

1 Historia Ciągu Fareya

Ciąg Fareya, nazwany na cześć angielskiego geodety i matematyka Edwarda Fareya, został wprowadzony w 1816 roku. Farey opisał właściwości ułamków w artykule w "Philosophical Magazine". Zauważył, że pomiędzy dwoma ułamkami $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ o mianownikach nie większych niż n może znajdować się ułamek $\frac{p}{q}$ który jest średnią Fareya dwóch sąsiadujących ułamków. Chociaż Farey nie przedstawił formalnego dowodu, jego obserwacje przyciągnęły uwagę wybitnego matematyka Augustina Cauchy'ego.

Cauchy formalnie udowodnił te obserwacje i wprowadził je do matematyki. Ciąg Fareya stopnia n to uporządkowany rosnąco ciąg ułamków $\frac{a}{b}$ gdzie a i b są względnie pierwsze, a $b \leq n$. Ciąg zaczyna się od $\frac{0}{1}$ a kończy się na $\frac{1}{1}$. Kolejne ułamki uzyskuje się poprzez wstawianie średnich Fareya pomiędzy już istniejące elementy.

2 Konstrukcja ciągu Fareya

Ciąg Fareya stopnia n , oznaczany F_n , to uporządkowany rosnąco ciąg ułamków $\frac{a}{b}$, gdzie $0 \leq a \leq b \leq n$ oraz $\gcd(a, b) = 1$, zawartych w przedziale $[0, 1]$. Konstrukcja ciągu jest następująca:

1. Rozpocznij od zbioru $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$.
2. Przechodź przez wszystkie pary ułamków $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ w obecnym ciągu. Dodaj nowy ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ między nimi, jeśli $b + d \leq n$.
3. Powtarzaj krok 2, aż nie będzie możliwe dodanie nowych ułamków.

Przykład dla $n = 5$:

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

Właściwości:

Dla kolejnych elementów $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ w F_n : $bc - ad = 1$.

Średnia Fareya: nowy ułamek to $\frac{a+c}{b+d}$.

Proces powtarzamy, aż uzyskamy pełny ciąg Fareya stopnia n .

3 Algorytm tworzący ciąg Fareya dla dowolnego n

```
1 from fractions import Fraction
2
3 def farey_sequence(n):
4     farey = []
5
6     for denominator in range(1, n + 1):
7         for numerator in range(0, denominator + 1):
8             farey.append(Fraction(numerator, denominator))
9
10    farey = sorted(set(farey))
```

```

11     return farey
12
13 def get_positive_int(prompt):
14
15     while True:
16         try:
17
18             n = int(input(prompt))
19             if n <= 0:
20                 print("Podana liczba ma byc wieksza od 0")
21                 continue
22             else:
23                 return n
24
25         except ValueError:
26             print("Podana liczba musi byc calkowita")
27
28
29 sequence = farey_sequence(get_positive_int("Podaj rzad , ktory chcesz wygenerowac: "))
30 print("_".join(str(i) for i in sequence))

```

Opis algorytmu:

Funkcja `farey_sequence(n)` generuje ułamek Fareya dla danego rzędu n .

- Linia 4: Inicjalizuje pustą listę `farey` do przechowywania ułamków.
- Linia 6: Rozpoczyna pętlę po licznikach (od 1 do n).
- Linia 7: Rozpoczyna pętlę po mianownikach (od 0 do aktualnego mianownika).
- Linia 8: Dodaje ułamek $\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}$ do listy `farey`.
- Linia 10: Usuwa duplikaty i sortuje ułamki.
- Linia 11: Zwraca posortowaną listę unikalnych ułamków Fareya.

Funkcja `get_positive_int` służy do pobierania dodatniej liczby całkowitej od użytkownika.

4 Wnioski

Wnioski

Ciąg Fareya to uporządkowany rosnąco ciąg ułamków, który odgrywa ważną rolę w teorii liczb. Jego wprowadzenie przez Edwarda Fareya oraz formalne dowody Augustina Cauchy'ego były kluczowe dla jego rozwoju. Implementacja w Pythonie z użyciem biblioteki 'fractions' jest praktyczna i przejrzysta. Ciągi Fareya znajdują zastosowanie w analizie numerycznej, kryptografii oraz teorii aproksymacji.