## Próbkowanie sygnałów ciągłych

Próbkowanie sygnałów ciągłych polega na pobieraniu ich wartości w określonych chwilach czasu. W praktyce najczęściej mamy do czynienia z próbkowaniem równomiernym, tzn. kolejne próbki pobierane są w takim samym odstępie czasu.

Ciąg wartości dyskretnych x(n) o wyrazach  $x(n) = x_a(nT)$  otrzymuje się z sygnału analogowego  $x_a(t)$  poprzez okresowe próbkowanie. Wartość T nazywamy okresem próbkowania, a odwrotność okresu próbkowania  $f_s = 1/T$  nazywamy częstotliwością próbkowania.

## Rekonstrukcja z próbek

Zakładając, że sygnał ciągły został spróbkowany z częstotliwością Nyquista lub większą, możemy dokonać jego rekonstrukcji z próbek. Wartość sygnału analogowego w dowolnej chwili możemy wyznaczyć z zależności:

$$x_a(t) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} x_a(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} x(n) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right)$$

Funkcję sinc(x) definiuje się jako:

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \neq 0\\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Przykład wykorzystania fukcji *sinc* w Matlabie:

```
x=[-2:.02:2]; %Deklaracja argumentów funkcji
y=sinc(x); %Obliczenie wartości fukcji sinc
figure; %Wizualizacja wyników
stem(y);
```

W ogólności do rekonstrukcji sygnału stosuje się także inne funkcje niż sinc. Proces rekonstrukcji można opisać zależnością:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)p(t-nT)$$

Idealna rekonstrukcja sygnału wymaga nieskończonej liczby próbek. W praktyce w procesie rekonstrukcji stosuje się sumy o skończonej liczbie elementów.

Interpolacja zerowego rzędu:

$$p(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pozostale } t \end{cases}$$

Interpolacja liniowa:

$$p(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & -T \le t \le T \\ 0 & \text{pozostałe } t \end{cases}$$

Obcieta funkcja sinc:

$$p(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right) - L \le n \le L$$

```
Przykład rekonstrukcji sygnału w Matlabie:
fsa=100000;
fsd=2000;
f=100;
                        %Częstotliwość sinusoidy
na=[0:1000];
ta=na/fsa;
nd=[0:length(na)*fsd/fsa];
td=nd/fsd;
xa=sin(2*pi*f*ta); %Model sygnalu analogowego
xd=sin(2*pi*f*td); %Próbki sygnału analogowego
%Wizualizacja próbek sygnału
figure;
plot(ta, xa)
hold on
stem(td, xd, 'r')
title('Sygnał i jego próbki');
xlabel('Time [s]');
ylabel('Sygnaly');
%Rekonstrukcja sygnału
xs=zeros(size(ta));
                       %Sygnał zrekonstruowany
for k = 1: length(td/8),
  st = xd(k)*sinc(fsd*(ta-td(k)));
   xs = xs + st;
end;
%Wizualizacja sygnału po rekonstrukcji
figure;
plot(ta, xa)
hold on
plot(ta, xs,'r')
title('Sygnal i jego rekonstrukcja z próbek');
xlabel('Time [s]');
ylabel('Sygnaly');
```

```
Matlab – użyteczne funkcje: stem, sinc, interp1
```

## PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW 1 Próbkowanie i rekonstrukcja sygnałów

## Zadania

1) Wygenerować N = 128 próbek sinusoidy o pulsacji znormalizowanej:

a) 
$$\omega_1 = \pi/20$$
;

c) 
$$\omega_3 = \pi/2$$
;

e) 
$$\omega_5 = \pi/2 + 0.01$$
;

b) 
$$\omega_2 = \pi/4$$
;

d) 
$$\omega_4 = \pi/2 + 2\pi$$
,

Porównać ciągi próbek uzyskane dla zadanych pulsacji.

2) Wygenerować N = 128 próbek sinusoidy o częstotliwości f = 2000 Hz próbkowanej z częstotliwością  $f_s$ :

a) 
$$f_{s1} = 4000 \text{ Hz}$$
;

c) 
$$f_{s3} = 8000 \text{ Hz}$$
;

e) 
$$f_{s5} = 44000 \text{ Hz}$$
;

b) 
$$f_{s2} = 4020 \text{ Hz}$$
;

d) 
$$f_{s4} = 19000 \text{ Hz}$$
;

Przedstawić próbki na wykresie w funkcji czasu. Zbadać wpływ częstotliwości próbkowania na cyfrową reprezentację sygnału sinusoidalnego. Zwrócić uwagę na okres sygnału dyskretnego.

3) Wygenerować N = 128 próbek sinusoidy o częstotliwości f = 2000 Hz próbkowanej z częstotliwością  $f_s = 4000$  Hz. Założyć następujące przesunięcia fazowe próbkowanego sygnału:

a) 
$$\varphi_1 = 0$$
;

c) 
$$\varphi_3 = \pi/2$$
;

b) 
$$\varphi_2 = \pi/4$$
;

d) 
$$\varphi_4 = 0.11 \pi$$
.

Porównać otrzymane wyniki.

4) Wygenerować N = 128 próbek sinusoid o częstotliwościach:

a) 
$$f_1 = 1800 \text{ Hz}$$
;

b) 
$$f_2 = 2200 \text{ Hz}$$
;

c) 
$$f_3 = 5800 \text{ Hz}$$
;

próbkowanych z częstotliwością  $f_s = 4000$  Hz. Sporządzić i porównać wykresy otrzymanych sygnałów dyskretnych.

5) Wygenerować N = 1024 próbki sinusoidy o częstotliwości f = 100 Hz próbkowanej z częstotliwością  $f_{sa} = 44000$  Hz. /Ponieważ w Matlabie wszelkie operacje wykonywane są na sygnalach dyskretnych, sygnały analogowe możemy jedynie modelować poprzez próbkowanie z częstotliwością wielokrotnie przewyższającą częstotliwość sygnału analogowego. Wygenerowany sygnał stanowi jedynie model sygnału analogowego./ Korzystając z funkcji plot sporządzić wykres wygenerowanego sygnału. Wygenerować próbki będące wynikiem próbkowania sinusoidy o częstotliwości f = 100 Hz z częstotliwością  $f_s = 1000$  Hz. Korzystając z funkcji hold on oraz stem wykreślić otrzymany sygnał dyskretny na tle sygnału analogowego. Dokonać rekonstrukcji sygnału z próbek z wykorzystaniem interpolacji zerowego rzędu (interp1, 'nearest'), interpolacji liniowej (interp1, 'linear') oraz obciętej funkcji sinc. Porównać wyniki uzyskane z wykorzystaniem różnych metod rekonstrukcji.