

Teoretická informatika (TIN) – 2019/2020

Úkol 3

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Pomocí počátečních funkcí a operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze vyjádřete funkci počítající odmocninu (zaokrouhlenou dolů na celá čísla):

$$\text{sqrt} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{sqrt}(x) = z \text{ takové, že } z^2 \leq x \wedge (z+1)^2 > x.$$

Je možné použít funkce $\text{plus}(x, y)$, $\text{mult}(x, y)$, $\text{monus}(x, y)$ a $\text{eq}(x, y)$ definované v přednáškách. Kromě nich však nepoužívejte žádné další funkce zavedené na přednáškách mimo funkce počáteční. Nepoužívejte zjednodušenou syntaxi zápisu funkcí – dodržte přesně definiční tvar operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze.

15 bodů

2. Mějme následující funkce:

$$f(n) = \sqrt{2}n^3$$

$$g(n) = 10000n^2 + 500n + 211.$$

Dokažte, že $O(g(n)) \subset O(f(n))$.

Pozn.: Nezapomeňte, že důkaz má dvě části: (i) $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$ a (ii) $O(g(n)) \neq O(f(n))$

10 bodů

3. Teta Květa stojí před regálem se zeleninou a nehýbá se, protože má těžký rozhodovací problém. Potřebuje sníst co nejvíce vitamínu C, aby ji přešla chřipka. Každý druh zeleniny je charakteristický obsahem vitamínu C na kilo a cenou za kilo. Teta se snaží přijít na to, jestli je možné nakoupit zeleninu za obnos O v její peněženke tak, aby úhrn vitamínu C byl alespoň C . Kromě toho s každým kilem zeleniny přidá zelinář deset deka brokolice zdarma, s obsahem B vitamínu C na kilo.

Formulujte problém tety Květy jako rozhodovací problém, a dokažte, že je NP-úplný. Těžkost dokažte redukcí z některého problému uvedeného v odstavci „NP-complete problems“ zde:

https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete_problems

Z dálky na tetu volá synovec Alan, ať nezoufá, že to vyřeší za chvíli (t.j., v polynomiálním čase), pomocí jakéhosi psacího stroje vlastní výroby s nekonečnou páskou. Co to znamená pro lidstvo?

15 bodů

4. Modelujte následující kritický systém Petriho sítí. Namalujte ji a zapište formálně ve shodě s definicí.

Převozník chce převést z jednoho břehu na druhý hlávku zelí, kozu a vlka. Do loďky s sebou může vzít buď zelí, nebo kozu, nebo vlka, ale víc se tam nevejde. Nechá-li na břehu hlávku zelí a kozu, koza zelí sežere. Nechá-li na břehu kozu a vlka, pak vlk sežere kozu. Jakým způsobem musí převozník postupovat, aby nedošlo k žádné škodě?

Snažte se o přehlednost a pochopitelnost modelu. Místa vhodně pojmenujte a síť nakreslete přehledně.

(příklad ze sbírky úloh Alkuina z Yorku, Úlohy k bystření mladíků, z roku cca 735-804)

10 bodů