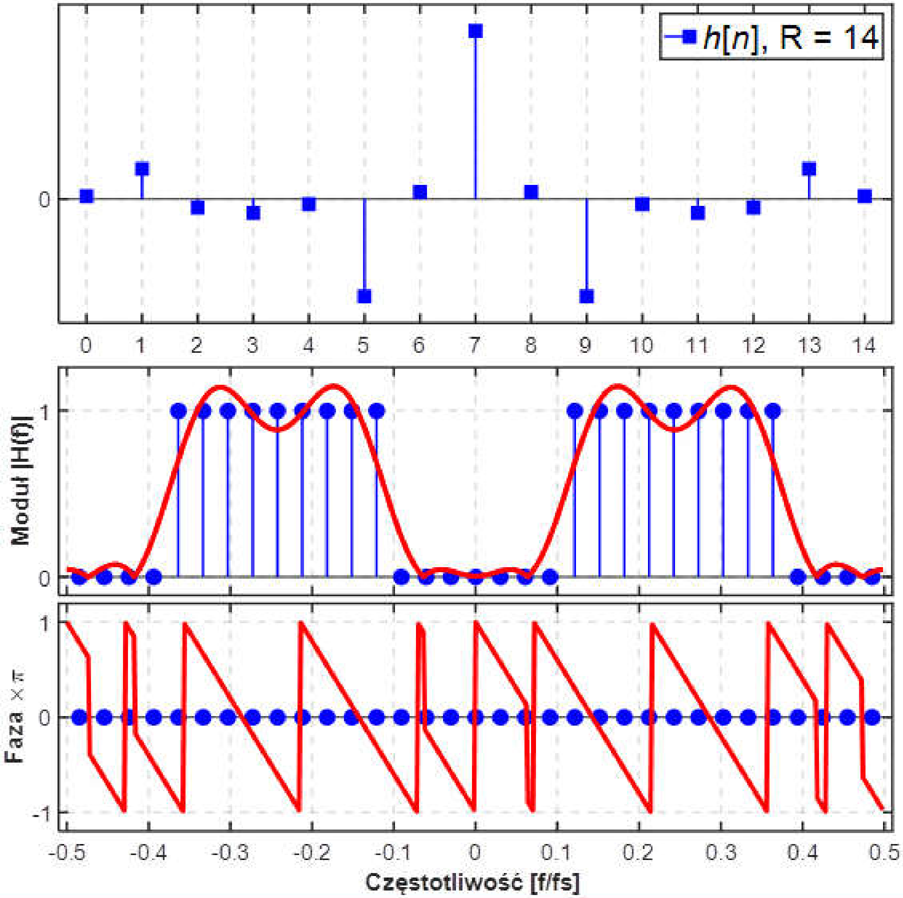


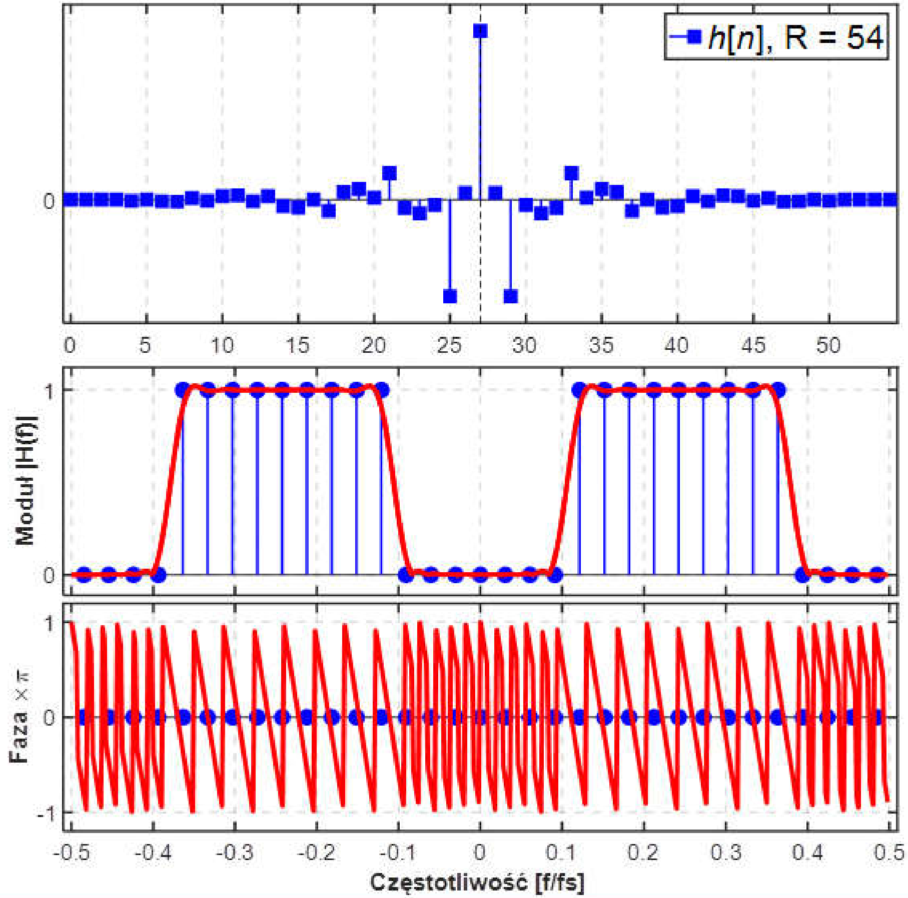


Projektowanie FIR
przy pomocy szeregu Fourier'a – TEST (2)

$$h[n] = \sum_k \frac{|H[k]|}{K} \cdot \cos\left(2\pi \cdot f_k \cdot \left(r - \frac{R}{2}\right) + \angle H[k]\right) \qquad r = 0 \dots R$$

z oknem von Hann'a





Projektowanie FIR
metody aproksymacyjne (LS, Parks-McClellan, tw. Remez)

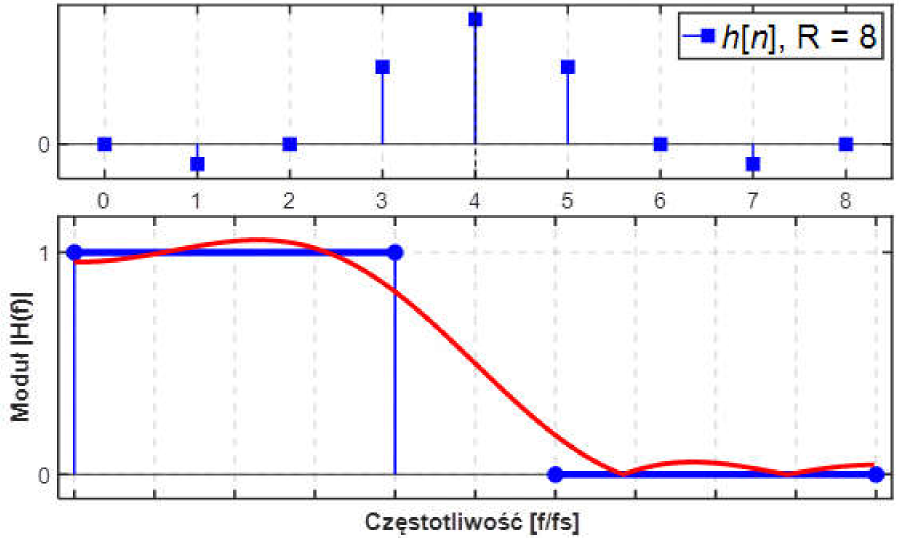
$L^2(0,1/2) \qquad \min Q_h \qquad w(f) \geq 0$

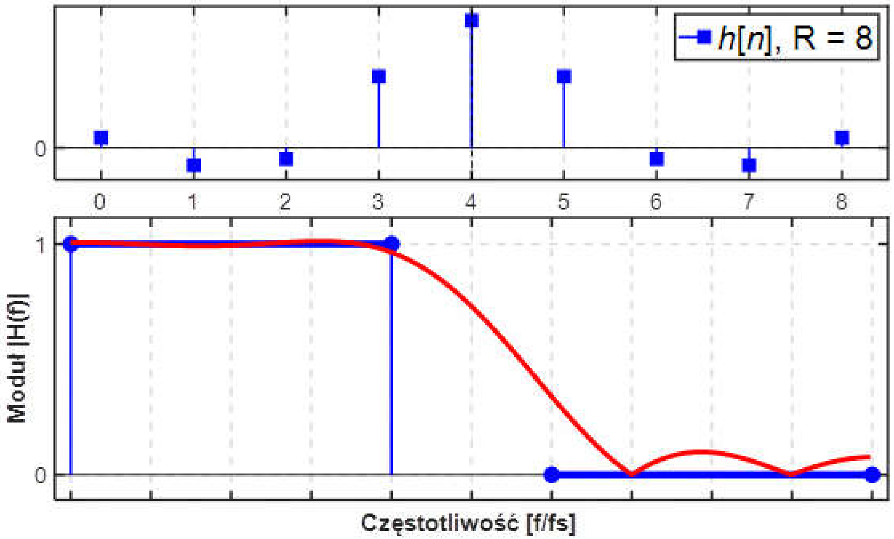
$$Q_h = \int_0^{1/2} w(f) \cdot \left|H^{zad}(f) - H(f)\right|^2 df$$

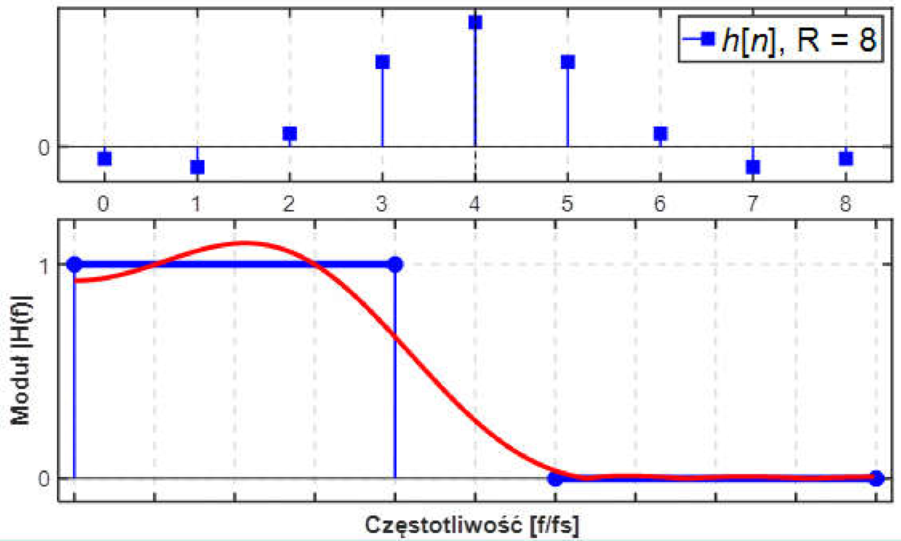
MATLAB ($f \in [0,1]$):

h = firls(R,F,H,w)

h = firpm(R,F,H,w)







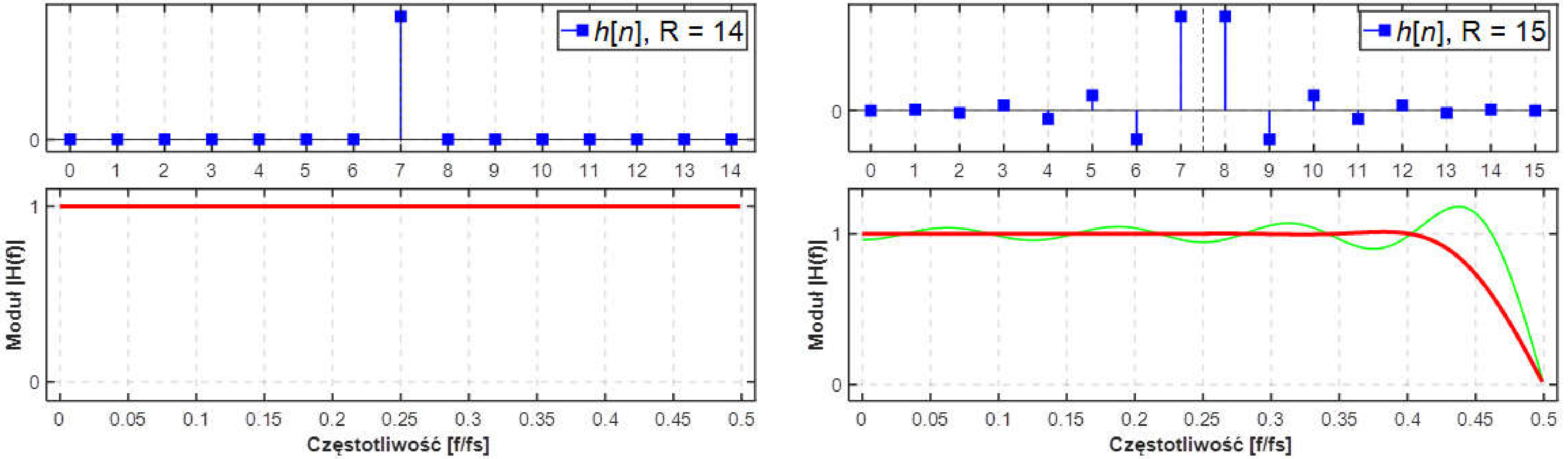
Przekształcanie filtrów FIR
filtr wszechprzepustowy („linia opóźniająca")

1. **Założenia: FDP,** $f_0 = \frac{f_S}{2}$

2. **Charakterystyka** $H(f) = \prod(f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot \frac{R}{2}}$

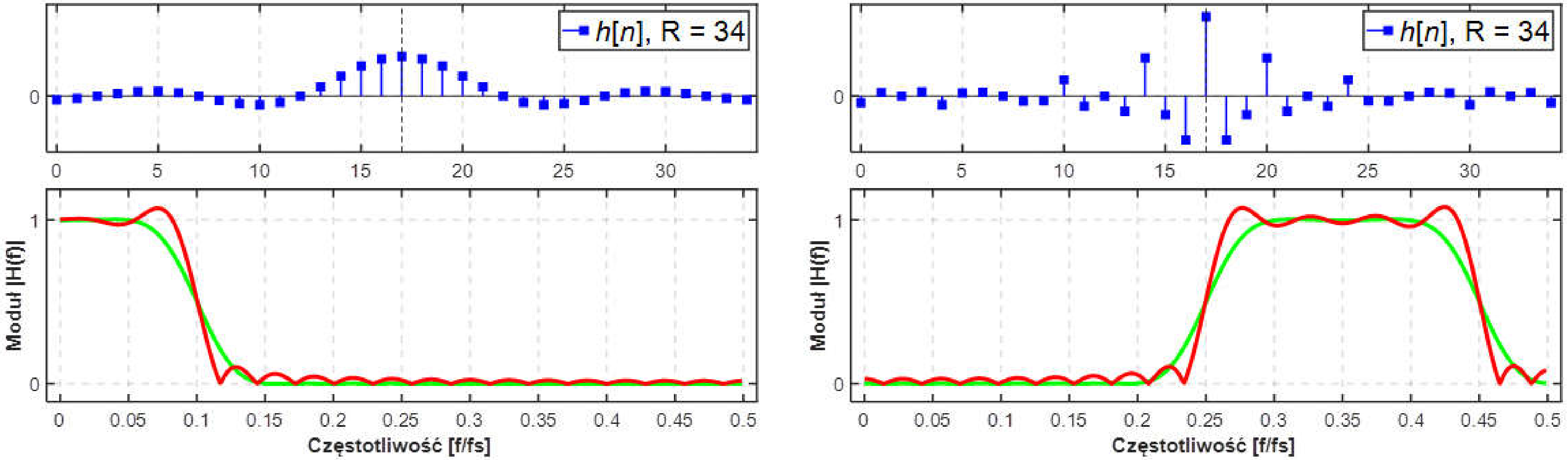
3. **Odpowiedź impulsowa** $h_a(t) = \mathrm{sinc}\left(\pi\left(t - \frac{R}{2}\right)\right)$

4. **Próbkowanie:** $h[n] = \mathrm{sinc}\left(\pi\left(n - \frac{R}{2}\right)\right)$ gdzie $n = 0{:}\,R$



Przekształcanie filtrów FIR FDP -> FPP

1. **Założenia: FDP, f_x - częstotliwość środkowa (środka pasma)**
2. **Modulacja:** $s(t) \leftrightarrow S(f) \Leftrightarrow s(t) \cdot \cos(2\pi f_x t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\{S(f+f_x)+S(f-f_x)\}$
3. $h_x[n] = h_{DP}[n] \cdot 2 \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_x}{f_S}\left(n - \frac{R}{2}\right)\right)$



Przekształcanie filtrów FIR
FDP -> FGP

Modulacja:

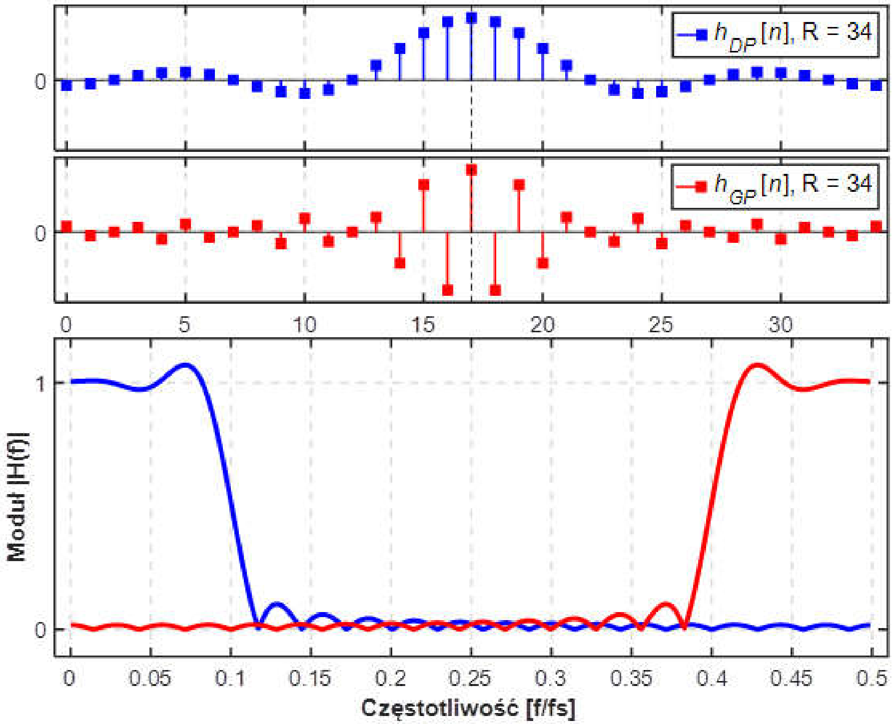
$$h_{GP}[n] = h_{DP}[n] \cdot \cos\left(\pi\left(n - \frac{R}{2}\right)\right)$$

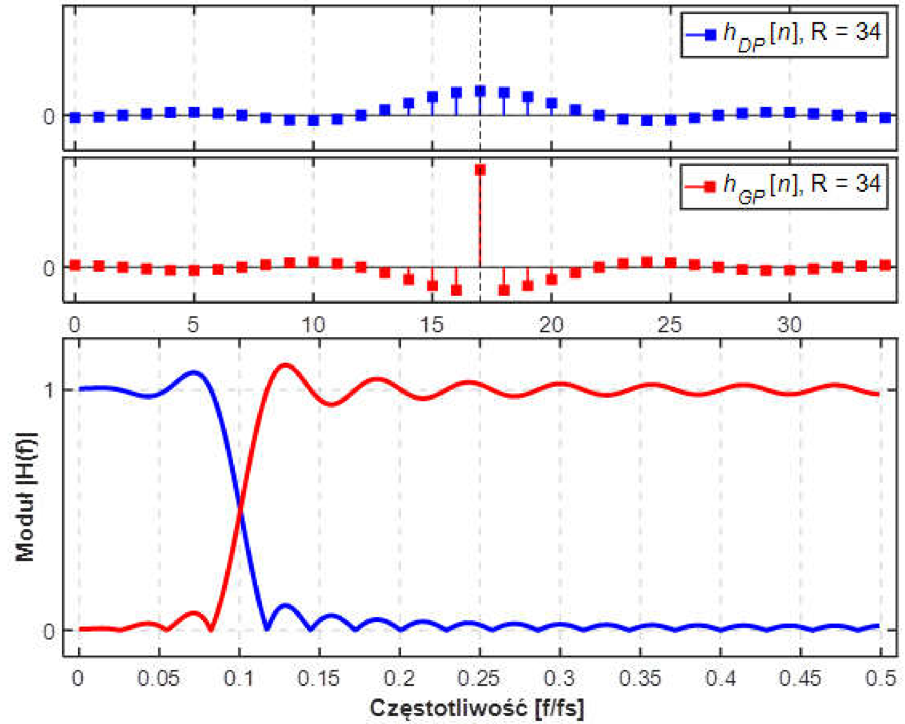
$$f_x = f_s/2$$

Liniowość DFT:

$$H_{GP}(f) = 1 - H_{DP}(f)$$

$$h_{GP}[n] = \mathrm{sinc}\left(\pi\left(n - \frac{R}{2}\right)\right) - h_{DP}[n]$$



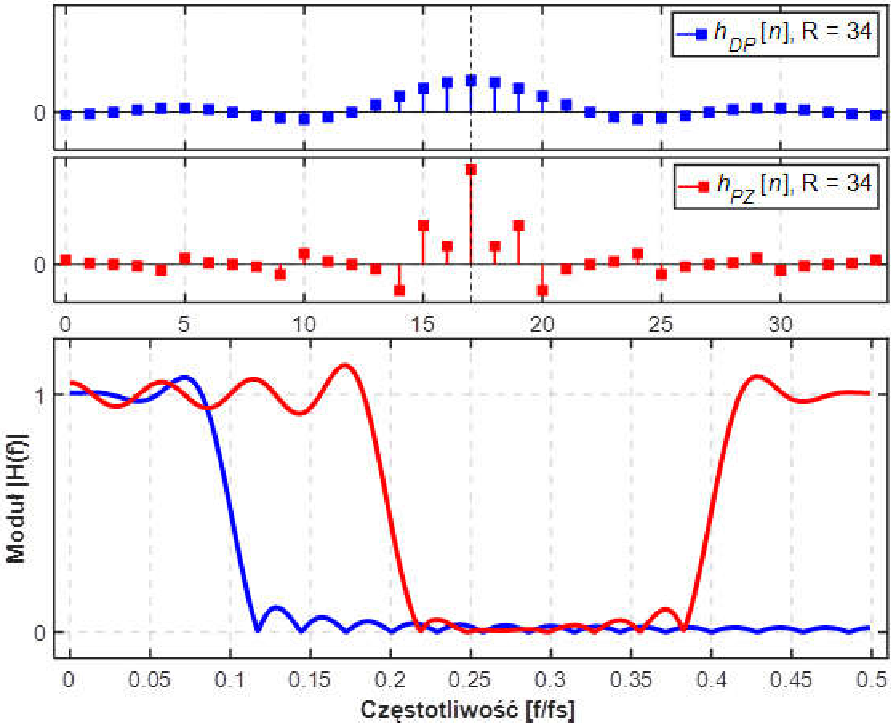


Przekształcanie filtrów FIR FDP -> FPZ

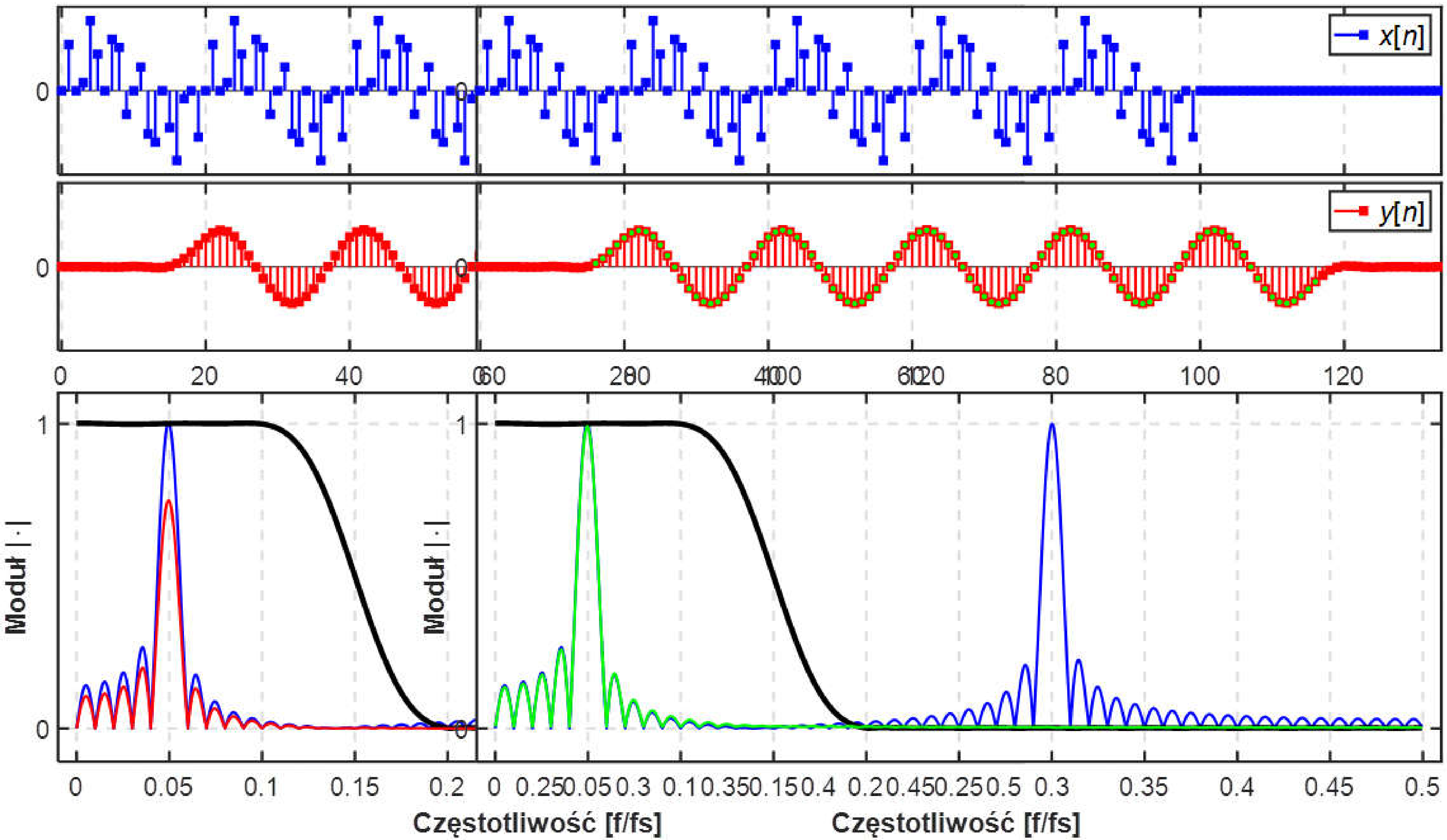
Modulacja i liniowość DFT:

$$h_{PP}[n] = h_{DP}[n] \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_x}{f_S}\left(n - \frac{R}{2}\right)\right)$$

$$h_{PZ}[n] = \mathrm{sinc}\left(\pi\left(n - \frac{R}{2}\right)\right) - h_{PP}[n]$$



Filtracja FIR
przykład (1), R=34



Filtracja FIR
przykład (2), R=34