MOwNiT - Zagadnienie interpolacji Hermite'a

Jakub Frączek

21 marca 2024

1 Temat ćwiczenia

1.1 Przygotowanie

Zagadnienie interpolacji: Pprzygotować program wyznaczający wielomian interpolujący zgodnie ze wzorem Hermite'a.

W obu przypadkach węzły mogą być rozmieszczone:

- równomiernie w całym przedziale (uwzględniając końce przedziału),
- zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa.

Przygotować program do wizualizacji wykresu funkcji zadanej określoną liczbą punktów lub określonym wzorem.

1.2 Właściwe ćwiczenie

1. Dla jednej z poniższych funkcji (podanej w zadaniu indywidualnym) wyznacz dla zagadnienia Hermite'a wielomian interpolujący. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa*. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

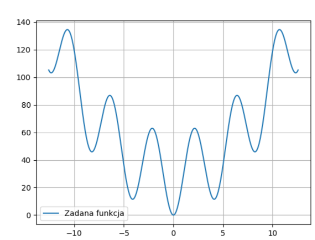
1.3 Funkcja dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

$$f(x) = 10 * m + \frac{\mathrm{x}^2}{k} - 10 * m * cos(k * x)$$

gdzie:

$k = 1.5$
$m = 3.0$
$x \in [-4\pi, 4\pi]$

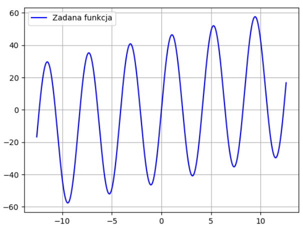
Wykres funkcji (wykres 1)



Wykres 1: Dana funkcja

1.4 Pochodna funkcji dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

Pochodna funkcji (wykres 2)



Wykres 2: Dana funkcja

2 Dane techniczne

2.1 Hardware

Doświadczenie zostało przeprowadzone na komputerze z procesorem Intel Core i5-9300H 2.40 GHz oraz 32 GB pamięci RAM 2666 MHz.

2.2 Software

Wykorzystany został język Python w wersji 3.11.8 wraz z bibliotekami:

- math
- copy
- matplotlib
- numpy

3 Iterpolacja Hermite'a

Wielomian interpolacyjny Hermite'a można wyrazić wzorem

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{b}_l \mathrm{p}_l(x) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{\mathrm{m}_i - 1} \mathrm{b}_{(s(i)+j)} \cdot \mathrm{p}_{s(i)+j}(x)$$

gdzie:

$$\mathrm{p}_{s(0)}(x) = 1$$

$$\mathrm{p}_{s(i)+j}(x) = (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)^{\mathrm{m}_0} (\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)^{\mathrm{m}_1} ... (\mathrm{x} - \mathrm{x}_{\mathrm{i}-1})^{\mathrm{m}_{i-1}} (\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{i})^{\mathrm{j}}$$

$$s(i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0 \\ \mathrm{m}_0 + \mathrm{m}_1 + ... + \mathrm{m}_{i-1} & \text{dla } i > 0 \end{cases}$$

$$i = 0, 1, ..., k$$

$$j = 0, 1, ..., \mathrm{m}_i - 1$$

Współczynniki b_l to kolejne ilorazy różnicowe.

4 Metody szacowania błędu przybliżenia funkcji

4.1 Największa różnica wartości funkcji

Największa różnica między wartością funkcji interpolowanej, a funkcji interpolującej:

$$\max_{x\in[a,b]} |F(x) - \mathrm{P}_n(x)|$$

4.2 Błąd średniokwadratowy

Suma kwadratów różnic mięcy wartością funkcji interpolowanej, a funkcji interpolującej podzielona przez ilość punktów, w których wykonujemy porównanie:

$$\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{F}(\mathrm{x_i}) - \mathrm{P_n}(\mathrm{x_i}))^2$$

Jak zostało również zaznaczone poniżej, w tym ćwiczeniu do wyznaczania błędów korzystam z 1000 równoodległych punktów, zatem w tym przypadku $N = 1000$.

5 Wyniki

Błędy zostały policzone z wykorzystaniem 1000 równoodlegle wygenerowanych punktów.

5.1 Błąd maksymalny dla węzłów z zakresu [3, 30]

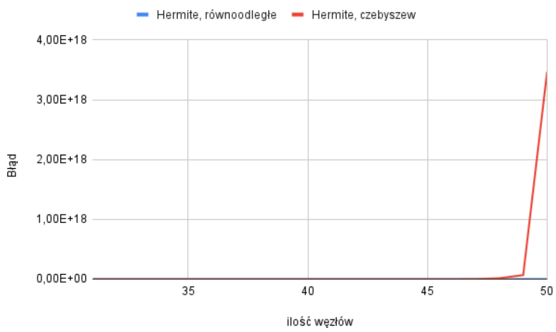
W tym przypadku, jak pokazano na wykresie 3 i 4, dla liczby węzłów od 7 do 12 efekt Rungego był największy. Widać także, że błąd zaczyna maleć do 16 / 21 węzła. Widać także, że korzystając z węzłów Czebyszewa do 20 węzła można średnio otrzymać dużo mniejszy błąd niż korzystając z węzłów równoodległych.

Wykres 3: Błąd maksymalny

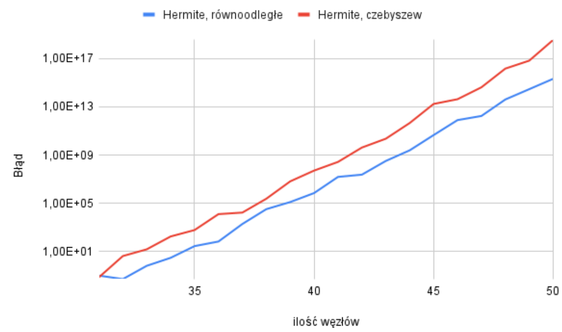
Wykres 4: Błąd w skali logarytmicznej

5.2 Błąd maksymalny dla węzłów z zakresu [31, 50]

Jak widać na wykresach 5 i 6 od 30 węzła błąd zaczyna konsekwentnie rosnąć, a już dla 50 węzłów jest on ogromny. Można zauważyć także, że błąd dla węzłów Czebyszewa rośnie szybciej od błędu dla węzłów równoodległych. Zaobserwowany błąd nie wynika już z efektu Rungego, a z niedokładności zapisu liczb zmiennoprzecinkowych w komputerze, co implikuje niedokładne operacje na tych liczbach oraz brak możliwości zapisania każdej możliwej wartości co skutkuje zaokrągleniami i w dużej skali, tak jak tutaj już jest to bardzo widoczne i uniemożliwia precyzyjne przybliżenie zadanej funkcji.



Wykres 5: Błąd maksymalny

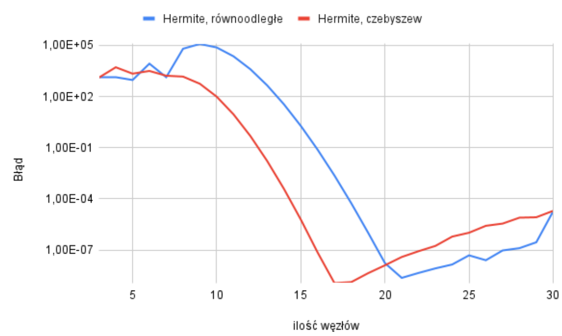


Wykres 6: Błąd w skali logarytmicznej

5.3 Błąd średniokwadratowy dla węzłów z zakresu [3, 30]

Podobnie jak dla błędu maksymalnego, średio błąd dla węzłów czebyszewa jest mniejszy do 20 węzła, potem sytuacja się odwraca co widać na wykresie 8 oraz można zaobserować "peak"efektu Rungego od 7 do 12 węzła (wykres 7).

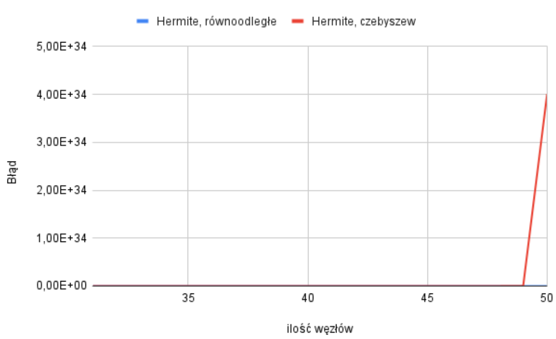
Wykres 7: Błąd średniokwadratowy



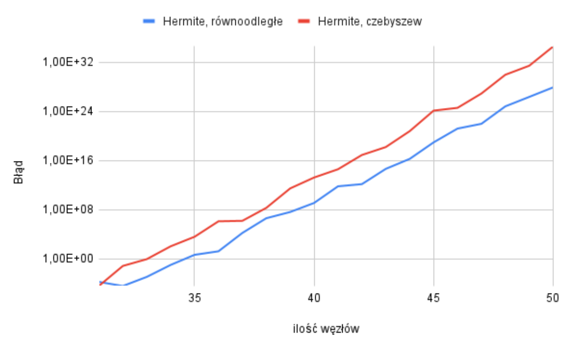
Wykres 8: Błąd w skali logarytmicznej

5.4 Błąd średniokwadratowy dla węzłów z zakresu [31, 50]

Sytuacja jest taka sama jak dla błędu maksymalnego.Jak widać na wykresach 9 i 10 od 30 węzła wartości błędów zaczynają powoli rosnąć i szybko osiągają nieakceptowany przy przybliżeniu pułap. Błąd dla węzłów Czebyszewa jest w tym przedziale większy niż dla węzłów równoodległych.



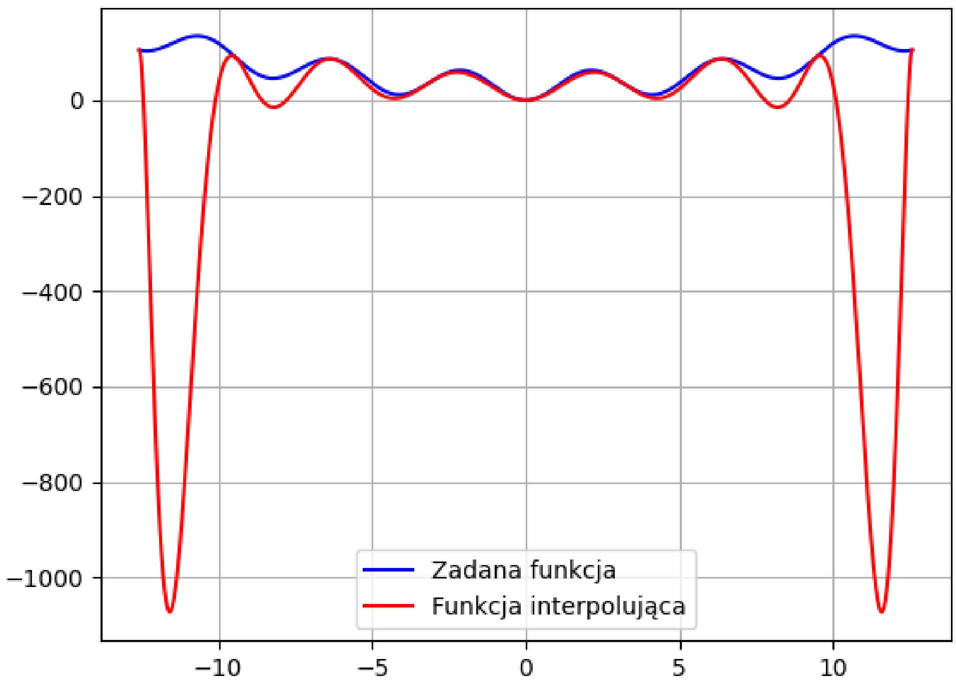
Wykres 9: Błąd średniokwadratowy



Wykres 10: Błąd w skali logarytmicznej

5.5 Efekt Rungego

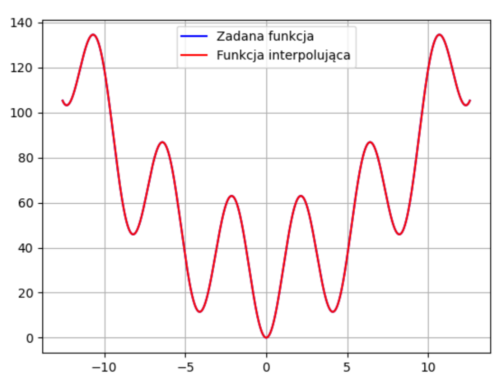
"Peak"efektu Rungego zachodzi dla 8 równoodległych węzłów, co zostało zaprezentowane na wykresie 11. Jak widać w najbardziej oddalonym punkcjia błąd wynosi aż ponad 1000. Następnie znaczyna zanikać, aż do 21 węzła, dla którego otrzymujemy najlepsze przybliżenie metodą równoodległych węzłów.



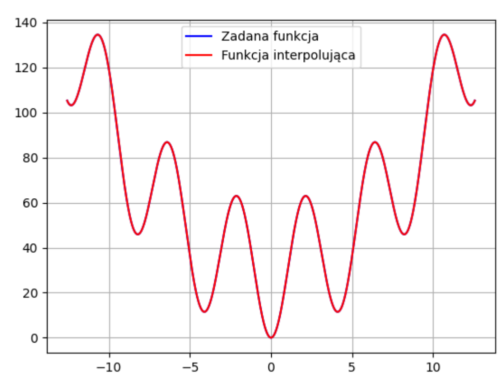
Wykres 11: Dana funkcja

5.6 Najlepsze przybliżenie interpolowanej funkcji

Najlepszym przybliżeniem ze względu na największą rónicę wartości była interpolacja z wykorzystaniem 19 węzłów czebyszewa (wykres 12), a ze względu na błąd średniokwadratowy interpolacja z wykorzystaniem 23 równoodległych węzłów (wykres 13).



Wykres 12: Interpolacja z 19 w. Czebyszewa



Wykres 13: Interpolacja z 23 równoodległych w.

Poniżej w tabli 1 oraz 2 znajdują się wartośći najmniejszych otrzymanych błędów dla dwóch różnych sposobów wyboru węzłów. Na zielono zaznaczonea jest wartość namniejsza dla danego typu błędu i sposobu doboru węzłów, a obok dla porównania znajduje się wartość otrzymana alternatywnym sposobem generacji węzłów. Warto zauważyć, że nie ma między tymy wartościami ogromnej różnicy, a otrzymane błędy są dość małe.

ilość węzłów	Hermite, równoodległe	Hermite, czebyszew
19	5,81E-03	7,92E-04
21	4,61E-04	2,04E-03

Tabela 1: Prównanie błędu maksymalnego dla najmniejszych otrzymanych błędów

ilość węzłów	Hermite, równoodległe	Hermite, czebyszew
19	1,05E-06	4,46E-09
23	8,54E-09	1,77E-07

Tabela 2: Prównanie błędu średniokwadratowego dla najmniejszych otrzymanych błędów

5.7 Porównanie warości błędu maksymalnego dla wybranej liczby węzłów

Jak można zobaczyć w tabli 3, zachodzi drasyczna różnica pomiędzy błędem dla 40, a 50 węzłów.

ilość węzłów	Hermite, równoodległe	Hermite, czebyszew
10	1,01E+03	2,31E+01
20	1,03E-03	1,56E-03
30	3,33E-02	5,43E-02
40	7,16E+05	5,22E+07
50	2,09E+15	3,47E+18

Tabela 3: Prównanie błędu maksymalnego dla wybranej liczby węzłów

5.8 Porównanie warości błędu średniokwadratowego dla wybranej liczby węzłów

Podobnie jak powyżej tabela 4 pokazuje ogromną różnicę błędów pomiędzy 40, a 50 węzłem.

ilość węzłów	Hermite, równoodległe	Hermite, czebyszew
10	7,43E+04	9,75E+01
20	1,75E-08	1,29E-08
30	1,87E-05	2,00E-05
40	1,20E+09	1,70E+13
50	8,65E+27	4,01E+34

Tabela 4: Prównanie błędu średniokwadratowego dla wybranej liczby węzłów

6 Wnioski

- Dla małej ilości węzłów (do 20) lepsze przybliżenie funkcji dają węzły Czebyszewa
- Błąd maksymalny pozwala trafnie określić, gdzie zachodzi efekt Rungego (dla małej ilości węzłów). Dla dużej ilości węzłów bardzo widoczny jest problem z reprezentacją liczb zmiennoprzecinkowych w komputerze, ponieważ otrzmane wartości błędów są ogromne
- Iterpolacja Hermite'a daje dobre przybliżenie dla odpowiednio dobranej liczby węzłów.