

Algorytmy macierzowe - Mnożenie macierzy

Jakub Frączek Kacper Garus

16 października 2024

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Metoda Binét’a	2
2.1	Opis teoretyczny	2
2.2	Pseudokod	2
2.3	Implementacja	3
3	Metoda Strassena	4
3.1	Opis teoretyczny	4
3.2	Pseudokod	4
3.3	Implementacja	5
4	Metoda AI	6
4.1	Opis teoretyczny	6
4.2	Implementacja	8
5	Test działania algorytmu AI	11
6	Porównanie wydajności algorytmów Binét’a i Strassena	12
6.1	Zliczanie liczby operacji zmiennoprzecinkowych	12
6.2	Porównanie czasów działania	14
7	Oszacowanie złożoności obliczeniowej	16
8	Porównanie wyników z Octave	16
9	Wnioski	16

1 Wstęp

Tematem zadania było wygenerowanie losowych macierzy o wartościach z przedziału otwartego $(0.00000001, 1.0)$, a następnie zaimplementowanie algorytmów:

1. Rekurencyjnego mnożenia macierzy metodą Binét'a
2. Rekurencyjnego mnożenia macierzy metodą Strassena
3. Mnożenia macierzy metodą AI na podstawie artykułu w Nature*

* - <https://deepmind.google/discover/blog/discovering-novel-algorithms-with-alphatensor/#:~:text=In%20our%20paper,%20published%20today%20in%20Nature,%20we>

Następnie zliczyć liczbę operacji zmienna-przecinkowych wykonaną podczas mnożenia macierzy. Algorytmy miały zostać zaprojektowane tak, aby przyjmować macierze o dowolnych wymiarach.

2 Metoda Binét'a

2.1 Opis teoretyczny

Algorytm Binét'a jest rekurencyjny i można go przedstawić dla przykładowych macierzy A i B w taki sposób:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) & (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \end{bmatrix}$$

Gdzie A_{ij} , B_{ij} dla $i = 1, 2, \dots, n$ i $j = 1, 2, \dots, n$, to macierze

2.2 Pseudokod

```
Funkcja Binet(A, B)
    Jeżeli rozmiar(A) == 1
        Zwróć A * B

    środek = dzielenie_całkowite(rozmiar(A[0]), 2)

    a11 = Wiersze od 0 do środek, Kolumny od 0 do środek z macierzy A
    a12 = Wiersze od 0 do środek, Kolumny od środek do n z macierzy A
    a21 = Wiersze od środek do n, Kolumny od 0 do środek z macierzy A
    a22 = Wiersze od środek do n, Kolumny od środek do n z macierzy A
```

```

b11 = Wiersze od 0 do środka, Kolumny od 0 do środka z macierzy B
b12 = Wiersze od 0 do środka, Kolumny od środka do n z macierzy B
b21 = Wiersze od środka do n, Kolumny od 0 do środka z macierzy B
b22 = Wiersze od środka do n, Kolumny od środka do n z macierzy B

c11 = Binet(a11, b11) + Binet(a12, b21)
c12 = Binet(a11, b12) + Binet(a12, b22)
c21 = Binet(a21, b11) + Binet(a22, b21)
c22 = Binet(a21, b12) + Binet(a22, b22)

Zwróć macierz C złożoną z c11, c12, c21, c22

```

2.3 Implementacja

Algorytm postanowiliśmy zaimplementować w języku Python:

```

def binet(a,b):

    if np.size(a)==1:
        return a*b
    n=np.size(a[0])
    mid=n//2

    a11=a[:mid,:mid]
    a12=a[:mid,mid:]
    a21=a[mid,:mid]
    a22=a[mid,mid:]
    b11=b[:mid,:mid]
    b12=b[:mid,mid:]
    b21=b[mid,:mid]
    b22=b[mid,mid:]

    c11=binet(a11, b11)+binet(a12, b21)
    c12=binet(a11, b12)+binet(a12, b22)
    c21=binet(a21, b11)+binet(a22, b21)
    c22=binet(a21, b12)+binet(a22, b22)

    return np.vstack((np.hstack((c11,c12)),np.hstack((c21,c22))))

```

3 Metoda Strassena

3.1 Opis teoretyczny

Algorytm Strassena jest rekurencyjny i można go przedstawić dla przykładowych macierzy A i B w następujący sposób:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} P_1 + P_4 - P_5 + P_7 & P_2 + P_4 \\ P_3 + P_5 & P_1 - P_2 + P_3 + P_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) & P_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\ P_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) & P_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\ P_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} & P_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\ P_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \end{aligned}$$

Gdzie A_{ij} , B_{ij} dla $i = 1, 2, \dots, n$ i $j = 1, 2, \dots, n$, to macierze

3.2 Pseudokod

```
Funkcja Binet(A, B)
    Jeżeli rozmiar(A) == 1
        Zwróć A * B

    środek = dzielenie_całkowite(rozmiar(A[0]), 2)

    a11 = Wiersze od 0 do środek, Kolumny od 0 do środek z macierzy A
    a12 = Wiersze od 0 do środek, Kolumny od środek do n z macierzy A
    a21 = Wiersze od środek do n, Kolumny od 0 do środek z macierzy A
    a22 = Wiersze od środek do n, Kolumny od środek do n z macierzy A

    b11 = Wiersze od 0 do środek, Kolumny od 0 do środek z macierzy B
    b12 = Wiersze od 0 do środek, Kolumny od środek do n z macierzy B
    b21 = Wiersze od środek do n, Kolumny od 0 do środek z macierzy B
    b22 = Wiersze od środek do n, Kolumny od środek do n z macierzy B

    p1 = strassen(a11+a22, b11+b22)
    p2 = strassen(a21+a22, b11)
    p3 = strassen(a11, b12-b22)
    p4 = strassen(a22, b21-b11)
    p5 = strassen(a11+a12, b22)
    p6 = strassen(a21-a11, b11+b12)
    p7 = strassen(a12-a22, b21+b22)
```

```

c11=p1+p4-p5+p7
c12=p3+p5
c21=p2+p4
c22=p1-p2+p3+p6

```

Zwróć macierz C złożoną z c11, c12, c21, c22

3.3 Implementacja

Algorytm Strassena również został zaimplementowany w języku Python:

```

def strassen(a,b):
    n=np.size(a[0])

    if n==1:
        return a*b
    mid=n//2

    a11=a[:mid,:mid]
    a12=a[:mid,mid:]
    a21=a[mid:,:mid]
    a22=a[mid:,mid:]
    b11=b[:mid,:mid]
    b12=b[:mid,mid:]
    b21=b[mid:,:mid]
    b22=b[mid:,mid:]

    p1 = strassen(a11+a22, b11+b22)
    p2 = strassen(a21+a22, b11)
    p3 = strassen(a11, b12-b22)
    p4 = strassen(a22, b21-b11)
    p5 = strassen(a11+a12, b22)
    p6 = strassen(a21-a11, b11+b12)
    p7 = strassen(a12-a22, b21+b22)

    c11=p1+p4-p5+p7
    c12=p3+p5
    c21=p2+p4
    c22=p1-p2+p3+p6

    return np.vstack((np.hstack((c11,c12)),np.hstack((c21,c22))))

```

4 Metoda AI

4.1 Opis teoretyczny

Autorzy artykułu "Discovering novel algorithms with AlphaTensor" w Nature postanowili spojrzeć na problem mnożenia macierzy w inny sposób przekształcając go w grę z bardzo dużą liczbą możliwych ruchów, której ukończenie jest równoważne znalezieniu szukanej macierzy. A następnie za pomocą uczenia maszynowego nauczyli model AlphaTensor, jak w nią grać a ten metodą prób i błędów zaczął odkrywać najpierw już znane algorytmy, takie jak metoda Binét'a oraz metoda Strassena, aż dokonał przełomu odkrywając sposób wymnożenia macierzy 4x5 przez macierz 5x5 szybciej niż to było dotychczas możliwe. Najprostszy znany algorytm wykonuje obliczenia przy użyciu 100 mnożeń, algorytm Strassena przy 80, a algorytm AI przy 76.



Rysunek 1: Algorytmy znane dotychczas

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ \hline a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ \hline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ \hline a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} \\ \hline b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & b_{2,5} \\ \hline b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} \\ \hline b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & b_{4,5} \\ \hline b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} & b_{5,4} & b_{5,5} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} \\ \hline c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} \\ \hline c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} \\ \hline c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 h_1 = a_{3,2}(-b_{2,1} - b_{2,5} - b_{3,1}) \\
 h_2 = (a_{2,2} + a_{2,5} - a_{3,5})(-b_{2,5} - b_{5,1}) \\
 h_3 = (-a_{3,1} - a_{4,1} + a_{4,2})(-b_{1,1} + b_{2,5}) \\
 h_4 = (a_{1,2} + a_{1,4} + a_{3,4})(-b_{2,5} - b_{4,1}) \\
 h_5 = (a_{1,5} + a_{2,2} + a_{2,5})(-b_{2,4} + b_{5,1}) \\
 h_6 = (-a_{2,2} - a_{2,5} - a_{4,5})(b_{2,3} + b_{5,1}) \\
 h_7 = (-a_{1,1} + a_{4,1} - a_{4,2})(b_{1,1} + b_{2,4}) \\
 h_8 = (a_{3,2} - a_{3,3} - a_{4,3})(-b_{2,3} + b_{3,1}) \\
 h_9 = (-a_{1,2} - a_{1,4} + a_{4,4})(b_{2,3} + b_{4,1}) \\
 h_{10} = (a_{2,2} + a_{2,5})b_{5,1} \\
 h_{11} = (-a_{2,1} - a_{4,1} + a_{4,5})(-b_{1,1} + b_{2,2}) \\
 h_{12} = (a_{1,1} - a_{4,2})b_{1,1} \\
 h_{13} = (a_{1,2} + a_{1,4} + a_{2,4})(b_{2,2} + b_{4,1}) \\
 h_{14} = (a_{1,3} - a_{3,2} + a_{3,3})(b_{2,4} + b_{4,1}) \\
 h_{15} = (-a_{1,2} - a_{1,4})b_{4,1} \\
 h_{16} = (-a_{3,2} + a_{3,3})b_{5,1} \\
 h_{17} = (a_{1,2} + a_{1,4} - a_{2,1} + a_{2,2} - a_{2,3} + a_{2,4} - a_{3,2} + a_{3,3} - a_{4,1} + a_{4,2})b_{2,2} \\
 h_{18} = a_{2,1}(b_{1,1} + b_{1,2} + b_{5,2}) \\
 h_{19} = -a_{2,3}(b_{3,1} + b_{3,2} + b_{5,2}) \\
 h_{20} = (-a_{1,5} + a_{2,1} + a_{2,2} - a_{2,5})(-b_{1,1} - b_{1,2} + b_{1,4} - b_{5,2}) \\
 h_{21} = (a_{2,1} + a_{2,3} - a_{2,5})b_{5,2} \\
 h_{22} = (a_{1,3} - a_{1,4} - a_{2,4})(b_{1,1} + b_{1,2} - b_{1,4} - b_{3,1} - b_{3,2} + b_{3,4} + b_{4,4}) \\
 h_{23} = a_{1,3}(-b_{3,1} + b_{3,4} + b_{4,4}) \\
 h_{24} = a_{1,5}(-b_{4,4} - b_{5,1} + b_{5,4}) \\
 h_{25} = -a_{1,1}(b_{1,1} - b_{1,4}) \\
 h_{26} = (-a_{1,3} + a_{1,4} + a_{1,5})b_{4,4} \\
 h_{27} = (a_{1,3} - a_{3,1} + a_{3,3})(b_{1,1} - b_{1,4} + b_{1,5} + b_{3,5}) \\
 h_{28} = -a_{3,4}(-b_{3,5} - b_{4,1} - b_{4,5}) \\
 h_{29} = a_{3,1}(b_{1,1} + b_{1,5} + b_{3,5}) \\
 h_{30} = (a_{3,1} - a_{3,3} + a_{3,4})b_{3,5} \\
 h_{31} = (-a_{1,4} - a_{1,5} - a_{3,4})(-b_{4,4} - b_{5,1} + b_{5,4} - b_{5,5}) \\
 h_{32} = (a_{2,1} + a_{4,1} + a_{4,4})(b_{1,3} - b_{4,1} - b_{4,2} - b_{4,3}) \\
 h_{33} = a_{4,3}(-b_{3,1} - b_{3,3}) \\
 h_{34} = a_{4,4}(-b_{1,3} + b_{4,1} + b_{4,5}) \\
 h_{35} = -a_{4,5}(b_{1,3} + b_{5,1} + b_{5,3}) \\
 h_{36} = (a_{2,3} - a_{2,5} - a_{4,5})(b_{3,1} + b_{3,2} + b_{3,3} + b_{5,2}) \\
 h_{37} = (-a_{4,1} - a_{4,4} + a_{4,5})b_{1,3} \\
 h_{38} = (-a_{2,3} - a_{3,1} + a_{3,3} - a_{3,4})(b_{3,5} + b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,5}) \\
 h_{39} = (-a_{3,1} - a_{4,1} - a_{4,4} + a_{4,5})(b_{1,3} + b_{5,1} + b_{5,3} + b_{5,5}) \\
 h_{40} = (-a_{1,3} + a_{1,4} + a_{1,5} - a_{4,4})(-b_{3,1} - b_{3,3} + b_{3,4} + b_{4,4}) \\
 h_{41} = (-a_{1,1} + a_{4,1} - a_{4,5})(b_{1,3} + b_{3,1} + b_{3,3} - b_{3,4} + b_{5,1} + b_{5,3} - b_{5,4}) \\
 h_{42} = (-a_{2,1} + a_{2,5} - a_{3,5})(-b_{1,1} - b_{1,2} - b_{1,5} + b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,5} - b_{5,2}) \\
 h_{43} = a_{2,4}(b_{4,1} + b_{4,2}) \\
 h_{44} = (a_{2,3} + a_{3,2} - a_{3,3})(b_{2,2} - b_{3,1}) \\
 h_{45} = (-a_{3,3} + a_{3,4} - a_{4,4})(b_{3,5} + b_{4,1} + b_{4,3} + b_{4,5} + b_{5,1} + b_{5,3} + b_{5,5}) \\
 h_{46} = -a_{3,5}(-b_{5,1} - b_{5,5}) \\
 h_{47} = (a_{2,1} - a_{2,5} - a_{3,1} + a_{3,5})(b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,5} - b_{4,1} - b_{4,2} - b_{4,5}) \\
 h_{48} = (-a_{2,3} + a_{3,3})(b_{2,2} + b_{3,2} + b_{3,5} + b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,5}) \\
 h_{49} = (-a_{1,1} - a_{1,3} + a_{1,4} + a_{1,5} - a_{2,1} - a_{2,3} + a_{2,4} + a_{2,5})(-b_{1,1} - b_{1,2} + b_{1,4}) \\
 h_{50} = (-a_{1,4} - a_{2,4})(b_{2,2} - b_{3,1} - b_{3,2} + b_{3,4} - b_{4,2} + b_{4,4}) \\
 \\
 h_{51} = a_{2,2}(b_{2,1} + b_{2,2} - b_{5,1}) \\
 h_{52} = a_{4,2}(b_{1,1} + b_{2,1} + b_{2,3}) \\
 h_{53} = -a_{1,2}(-b_{2,1} + b_{2,4} + b_{4,1}) \\
 h_{54} = (a_{1,2} + a_{1,4} - a_{2,2} - a_{2,5} - a_{3,2} + a_{3,3} - a_{4,2} + a_{4,3} - a_{4,4} - a_{4,5})b_{2,3} \\
 h_{55} = (a_{1,4} - a_{4,4})(-b_{2,3} + b_{3,1} + b_{3,3} - b_{3,4} + b_{4,3} - b_{4,4}) \\
 h_{56} = (a_{1,1} - a_{1,5} - a_{4,1} + a_{4,5})(b_{3,1} + b_{3,3} - b_{3,4} + b_{5,1} + b_{5,3} - b_{5,4}) \\
 h_{57} = (-a_{3,1} - a_{4,1})(-b_{1,3} - b_{1,5} - b_{2,5} - b_{5,1} - b_{5,3} - b_{5,5}) \\
 h_{58} = (-a_{1,4} - a_{1,5} - a_{3,4} - a_{3,5})(-b_{5,1} + b_{5,4} - b_{5,5}) \\
 h_{59} = (-a_{3,3} + a_{3,4} - a_{4,3} + a_{4,4})(b_{4,1} + b_{4,3} + b_{4,5} + b_{5,1} + b_{5,3} + b_{5,5}) \\
 h_{60} = (a_{2,5} + a_{4,5})(b_{2,3} - b_{3,1} - b_{3,2} - b_{3,3} - b_{5,2} - b_{5,3}) \\
 h_{61} = (a_{1,4} + a_{3,4})(b_{1,1} - b_{1,4} + b_{1,5} - b_{2,5} - b_{4,4} + b_{4,5} - b_{5,1} + b_{5,4} - b_{5,5}) \\
 h_{62} = (a_{2,1} + a_{4,1})(b_{1,2} + b_{1,3} + b_{2,2} - b_{4,1} - b_{4,2} - b_{4,3}) \\
 h_{63} = (-a_{3,3} - a_{4,3})(-b_{2,3} - b_{3,3} - b_{3,5} - b_{4,1} - b_{4,3} - b_{4,5}) \\
 h_{64} = (a_{1,1} - a_{1,3} - a_{1,4} + a_{3,1} - a_{3,3} - a_{3,4})(b_{1,1} - b_{1,4} + b_{1,5}) \\
 h_{65} = (-a_{1,1} + a_{4,1})(-b_{1,3} + b_{1,4} + b_{2,4} - b_{5,1} - b_{5,3} + b_{5,4}) \\
 h_{66} = (a_{1,1} - a_{1,2} + a_{1,3} - a_{1,5} - a_{2,2} - a_{2,5} - a_{3,2} + a_{3,3} - a_{4,1} + a_{4,2})b_{2,4} \\
 h_{67} = (a_{2,5} - a_{3,5})(b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,5} - b_{2,5} - b_{4,1} - b_{4,2} - b_{4,5} + b_{5,2} + b_{5,5}) \\
 h_{68} = (a_{1,1} + a_{1,3} - a_{1,4} - a_{1,5} - a_{4,1} - a_{4,3} + a_{4,4} + a_{4,5})(-b_{3,1} - b_{3,3} + b_{3,4}) \\
 h_{69} = (-a_{1,3} + a_{1,4} - a_{2,3} + a_{2,4})(-b_{2,4} - b_{3,1} - b_{3,2} + b_{3,4} - b_{5,2} + b_{5,4}) \\
 h_{70} = (a_{2,3} - a_{2,5} + a_{4,3} - a_{4,5})(-b_{3,1} - b_{3,2} - b_{3,3}) \\
 h_{71} = (-a_{3,1} + a_{3,3} - a_{3,4} + a_{3,5} - a_{4,1} + a_{4,3} - a_{4,4} + a_{4,5})(-b_{5,1} - b_{5,3} - b_{5,5}) \\
 h_{72} = (-a_{2,1} - a_{2,4} - a_{4,1} - a_{4,4})(b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3}) \\
 h_{73} = (a_{1,3} - a_{1,4} - a_{1,5} + a_{2,3} - a_{2,4} - a_{2,5})(b_{1,1} + b_{1,2} - b_{1,4} + b_{2,4} + b_{5,2} - b_{5,4}) \\
 h_{74} = (a_{2,1} - a_{2,3} + a_{2,4} - a_{3,1} + a_{3,3} - a_{3,4})(b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,5}) \\
 h_{75} = -(a_{1,2} + a_{1,4} - a_{2,2} - a_{2,5} - a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,4} + a_{3,5} - a_{4,1} + a_{4,2})b_{2,5} \\
 h_{76} = (a_{1,3} + a_{3,3})(-b_{1,1} + b_{1,4} - b_{1,5} + b_{2,4} + b_{3,4} - b_{3,5}) \\
 c_{1,1} = -h_{10} + h_{12} + h_{14} - h_{15} - h_{16} + h_{53} + h_{55} - h_{66} - h_{77} \\
 c_{2,1} = h_{10} + h_{11} - h_{12} + h_{13} + h_{15} + h_{16} - h_{17} - h_{44} + h_{51} \\
 c_{3,1} = h_{10} - h_{12} + h_{15} + h_{16} - h_{17} + h_{23} - h_{44} + h_{75} \\
 c_{4,1} = -h_{10} + h_{12} - h_{15} - h_{16} + h_{52} + h_{54} - h_{67} - h_{68} + h_{69} \\
 c_{1,2} = h_{13} + h_{15} + h_{20} + h_{21} - h_{22} + h_{23} + h_{25} - h_{43} + h_{49} + h_{50} \\
 c_{2,2} = -h_{11} + h_{12} - h_{13} - h_{15} - h_{16} + h_{17} + h_{18} - h_{19} - h_{21} + h_{43} + h_{44} \\
 c_{3,2} = -h_{16} - h_{19} - h_{21} - h_{28} - h_{29} - h_{38} + h_{42} + h_{44} - h_{47} + h_{48} \\
 c_{4,2} = h_{11} - h_{12} - h_{18} + h_{21} - h_{32} + h_{33} - h_{34} - h_{36} + h_{62} - h_{70} \\
 c_{1,3} = h_{15} + h_{23} + h_{24} + h_{34} - h_{37} + h_{40} - h_{41} + h_{55} - h_{56} - h_{69} \\
 c_{2,3} = -h_{10} + h_{19} + h_{32} + h_{35} + h_{36} + h_{37} - h_{43} - h_{60} - h_{66} - h_{72} \\
 c_{3,3} = -h_{16} - h_{28} + h_{33} + h_{37} - h_{39} + h_{45} - h_{46} + h_{63} - h_{71} - h_{78} \\
 c_{4,3} = h_{10} + h_{15} + h_{16} - h_{33} + h_{34} - h_{35} - h_{37} - h_{54} + h_{65} + h_{68} - h_{69} \\
 c_{1,4} = -h_{10} + h_{12} + h_{14} - h_{16} + h_{23} + h_{24} + h_{25} + h_{36} + h_{55} - h_{66} - h_{77} \\
 c_{2,4} = h_{10} + h_{18} - h_{19} + h_{20} - h_{22} - h_{24} - h_{26} - h_{55} - h_{60} + h_{73} \\
 c_{3,4} = -h_{14} + h_{16} - h_{23} - h_{26} + h_{27} + h_{29} + h_{31} + h_{46} - h_{58} + h_{76} \\
 c_{4,4} = h_{12} + h_{25} + h_{26} - h_{33} - h_{35} - h_{40} + h_{41} + h_{65} - h_{68} - h_{77} \\
 c_{1,5} = h_{15} + h_{24} + h_{25} + h_{27} - h_{28} + h_{30} + h_{31} - h_{44} + h_{61} + h_{64} \\
 c_{2,5} = -h_{10} - h_{18} - h_{27} - h_{30} - h_{38} + h_{42} - h_{43} + h_{46} + h_{67} + h_{74} \\
 c_{3,5} = -h_{10} + h_{12} - h_{15} + h_{28} + h_{29} - h_{32} - h_{39} - h_{43} + h_{46} + h_{47} - h_{75} \\
 c_{4,5} = -h_{12} - h_{29} + h_{30} - h_{34} + h_{35} + h_{39} + h_{55} - h_{45} + h_{57} + h_{59}
 \end{array}$$

Rysunek 2: Algorytm wymyślony przez AI

4.2 Implementacja

Algorytm wymyślony przez sztuczną inteligencję również został zaimplementowany w Pythonie:

```
def ai_matrix_mult(a,b):  
    a11=a[0,0]  
    a12=a[0,1]  
    a13=a[0,2]  
    a14=a[0,3]  
    a15=a[0,4]  
    a21=a[1,0]  
    a22=a[1,1]  
    a23=a[1,2]  
    a24=a[1,3]  
    a25=a[1,4]  
    a31=a[2,0]  
    a32=a[2,1]  
    a33=a[2,2]  
    a34=a[2,3]  
    a35=a[2,4]  
    a41=a[3,0]  
    a42=a[3,1]  
    a43=a[3,2]  
    a44=a[3,3]  
    a45=a[3,4]  
    b11=b[0,0]  
    b12=b[0,1]  
    b13=b[0,2]  
    b14=b[0,3]  
    b15=b[0,4]  
    b21=b[1,0]  
    b22=b[1,1]  
    b23=b[1,2]  
    b24=b[1,3]  
    b25=b[1,4]  
    b31=b[2,0]  
    b32=b[2,1]  
    b33=b[2,2]  
    b34=b[2,3]  
    b35=b[2,4]  
    b41=b[3,0]  
    b42=b[3,1]  
    b43=b[3,2]  
    b44=b[3,3]  
    b45=b[3,4]
```



```

b51=b[4,0]
b52=b[4,1]
b53=b[4,2]
b54=b[4,3]
b55=b[4,4]

h1=a32*(-b21-b25-b31)
h2=(a22+a25-a35)*(-b25-b51)
h3=(-a31-a41+a42)*(-b11+b25)
h4=(a12+a14+a34)*(-b25-b41)
h5=(a15+a22+a25)*(-b24+b51)
h6=(-a22-a25-a45)*(b23+b51)
h7=(-a11+a41-a42)*(b11+b24)
h8=(a32-a33-a43)*(-b23+b31)
h9=(-a12-a14+a44)*(b23+b41)
h10=(a22+a25)*(b51)
h11=(-a21-a41+a42)*(-b11+b22)
h12=(a41-a42)*(b11)
h13=(a12+a14+a24)*(b22+b41)
h14=(a13-a32+a33)*(b24+b31)
h15=(-a12-a14)*(b41)
h16=(-a32+a33)*(b31)
h17=(a12+a14-a21+a22-a23+a24-a32+a33-a41+a42)*(b22)
h18=(a21)*(b11+b12+b52)
h19=(-a23)*(b31+b32+b52)
h20=(-a15+a21+a23-a25)*(-b11-b12+b14-b52)
h21=(a21+a23-a25)*(b52)
h22=(a13-a14-a24)*(b11+b12-b14-b31-b32+b34+b44)
h23=(a13)*(-b31+b34+b44)
h24=(a15)*(-b44-b51+b54)
h25=(-a11)*(b11-b14)
h26=(-a13+a14+a15)*(b44)
h27=(a13-a31+a33)*(b11-b14+b15+b35)
h28=(-a34)*(-b35-b41-b45)
h29=(a31)*(b11+b15+b35)
h30=(a31-a33+a34)*(b35)
h31=(-a14-a15-a34)*(-b44-b51+b54-b55)
h32=(a21+a41+a44)*(b13-b41-b42-b43)
h33=(a43)*(-b31-b33)
h34=(a44)*(-b13+b41+b43)
h35=(-a45)*(b13+b51+b53)
h36=(a23-a25-a45)*(b31+b32+b33+b52)
h37=(-a41-a44+a45)*(b13)
h38=(-a23-a31+a33-a34)*(b35+b41+b42+b45)
h39=(-a31-a41-a44+a45)*(b13+b51+b53+b55)

```

$$\begin{aligned} h40 &= (-a13+a14+a15-a44)*(-b31-b33+b34+b44) \\ h41 &= (-a11+a41-a45)*(b13+b31+b33-b34+b51+b53-b54) \\ h42 &= (-a21+a25-a35)*(-b11-b12-b15+b41+b42+b45-b52) \\ h43 &= (a24)*(b41+b42) \\ h44 &= (a23+a32-a33)*(b22-b31) \\ h45 &= (-a33+a34-a43)*(b35+b41+b43+b45+b51+b53+b55) \\ h46 &= (-a35)*(-b51-b55) \\ h47 &= (a21-a25-a31+a35)*(b11+b12+b15-b41-b42-b45) \\ h48 &= (-a23+a33)*(b22+b32+b35+b41+b42+b45) \\ h49 &= (-a11-a13+a14+a15-a21-a23+a24+a25)*(-b11-b12+b14) \\ h50 &= (-a14-a24)*(b22-b31-b32+b34-b42+b44) \\ h51 &= (a22)*(b21+b22-b51) \\ h52 &= (a42)*(b11+b21+b23) \\ h53 &= (-a12)*(-b21+b24+b41) \\ h54 &= (a12+a14-a22-a25-a32+a33-a42+a43-a44-a45)*(b23) \\ h55 &= (a14-a44)*(-b23+b31+b33-b34+b43-b44) \\ h56 &= (a11-a15-a41+a45)*(b31+b33-b34+b51+b53-b54) \\ h57 &= (-a31-a41)*(-b13-b15-b25-b51-b53-b55) \\ h58 &= (-a14-a15-a34-a35)*(-b51+b54-b55) \\ h59 &= (-a33+a34-a43+a44)*(b41+b43+b45+b51+b53+b55) \\ h60 &= (a25+a45)*(b23-b31-b32-b33-b52-b53) \\ h61 &= (a14+a34)*(b11-b14+b15-b25-b44+b45-b51+b54-b55) \\ h62 &= (a21+a41)*(b12+b13+b22-b41-b42-b43) \\ h63 &= (-a33-a43)*(-b23-b33-b35-b41-b43-b45) \\ h64 &= (a11-a13-a14+a31-a33-a34)*(b11-b14+b15) \\ h65 &= (-a11+a41)*(-b13+b14+b24-b51-b53+b54) \\ h66 &= (a11-a12+a13-a15-a22-a25-a32+a33-a41+a42)*(b24) \\ h67 &= (a25-a35)*(b11+b12+b15-b25-b41-b42-b45+b52+b55) \\ h68 &= (a11+a13-a14-a15-a41-a43+a44+a45)*(-b31-b33+b34) \\ h69 &= (-a13+a14-a23+a24)*(-b24-b31-b32+b34-b52+b54) \\ h70 &= (a23-a25+a43-a45)*(-b31-b32-b33) \\ h71 &= (-a31+a33-a34+a35-a41+a43-a44+a45)*(-b51-b53-b55) \\ h72 &= (-a21-a24-a41-a44)*(b41+b42+b43) \\ h73 &= (a13-a14-a15+a23-a24-a25)*(b11+b12-b14+b24+b52-b54) \\ h74 &= (a21-a23+a24-a31+a33-a34)*(b41+b42+b45) \\ h75 &= -(a12+a14-a22-a25-a31+a32+a34+a35-a41+a42)*(b25) \\ h76 &= (a13+a33)*(-b11+b14-b15+b24+b34-b35) \\ \\ c11 &= -h10+h12+h14-h15-h16+h53+h5-h66-h7 \\ c21 &= h10+h11-h12+h13+h15+h16-h17-h44+h51 \\ c31 &= h10-h12+h15+h16-h1+h2+h3-h4+h75 \\ c41 &= -h10+h12-h15-h16+h52+h54-h6-h8+h9 \\ c12 &= h13+h15+h20+h21-h22+h23+h25-h43+h49+h50 \\ c22 &= -h11+h12-h13-h15-h16+h17+h18-h19-h21+h43+h44 \\ c32 &= -h16-h19-h21-h28-h29-h38+h42+h44-h47+h48 \end{aligned}$$

```

c42=h11-h12-h18+h21-h32+h33-h34-h36+h62-h70
c13=h15+h23+h24+h34-h37+h40-h41+h55-h56-h9
c23=-h10+h19+h32+h35+h36+h37-h43-h60-h6-h72
c33=-h16-h28+h33+h37-h39+h45-h46+h63-h71-h8
c43=h10+h15+h16-h33+h34-h35-h37-h54+h6+h8-h9
c14=-h10+h12+h14-h16+h23+h24+h25+h26+h5-h66-h7
c24=h10+h18-h19+h20-h22-h24-h26-h5-h69+h73
c34=-h14+h16-h23-h26+h27+h29+h31+h46-h58+h76
c44=h12+h25+h26-h33-h35-h40+h41+h65-h68-h7
c15=h15+h24+h25+h27-h28+h30+h31-h4+h61+h64
c25=-h10-h18-h2-h30-h38+h42-h43+h46+h67+h74
c35=-h10+h12-h15+h28+h29-h2-h30-h3+h46+h4-h75
c45=-h12-h29+h30-h34+h35+h39+h3-h45+h57+h59

c=np.array([[c11,c12,c13,c14,c15],[c21,c22,c23,c24,c25],
            [c31,c32,c33,c34,c35],[c41,c42,c43,c44,c45]])

return c

```

5 Test działania algorytmu AI

W celu przetestowania poprawności algorytmu "wymyślonego" przez sztuczną inteligencję, wygenerowaliśmy dwie macierze z losowymi wartościami, a następnie wymnożyliśmy je metodą AI oraz funkcją `np.dot()`. Po porównaniu otrzymanych wyników okazało się, że metoda jest poprawna, a różnica pomiędzy poszczególnymi elementami macierzy wynikowej jest minimalna i wynika stricte ze sposobu przechowywania i operacji na liczbach zmiennoprzecinkowych w komputerze. Poniżej zamieściliśmy wykorzystane macierze oraz otrzymane różnice.

$$A = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.34 & 0.56 & 0.78 & 4.55 \\ 1.23 & 1.45 & 1.67 & 1.89 & 4.66 \\ 2.01 & 2.23 & 2.45 & 2.67 & 4.77 \\ 3.11 & 3.22 & 3.33 & 3.44 & 4.88 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.40 & 0.50 \\ 1.00 & 1.10 & 1.20 & 1.30 & 1.40 \\ 2.00 & 2.10 & 2.20 & 2.30 & 2.40 \\ 3.00 & 3.10 & 3.20 & 3.30 & 3.40 \\ 4.00 & 4.10 & 4.20 & 4.30 & 4.40 \end{bmatrix}$$

$$C1 = C2 = A \cdot B$$

Gdzie C1 to wynik otrzymany metodami AI, a C2 przy wykorzystaniu numpy

$$C1-C2 = \begin{bmatrix} 3.55 \times 10^{-15} & 0.00 & 3.55 \times 10^{-15} & 7.11 \times 10^{-15} & 3.55 \times 10^{-15} \\ 3.55 \times 10^{-15} & 3.55 \times 10^{-15} & 1.07 \times 10^{-14} & 7.11 \times 10^{-15} & 7.11 \times 10^{-15} \\ 0.00 & 0.00 & 1.42 \times 10^{-14} & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.13 \times 10^{-14} & 0.00 & 0.00 & 1.42 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$$

6 Porównanie wydajności algorytmów Binet’a i Strassena

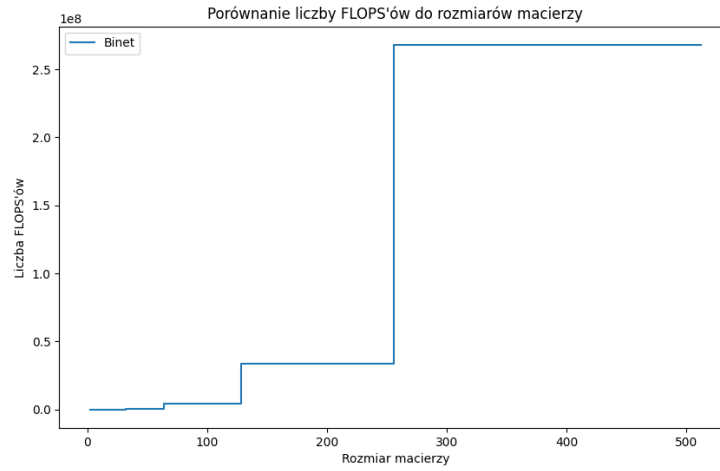
6.1 Zliczanie liczby operacji zmiennoprzecinkowych

Zliczanie operacji zmiennoprzecinkowych osiągnęliśmy poprzez stworzenie typu danych dziedziczącego po float’cie i przeładowującego operacje arytmetyczne tak aby ich wywołania były zliczane. Z uwagi na wybrany sposób implementacji warunków zadania (tj. wypełnianie macierzy zerami, tak aby liczba wierszy i kolumn była równa najbliższej większej potędze dwójki), po zmierzeniu liczby FLOPS’ów otrzymaliśmy 9 różnych zestawów wartości dla algorytmu Binet’a, co zostało zaprezentowane w tabeli 1.

Rozmiar macierzy	Mnożenia	Dodawania	Odejmowania	Dzielenia
2	8	4	0	0
4	64	48	0	0
8	512	448	0	0
16	4096	3840	0	0
32	32768	31744	0	0
64	262144	258048	0	0
128	2097152	2080768	0	0
256	16777216	16711680	0	0
512	134217728	133955584	0	0

Tabela 1: Liczba poszczególnych operacji zmiennoprzecinkowych dla algorytmu Binet’a

Na poniższym wykresie zaprezentowaliśmy sumaryczną liczbę operacji zmiennoprzecinkowych dla rozmiarów macierzy z zakresu od 1 do 512.



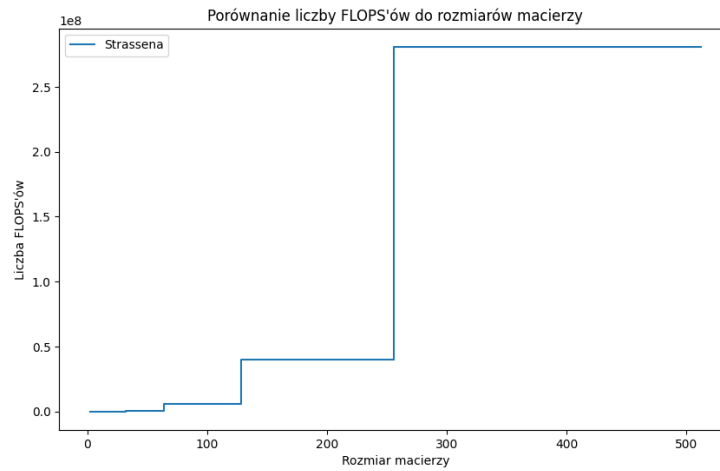
Rysunek 3: Sumaryczna liczba FLOPS'ów dla algorytmu Binet'a

Taką samą analizę przeprowadziliśmy dla algorytmu Strassen'a również otrzymując 9 unikalnych zestawów wartości, co widać w tabeli poniżej.

Rozmiar macierzy	Mnożenia	Dodawania	Odejmowania	Dzielenia
2	7	12	6	0
4	49	132	66	0
8	343	1116	558	0
16	2401	8580	4290	0
32	16807	63132	31566	0
64	117649	454212	227106	0
128	823543	3228636	1614318	0
256	5764801	22797060	11398530	0
512	40353607	160365852	80182926	0

Tabela 2: Liczba poszczególnych operacji zmiennoprzecinkowych dla algorytmu Strassen'a

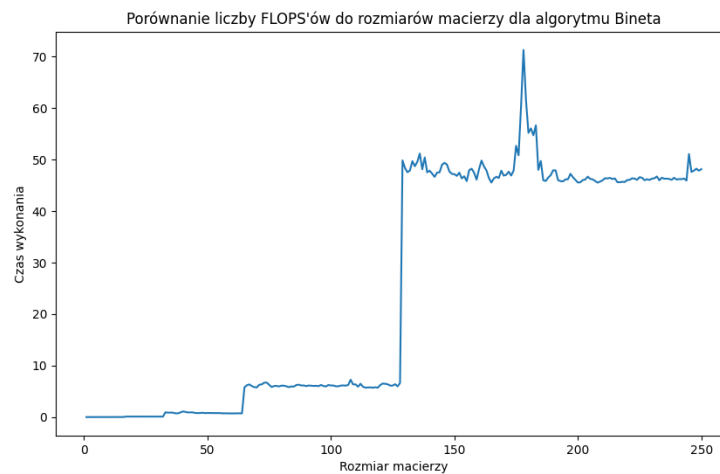
Ponownie sporządziliśmy wykres prezentujący sumaryczną liczbę FLOPS'ów dla macierzy o rozmiarach z zakresu od 1 do 512.



Rysunek 4: Sumaryczna liczba FLOPS'ów dla algorytmu Strassen'a

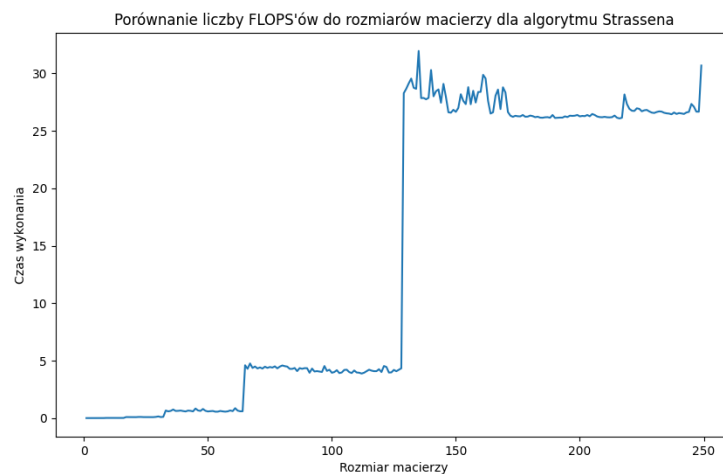
6.2 Porównanie czasów działania

Jak widać czasy wykonania znów tworzą schodkowy wykres, co wynika z faktu uzupełniania macierzy zerami. Osiągane wartości są dość duże, dla rozmiarów 257 - 250 było to już ok. 50s. Na wykresie można zobaczyć pik czasu wykonania dla rozmiarów macierzy pomiędzy 150 do 200, najprawdopodobniej wynika on po prostu z większego obciążenia procesora w tym czasie (Całość liczyła się ok. 100 minut).



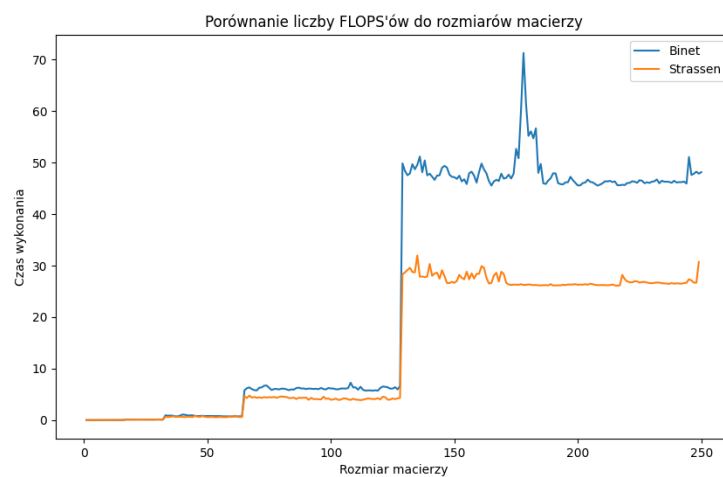
Rysunek 5: Wykres czasu działania algorytmu Bineta dla różnych rozmiarów macierzy

Podobnie sytuacja wygląda dla algorytmu Strassena, co widać na wykresie poniżej.



Rysunek 6: Wykres czasu działania algorytmu Strassen'a dla różnych rozmiarów macierzy

Sporządziliśmy jeszcze jeden wykres prezentujący oba czasy działania na jednym wykresie, co pięknie obrazuje niższą złożoność algorytmu Strassena.



Rysunek 7: Porównanie czasów działania algorytmu Binet'a i Strassena

7 Oszacowanie złożoności obliczeniowej

Złożoność obliczeniową postanowiliśmy oszacować teoretycznie. Dla algorytmu Binét’a algorytm wykonuje 8 mnożeń na każdym etapie, a liczba podziałów wynosi $\log_2[n]$, zatem liczba operacji wynosi $8^{\log_2 n} = n^3$. Jeśli chodzi o algorytm Strassena wykonuje on 7 mnożeń na każdym etapie, zatem złożoność wynosi $7^{\log_2 n} = n^{2.81}$.

8 Porównanie wyników z Octave

W celu sprawdzenia poprawności zaimplementowanych algorytmów porównaliśmy wyniki mnożenia 2 macierzy w Octave oraz za pomocą naszych implementacji algorytmu Binét’a i Strassena. Poniżej zamieszczony jest kod w Octave, który użyliśmy do pomnożenia macierzy.

```
A = [1.1, 2.2, 3.3, 7.1;  
      4.4, 5.5, 6.6, 3.2;  
      7.7, 8.8, 9.9, 5.1];
```

```
B = [9.9, 8.8, 7.7, 7.6;  
      6.6, 5.5, 4.4, 6.2;  
      3.3, 2.2, 1.1, 1.2];
```

```
C = A * B;
```

```
disp(C);
```

Wyniki otrzymane tymi trzeba sposobami były identyczne. Zaobserwowaliśmy, że implementacja mnożenia w Octave jest dużo lepsza i kod wykonuje się znacznie szybciej, niż w przypadku naszych algorytmów. Szczególnie przeprowadziliśmy testy dla macierzy 350x350. Kod w Octave wykonuje się w ułamku sekundy, gdzie nasza implementacja algorytmu Binét’a i Strassena potrzebuje paręset sekund.

9 Wnioski

1. Algorytm Strassena jest szybszy od algorytmu Binét’a, co zostało przez nas pokazane teoretycznie jak i zaobserwowane podczas testów.
2. Metoda mnożenia zaproponowana przez AI jest poprawna, jednak jej implementacja jest dość długa.
3. Jednym z powodów dość powolnego mnożenia macierzy jest implementacja algorytmów w języku Python, prawdopodobnie dużo lepsze czasy uzyskalibyśmy implementując je w C.

4. Octave nadaje się do mnożenia bardzo dużych macierzy.