MOwNiT - Aproksymacja

Jakub Frączek

15 kwietnia 2024

1 Funkcja dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

$$f(x) = 10 * m + \frac{\mathrm{x}^2}{k} - 10 * m * cos(k * x)$$

gdzie:

$k = 1.5$
$m = 3.0$
$x \in [-4\pi, 4\pi]$

2 Dane techniczne

2.1 Hardware

Laptop z procesorem Intel Core i5-9300H 2.4GHz oraz 32 GB pamięci RAM.

2.2 Software

Wykorzystany został system Windows 11 x64 oraz język Python w wersji 3.11.8 wraz z bibliotekami:

- math
- copy
- matplotlib
- numpy

3 Aproksymacja

Funkcja bazowe, czyli ciągi jednomianów $\varphi_j(x) = x^i, j = 0, 1, ..., m$
Funkcja aproksymująca: $f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^i 00$
F(x) - zadana na zbiorze dyskretnym $\{x_i\}, i = 0, 1, ..., n$
Szukamy takich współczynników a_j, że:

$$min! \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2$$

Układ normalny:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j] x_i^{k \longleftarrow \frac{\partial f}{\partial a_k}} = 0, k = 0, 1, ..., m$$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^k \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k, k = 0, 1, ..., m$$

$$\sum_{j=0}^{m}(\sum_{i=0}^{n} w(x_i)x_i^{j+k}a_j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)x_i^k$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \Sigma w_i & \Sigma w_i x_i & \Sigma w_i x_i^2 & \cdots & \Sigma w_i x_i^m \\ \Sigma w_i x_i & \Sigma w_i x_i^2 & \Sigma w_i x_i^3 & \cdots & \Sigma w_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma w_i x_i^m & \Sigma w_i x_i^{m+1} & \Sigma w_i x_i^{m+2} & \cdots & \Sigma w_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma w_i F_i \\ \Sigma w_i F_i x_i \\ \vdots \\ \Sigma w_i F_i x_i^m \end{pmatrix}$$

$$G \cdot A = B$$

4 Metody szacowania błędu przybliżenia funkcji

Wszystkie błędy zostały policzone z dokładnością do 100 równoodległych punktów.

4.1 Największa różnica wartości funkcji

Największa różnica między wartością funkcji aproksymowanej, a funkcji aproksymującej:

$$\max_{x\in[a,b]} |F(x) - \mathrm{P}_n(x)|$$

4.2 Błąd średniokwadratowy

Suma kwadratów różnic mięcy wartością funkcji aproksymowanej, a funkcji aproksymującej podzielona przez liczba punktów, w których wykonujemy porównanie:

$$\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{F(x_i)} - \mathrm{P_n(x_i)})^2$$

5 Analiza

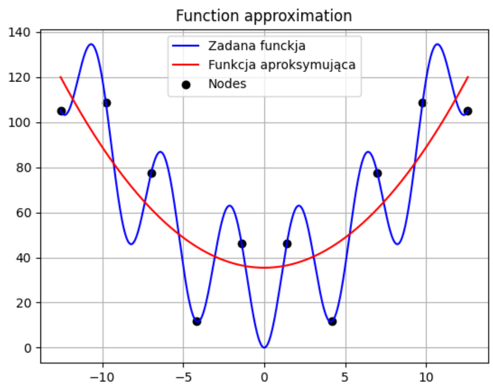
Podczas analizy funkcji aproksymującej, węzły oraz stopnie wielomianów dobrałem zgodnie z poniższym twierdzeniem:

Jeżeli $x_1, x_2, ..., x_n$ są różne oraz m $\leq$ n, to G $\neq$ 0

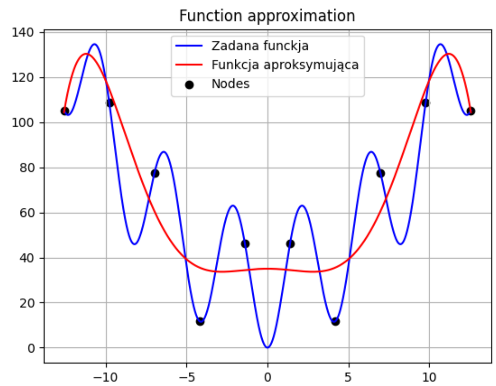
6 Przebieg funkcji dla wybranej liczby węzłów

6.1 Dla 10 węzłów

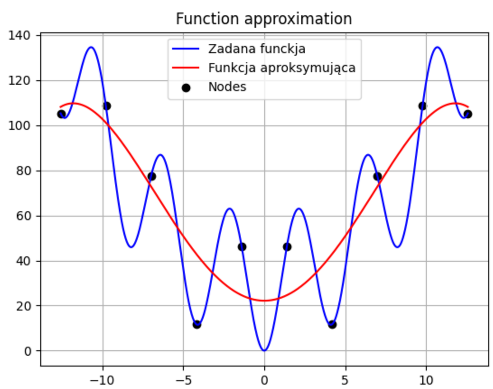
Jak widać na poniższych wykresach (wykres 1, wykres 2, wykres 3, wykres 4) przybliżenie to nie jest za dobre. Najlepszą aproksymację otrzymałem dla 10 stopnia wielomianu. Widać także, że błąd średniokwadratowy wychodzi dość mały przez to, że funkcja aproksymująca przechodzi mniej wiecej przez "środek"funkcji aproksymowanej.



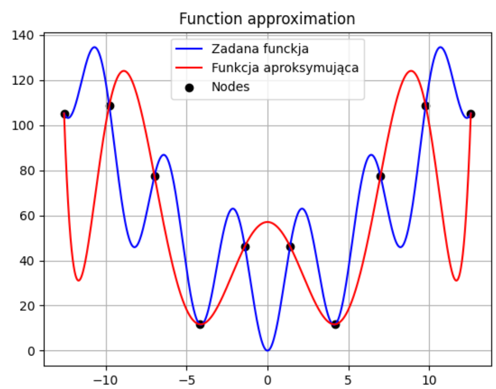
Wykres 1: Wielomian 3 stopnia



Wykres 3: Wielomian 8 stopnia

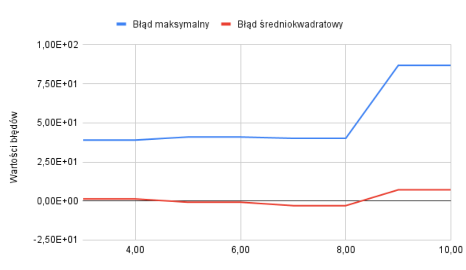


Wykres 2: Wielomian 5 stopnia



Wykres 4: Wielomian 10 stopnia

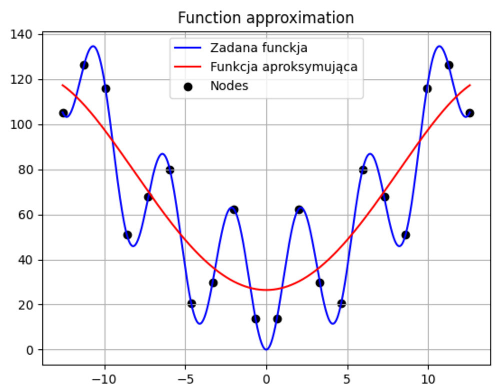
Poniżej, na wykresie 5 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



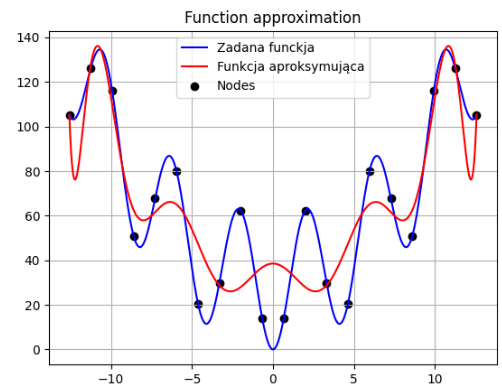
Wykres 5: Wartości błędów

6.2 Dla 20 węzłów

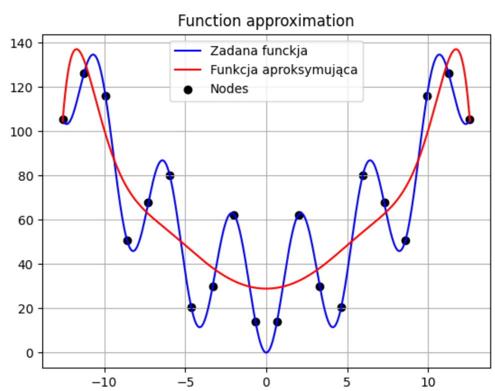
W tym przypadku wartości błędów nadal nie są najlepsze, najlepsze przybliżenia otrzymałem dla wielomianu 14 stopnia. Jak widać na poniższych 4 wykresach (wykres 6, wykres 7, wykres 8, wykres 9) dokładność przybliżenia rośnie wraz z wzrostem stopni wielomianu, jednak już przy stopniu zbliżonym do ilości węzłów uwidacznia się efekt Rungego.



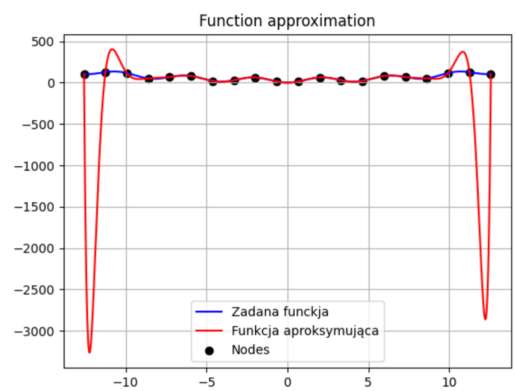
Wykres 6: Wielomian 5 stopnia



Wykres 8: Wielomian 14 stopnia

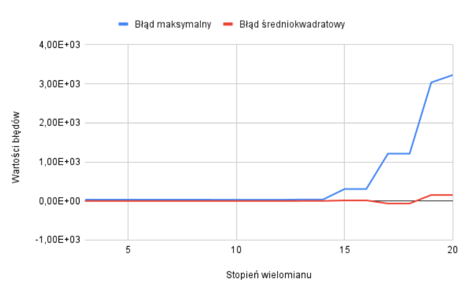


Wykres 7: Wielomian 12 stopnia



Wykres 9: Wielomian 20 stopnia

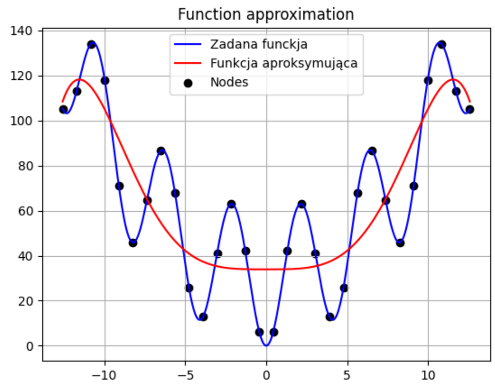
Poniżej, na wykresie 10 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



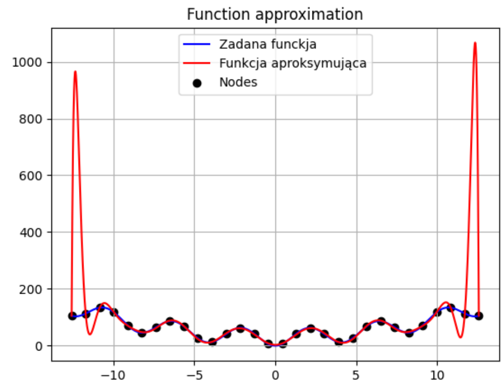
Wykres 10: Wartości błędów

6.3 Dla 30 węzłów

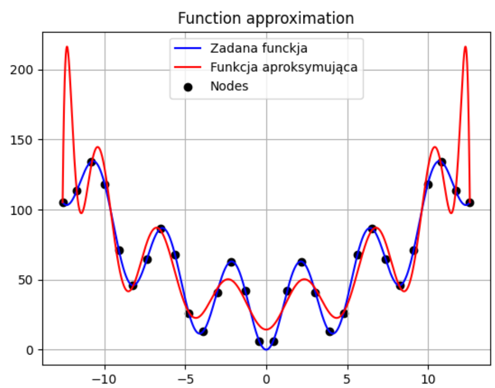
Dla 30 węzłów już można otrzymać dośc lepiej dopasowaną funkcję, jednak od 17 stopnia w górę bardzo szybko uwidacznia się efekt Rungego (wykres 11, wykres 12, wykres 13, wykres 14).



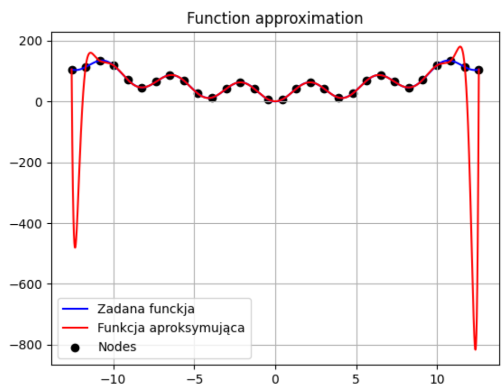
Wykres 11: Wielomian 7 stopnia



Wykres 13: Wielomian 23 stopnia

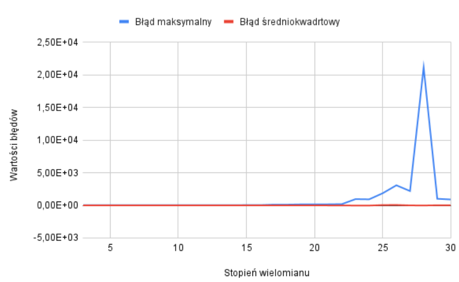


Wykres 12: Wielomian 17 stopnia



Wykres 14: Wielomian 30 stopnia

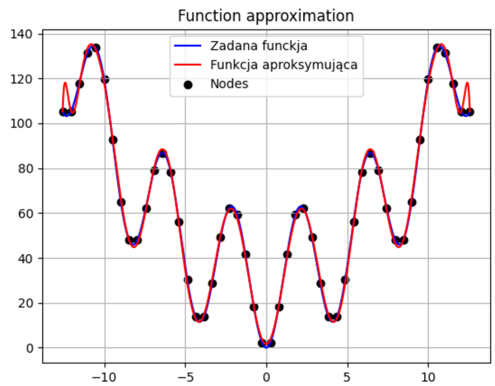
Poniżej, na wykresie 15 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



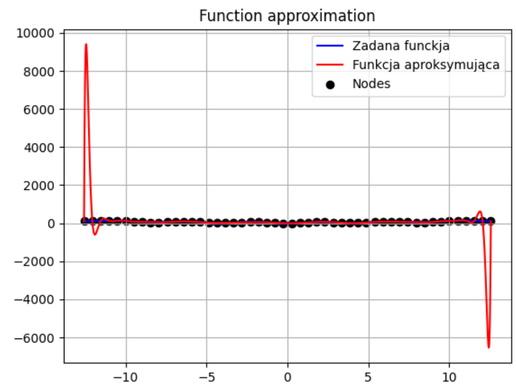
Wykres 15: Wartości błędów

6.4 Dla 50 węzłów

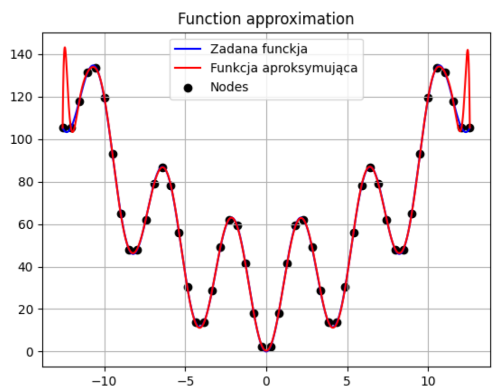
Dla 50 węzłów przybliżenie jest juz naprawdę dokładne, oczywiście poza krańcami przedziału, w których wraz ze wzrostem stopnia wielomianu wzrasta błąd przybliżenia, co zostało pokazane na poniższych wykresach (wykres 16, wykres 17, wykres 18 i wykres 19).



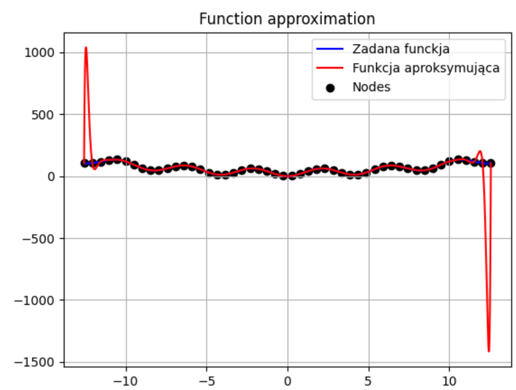
Wykres 16: Wielomian 21 stopnia



Wykres 18: Wielomian 41 stopnia

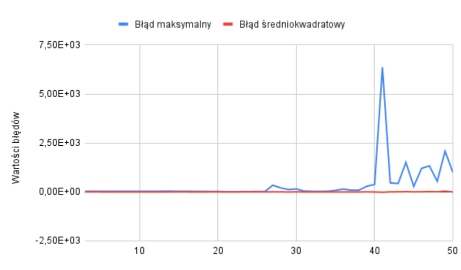


Wykres 17: Wielomian 33 stopnia



Wykres 19: Wielomian 50 stopnia

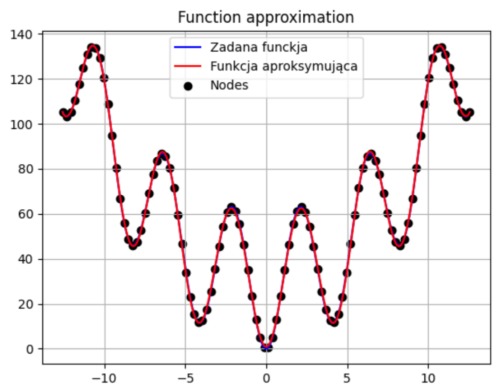
Poniżej, na wykresie 20 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



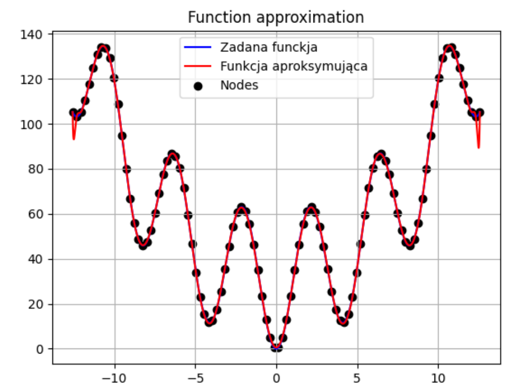
Wykres 20: Wartości błędów

6.5 Dla 100 węzłów

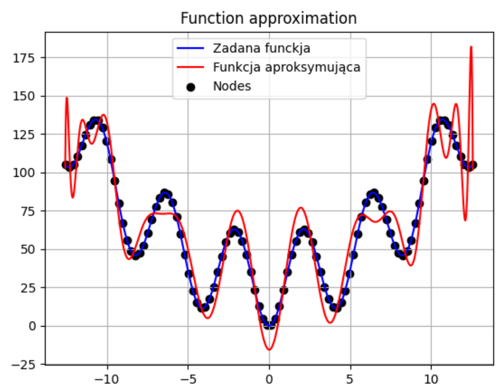
W tym przypadku przybliżenie jest najdokładniejsze dla 23 stopnia wielomianu, a następnie delikatnie oscyluje i w końcu znacznie się pogarsza (wykres 21, wykres 22, wykres 23 i wykres 24).



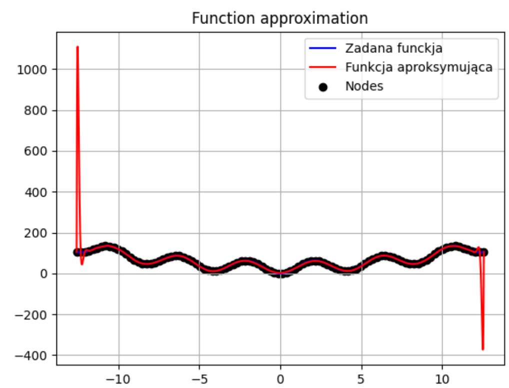
Wykres 21: Wielomian 23 stopnia



Wykres 23: Wielomian 60 stopnia



Wykres 22: Wielomian 28 stopnia



Wykres 24: Wielomian 100 stopnia

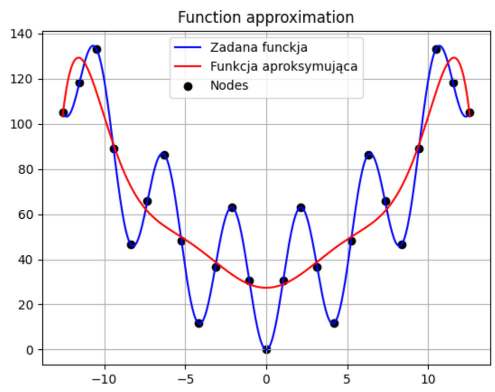
Poniżej, na wykresie 25 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.

Wykres 25: Wartości błędów

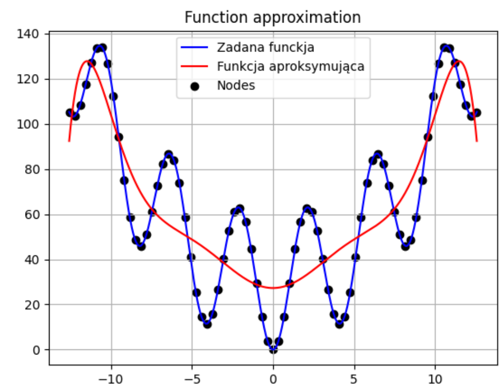
7 Przebieg funkcji dla wybranego stopnia wielomianu

jak widać na poniższych wykresach (wykres 26, wykres 27, wykres 28, wykres 29) dla 10 stopnia wielomianu nie otrzymamy dobrego przybliżenia.

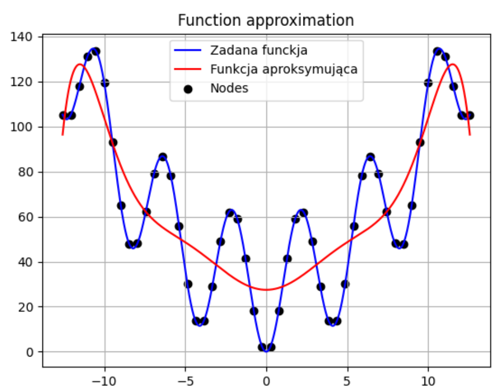
7.1 Dla 10 stopnia



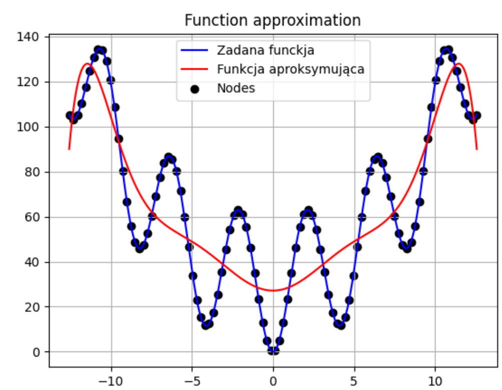
Wykres 26: Dla 25 węzłów



Wykres 28: Dla 75 węzłów

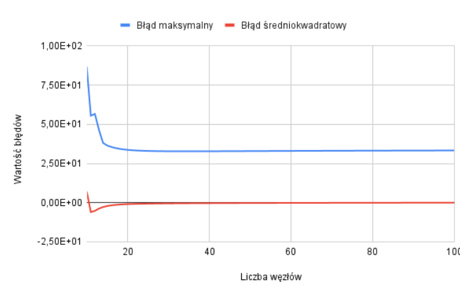


Wykres 27: Dla 50 węzłów



Wykres 29: Dla 100 węzłów

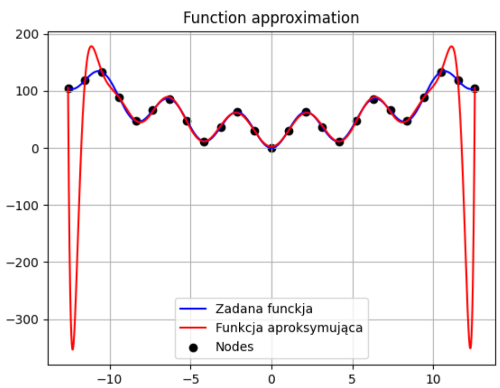
Poniżej, na wykresie 30 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



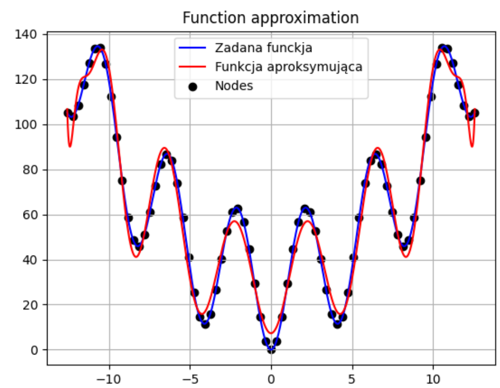
Wykres 30: Wartości błędów

7.2 Dla 20 stopnia

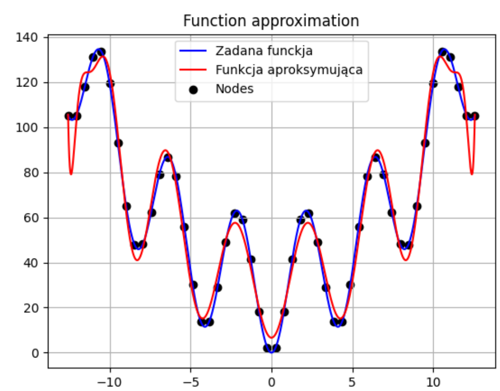
Sytuacja dla 20 stopnia jest dużo lepsza od poprzedniej, gdyż tutaj dla odpowiednio dużej liczby węzłów można otrzymać dość zadowalające przybliżenie. Można zauważyć (wykres 31, wykres 32, wykres 33, wykres 34), że wraz ze wzrostem liczby węzłów maleje niedokładność na krańcach przedziałów. W tym przypadku najlepsze przybliżenie otrzymałem dla 75 węzłów



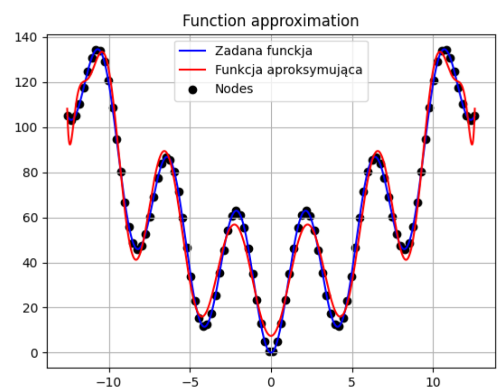
Wykres 31: Dla 25 węzłów



Wykres 33: Dla 75 węzłów

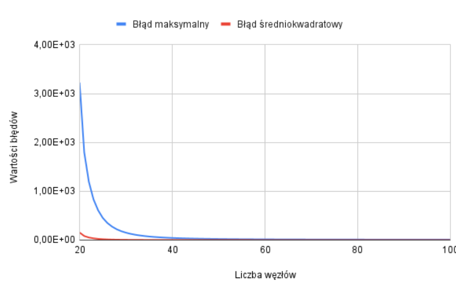


Wykres 32: Dla 50 węzłów



Wykres 34: Dla 100 węzłów

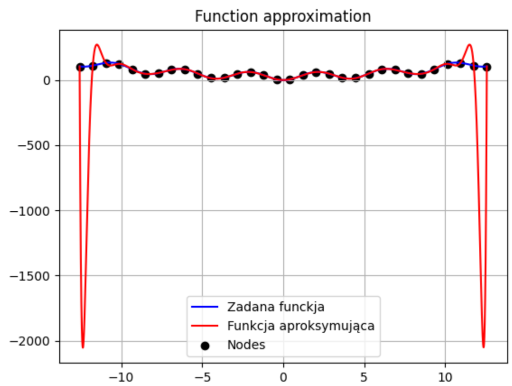
Poniżej, na wykresie 35 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



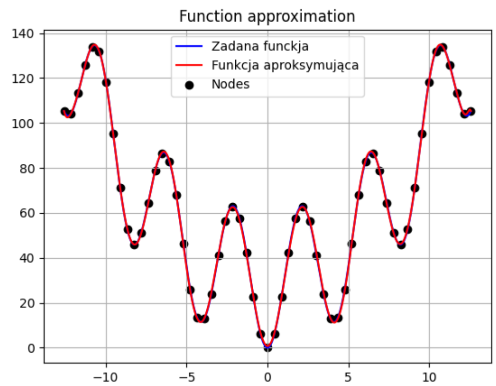
Wykres 35: Wartości błędów

7.3 Dla 30 stopnia

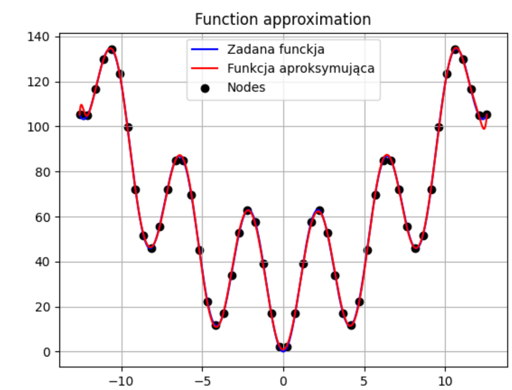
Dla wielomianu 30-go stopnia najlepsze przybliżenie otrzymałem dla 52 węzłów (wykres 37). Później wraz ze wzrostem węzłów dochodziło do znacznej oscylacji dokładności przybliżenia i na wykresach 38 i 39 pokazane są teże dość dokładne przybliżenia dla większej ilości węzłów. Natomiast dla 32 węzłów (wykres 36) widać znaczy błąd przybliżenia.



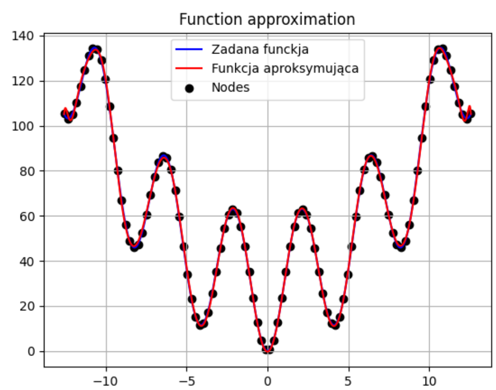
Wykres 36: Dla 32 węzłów



Wykres 38: Dla 59 węzłów

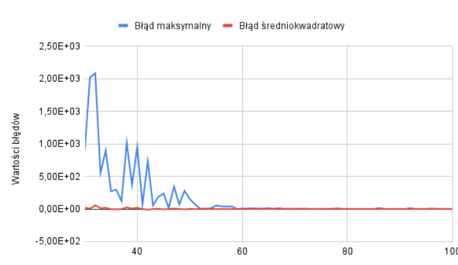


Wykres 37: Dla 52 węzłów



Wykres 39: Dla 100 węzłówa

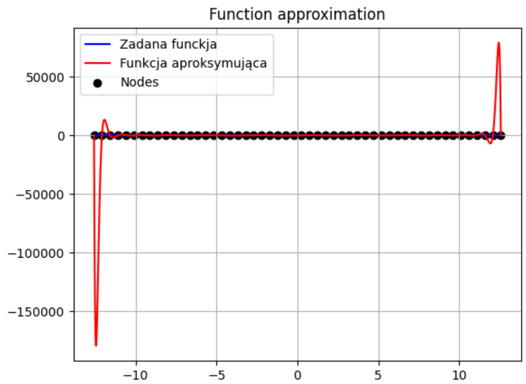
Poniżej, na wykresie 40 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



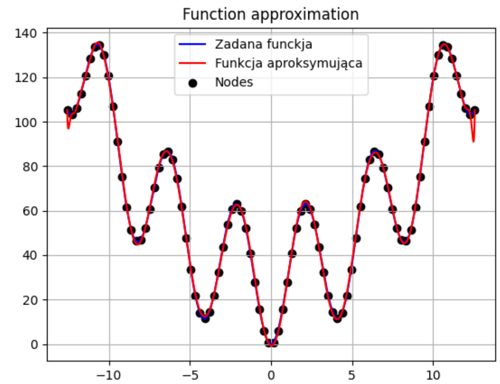
Wykres 40: Wartości błędów

7.4 Dla 50 stopnia

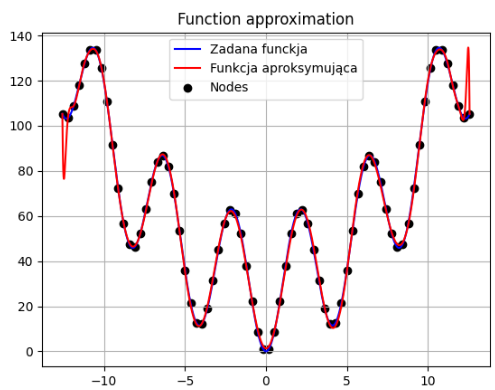
Ja widać na poniższych wykresach (wykres 41, wykres 42, wykres 43, wykres 44) aproksymacje są już dużo gorsze niż w przypadku wielomianiu 30-go stopnia i pogarszają się wraz z wzrostem liczby węzłów.



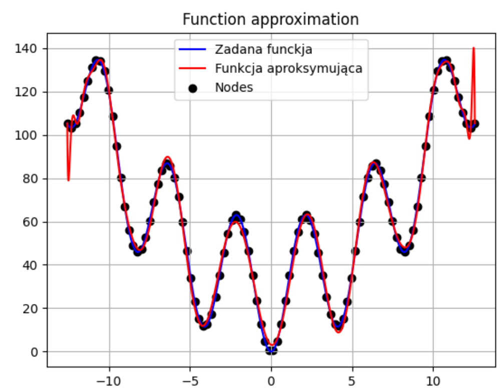
Wykres 41: Dla 52 węzłów



Wykres 43: Dla 90 węzłów

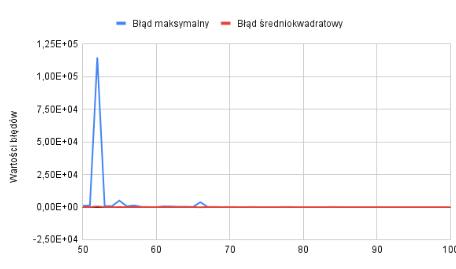


Wykres 42: Dla 74 węzłów



Wykres 44: Dla 100 węzłówa

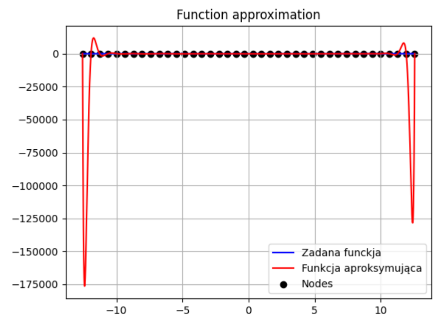
Poniżej, na wykresie 45 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



Wykres 45: Wartości błędów

8 Efekt Rungego

Na podstawie poprzednich podpunktów można z pewnością stwierdzić, że efekt Rungego występował bardzo często podczas aproksymacji wielomianowej. Najbardziej widoczny był dla 40 węzłów i wielomianu 37-go stopnia. Ta sytuacja została pokazana na wykresie poniżej, a błąd tego przybliżenia w tabelce pod wykresem.

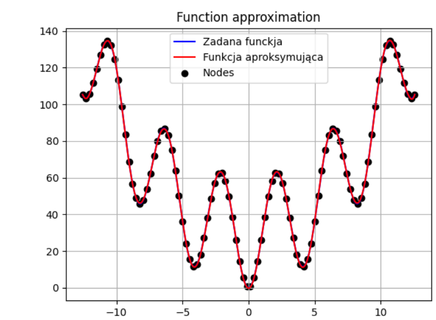


Wykres 46: Najlepsze przybliżenie funkcji

Błąd maksymalny	176413.32885002135
Błąd średniokwadratowy	3832.7665755629732

9 Najlepsze przyblizenie funkcji

Najlepsze przybliżenie aproksymowanej funkcji otrzymałem dla 94 węzłów i wielomianu 26 stopnia, został on pokazany na poniższym wykresie, a jego błąd maksymalny i średniokwadratowy poniżej w tabelce. Można powiedzieć, że jest to naprawdę dobre przybliżenie.



Wykres 47: Najlepsze przybliżenie funkcji

Błąd maksymalny	0.5014720569615605
Błąd średniokwadratowy	0.0017181768299556364

10 Wnioski

- Zwiększanie stopnia wielomianu dla ustalonej liczby węzłów powoduje zwiększejnie dokładności przybliżenia tylko do pewnego stopnia, potem zaczyna się zwiększać efekt Rungego i przybliżenie jest coraz gorsze
- Zwiększanie liczby węzłów dla ustalonego stopnia wielomianu prowadzi do zwiększenia dokładności przyblizenia.
- Wielomiany o dużym stopniu (30, 40, 50, ...) bardzo często stają się coraz mniej dokładne