Numeryczne rozwiązywanie równania Poissona

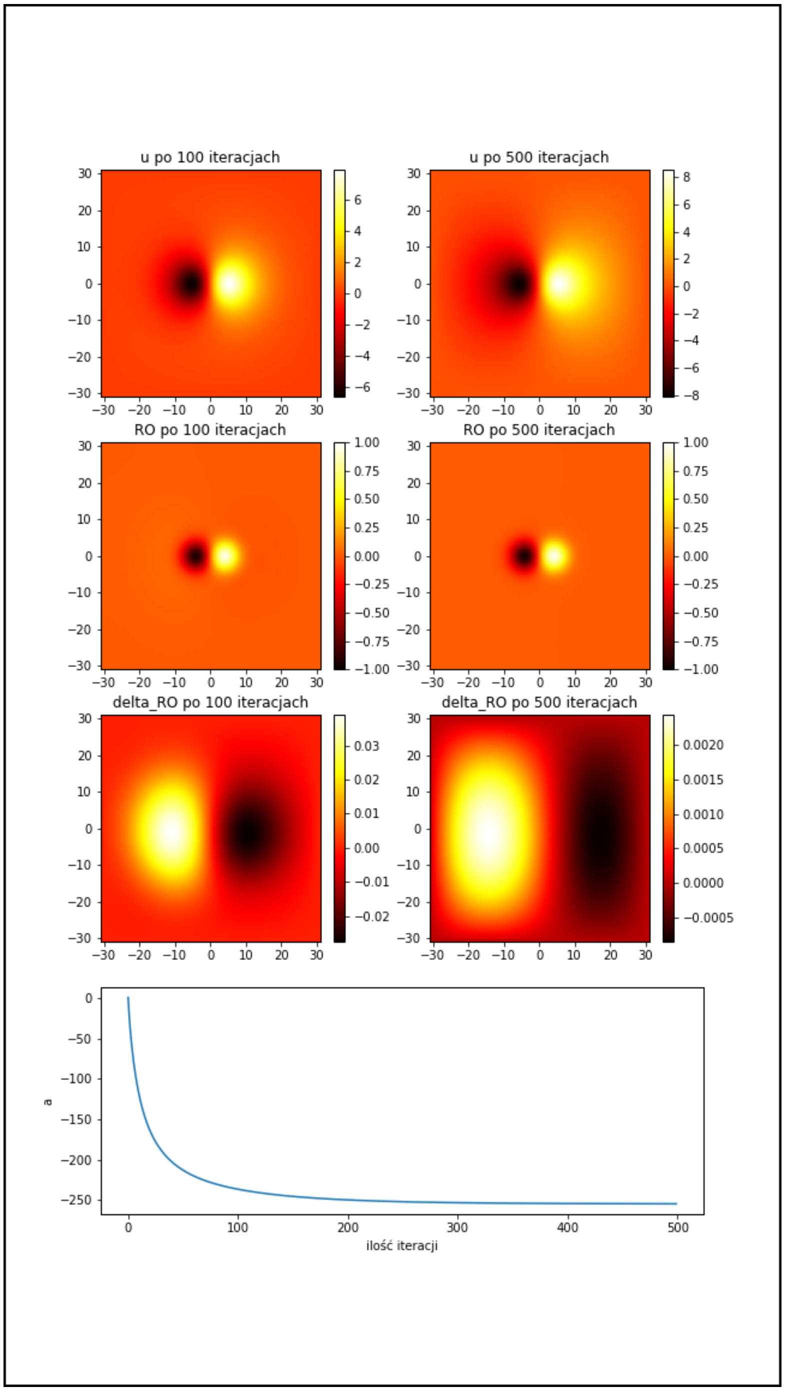
1. Metoda relaksacji

Celem tej części projektu było roziwązanie równania Poissona metodą relaksacji przy danej gęstości ładunku :

$$\rho = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2+y^2}{d^2}\right) - \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2+y^2}{d^2}\right) \tag{1}$$

- $x_0 = 4$
- $d = 4$

Układ umieszczony jest w uziemionym pudle. Pracujemy na siatce [-31,...,31]×[-31,...,31]. Jako warunek początkowy przyjmujemy $u = 1$ dla (x, y) $\in$ [-15,...,15]×[-15,...,15] i $u = 0$ dla reszty pudła. Wyniki po 100 i 500 iteracjach przedstawiono na poniższych wykresach:

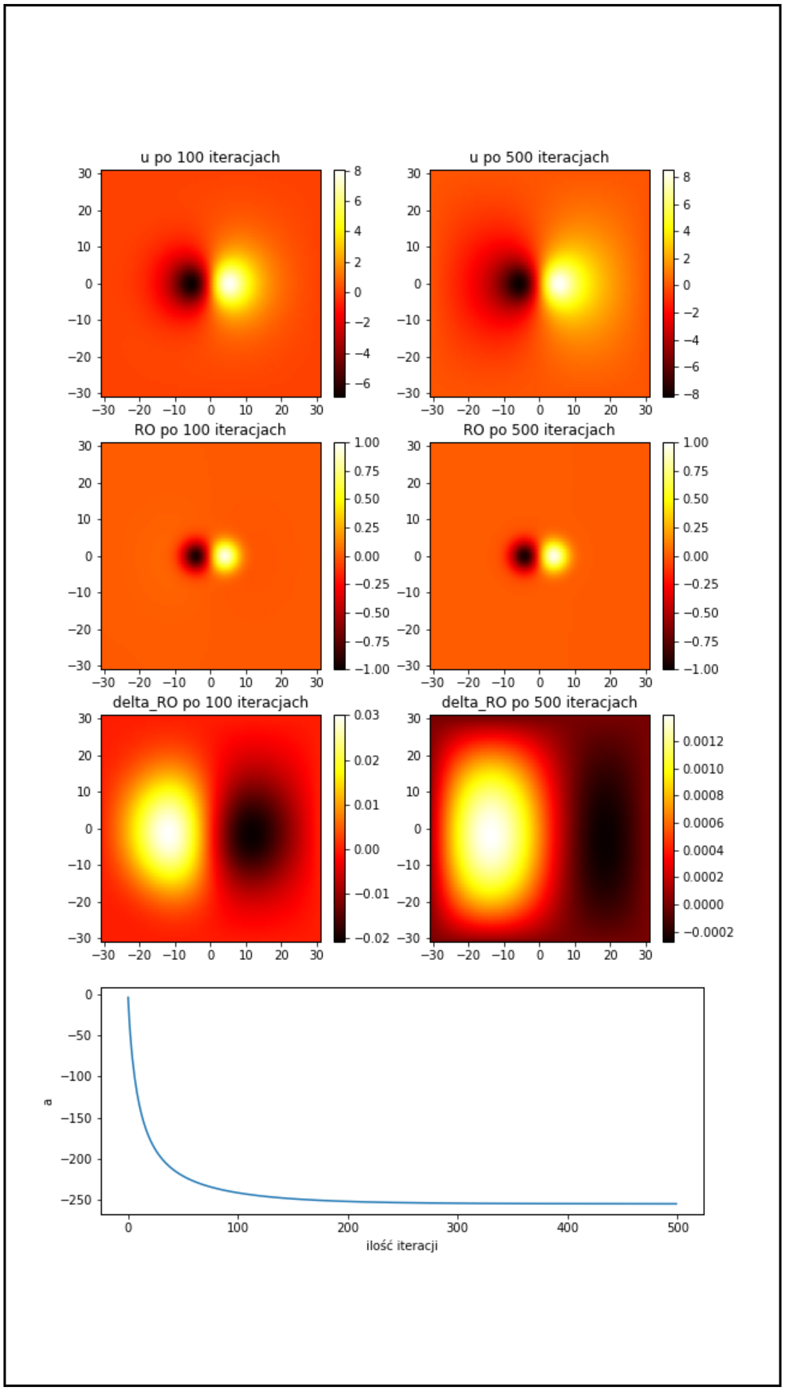


Rysunek 1. Wyniki metody relaksacji

Widać, że 100 iteracji to nie wystarczająco, żeby otrzymać poprawne rozwiązanie. Potencjał jeszcze nie zdążył się ustalić. Widzimy też, że przy tej metodzie błąd jest gładki.

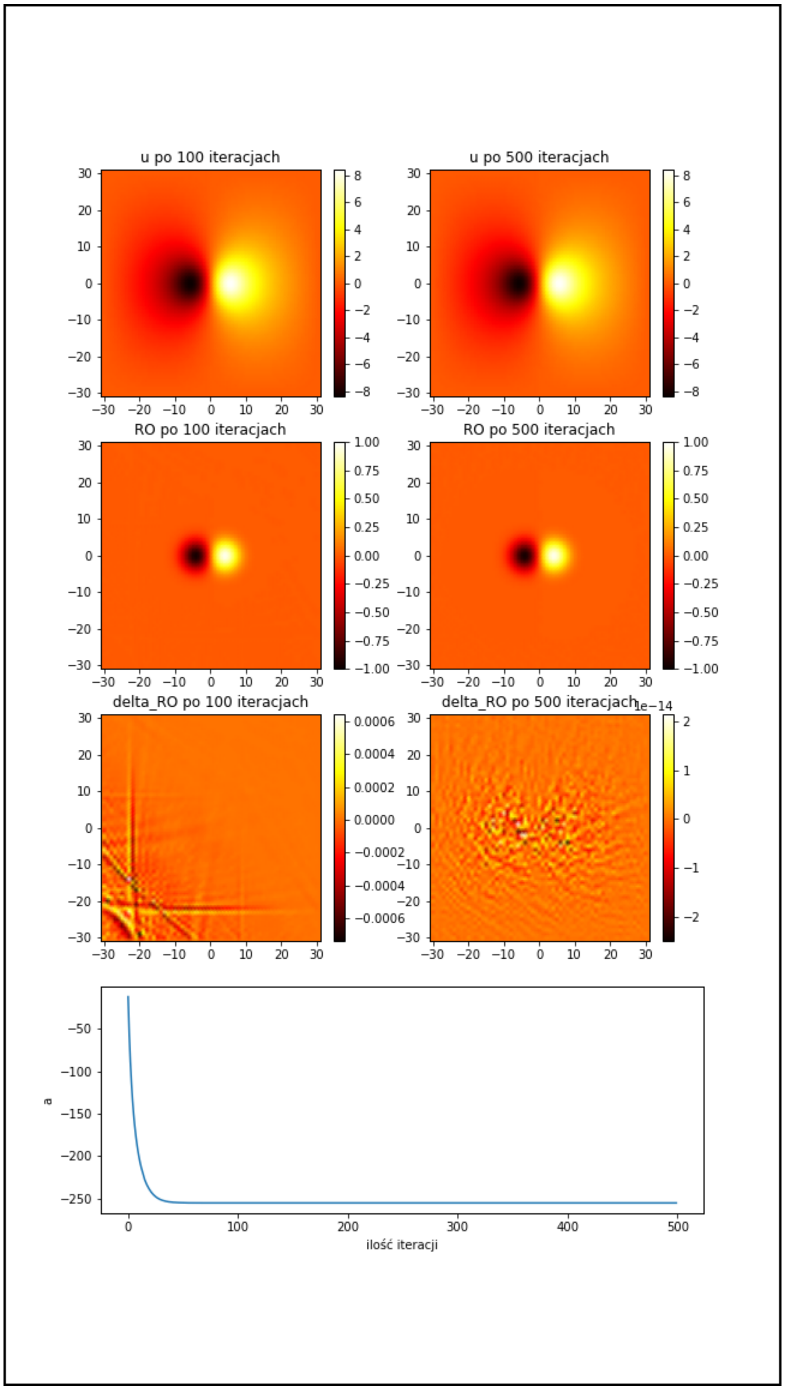
2. Metoda nadrelaksacji

W drugiej części projektu rozwiązano ten sam projekt metodą nadrelaskacji dla wartości ω równych 1.1 i 1.9. Wyniki przedstawiono na wykresach:



Rysunek 2. Wyniki metody nadrelaksacji dla $\omega = 1.1$

Przy tej metodzie rozwiązanie szybciej zbiega do ustalonej metody niż w metodzie relaksacji. Dla tej wartości ω różnica jest niewielka i 100 iteracji to wciąż nie wystarczająco. Błąd również wciąż jest gładki ale jego wartości są nieco mniejsze.

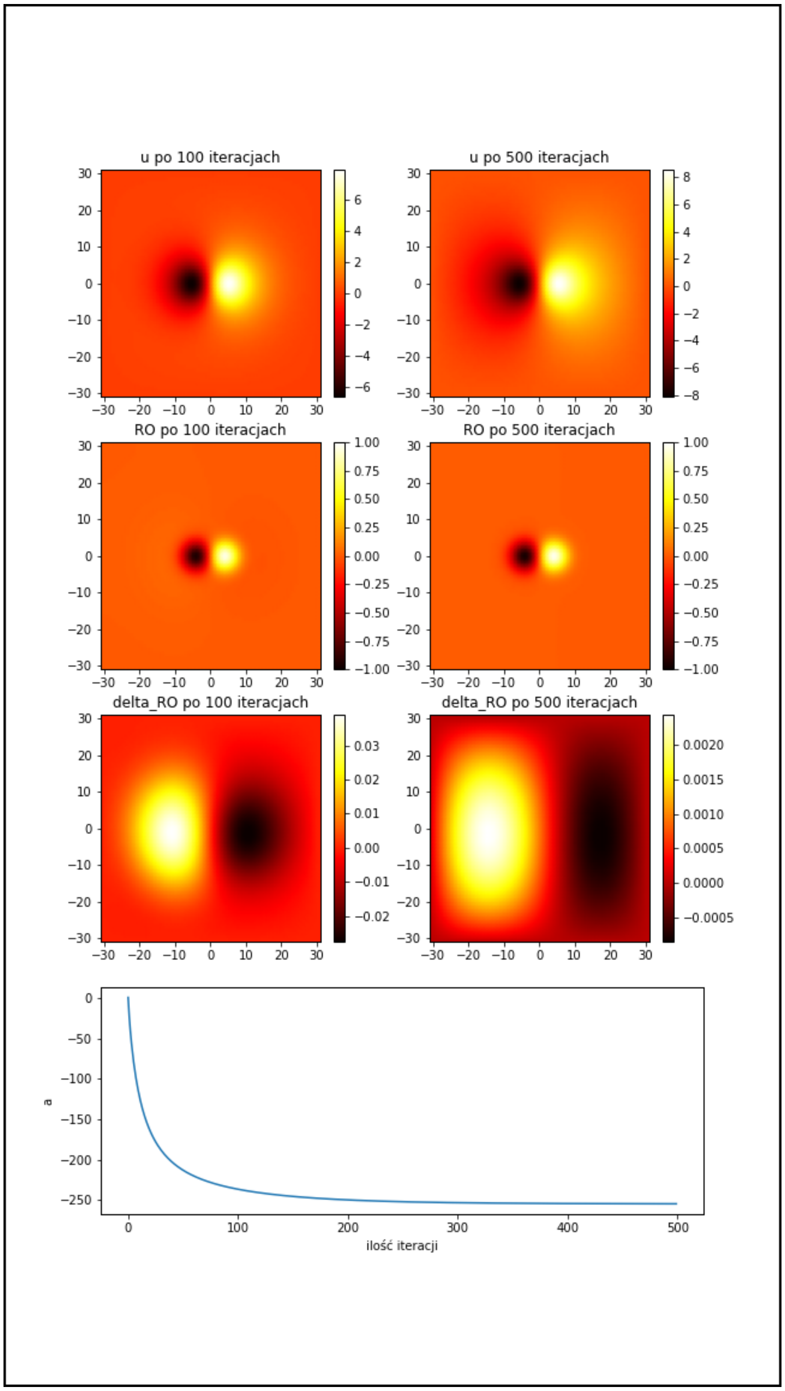


Rysunek 3. Wyniki metody nadrelaksacji dla $\omega = 1.9$

Przy takiej wartości ω rozwiązanie zbiega do ustalonej wartośći dużo szybciej niż w metodzie relaksacji. Potencjał jest ustalony już po 100 iteracjach, a nawet jeszcze wcześniej. W odróżnieniu od poprzednich przypadków tutaj błąd nie jest gładki i jego wartości są owiele mniejsze.

3. Metoda minimalizacji działania

Ta metoda polegała na lokalnym zmienianiu wartości potencjału o małą wartość w każdym punkcie pudła, tak żeby całkowita wartość działania po takiej zmianie malała. W jednej iteracji poprawiony zostaje każdy punkt w pudle. Otrzymano wymiki:

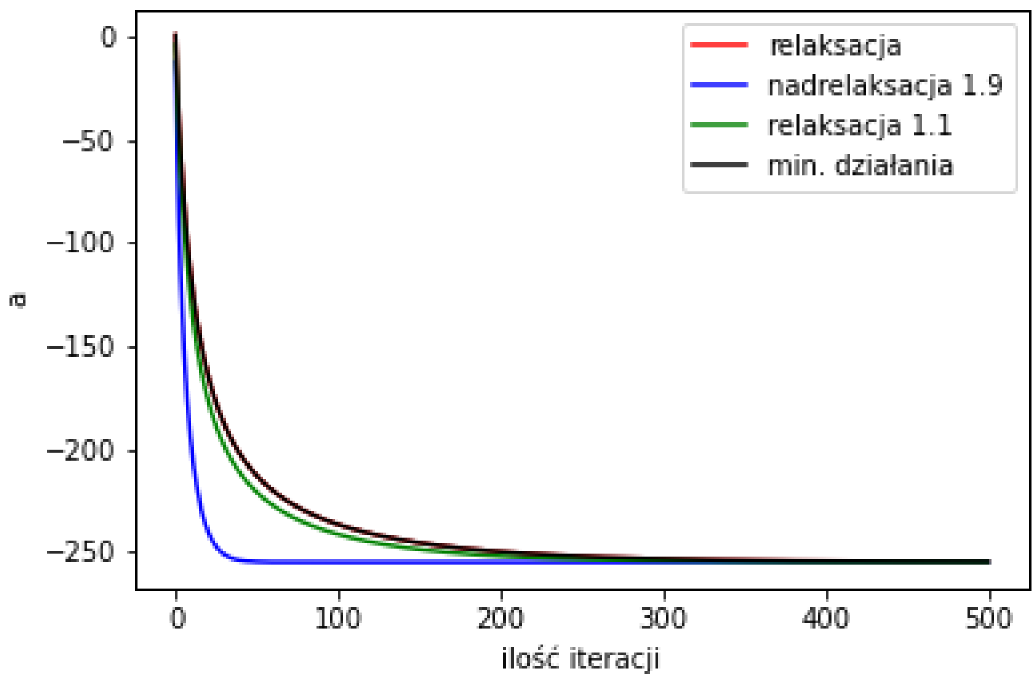


Rysunek 4. Wyniki metody minimalizacji działania

Widzimy, że wynik zbiega do poprawnego rozwiązania w tempie podobnym do metody relaksacji. Po 100 iteracjach potencjał wciąż się nie ustalił. Błąd przy tej metodzie również jest gładki i ma taką wartość jak w metodzie relaksacji.

4. Porównanie zbieżności wszystkich metod

Na poniższym wykresie przedstawiono zależność działania od ilości iteracji dla wszystkich metod



Rysunek 5. Porównanie zbieżności wszystkich metod

Widać, że metody relaksacji i minimalizacji działania zbiegają w tym samym tempie. Metoda nadrelaksacji dla $\omega = 1.1$ zbiega troche szybciej od dwóch poprzednich, natomiast metoda nadrelaksacji dla $\omega = 1.9$ zbiega znacznie szybciej niż wszystkie pozostałe metody.