

# Metody Numeryczne - Aproksymacja profilu wysokościowego

Jakub Bronowski, 193208

gr. 2, sem. IV

## Spis treści

1. Wstęp .....	2
2. Opis metod .....	2
3. Dane wejściowe .....	3
4. Wyniki interpolacji metodą Lagrange’a dla równoodległych węzłów .....	4
5. Wyniki interpolacji metodą Lagrange’a dla węzłów Czebyszewa .....	8
6. Wyniki interpolacji metodą funkcji sklepanych .....	12
7. Podsumowanie .....	16

# 1. Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie i analiza jakościowa trzech metod interpolacji: dwóch metod Lagrange'a z punktami rozmieszczonymi równomiernie, węzłami Czebyszewa oraz metody funkcji sklepanych (dla równomiernie rozmieszczonych punktów). Analiza jakościowa miała zostać zrealizowana przez interpolację profili wysokościowych wybranych tras. W projekcie przeprowadzono testy dla czterech różnych zbiorów danych wybranych ze zbioru danych umieszczonych na stronie kursu eNauzanie. Wyniki przedstawiono w postaci wykresów. W projekcie porównano również wpływ ilości węzłów na jakość interpolacji jak również wpływ rozmieszczenia węzłów w przypadku metody Lagrange'a.

Projekt zaimplementowano głównie w języku C++ (Visual Studio). Zaimplementowano faktoryzację LU z pivotingiem do rozwiązania układu równań dla metody funkcji sklepanych (zmodyfikowano kod z Projektu nr 2) oraz metody interpolacji według wytycznych z wykładu. Do generowania wykresów wykorzystano język Python z biblioteką matplotlib.

## 2. Opis metod

### 2.1. Metoda Lagrange'a dla równoodległych węzłów

Metoda Lagrange'a pozwala na obliczenie wielomianu stopnia  $n$  na podstawie  $n+1$  węzłów. Jest to jedna z najprostszych metod interpolacji, niewymagająca dużo pracy przy implementacji. Wynik interpolacji Lagrange'a jest taki sam jak wynik metody Vandermonde'a. Jej zaletą jest brak konieczności rozwiązywania układu równań, stabilność numeryczna oraz prostota implementacji.

Metoda Lagrange'a opiera się na bazie funkcji wielomianowych tworzonych zgodnie ze wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a składa się z funkcji z bazy pomnożonych przez wartości funkcji w węzłach. Wzór na wielomian interpolacyjny Lagrange'a wygląda następująco:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \phi_i(x)$$

Pomimo swoich zalet, metoda Lagrange'a posiada poważną wadę, mianowicie podatność efekt Rungego (oscylacje wielomianu interpolacyjnego w okolicach krańców przedziału interpolacji). W celu zminimalizowania tego efektu można zastosować interpolację w węzłach Czebyszewa. W projekcie porównano jakość interpolacji z ich zastosowaniem w stosunku do równoodległych węzłów. Węzły Czebyszewa na przedziale  $[a, b]$  wznoszano ze wzoru:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2k}\pi\right), k = 1, \dots, n$$

a następnie szukano w dziedzinie obliczeniowej najbliższych węzłów do tych wartości.

### 2.2. Metoda funkcji sklepanych

Metoda funkcji sklepanych polega na wyznaczeniu wielomianu stałego stopnia na każdym z przedziałów między węzłami. Wielomian tworzy się tak, aby były ciągłe oraz, żeby ich pochodne pierwszego i drugiego rzędu były ciągłe. W projekcie zaimplementowano interpolację funkcjami sklepanymi stopnia 3 zdefiniowane jako:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Metoda funkcji sklepanych pozwala na wyznaczenie współczynników  $a_i, b_i, c_i, d_i$  dla każdego z przedziałów poprzez rozwiązanie układu równań. W projekcie do rozwiązania układu równań wykorzystano faktoryzację LU. Metoda funkcji sklepanych jest bardziej skomplikowana niż metoda Lagrange'a, ale pozwala na uzyskanie lepszych wyników. Jest też odporna na efekt Rungego.

Układ równań do rozwiązania dla metody funkcji sklepanych można zapisać jako:

$$S_i(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n - 1 \text{ Wartość funkcji w węzłach}$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = 0, \dots, n - 1 \text{ Ciągłość funkcji w węzłach}$$

$$S''_0(x_0) = 0 \text{ Zerowanie drugiej pochodnej w punkcie początkowym}$$

$$S''_{n-1}(x_n) = 0 \text{ Zerowanie drugiej pochodnej w punkcie końcowym}$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), i = 1, \dots, n - 1 \text{ Zerowanie pierwszej pochodnej w punktach}$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i), i = 1, \dots, n - 1 \text{ Zerowanie drugiej pochodnej w punktach}$$

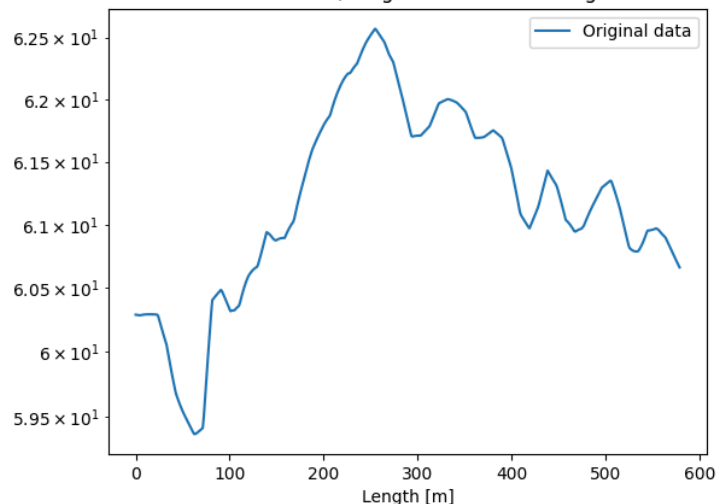
### 3. Dane wejściowe

W projekcie przeprowadzono testy dla czterech różnych zbiorów danych. Wszystkie zbiory danych zawierają 512 punktów.

- chelm.txt - dane o niewielkiej zmienności wysokości nieprzekraczającej 10 m
- stale.txt - dane pokazujące stały wzrost przypominający łagodne zbocze górskie
- hel\_yeah.txt - dane o bardzo gwałtownie zmieniającej się wysokości między kolejnymi punktami
- tczew\_starogard.txt - dane o wzroście wysokości z dużymi oscylacjami miejscowymi

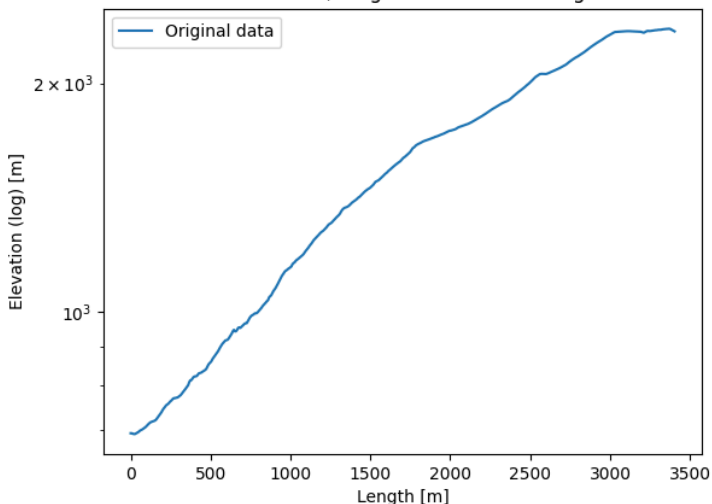
Poniżej przedstawiono wykresy dla każdego z nich.

'chelm' dataset, length vs elevation. Original



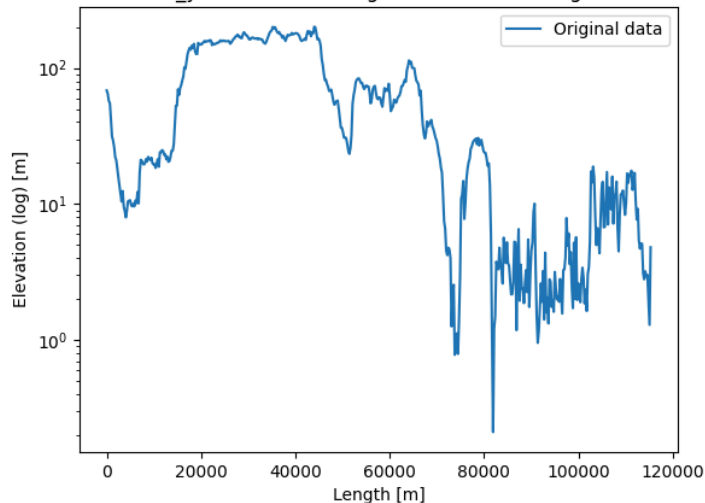
chelm.txt

'stale' dataset, length vs elevation. Original



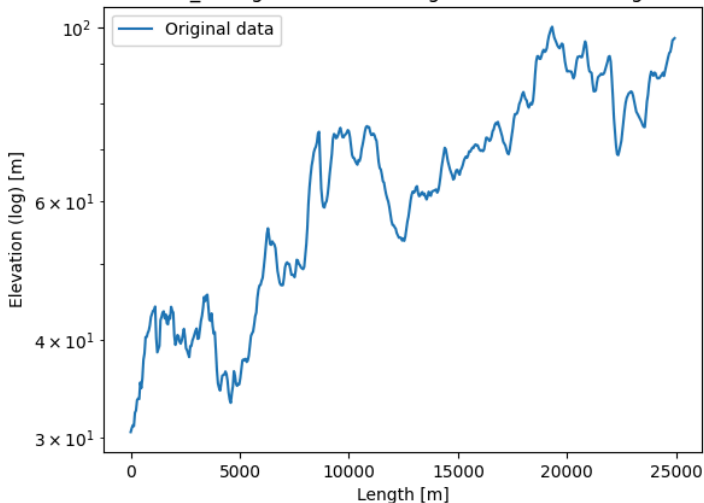
stale.txt

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Original



hel\_yeah.txt

'tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Original



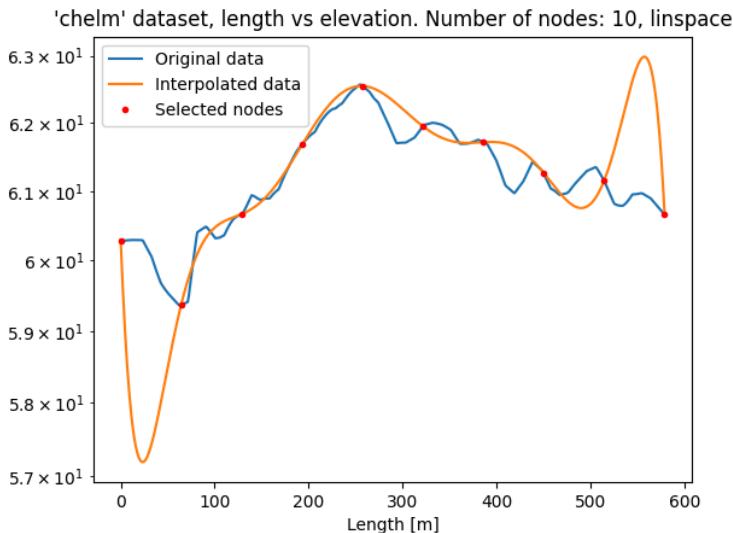
tczew\_starogard.txt

## 4. Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów

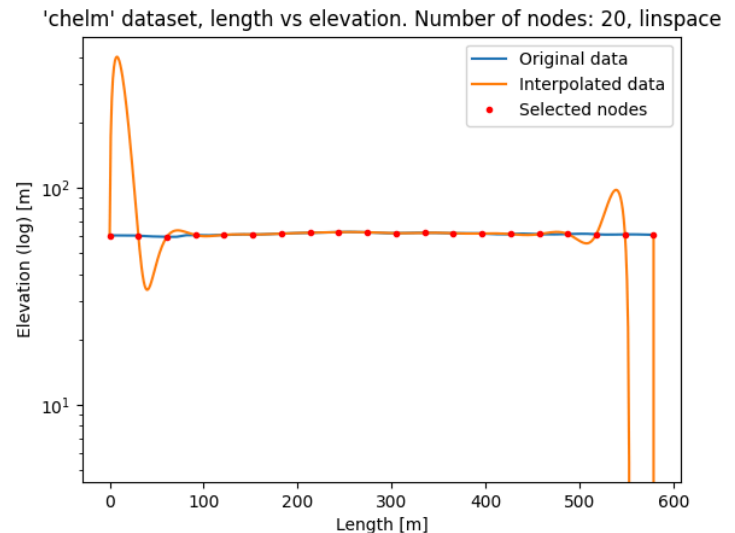
Dla każdego zbioru danych przeprowadzono interpolację metodą Lagrange'a dla 10, 20, 50, i 100 węzłów wejściowych. Wartości wybranych węzłów są rozmieszczone równomiernie. Liczba węzłów została dobrana tak, aby umożliwić wybranie z 512 punktów węzłów równoodległych.

Za pomocą interpolacji Lagrange'a obliczono wartości funkcji w 512 punktach. Poniżej przedstawiono wykresy interpolacji dla każdego zbioru danych.

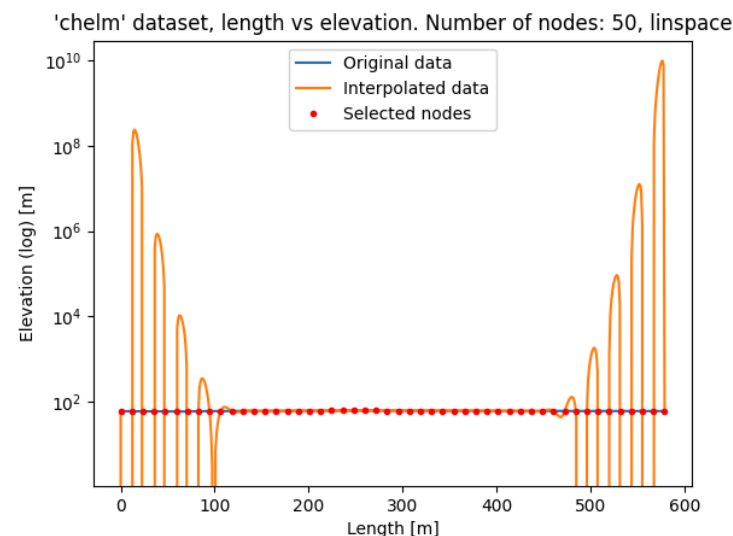
### 4.1. Interpolacja Lagrange'a (linspace) - chelm.txt



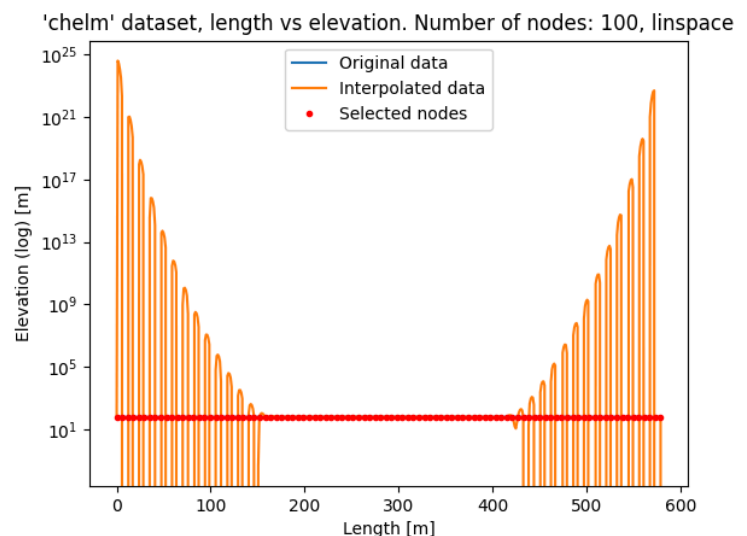
10 węzłów



20 węzłów



50 węzłów

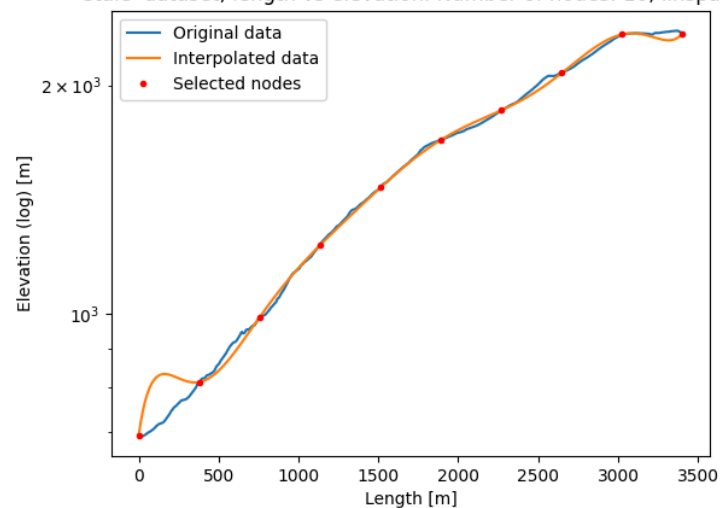


100 węzłów

Jak możemy zauważyć na powyższych wykresach, uzyskane wyniki interpolacji nie przybliżają dobrze oryginalnych danych. O ile dałoby się obronić interpolację 10 węzłami (z przymknięciem oka na krańce przedziału interpolacji) to dla 20 punktów nie ma takiej możliwości. Dokładność interpolacji zaburzona jest przez efekt Rungego. W okolicach krańców przedziału pojawiają się oscylacje wielomianu interpolacyjnego o co najmniej rząd wielkości. Dla 50 punktów amplituda drgań wielomianu interpolacyjnego jest olbrzymia, sięgająca nawet  $10^{10}$  na krańcach przedziału. Dla 100 węzłów tylko połowa środkowa część wykresu ma szansę być jakkolwiek aproksymowana. Lewe i prawe ćwiartki osiągają wartości sięgające  $10^{25}$ . Wniosek jest prosty: zastosowanie większej ilości węzłów tylko pogarsza jakość interpolacji, a im więcej węzłów tym większe zaburzenia spowodowane efektem Rungego.

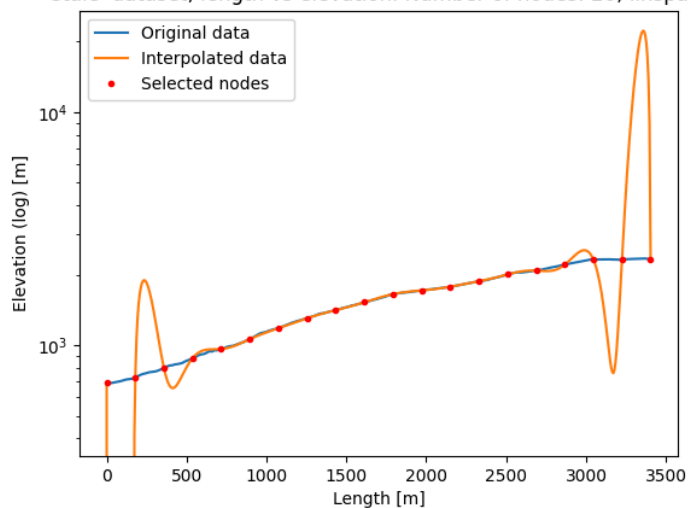
## 4.2. Interpolacja Lagrange'a (linspace) - stale.txt

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, linspace



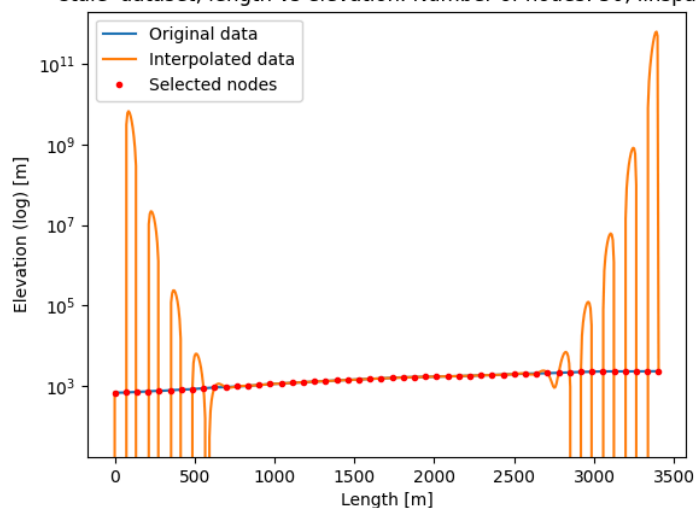
10 węzłów

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, linspace



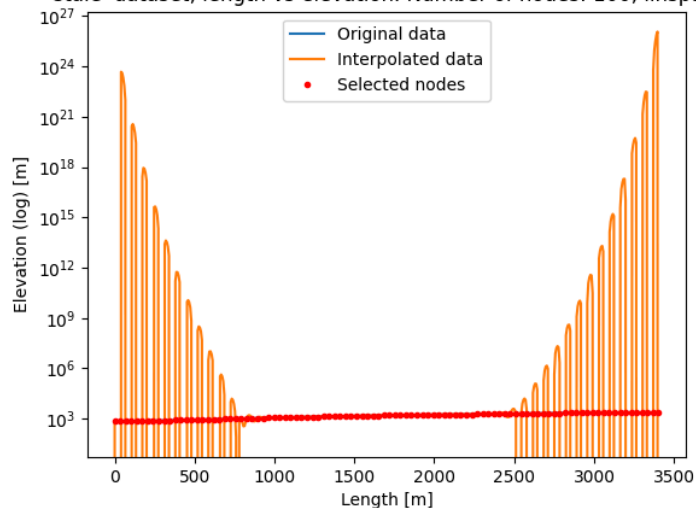
20 węzłów

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, linspace



50 węzłów

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, linspace

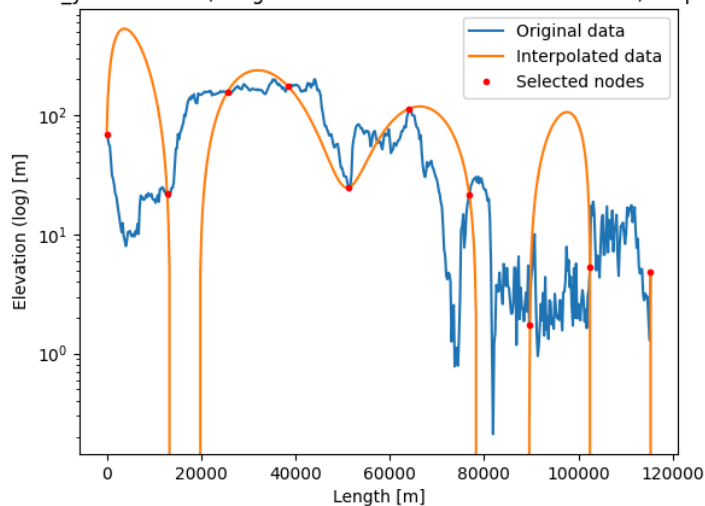


100 węzłów

Obserwując wykresy powstałe przy interpolacji danych z pliku `stale.txt` zauważamy, że wyniki interpolacji są bardzo zaburzone przez efekt Rungego. Występuje on już przy 10 węzłach. Już dla 20 węzłów widzimy duże odchylenie między punktami na skrajach wykresu. Użycie większej ilości węzłów tylko pogarsza wyniki. Widać wyraźnie, że nasila się efekt Rungego, czyli oscylacje wielomianu interpolacyjnego w okolicach krańców przedziału. Już przy 50 węzłach wynik interpolacji jest bardzo zaburzony i nie nadaje się do dalszych analiz. Warto nadmienić, że ze względu na specyfikę danych wejściowych wykres został zinterpolowany najlepiej dla małej ilości węzłów. Środkowa część wykresu przedstawiającego wyniki interpolacji dość dobrze pokrywa się z oryginalnym wykresem.

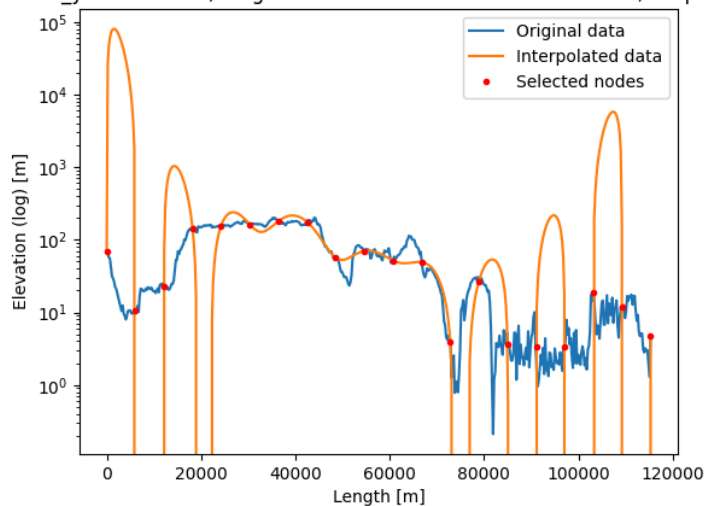
### 4.3. Interpolacja Lagrange'a (linspace) - hel\_yeah.txt

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, linspace



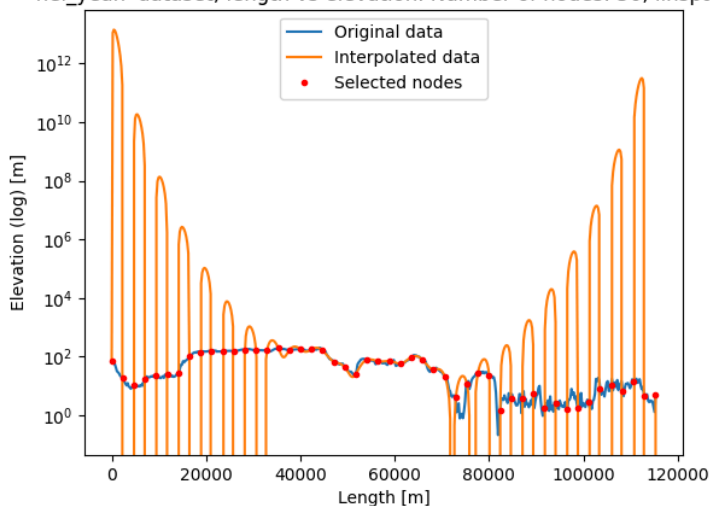
10 węzłów

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, linspace



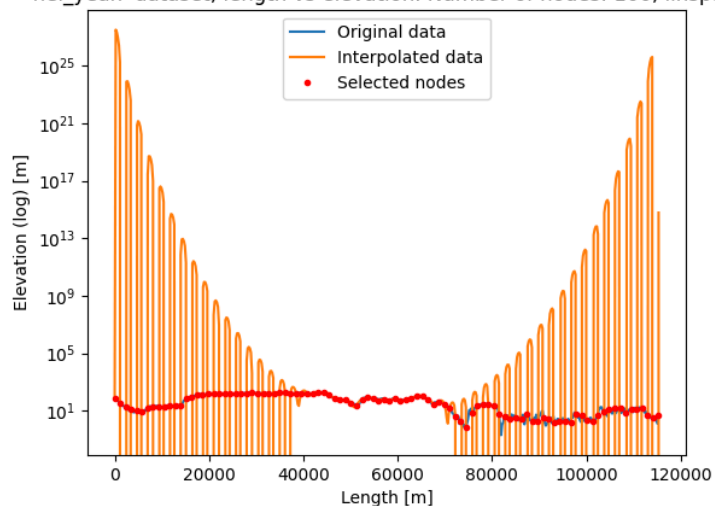
20 węzłów

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, linspace



50 węzłów

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, linspace

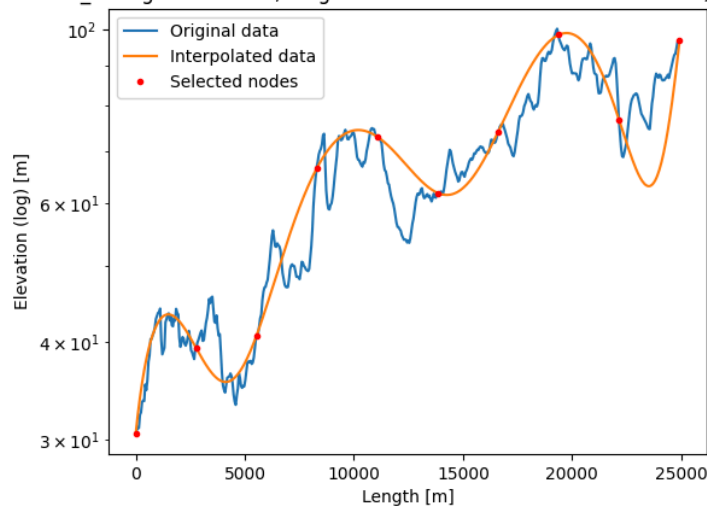


100 węzłów

Zestaw hel\_yeah okazał się za trudny dla metody Lagrange'a. Ponownie wyniki interpolacji są bardzo zaburzone przez efekt Rungego. Już dla 10 węzłów widzimy duże odchylenie między dwoma pierwszymi punktami. Użycie większej ilości węzłów tylko pogarsza wyniki. Widać wyraźnie, że nasila się efekt Rungego, czyli oscylacje wielomianu interpolacyjnego w okolicach krańców przedziału. Już przy 10 węzłach wynik interpolacji jest bardzo zaburzony. Żadna ilość węzłów nie była w stanie jakkolwiek dopasować się do oryginalnych danych.

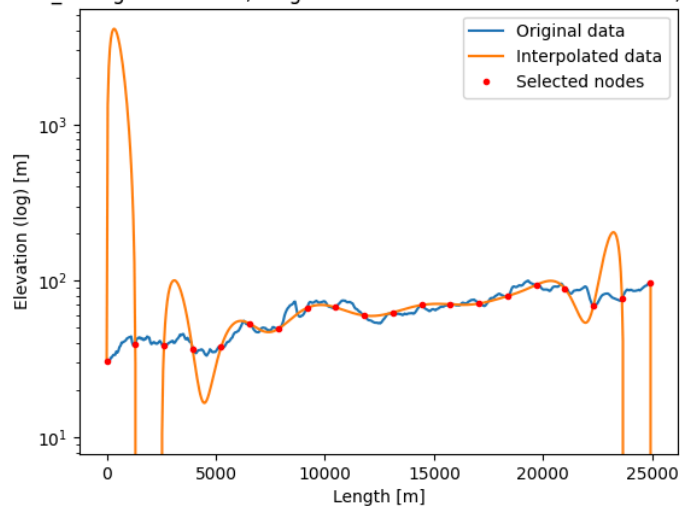
#### 4.4. Interpolacja Lagrange'a (linspace) - tczew\_starogard.txt

'tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, linspace



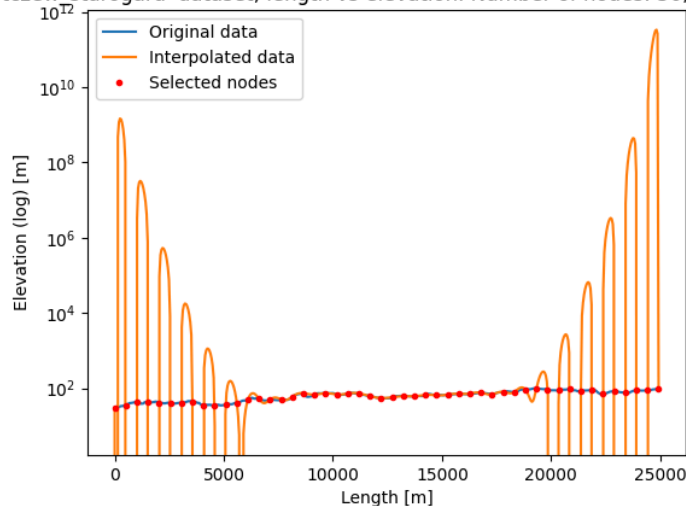
10 węzłów

'tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, linspace



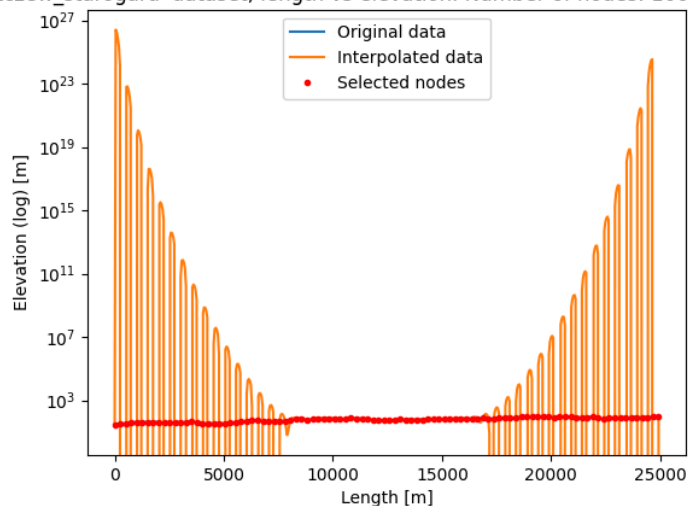
20 węzłów

'tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, linspace



50 węzłów

'tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, linspace



100 węzłów

Wyniki interpolacji dla tego zestawu również są silnie zaburzone przez efekt Rungego. Nawet dla 10 węzłów widzimy duże odchylenie między dwoma pierwszymi punktami. Użycie większej ilości węzłów tylko pogarsza wyniki. Efekt Rungego jest wyraźnie obserwowalny od 20 węzłów. Wykorzystanie 10 węzłów oddaje jednak ogólny trend trasy między Tczewem a Starogardem, choć z dużym błędem co do konkretnych wartości. Jednakże wielomian interpolacyjny wskazuje ogólne zmiany wysokości na odcinkach co 5000 m. Dla większej ilości węzłów nie widać żadnych podobieństw do oryginalnej trasy.

#### 4.5. Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów

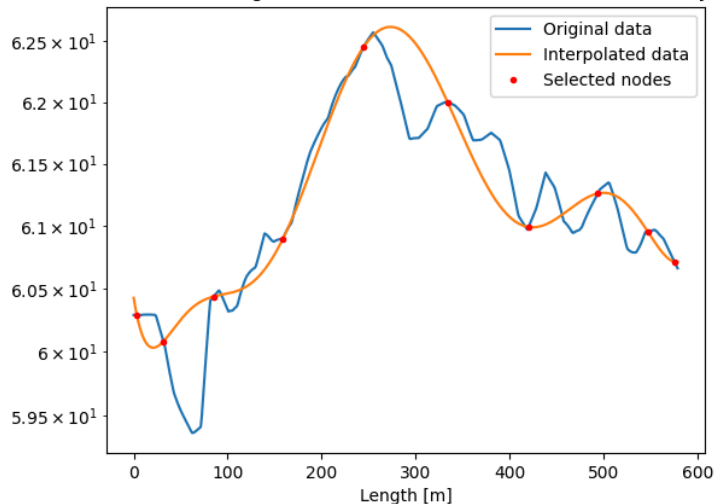
Jak można zauważyć, wyniki interpolacji metodą Lagrange'a nie spełniają oczekiwań. W ogólnym niepoprawnie interpolują każdą z badanych tras. W przypadku małej ilości węzłów (10) wyniki są mało dokładne, ale za to efekt Rungego jest słaby. Wraz ze wzrostem ilości węzłów, wyniki interpolacji pogarszają się znacząco. Widać wyraźnie, że nasila się efekt Rungego, czyli oscylacje wielomianu interpolacyjnego w okolicach krańców przedziału. Już przy 20 węzłach wynik interpolacji jest bardzo zaburzony a wyznaczony profil wysokościowy jest gorzej niż błędny. Jedyną względnie dobrą interpolacją okazała się być ta dla 10 węzłów dla danych z pliku `stałe.txt` (grzbiet bardzo bliski dodatnio nachylonej prostej - rzadki przypadek). Dla danych z pliku `tczew_starogard.txt` wykres interpolacji dla 10 węzłów oddaje ogólny trend trasy między Tczewem a Starogardem, choć z dużym błędem co do konkretnych wartości.

## 5. Wyniki interpolacji metodą Lagrange’a dla węzłów Czebyszewa

W celu zminimalizowania efektu Rungego zastosowano interpolację metodą Lagrange’a dla węzłów Czebyszewa. Z racji tego, że nie znamy danych wejściowych, nie jesteśmy w stanie idealnie dobrać węzłów Czebyszewa. W projekcie wybrano z węzłów wejściowych bez powtórzeń te, które są najbliższe “prawdziwych matematycznie” węzłów Czebyszewa.

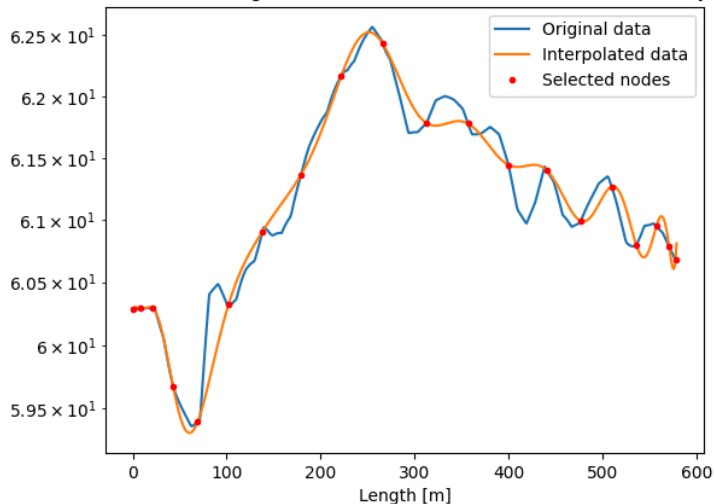
### 5.1. Interpolacja Lagrange’a (węzły Czebyszewa) - chelm.txt

'chelm' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, chebyshev



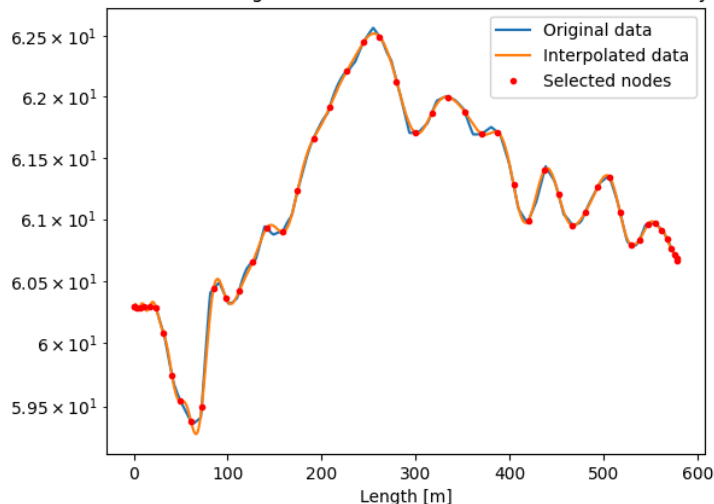
10 węzłów

'chelm' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, chebyshev



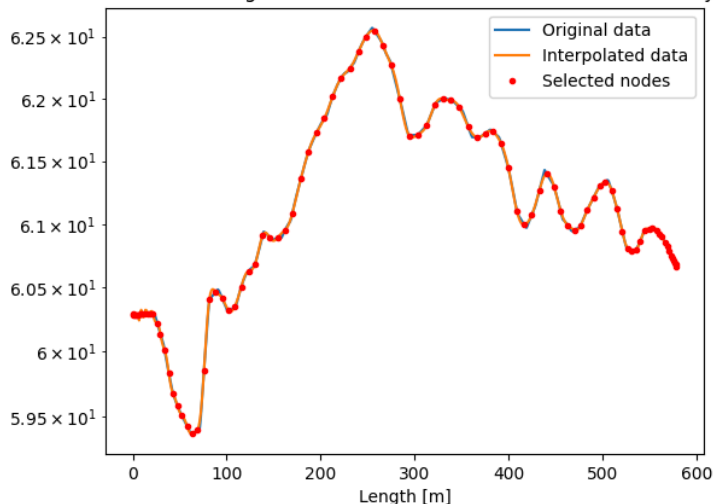
20 węzłów

'chelm' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, chebyshev



50 węzłów

'chelm' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, chebyshev



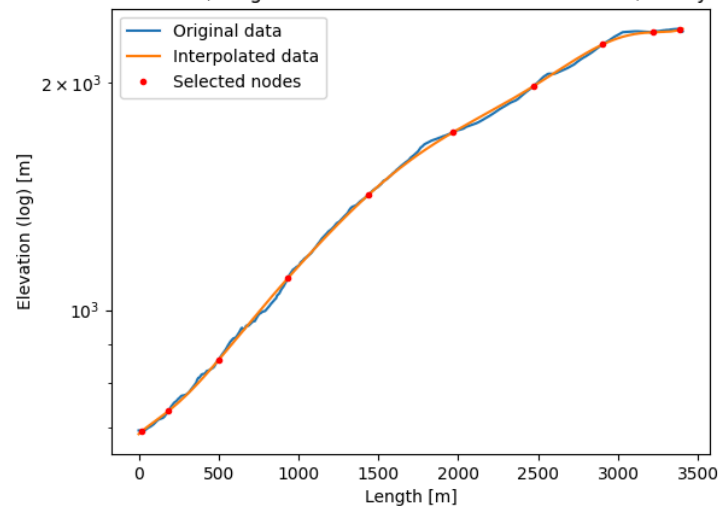
100 węzłów

Jak widać na powyższych wykresach, interpolacja metodą Lagrange’a dla węzłów Czebyszewa jest bardziej stabilna niż dla równoodległych węzłów. Zwiększenie ilości węzłów nie wpływa w tym przypadku negatywnie na wyniki. Wynik interpolacji jest dobry i pozwala na uzyskanie dokładnych wyników. Nawet użycie 100 węzłów nie powoduje wystąpienia efektu Rungego. Potencjalne zaburzenia związane z wyborem węzłów Czebyszewa nie są widoczne na wykresach o ilości węzłów nie mniejszej niż 50. Zwiększenie ilości węzłów stopniowo pozwala poprawić jakość interpolacji.



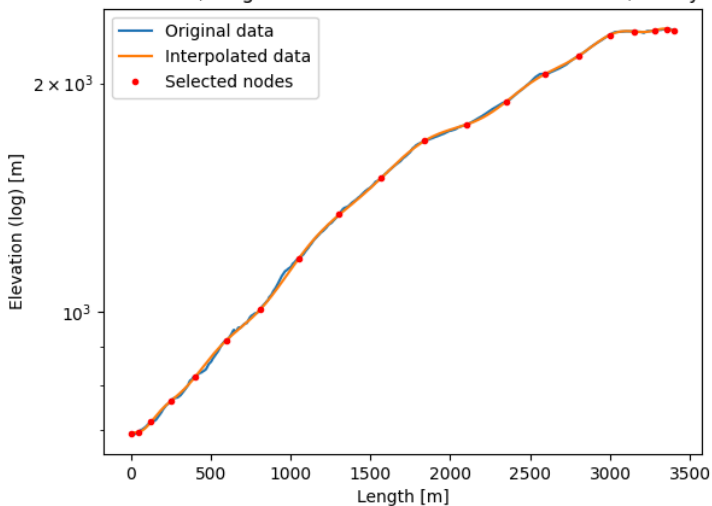
## 5.2. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - stale.txt

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, chebyshev



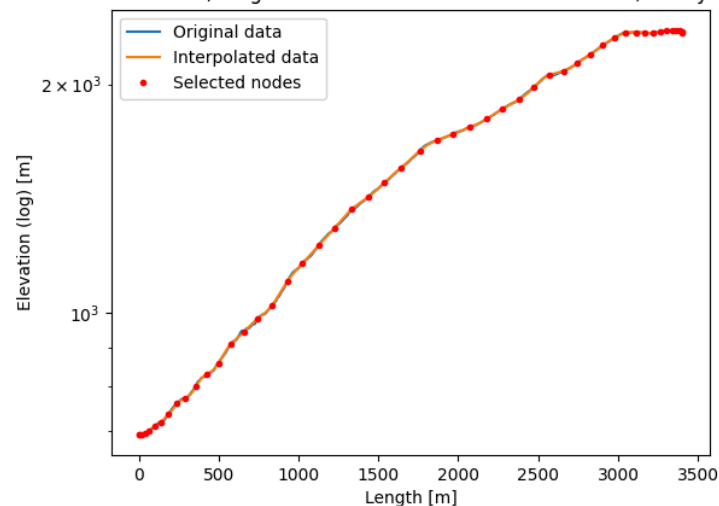
10 węzłów

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, chebyshev



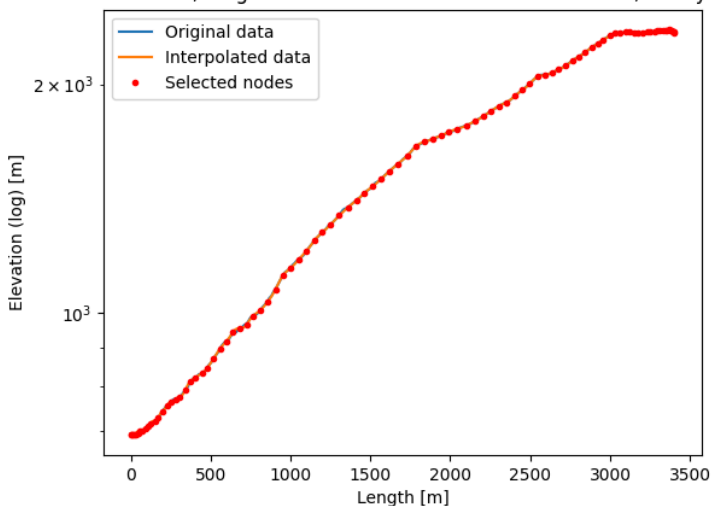
20 węzłów

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, chebyshev



50 węzłów

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, chebyshev

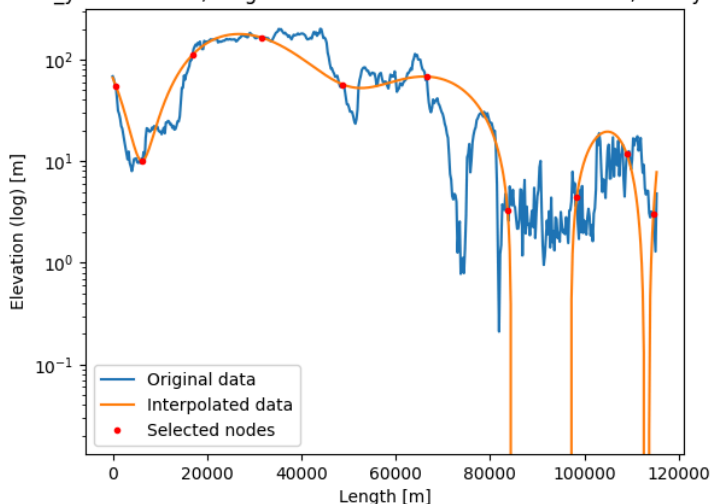


100 węzłów

Na tym zestawie danych obserwujemy ciekawą rzecz. Już dla 10 węzłów interpolacyjnych poziom dopasowania jest zadowalający. Dla ilości węzłów nie mniejszej niż 20 różnice pomiędzy kolejnymi próbami są niewielkie. Widać, że zwiększenie ilości węzłów nie wpływa negatywnie na wyniki, a wręcz przeciwnie. Wyniki interpolacji są bardzo dobre a obrana strategia pozwala na uzyskanie dokładnych wartości. Dla funkcji przypominających łagodne zbocze górskie interpolacja metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa jest bardzo skuteczna już dla 20 węzłów.

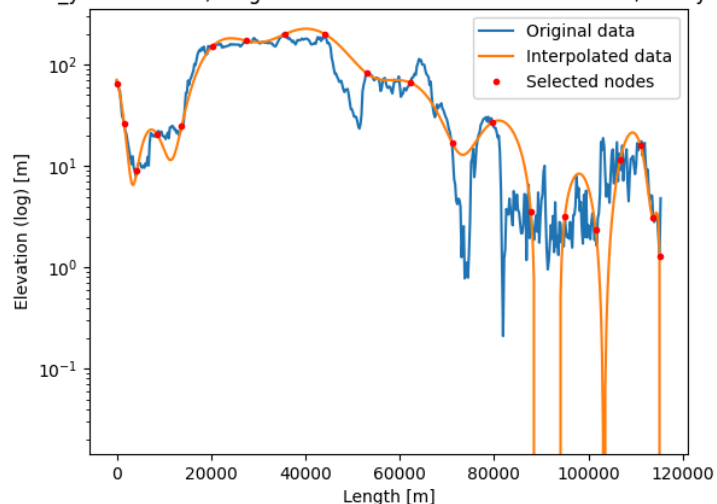
### 5.3. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - hel\_yeah.txt

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, chebyshev



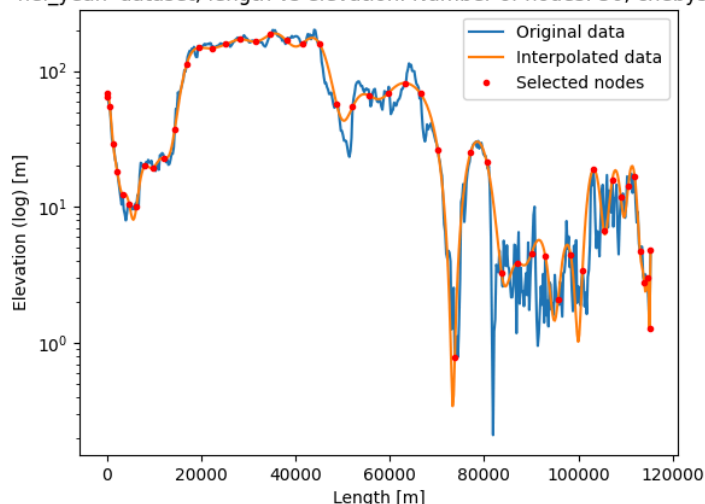
10 węzłów

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, chebyshev



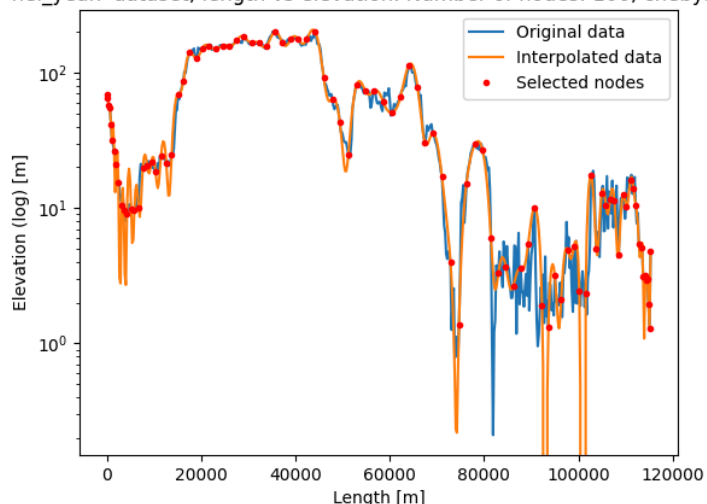
20 węzłów

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, chebyshev



50 węzłów

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, chebyshev

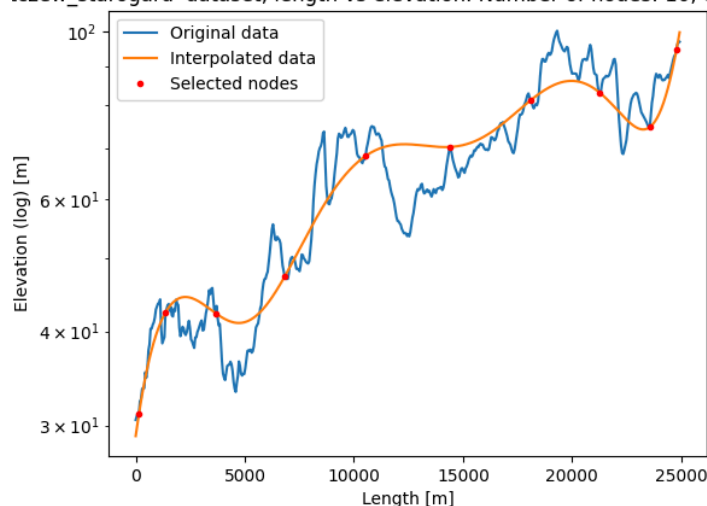


100 węzłów

W najtrudniejszym jak dotąd teście metoda interpolacji Lagrange'a z węzłami Czebyszewa nie odniosła całkowitej porażki. Faktem jest, że interpolacje jakkolwiek pokrywające się z oryginalnymi danymi uzyskano dopiero dla 50 węzłów. Dla 10 węzłów wyniki są bardzo zaburzone, z wielkim dołem w 75% szerokości wykresu. Rzeczone zjawisko występuje dla każdej z analizowanych ilości węzłów, choć wraz z przyrostem ilości węzłów doły są coraz płytsze i węższe. Efekt ten najsłabiej widać dla 50 węzłów, co jednak nie oznacza, że interpolacja ta jest idealna. Każda z metod nie radzi sobie dobrze w prawym krańcu dziedziny, gdzie obserwujemy bardzo gęste i gwałtowne zmiany wysokości w przedziale  $[10^0, 10^1]$  m.

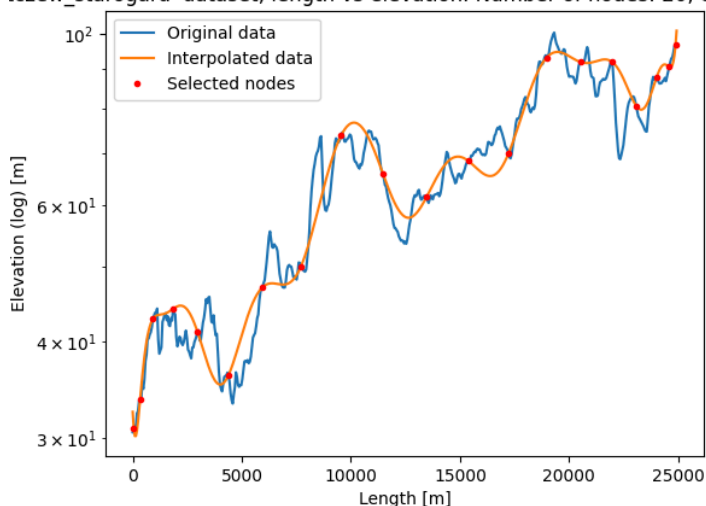
## 5.4. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - tczew\_starogard.txt

tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, chebyshev



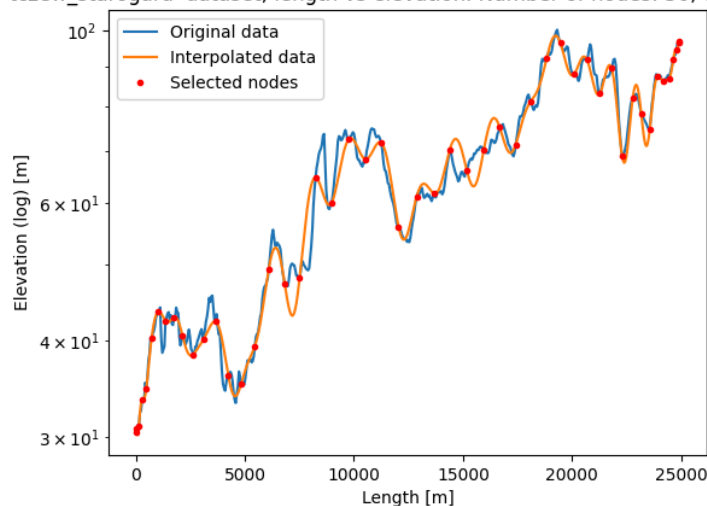
10 węzłów

tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, chebyshev



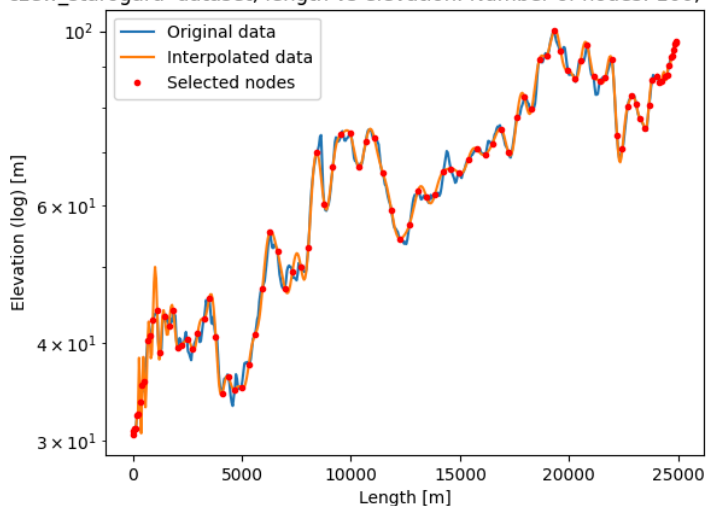
20 węzłów

tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, chebyshev



50 węzłów

tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, chebyshev



100 węzłów

Wyniki interpolacji dla tego zestawu danych są dobre dla 50 i więcej węzłów. W przeciwieństwie do poprzednich rozważań ani 10 ani 20 węzłów interpolacyjnych nie oddają charakteru trasy. Dla 50 węzłów widać wyraźnie trendy lokalne w bardzo wąskich przedziałach. Dla 100 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna i pokrywa oryginalny wykres w 90%, przy czym obszary niepokryte są wąskie i w różnych częściach wykresu (są to strome szczyty lub doliny o bardzo stromych zboczach o niewielkiej wysokości).

## 5.5. Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa

Jak można wywnioskować z powyższych wykresów, interpolacja metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa jest bardziej stabilna niż dla równoodległych węzłów. Dla trzech z czterech zestawów danych uzyskano dobre wyniki. Efekt Rungego jest praktycznie niewidoczny. Nawet dla 100 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna. Należy pamiętać, że użycie węzłów Czebyszewa może mieć negatywny wpływ na jakość interpolacji w środku przedziału.

W przypadku jednego zestawu danych, wyniki interpolacji dla węzłów Czebyszewa nie spełniają oczekiwań. Pokazuje to, że pomimo zastosowania węzłów Czebyszewa, nie zawsze jesteśmy w stanie uzyskać dokładną interpolację. Wyniki uzyskane tą metodą są lepsze niż dla równoodległych węzłów, ale nie są idealne. Dlatego metoda Lagrange'a nie jest odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego, w szczególności dla tras o dużych zmianach wysokości, w szczególności na krótkich odcinkach.

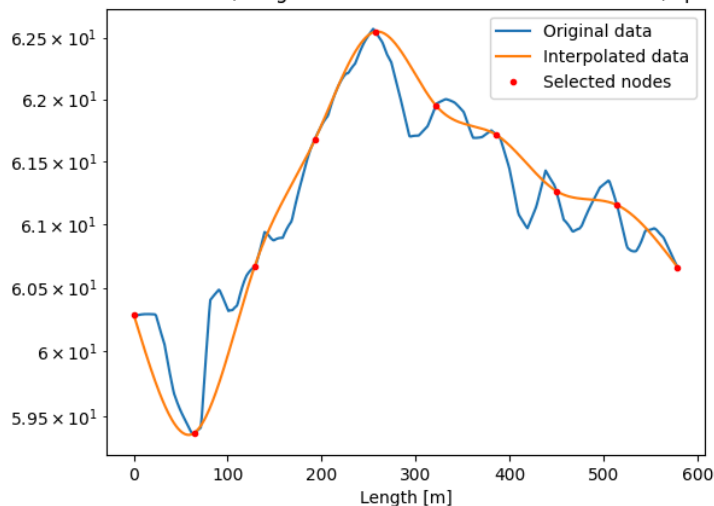
Warto zauważyć, że w przypadku dużych danych wejściowych (512 punktów), wybór węzłów Czebyszewa był możliwy. W praktyce, dla mniejszej ilości danych, dobór węzłów Czebyszewa może być trudny ze względu na niedostatecznie dużą koncentrację danych na skrajach przedziału. W projekcie zaobserwowano to zjawisko dla 100 węzłów.

## 6. Wyniki interpolacji metodą funkcji sklejanych

Dla każdego zbioru danych przeprowadzono interpolację metodą funkcji sklejanych. W projekcie zaimplementowano interpolację funkcjami sklejanymi stopnia 3. Również dla tej metody wybrano odpowiednio 10, 20, 50, 100 węzłów wejściowych. Wartości wybranych węzłów są rozmieszczone równomiernie. Na ich podstawie obliczono wartości funkcji w 512 punktach. Poniżej przedstawiono wykresy interpolacji dla każdego zbioru danych.

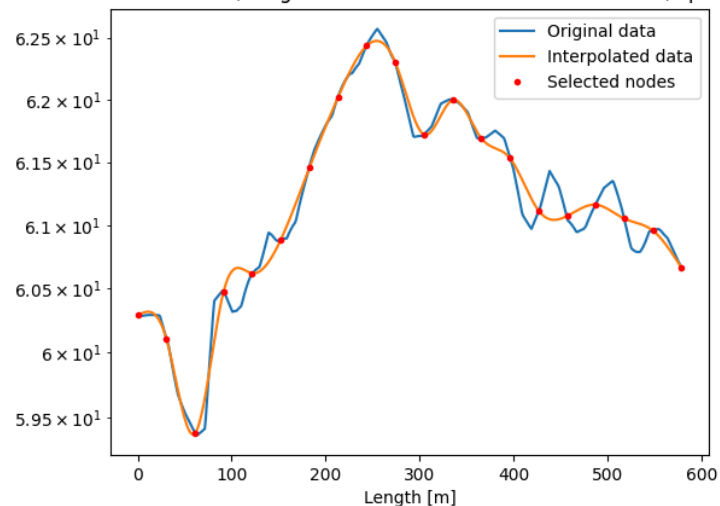
### 6.1. Interpolacja funkcjami sklejanymi - chelm.txt

'chelm' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, spline



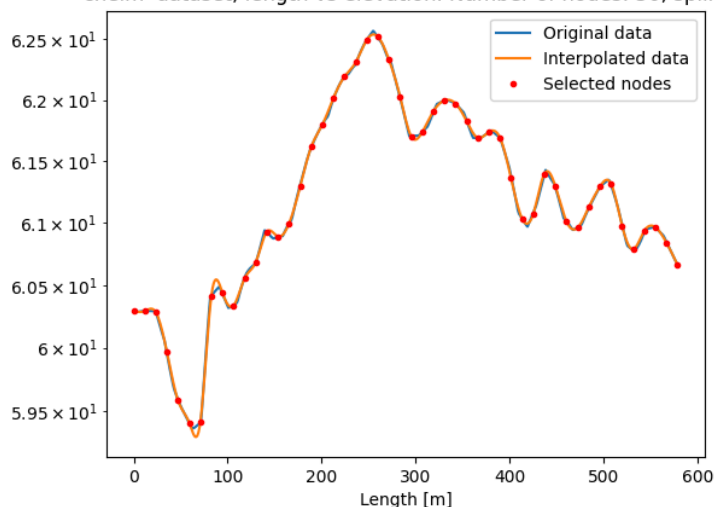
10 węzłów

'chelm' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, spline



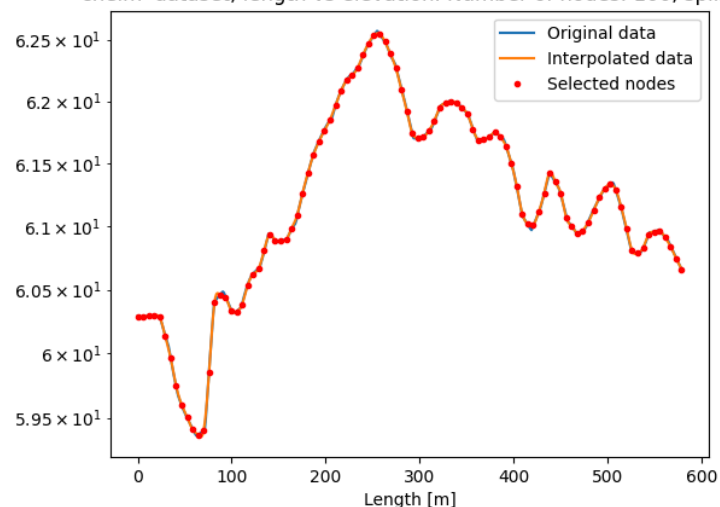
20 węzłów

'chelm' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, spline



50 węzłów

'chelm' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, spline

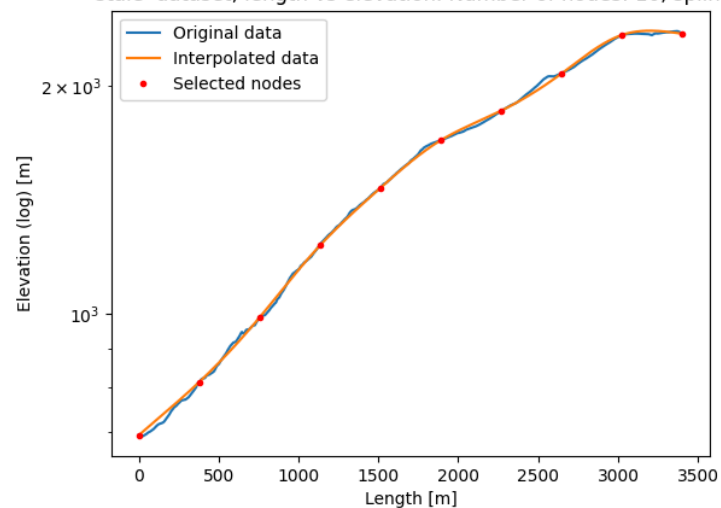


100 węzłów

Metoda funkcji sklejanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników interpolacji. Już dla 20 węzłów wynik interpolacji przypomina oryginalną funkcję, a dla 10 węzłów wyraźnie widać tendencję trasy w szerokich (kolejne ćwiartki dziedziny) przedziałach. Dla 50 czy 100 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna i pokrywa się w całości z oryginalnymi danymi. Jak również możemy zauważyć, metoda funkcji sklejanych jest odporna na efekt Rungego. Pozwala to na zwiększenie ilości węzłów bez obaw o pogorszenie wyników. Efekty są bardzo dobre, najlepsze z dotychczas obserwowanych.

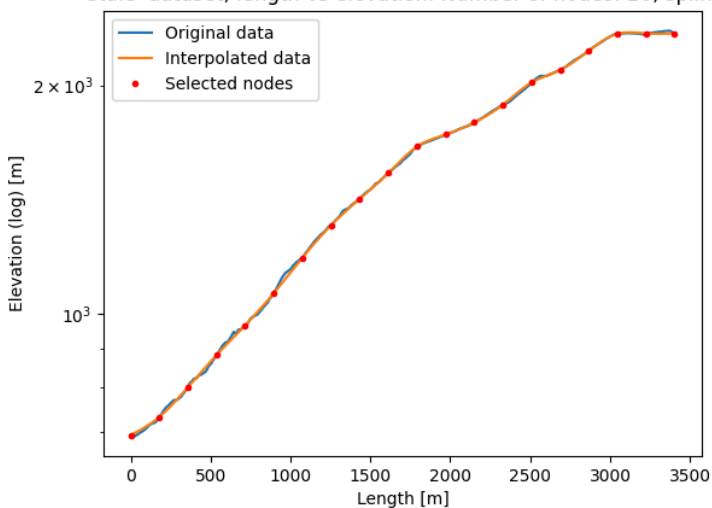
## 6.2. Interpolacja funkcjami sklejanymi - stale.txt

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, spline



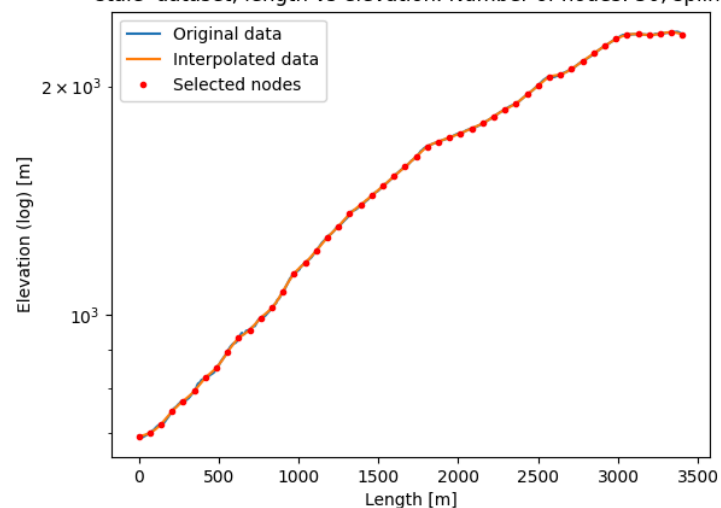
10 węzłów

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, spline



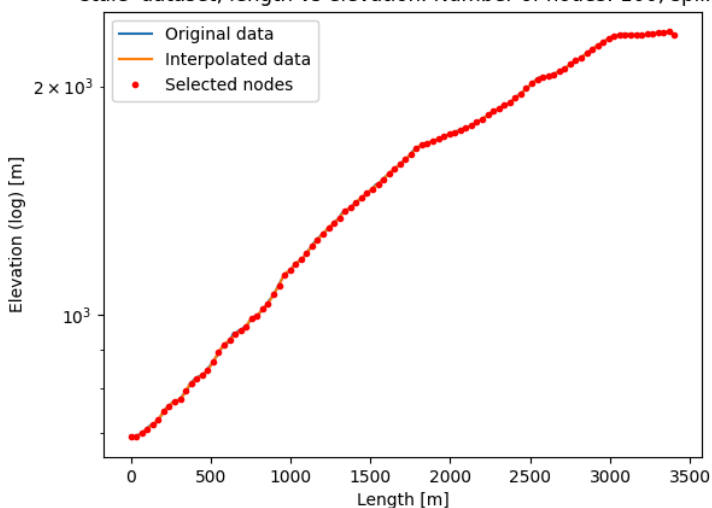
20 węzłów

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, spline



50 węzłów

'stale' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, spline

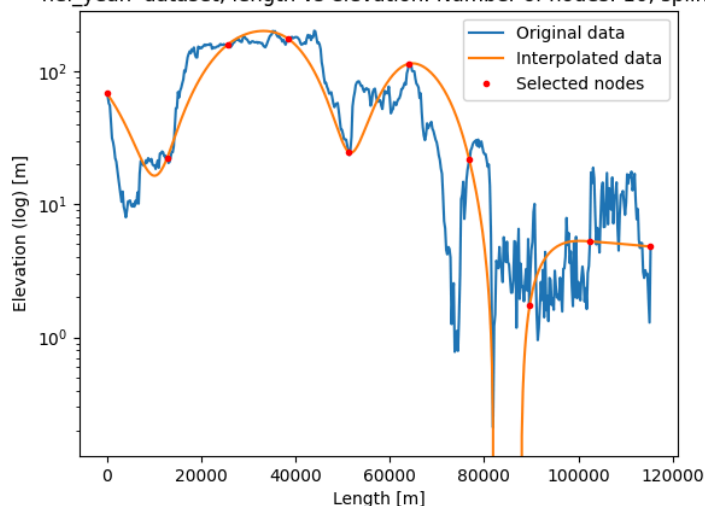


100 węzłów

Dla najmniej wymagającego testu w badanym zestawie tras interpolacja na 10 węzłach w 95% pokrywa oryginalny przebieg. Brakujące 5% rozrzucone jest równomiernie po całej trasie a wysokość “odkształceń jest niewielka”. Dla 20 węzłów możnaby zakończyć dalsze badania, wynik w 99% pokrywa się z oryginalnym przebiegiem. Dla 50 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna i pokrywa się w całości z oryginalnymi danymi. Różnica między 50 i 100 węzłami jest niewidoczna nieuzbrojonym okiem (identyczna gładkość funkcji).

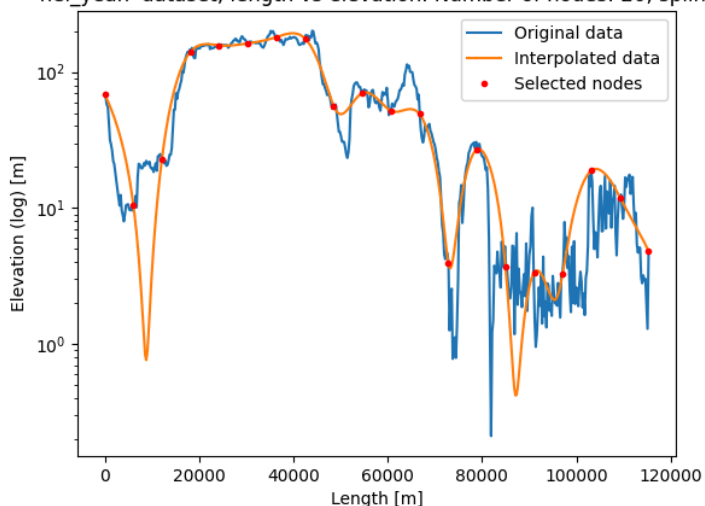
### 6.3. Interpolacja funkcjami sklejanymi - hel\_yeah.txt

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, spline



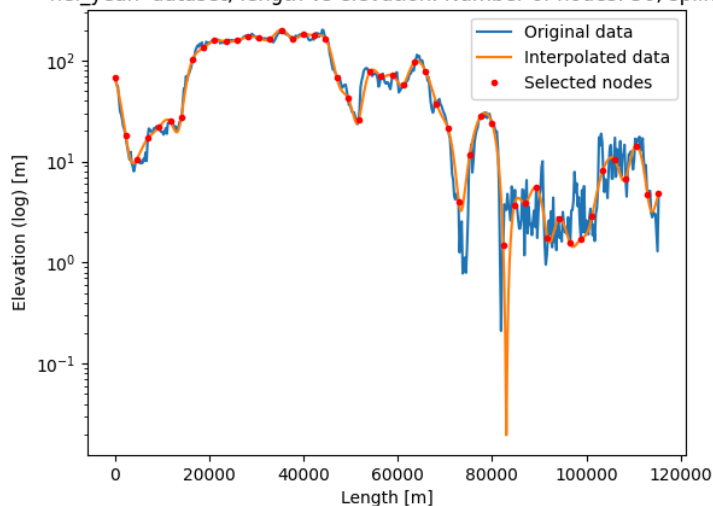
10 węzłów

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, spline



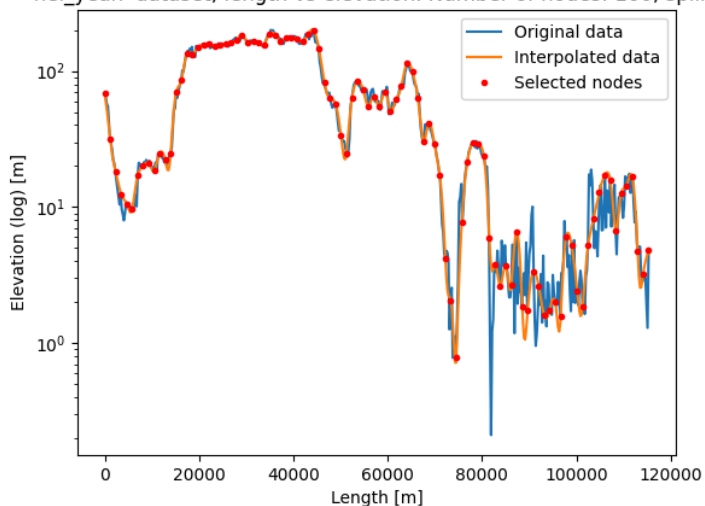
20 węzłów

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, spline



50 węzłów

'hel\_yeah' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, spline

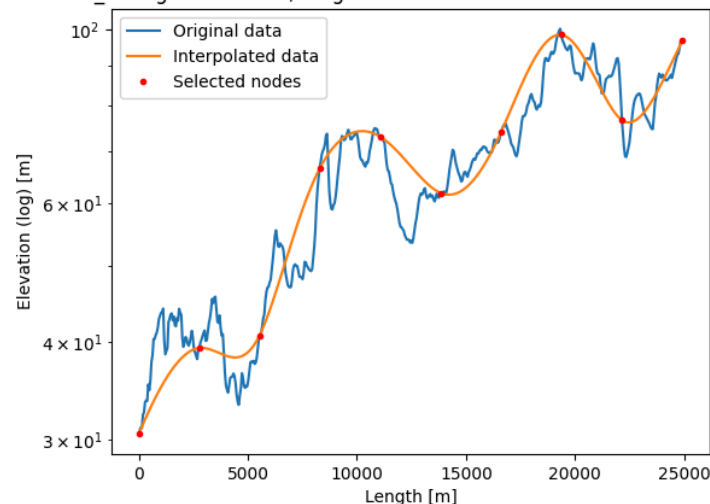


100 węzłów

Dla najtrudniejszego zestawu danych testowych metoda splajonów sprawiła się najlepiej. Podobnie jak poprzednio interpolacje dla 10 i 20 węzłów nie nadają się do dalszego przetwarzania. Doły obserwowane poprzednio również występują, ale tylko dla 10, 20 i 50 węzłów; dla 100 węzłów są niewidoczne. Dla 50 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna i pokrywa się w z oryginalnymi danymi w pierwszej połowie wykresu. Końcówka trasy cechująca się gwałtownymi zmianami wysokości jest zinterpretowana jako gładka funkcja, która tylko oddaje stosunkowo ogólną zmienność (przyrost / spadek wysokości). Dla 100 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna i pokrywa się w z oryginalnymi danymi w zadowalającym stopniu. 60% wykresu patrząc od lewej strony jest pokryte idealnie. Pozostałe 40% to obszary o gwałtownych zmianach wysokości, które są interpretowane jak dotąd najdokładniej (dobrze wskazuje monotoniczność trasy, ale nie należy się kierować wartościami wysokości).

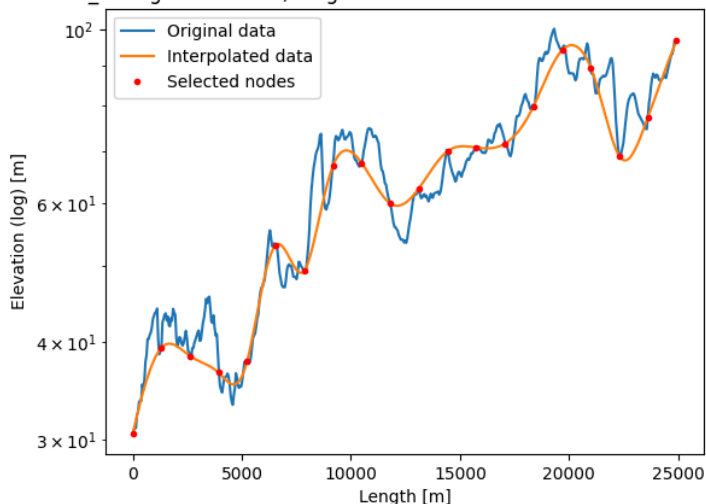
## 6.4. Interpolacja funkcjami sklejanymi - tczew\_starogard.txt

'tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 10, spline



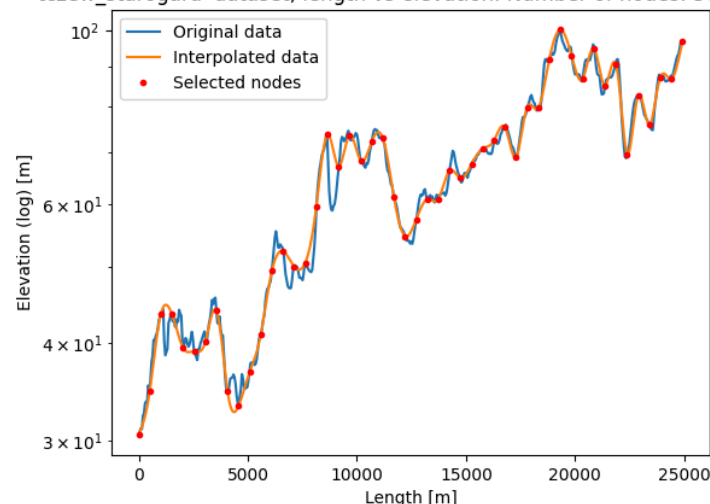
10 węzłów

'tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 20, spline



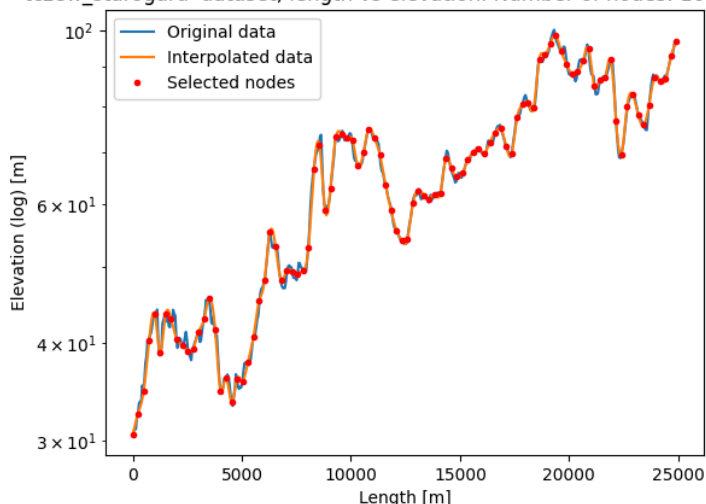
20 węzłów

'tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 50, spline



50 węzłów

'tczew\_starogard' dataset, length vs elevation. Number of nodes: 100, spline



100 węzłów

Wyniki interpolacji dla tego zestawu danych są dobre dla 50 węzłów. 10 węzłów pokazuje ogólną monotoniczność trasy, zachowane są też cechy lokalnych zmian (z dokładnością do duża/male zmiana wysokości). Przy użyciu 20 węzłów oba wykresy miejscami pokrywają się. 50 węzłów pokazuje ogólny trend trasy między Tczewem a Starogardem, z niedużym błędem co do konkretnych wartości. Poziom pokrycia jest wysoki, dużo większy niż dla metody Lagrange'a z węzłami Czebyszewa. Dla 100 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna i pokrywa oryginalny wykres w 99%.

## 6.5. Podsumowanie interpolacji metodą funkcji sklejanych

Interpolacja metodą funkcji sklejanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników. Nawet przy 20 węzłach wejściowych wynik interpolacji powoli przypomina oryginalną funkcję. W zależności od danych, 10 węzłów można wykorzystać do ogólnego opisu przebiegu trasy (np. bardzo stroma, stosunkowo łagodne wzniesienia itp.). Dla 50 węzłów interpolacja jest dobra. Najlepsze efekty obserwuje się przy 100 węzłach. Jak również możemy zauważyć, metoda funkcji sklejanych jest odporna na efekt Rungego. Pozwala to na zwiększenie ilości węzłów bez obaw o pogorszenie wyników. Warto zauważyć, że metoda funkcji sklejanych, w przeciwieństwie do metody Lagrange'a, spełnia swoje zadanie dla danych równomiernie rozmieszczonych. Ilość węzłów można też zwiększać mocniej niż w przypadku metody Lagrange'a z węzłami Czebyszewa.

Warto także zauważyć, że metoda ta nie gwarantuje idealnej interpolacji dla każdego danych. W pewnych przypadkach, jak dla danych z pliku `hel_yeah.txt`, tylko mniej gwałtownie zmieniająca się część oryginalnej trasy została zinterpolowana bardzo dobrze.

## 7. Podsumowanie

W uzyskanych wynikach interpolacji można zauważyć, że metoda Lagrange'a dla węzłów równoodległych nie jest odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego. Dla małej ilości węzłów wejściowych wyniki są mało dokładne, a po ich zwiększeniu pojawia się efekt Rungego który wzmacnia się wraz z przyrostem ilości węzłów interpolacji. Zastosowanie węzłów Czebyszewa pozwala na zminimalizowanie tego efektu, ale nie jest to rozwiązanie idealne. Wymagany jest wybór nierównomiernie rozmieszczonych węzłów, co jest trudne do osiągnięcia w praktyce, zwłaszcza dla danych o niskim zagęszczeniu punktów przy krańcach badanego przedziału. Metoda Lagrange'a będzie lepsza dla tras bardzo gęsto próbkowanych, choć nie daje to gwarancji dostatecznie dobrych rezultatów.

Metoda funkcji sklepanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników interpolacji. Jest ona odporna na efekt Rungego, co pozwala na zwiększanie ilości węzłów bez obaw o pogorszenie wyników. Metoda funkcji sklepanych spełnia swoje zadanie dla danych równomiernie rozmieszczonych, co jest idealne w przypadku profilu wysokościowego. Dość dobrze radzi sobie z danymi bardzo gwałtownie zmieniającymi się na małym podprzedziale, ale nie gwarantuje idealnej interpolacji dla każdego danych w całej dziedzinie (patrz: `hel_yeah`).

Podsumowując, pomimo większej trudności implementacyjnej, metoda funkcji sklepanych jest bardziej odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego niż metody Lagrange'a. Pozwala ona na uzyskanie dokładnych wyników nawet dla małej ilości węzłów wejściowych. Możemy poprawić jakość interpolacji poprzez zwiększenie ilości węzłów, co nie wpłynie negatywnie na wyniki. Metoda funkcji sklepanych jest również bardziej odporna na efekt Rungego, co pozwala na uzyskanie dokładnych wyników bez obaw o zaburzenia.