

Strategie minimax u pokutových kopů ve fotbale

Jakub Svoboda*

Abstrakt

Tato práce shrnuje dosavadní poznatky z analýzy dat z profesionálního sportu, kde se díky omezení dané hry na jeden typ situací jedná o situaci připomínající jednoduchou nekooperativní hru dvou hráčů s nulovým součtem. Konkrétně se práce vztahuje k rozhodovacím situacím při pokutových kopech v profesionálních fotbalových zápasech. Nad daty shromážděnými v předních evropských ligách je ověřena schopnost hráčů zachovat se v souladu s ekvilibriem této hry. Výsledky analýzy poukazují na skutečnost, že hráči jsou schopni hrát v souladu s ekvilibriem.

Klíčová slova: minimax — nashovo ekvilibrium — nash equilibrium — teorie her — game theory — pokutový kop — penalty kick — fotbal — football

*xsvobo0z@stud.fit.vut.cz, Fakulta informačních technologií, Vysoké učení technické v Brně

1. Úvod

[Motivace] Teorie her je vědní disciplína, která zkoumá chování aktérů (hráčů) v konfliktních rozhodovacích situacích. V posledních několika desetiletích se stala nedílnou součástí mnoha vědních oborů, především však našla uplatnění ve společenských vědách. Její přínosy jsou nejvíce patrné ekonomických modelech, v psychologii, demografii a politologii.

Studium, analýza a modelování těchto situací nám umožňuje blíže pochopit motivaci a chování hráčů a tím do jisté míry predikovat jejich chování v podobných budoucích situacích.

[Výchozí studie] Tato práce vychází především z článků Ignacio Palacios-Huerta *Professionals Play Minimax* [10] a *Experientia Docet: Professionals play minimax in laboratory experiments* [11]. První článek se zabývá analýzou dat z trestných kopů ve fotbale a jejich vztahu k minimax teorému. Druhá zmíněná práce se pak zaměřuje na přenositelnost expertních znalostí hráčů mezi jednotlivými hrami hranými v laboratorních podmínkách a rozdílný přístup k volbě strategií mezi expertními a nezkušenými hráči.

[Definice problému] Ačkoliv byly teoretické principy teorie her důkladně popsány a dokázány, jejich zkoumání a testování v reálných situacích se setkal s mnoha problémy. Zatímco teoretické předpoklady

očekávají, že racionální hráči budou, alespoň do určité míry, hrát v souladu s ekvilibriem dané hry, snahy o ověření těchto teoretických předpokladů se setkaly se smíšenými a nejasnými výsledky [1][12][2] a to i v případech, kdy se autoři snažili daný problém zjednodušit a izolovat, aby byl minimalizována vlivy, které by mohly hru a rozhodování hráčů. Hlavním problémem se zdá být složité až mnohdy nemožné přesné vyčíslení užitkové funkce dané hry, kdy v reálných situacích berou hráči v potaz mnoho skutečností, jejich implikace často přesahují rámec samotné hry¹. Při testování v experimentálních a zjednodušených scénářích byly naměřené výsledky často v rozporu s předpoklady von Neumanovy teorie o minimax strategii pro nekooperativní hry dvou hráčů s nulovým součtem.

Jedním z častých problémů s testováním dané teorie v experimentálním prostředí je také skutečnost, že hráči v těchto situacích nejsou se hrou z časových důvodů dostatečně seznámeni a nemají tedy dané strategie patřičně vžité a ozkoušené. Tyto poznatky poukazují na to, že pro další zkoumání je klíčové na-

¹ Například v basketbalu při trestném hodu je nejméně úspěšnější technikou hod spodem [5]. Tato technika však není profesionálními hráči téměř využívána, protože dle jejich názoru vypadá značně zženštilé a hráči se tak uchylují k tradičnímu hodu vrchem.

jít situace z reálného života, kde jsou účastníci her skutečnými experty v dané problematice a zároveň je možné danou herní situaci dostatečně omezit nebo zjednodušit, aby byl zamezen vliv okolní a výsledky bylo možné správně interpretovat.

Ve strategických situacích je jedním ze základních a nutných předpokladů pro efektivní rozhodování schopnost jedince být ve svém chování nepředvídatelný vůči svým oponentům. Von Neumannův teorém minimaxu a principy Nashova smíšeného ekvilibria pracují s předpokladem, že hráči jsou, za účelem maximalizace svého zisku, schopni provádět své herní akce nezávisle a s určitou pravděpodobností [9]. V této práci je poukázáno na analýzy dat z profesionálního sportu, kde se díky omezení dané hry na jeden typ situací neprojevují výše zmíněné nedostatky při aplikaci poznatků z teorie her na situace z reálného světa.

Empirická analýza strategií ve sportu je problematická především z důvodu velkého počtu strategií, které mají hráči k dispozici a také z nejasného ohodnocení užitků jejich akcí, kdy se výsledek určitého rozhodnutí může projevit až za dlouhou dobu po vykonání akce a samotné ohodnocení dané volby je tak problematické.

Ignacio Palacios-Huerta toto ve své práci [10] řeší výrazným omezením hry (sportu) na jasně definovanou podmnožinu této hry, kdy jsou blíže zkoumány situace z jednotahových, her s nulovým součtem hranými vždy dvěma hráči, kde oba hráči svůj tah hrají současně. Jelikož se jedná o data z profesionálního sportu, lze uvažovat, že hráči jsou dobře seznámeni s herními strategiemi a jsou ve svém oboru experty a lze tudíž předpokládat, že jejich volba strategie by neměla odporovat ekvilibriu dané hry. Předpokládáme tedy relativně vysokou míru racionality (alespoň při porovnání s běžnou populací), jelikož profesionální sportovci jsou vysoce motivovaní k dosažení co nejlepšího výsledku.

Analýza dat popsána v této práci poukazuje na to, že profesionální hráči fotbalu jsou skutečně schopni hrát v souladu s herním ekvilibriem, což je poměrně překvapivý výsledek, jelikož prokázání této skutečnosti bylo v situacích z reálného světa dosud obtížné.

Rozdělení kapitol v této práci je následující. Ve druhé kapitole (2) je popsána hra samotná, tedy pravidla penaltových kopů a situace kdy je týmu pokutový kop přidělen. Je zde také položen teoretický základ pro smíšené strategie pro tuto hru a jsou zde popsány implikace von Neumannova teorému. V kapitole 3 jsou pak popsána data, která byla použita pro ověření těchto předpokladů. Blíže se zde také nahlíží na pravděpodobnosti vstřelení gólu pro jednotlivé

strategie. V kapitole 4 jsou rozebrány statistické metody použité pro ověření rovnosti šancí na vstřelení gólu vzhledem k jednotlivým strategiím a testování nezávislosti při volbě strategií. Ve stejné kapitole zde také popsány výsledky těchto testů. Kapitola 5 pak obsahuje diskusi nad naměřenými výsledky, je zde také zvažováno několik faktorů, které mohly naměřené výsledky ovlivnit. Nalezené poznatky jsou shrnuty v kapitole 6.

2. Smíšené strategie u pokutových kopů

Pokutový kop nařizuje rozhodčí v případech, kdy se hráč dopustí přestupku proti pravidlům hry v době, kdy je míč v pokutovém území. Těmito přestupky může být:

- Kopnutí nebo úder soupeře
- Podražení soupeře
- Vražení nebo skočení na soupeře
- Úder nebo strčení do soupeře
- Držení soupeře
- Plivnutí na soupeře
- Úmyslné zahrání míče rukou

Obecně se tedy jedná o situace s nepřiměřeným využitím síly, využití zákroku který je v rozporu s pravidly nebo prohřešku proti etice sportu. V těchto případech je hra pozastavena a je nařízen pokutový kop, který probíhá následovně: Hráč z týmu proti kterém byl použit nedovolený zákrok je zvolen a míč je umístěn na pokutovou značku (ta je vzdálena 11m od brankové čáry). Brankář se poté postaví na brankovou čáru a hráči vyčkávají na povel rozhodčího. Ten po překontrolování postavení hráčů dá pokyn ke hře píšťalkou a hráč kopající penaltu vykopne míč. Brankář smí opustit brankovou čáru po dotyku balónu a jeho snahou je zabránit vstřelení gólu.

Z popisu penaltového kopu je zřejmá návaznost na zjednodušenou hru dvou hráčů, kde je výsledek ihned zřejmý. Průměrná střela míče při penaltě trvá (od výkopu po bránu) asi 0,3 sekundy [10] a tento čas je tedy příliš krátký na to, aby brankář čekal na výkop. Vzhledem k rychlosti střely a určité reakční prodlevě je brankář nucen volit směr pohybu dopředu. Hráči tedy volí své akce současně a zároveň není možné penaltu opakovat.

V profesionálním fotbale se brankář vždy postaví doprostřed brankové čáry. Ačkoliv by teoreticky bylo možné pro brankáře postavit se blíže k jedné z tyčí a pak předpokládat (donutit), že kopající hráč zvolí opačnou stranu, není tato strategie v profesionálních

hrách používána, protože vzniklý nekrytý prostor je jednoduše příliš velký pro pokrytí a kopající hráč by tak měl snadnou střelu k tyči bez možnosti brankáře zasáhnout.

Jelikož je situace pokutového kopu izolovaná a jasně definovaná, je velmi podobná teoretickým hrám z teorie her. Další výhodou je, že padlý nebo ubráněný gól lze jasně vztahovat k zisku ze hry a také fakt, že hráči jsou ve hře experty a neznalost hry a herních strategií tak neovlivňuje volbu jejich strategie.

Pro matematický zápis hry lze uvažovat, že zisk ze hry pro hráče je definován jako jeho šance na úspěch (gól pro kopajícího, ubránění pro brankáře) při volbě strategie, kde kopající hráč se přirozeně snaží maximalizovat šanci padnutí gólu a brankář se ji snaží minimalizovat. Teoretický model hry tak lze zapsat maticí (tabulka 1) s rozměry 2×2 , kde π_{ij} značí šanci kopajícího hráče na vstřelení branky. Index i zde značí volbu strany kopajícího hráče a j zde značí volbu strany brankáře ($i, j \in \{L, R\}$, kde L značí levou stranu a R pravou stranu).

K\B	L	R
L	π_{LL}	π_{LR}
R	π_{RL}	π_{RR}

Tabulka 1. Herní matice. K označuje kopajícího hráče, B brankáře.

Tato hra má unikátní Nashovo ekvilibrium, pokud je splněno:

$$\pi_{LR} > \pi_{LL} < \pi_{RL},$$

$$\pi_{RL} > \pi_{RR} < \pi_{LR}.$$

Pokud jsme schopni danou hru reprezentovat tímto modelem, pak budou hráči pro maximalizaci svých zisků využívat smíšenou strategii. Von Neumannův teorém pak udává dvě podmínky, které Ignacio Palacios-Huerta [10] ověřuje analýzou dat:

1. Pravděpodobnost úspěšně vstřeleného gólu (úspěšně chyceného pro brankáře) by měla být rovna u všech strategií pro každého hráče. Necht' g_L značí pravděpodobnost, že brankář zvolí levou stranu brány. Pravděpodobnost volby pravé strany bude pak $1 - g_L$. Pravděpodobnost g_L by dále měla splňovat $p_L^k = p_R^k$, kde

$$p_L^k = g_L \pi_{LL} + (1 - g_L) \pi_{LR},$$

$$p_R^k = g_L \pi_{RL} + (1 - g_L) \pi_{RR}.$$

Podobný vztah je předpokládán i u kopajícího hráče, kde jeho pravděpodobnost kopu nalevo k_L by

měl být zvolen tak, aby byly šance brankáře na úspěch rovny pro strategie, $p_L^g = p_R^g$, kde

$$p_L^g = k_L(1 - \pi_{LL}) + (1 - k_L)(1 - \pi_{RL}),$$

$$p_R^g = k_L(1 - \pi_{LR}) + (1 - k_L)(1 - \pi_{RR}).$$

2. Volby obou z hráčů musí být vzájemně nezávislé. Hráči tedy nesmí při výběru strategie brát v potaz předchozí volby, nebo předchozí volby protihráčů.

3. Data

Palacios-Huerta [10][11] pro ověření výše stanovených předpokladů nashromáždil data ze záznamů fotbalových utkání, kde televizní stanice z Velké Británie, Spojených států amerických, Španělska a Itálie shromáždí uží přehled statistik z proběhlých zápasů, včetně informací o pokutových kopech. Celkem se dataset skládá z informací o 1417 pokutových kopech, které proběhly v utkáních mezi roky 1995 a 2000. Dataset samotný obsahuje informace týmech hrajících zápas, jménu hráče kopajícího penaltu, jméno brankáře, čas penalty, výsledek penalty, stranu kopu hráče a stranu bráněnou brankářem (doleva, doprostřed, doprava) a nohu kterou hráč kopal. Pokud gól nebyl vstřelen, je střela kategorizována podle důvodu nevstřelení gólu (chyceno brankářem, tyč, břevno, mimo bránu).

Z dat (tabulka 2) je patrné, že hráči volí střelbu doprostřed velmi výjimečně, brankáři pak střed nebrání téměř vůbec. Je taky patrné, že kromě střelby na střed mají nejvyšší šanci na úspěch dle očekávání strategie LR a RL, tedy situace, kdy brankář skočí na opačnou stranu než kam letí střelený balón.

Z dat taky zjevné, že brankář zvolí stejnou stranu jako kopající hráč v přibližně polovině případů, pravou stranu (RR) volí oba v 27.6 % případů, na levé straně (LL) se potkají v 19.6 % případů.

V tabulce 3 jsou informace o strategiích s hráči rozdělenými podle nohy kterou penaltu kopou. Přirozeně každá skupina hráčů má jednu stranu silnější než druhou. Leváci kopou častěji na brankářovu levou stranu, praváci pak naopak. Pro další analýzu jsou jednotlivé kopy shrnuty dle kopání přirozenou nohou a nepřirozenou nohou. Pravák kopající doleva bude tedy považován za ekvivalentní akci jako levák kopající doprava, pravák kopající doprava pak bude ekvivalentní s levákem kopajícím doleva.

4. Analýza dat

Jelikož ne všichni hráči jsou v datech reprezentováni s dostatečným počtem penaltových kopů, byly empirické testy provedeny pouze u hráčů s 30 a více

	Celkem	LL	LC	LR	CL	CC	CR	RL	RC	RR
Penalty:	1417	19.6	0.9	21.9	3.6	0.3	3.6	21.7	0.5	27.6
Úspěšnost:	80.1	55.2	100.0	94.2	94.1	50.0	82.3	96.4	100.0	71.1

Tabulka 2. Ukázka datasetu. Sloupce označují strategie hráčů, kde první písmeno značí stranu kopajícího hráče a druhé písmeno stranu brankáře. Údaje v druhém řádku pak udávají procentuální podíl dané kombinace. Třetí řádek pak udává procentuální úspěšnost dané strategie.

Kopající levou										
	Celkem	LL	LC	LR	CL	CC	CR	RL	RC	RR
Penalty:	406	29.3	1.4	20.4	4.4	0.0	3.9	23.8	0.0	16.5
Úspěšnost:	80.1	62.1	100.0	95.1	94.4	0.0	81.2	93.8	0.0	61.2
Kopající pravou										
	Celkem	LL	LC	LR	CL	CC	CR	RL	RC	RR
Penalty:	1011	15.8	0.6	22.5	3.2	0.5	3.4	20.8	0.6	32.1
Úspěšnost:	79.8	50.0	100.0	93.8	93.9	60.0	82.8	97.6	100.0	73.2

Tabulka 3. Distribuce strategií pro hráče kopající levou a pravou nohou.

zaznamenanými penaltami. Celkem se jedná o 22 kopajících hráčů a 20 brankářů s dostatečným počtem dat.

Jelikož se hráči dělí dle kopající nohy, je nutné pro zjednodušení výpočtů přeznačit jejich strategie dle hraní na přirozenou a nepřirozenou stranu. Písmeno R necht' značí silnou stranu kopajícího hráče a L značí slabou stranu hráče. Díky tomuto přeznačení hraje brankář stejnou hru nezávisle na kopajícím hráči a oba si tak volí strategii podle silné (R) a slabé (L) strany.

Z dat je patrné, že ve valné většině případů si hráči volí jednu ze stran (93.8 % pro kopající, 98.9 % pro brankáře) a volba středu je výjimkou. Pro zjednodušení výpočtu je strategie C počítána jako vola přirozené strany (R). Toto je z důvodu, hráči při střele do středu brány vždy provádí kop vnitřní stranou nohy, stejně jako u kopu R a sami jej tedy považují za kop na silnější stranu.

Jak již bylo zmíněno v kapitole 2, pro otestování teorie ekvilibria je nutné ověřit dvě podmínky: (1) pravděpodobnost výhry by měla být stejné u všech strategií obou hráčů a (2) volby hráčů musí být nezávislé na předchozích akcích nebo jiných okolnostech.

Šance na padnutí gólu pro všechny hráče jsou znázorněny v tabulce 4, kde g_L a k_L značí nepřirozené strany kopajícího hráče a brankáře. Smíšené Nashovo ekvilibrium vypočítané nad těmito empirickými hodnotami a pravděpodobnosti naměřené v datech jsou

pak zobrazeny v tabulce 5.

	g_L	$1 - g_L$
k_L	π_{LL}	π_{LR}
$1 - k_L$	π_{RL}	π_{RR}

Tabulka 4. Šance na vstřelení gólu.

Při srovnání je patrné, že předpokládané frekvence se nápadně podobají frekvencím naměřeným na skutečných datech.

4.1 Testování rovnosti šancí na vstřelení gólu

Pro splnění předpokladů stanovených von Neumannovým teorémem je nutné, aby se šance na vstřelení gólu rovnaly pro obě zvolené strategie (L, R). Test nulové (testované) hypotézy, která tvrdí, že pravděpodobnost vstřelení gólu je pro kopajícího hráče a pro brankáře identická napříč jednotlivými strategiemi, byl proveden pomocí Pearsonova χ^2 testu. Palacios-Huerta [10] tuto hypotézu testoval jak pro jednotlivé hráče zvlášť, tak pro agregovaná data. Výsledky ukázaly, že při zkoumání jednotlivých hráčů nebyla pro většinu z nich hypotéza odmítnuta. Ze 42 hráčů (22 kopajících, 20 brankářů) byla hypotéza zamítnuta pro tři hráče s hladinou statistické významnosti 5 %, konkrétně pro dva kopající hráče a pro jednoho brankáře. Při analýze agregovaných hodnot bylo dokázáno, že hypotéza nemůže být zamítnuta. Důsledek těchto

	$g_L(\%)$	$1 - g_L(\%)$	$k_L(\%)$	$1 - k_L(\%)$
Předpokládané frekvence:	41.99	58.01	38.54	61.46
Naměřené frekvence:	42.31	57.69	39.98	60.02

Tabulka 5. Srovnání naměřených a očekávaných frekvencí.

nálezů je, že výsledky jsou konsistentní s první hypotézou strategie Minimax.

4.2 Testování nezávislosti při volbě akce

Druhou hypotézou strategie Minimax je nezávislost při volbě strany. Je nutné, aby hráči nebrali v potaz své předchozí rozhodnutí nebo rozhodnutí soupeře. Jak bylo dokázáno v mnoha studiích [6][12][13][7][3], lidé mají výrazný problém s generováním skutečně náhodných rozložení a hypotéza, že lidé jsou schopni nezávislé náhodné volby byla těmito studiemi zavřena. Lidé ve zkoumaných scénářích se snažili příliš často svou volbu měnit, aby se výsledná sekvence jevila náhodná a výjimečně vytvářely posloupnosti bez delší změny volby.

Nicméně bylo prokázáno, že lidé jsou schopni se naučit hrát skutečně náhodné volby po několika hodinách trénování [8]. Je tedy možné, že fotbalisté kteří se této hře věnují dlouhodobě a jsou ve svém oboru experty budou schopni volit dostatečně nezávisle.

Nezávislost voleb strategií byla ověřena dle poznatků z [4]. Nad sérií voleb jednotlivých hráčů byla definována *posloupnost* jako počet za sebou jdoucích stejných voleb. Nad počtem a délkou těchto posloupností pak byla statisticky ověřena náhodnost. Výsledky ukázaly, že nulová hypotéza nemůže být zamítnuta a hráči se tak skutečně rozhodují nezávisle. Ze 42 hráčů byla hypotéza zamítnuta pro dva hráče (jednoho brankáře a jednoho kopajícího hráče) pro hladinu statistické významnosti 5 %.

5. Diskuse

Empirické testy nad daty ze zápasů z nejvyšších fotbalových lig poukazuje na to, že hráči při penaltových kopech hrají v souladu s ekvilibriem. Výsledek je jeden z mála případů, kdy se podařilo tuto skutečnost prokázat nad daty ze skutečného světa. Ojedinelost tohoto výsledku může být dána tím, že hráči v experimentech nejsou s hrou dostatečně seznámeni a nemají strategie dostatečně zažitě. Naproti tomu hráči profesionálních fotbalových lig se této problematice věnují celý život a jejich potenciální zisk (včetně platového ohodnocení) je skutečně vysoký a naučit se hrát optimálně je pro ně tedy kritické. Tato implikace může fungovat i v opačném směru. Je možné, že při výběru

hráčů do nejvyšších lig jsou kritéria tak přísná, že jsou vybráni pouze hráči, kteří jsou přirozeně schopni hrát v souladu s herním ekvilibriem.

Především schopnost volit své akce nezávisle je přinejmenším pozoruhodná. Je možné, že určitá nezávislost byla dosažena tím, že hráči málokdy kopou pokutové kopu v krátkém časovém období. Například u hráče, který během pěti let střílel 50 pokutových kopů, může v průměru mezi kopy uběhnout několik týdnů i měsíců. Zdánlivá nezávislost volby může tak být způsobená skutečnou časovou nezávislostí samotného jevu a v případě, že by hráči měli kopat penalty ihned po sobě by se projevíly nedostatky. Dle Palacios-Huerta [10] však neexistují studie, které by dopodrobna zkoumaly vliv časové prodlevy na náhodnost volby strategie ve hrách s nulovým součtem. Na druhou stranu pro schopnosti hráčů svědčí fakt, že profesionální týmy si vedou statistiky o svých hráčích a o hráčích ostatních týmů a tato data jsou hráčům k dispozici. Časová prodleva by tak neměla hrát velkou roli, protože hráči si mohou data ověřit před každým zápasem.

Vliv časové prodlevy Palacios-Huerta snaží ověřit v navazujících studiích, kde zkoumá tento jev při pokutových kopech v penaltových rozstřelech, tedy v situaci, kdy v turnaji končí zápas remízou v běžném čase a je zapotřebí určit vítěze penaltovým rozstřelem. Časová prodleva je v těchto případech přirozeně minimální a neměla by tak hrát roli. Výsledky z navazujících studií jsou však v souladu s doposud nalezenými fakty, tedy že hráči hrají v souladu s ekvilibriem a volí své strategie nezávisle.

6. Závěr

Zatímco principy teorie her se staly nedílnou součástí mnoha vědních oborů, prokázání těchto principů empirickými testy pokulhává za jejich teoretickou znalostí. V této práci je podrobněji nahlédnuto na tyto principy v kontextu penaltových kopů ve fotbale. Analýza Palacios-Huerta [10] se zabývá ověřením dvou předpokladů hry v ekvilibriu, tedy že (1) šance na vítězství by měly být statisticky stejné pro jednotlivé strategie hráčů; (2) hráči jsou schopni skutečně náhodně a nezávisle generovat sekvence svých herních rozhodnutí. Statistické testy tyto fakty prokázaly

s dostatečnou přesností a teorém tak můžeme pro tuto hru považovat za platný.

Literatura

- [1] BROWN, J. N. a ROSENTHAL, R. W. Testing the Minimax Hypothesis: A Re-Examination of O'Neill's Game Experiment. *Econometrica*. [Wiley, Econometric Society]. 1990, roč. 58, č. 5, s. 1065–1081. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/2938300>. ISSN 00129682, 14680262.
- [2] CAMERER, C., HO, T. a CHONG, K. Models of Thinking, Learning, and Teaching in Games. *American Economic Review*. May 2003, roč. 93, č. 2, s. 192–195. Dostupné z: <http://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/000282803321947038>.
- [3] CAMERER, C. F. a THALER, R. H. Anomalies: Ultimatums, dictators and manners. *Journal of Economic perspectives*. 1995, roč. 9, č. 2, s. 209–219.
- [4] GIBBONS, J. D. a CHAKRABORTI, S. *Nonparametric statistical inference*. Springer, 2011.
- [5] MADHUSUDHAN VENKADESAN, L. M. *Optimal strategies for throwing accurately*. 2010. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1008.1442>.
- [6] MAYA BAR HILLEL, W. A. W. *The perception of randomness*. 1991. Dostupné z: [https://doi.org/10.1016/0196-8858\(91\)90029-I](https://doi.org/10.1016/0196-8858(91)90029-I).
- [7] MOOKHERJEE, D. a SOPHER, B. Learning behavior in an experimental matching pennies game. *Games and Economic Behavior*. Elsevier. 1994, roč. 7, č. 1, s. 62–91.
- [8] NEURINGER, A. Can people behave "randomly?": The role of feedback. *Journal of Experimental psychology: general*. American Psychological Association. 1986, roč. 115, č. 1, s. 62.
- [9] OSBORNE, M. J. a RUBINSTEIN, A. *A course in game theory*. Cambridge, USA: The MIT Press, 1994. Electronic edition. ISBN 0-262-65040-1.
- [10] PALACIOS HUERTA, I. *Professionals Play Minimax*. 2003.
- [11] PALACIOS HUERTA, I. a VOLIJ, O. Experimentia Docet: Professionals Play Minimax in Laboratory Experiments. *Econometrica*. [Wiley, Econometric Society]. 2008, roč. 76, č. 1, s. 71–115. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/4502054>. ISSN 00129682, 14680262.
- [12] RAPOPORT, A. a BOEBEL, R. B. Mixed strategies in strictly competitive games: A further test of the minimax hypothesis. *Games and Economic Behavior*. April 1992, roč. 4, č. 2, s. 261–283. Dostupné z: <https://ideas.repec.org/a/eee/gamebe/v4y1992i2p261-283.html>.
- [13] RAPOPORT, A. a BUDESCU, D. V. Generation of random series in two-person strictly competitive games. *Journal of Experimental Psychology: General*. American Psychological Association. 1992, roč. 121, č. 3, s. 352.