

# MOwNiT - Funkcje sklepane

Jakub Frączek

9 kwietnia 2024

## 1 Temat ćwiczenia

Dla funkcji  $f(x)$  zadanej w zadaniu dotyczącym interpolacji wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklepaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia. Dla obu rodzajów funkcji (2-go i 3-go stopnia) należy wykonać obliczenia dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych. Podobnie jak poprzednio określić dokładność interpolacji – dla różnej liczby przedziałów i dla różnych warunków brzegowych. Porównać interpolację funkcjami sklepanymi drugiego i trzeciego stopnia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki. Opisać dokładnie przyjęte warunki brzegowe.

## 2 Funkcja dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

$$f(x) = 10 * m + \frac{x^2}{k} - 10 * m * \cos(k * x)$$

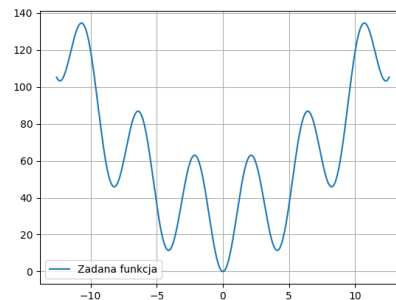
gdzie:

$$k = 1.5$$

$$m = 3.0$$

$$x \in [-4\pi, 4\pi]$$

Wykres funkcji (wykres 1)



Wykres 1: Dana funkcja

## 3 Dane techniczne

### 3.1 Hardware

Laptop z procesorem Intel Core i5-9300H 2.4GHz oraz 32 GB pamięci RAM.

## 3.2 Software

Wykorzystany został system Windows 11 x64 oraz język Python w wersji 3.11.8 wraz z bibliotekami:

- math
- copy
- matplotlib
- numpy

## 4 Funkcje sklejące

### 4.1 Kwadratowa funkcja sklejana

#### 4.1.1 Wyznaczanie współczynników

Kwadratowa funkcja sklejana musi spełniać warunki:

- $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$  (1)
- $S_i(x_i) = f(x_i) = y_i$  (2)
- $s_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$  (3)
- $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$  (4)

Podstawiam  $x_i$  do (1) i korzystam z własności (2), z tego otrzymuję:

$$y_i = S_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 = a_i \Rightarrow a_i = y_i \quad (5)$$

Korzystając z warunku (1) i (4):

$$b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$c_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \quad (6)$$

Korzystając z (1), (2), (3) i (5):

$$y_{i+1} = S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 \quad (7)$$

Korzystając z (6) i (7):

$$y_{i+1} - y_i = b_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = b_i + \frac{1}{2}b_{i+1} - \frac{1}{2}b_i$$

$$2 \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = b_{i+1} + b_i$$

$$b_i + b_{i-1} = 2 \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Oznaczam  $\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$  jako  $v$  i tworzę układ równań w celu wyliczenia współczynnika  $b_i$

$$\begin{aligned}
b_1 + b_2 &= 2v_2 \\
b_2 + b_3 &= 2v_3 \\
&\vdots \\
b_{n-2} + b_{n-1} &= 2v_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ \vdots \\ 2v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Jak widać jest  $n - 1$  równań i  $n$  niewiadomych, zatem trzeba będzie ustalić dodatkowy warunek brzegowy.

#### 4.1.2 Natural Boundary

Założenia:

$$S'_1(x_1) = 0 \quad \vee \quad S'_{n-1}(x_n) = 0 \quad (8)$$

Korzystając z (1) i (8):

$$S'_1(x_1) = 0 = b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) \Rightarrow b_1 = 0 \quad (9)$$

Zatem:

$$b_1 + b_2 = 2v_2 \Rightarrow b_2 = 2v_2$$

$$b_2 + b_3 = 2v_3 \Rightarrow b_3 = 2v_3 - 2v_2$$

$$\vdots$$

$$b_n = 2(v_n - v_{n-1} + v_{n-2} - \dots \pm v_2)$$

#### 4.1.3 Clamped Boundary

Założenia:

$$S'_1(x_1) = f'_1(x) \quad \vee \quad S'_{n-1}(x_n) = f'_{n-1}(x) \quad (10)$$

$f'_1(x)$  można zapisać jako:

$$f'_1(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (11)$$

Korzystając z (1), (10) i (11):

$$b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = v_2$$

Zatem:

$$b_1 + b_2 = 2v_2 \Rightarrow b_2 = v_2$$

$$b_2 + b_3 = 2v_3 \Rightarrow b_3 = 2v_3 - v_2$$

$$\vdots$$

$$b_n = 2(v_n - v_{n-1} + v_{n-2} + \dots \pm v_3) \pm v_2$$

## 4.2 Sześcienna funkcja sklejana

### 4.2.1 Wyznaczanie współczynników

Wzór na sześcienną funkcję sklejaną został podany poniżej:

$$s(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_i) + c_i \cdot (x - x_i)^2 + d_i \cdot (x - x_i)^3 \text{ dla } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Dodatkowo funkcja sklejana 3-go stopnia musi spełniać poniższe warunki:

- $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$
- $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$
- $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$
- $S''(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$

Ponieważ  $S_i(x)$  jest sześcienna, to  $S''_i(x)$  jest liniowa na przedziale  $[x_i, x_{i+1}]$ . Wprowadzam  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , wtedy:

$$S''_i(x) = S''_i(x_i) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + S''_i(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{h_i}$$

Całkując dwukrotnie otrzymujemy:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i} (x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x)$$

, gdzie C i D - stałe całkowania Korzystając z warunków interpolacji:  $S_i(x_i) = y_i$  oraz  $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  można wyliczyć C i D. Po wyliczeniu tych stałych otrzymujemy:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i} (x - x_i)^3 + \left( \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S''_i(x_{i+1})h_i}{6} \right) (x - x_i) + \left( \frac{y_i}{h_i} - \frac{S''_i(x_i)h_i}{6} \right) (x_{i+1} - x)$$

W powyższym wzorze nadal nie znamy  $S''_i(x)$ . W celu jego wyliczenia należy skorzystać z warunku ciągłości pierwszej pochodnej. Różniczkując zatem  $S_i(x)$ :

$$S'_i(x_i) = -\frac{h_i}{3} S''_i(x_i) - \frac{h_i}{6} S''_i(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

Dla przejrzystości należy wprowadzić dwa symbole:

- $\sigma_i = \frac{1}{6} S''_i(x_i)$
- $\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$

Wtedy:

$$\begin{aligned} S'_i(x_i) &= -2\sigma_i h_i - \sigma_{i+1} h_i + \Delta_i \\ S'_i(x_i) &= \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \end{aligned}$$

Wtedy:

$$S'_{i-1}(x_i) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

Teraz korzystając z warunku ciągłości ( $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ ):

$$\Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

Finalnie otrzymujemy układ równań liniowych:

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n-1$$

Jak można zauważyć w układzie równań mamy  $n$  niewiadomych i  $n-2$  równań, zatem należy określić dwa dodatkowe warunki brzegowe.

#### 4.2.2 Default Boundary

Warunki:

- $C_1(x)$  - f. sześcienna przez pierwsze 4 punkty
- $C_n(x)$  - f. sześcienna przez ostatnie 4 punkty

$$S'''(x_1) = C'''_1 \quad S'''(x_n) = C'''_n$$

Stałe  $C'''_1, C'''_n$  mogą być określone bez znajomości  $C_1(x)$  i  $C_n(x)$ :

- $\Delta_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$
- $\Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i}$
- $\Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}$

Różniczkując wzór na  $S''(x)$  na przedziale  $[x_i, x_{i+1}]$ , otrzymujemy:

$$S'''(x_1) = C'''_1(x_1) \Rightarrow \frac{6}{h_1}(\sigma_2 - \sigma_1) = 6\Delta_i^{(3)}$$

$$S'''(x_n) = C'''_n(x_n) \Rightarrow \frac{6}{h_{n-1}}(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = 6\Delta_{n-3}^{(3)}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

- $-h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)}$
- $h_{n-1}\sigma_{n-1} - h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)}$

Finalnie otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{bmatrix}$$

### 4.2.3 Natural Boundary

Warunki:

$$S''(x_1) = S''(x_n) = 0$$

Biorąc pod uwagę, że  $\sigma_i = \frac{1}{6}S''_i(x_i)$  otrzymujemy:

$$S''(x_1) = S''_1(x_1) = 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = 0$$

$$S''(x_n) = S''_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow \sigma_n = 0$$

Dzięki temu otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 5 Metody szacowania błędu przybliżenia funkcji

### 5.1 Największa różnica wartości funkcji

Największa różnica między wartością funkcji interpolowanej, a funkcji interpolującej:

$$\max_{x \in [a, b]} |F(x) - P_n(x)|$$

### 5.2 Błąd średniokwadratowy

Suma kwadratów różnic między wartością funkcji interpolowanej, a funkcji interpolującej podzielona przez liczbę punktów, w których wykonujemy porównanie:

$$\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N (F(x_i) - P_n(x_i))^2$$

## 6 Wyniki

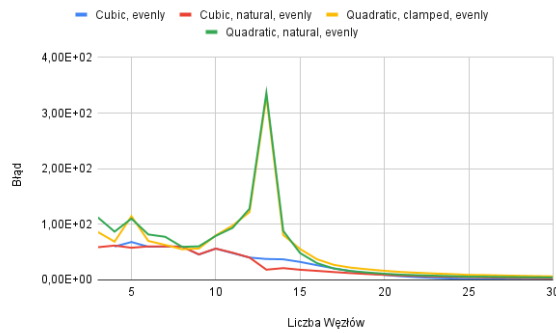
### 6.1 Błąd maksymalny

Błąd został wyliczony dla funkcji sklejań 2-go i 3-go stopnia oraz różnych warunków brzegowych. Dla każdego wariantu, wybrałem także dwa sposoby generowania węzłów tj. równoodległe oraz Czebyszewa.

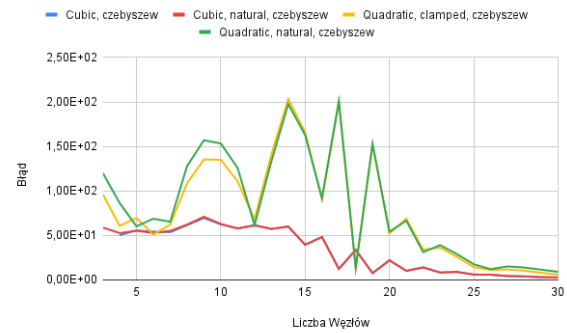
#### 6.1.1 Błąd maksymalny dla węzłów z zakresu [3, 30]

Na początek warto zaznaczyć, że dla funkcji sklejań 3-go stopnia z domyślnym warunkiem brzegowym nie można było policzyć błędu dla 3 węzłów, gdyż warunek zakłada istnienie co najmniej 4 punktów.

Jak wyraźnie widać, na wykresach 2 i 3, wynik otrzymany dla węzłów Czebyszewa jest trochę gorszy od wyniku dla węzłów równoodległych.

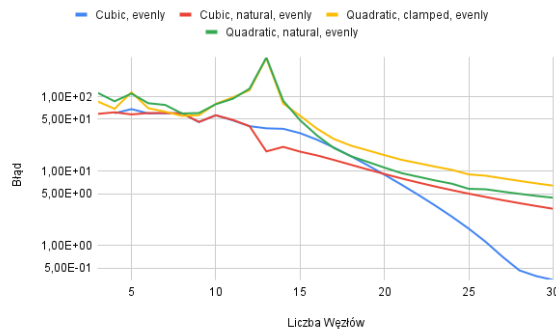


Wykres 2: Błąd maksymalny 3-30 dla równoodległych węzłów

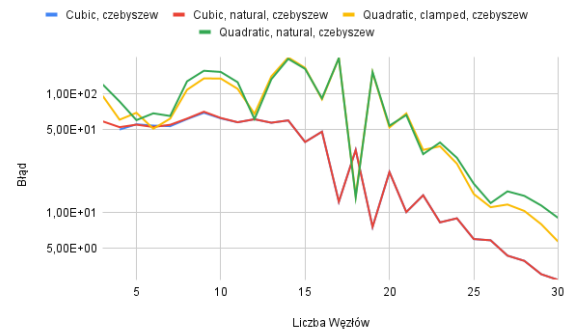


Wykres 3: Błąd maksymalny 3-30 dla węzłów Czebyszewa

W celu sprawdzenia, która metoda przybliżenia jest najlepsza należy spojrzeć na wykres w skali logarytmicznej (wykres 4 i 5).



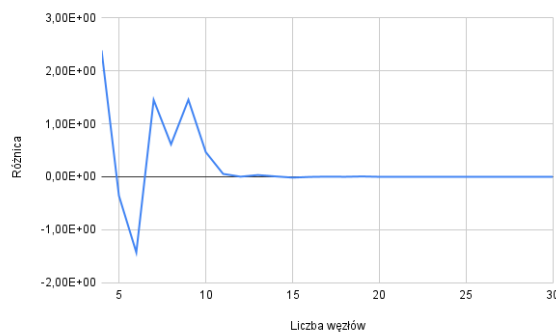
Wykres 4: Błąd maksymalny 3-30 dla równoodległych węzłów w skali logarytmicznej



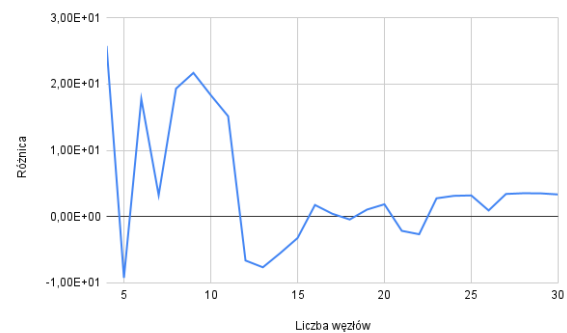
Wykres 5: Błąd maksymalny 3-30 dla węzłów Czebyszewa w skali logarytmicznej

Na podstawie powyższych wykresów można ustalić, że dla węzłów równoodległych z pewnością funkcja sklejana 3-go stopnia jest leprza od funkcji kwadratowej, natomiast jeśli chodzi o warunki brzegowe, jest to dość zmienne w tym przedziale.

Jeśli chodzi o węzły Czebyszewa sytuacja wygląda podobnie, jednak wartości błędu między różnymi warunkami brzegowymi są bardzo zbliżone, co widać doskonale na wykresie 6.



Wykres 6: Różnica między funkcją sklejaną 3-go stopnia dla Natural Boundary, a Default Boundary dla funkcji sklepanej 3-go stopnia i węzłów Czebyszewa



Wykres 7: Różnica między funkcją sklejaną 2-go stopnia dla Natural Boundary, a Clamped Boundary dla funkcji sklepanej 3-go stopnia i węzłów Czebyszewa

### 6.1.2 Błąd maksymalny dla węzłów z zakresu [31, 70]

Ponownie na wykresach 8 i 9 widać, że wartości otrzymane dla węzłów równoodległych są dużo lepsze niż dla węzłów Czebyszewa, jednak sytuacja wygląda już dużo lepiej dla węzłów Czebyszewa, niż dla przedziału 3-30, gdzie wartości były dość duże.

Patrząc na wykres dla węzłów równoodległych można bardzo ładnie posortować metody przybliżenia funkcji. Zatem w kolejności od najlepszej do najgorszej:

- Funkcja sklejana 3-go stopnia, Default Boundary
- Funkcja sklejana 3-go stopnia, Natural Boundary

A następnie od 31 do 50 węzła:

- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Natural Boundary
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Clamped Boundary

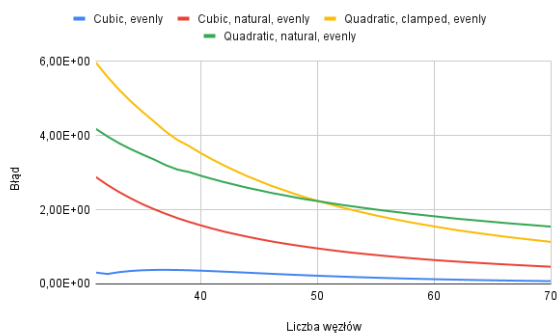
I od 51 do 70 węzła:

- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Clamped Boundary
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Natural Boundary

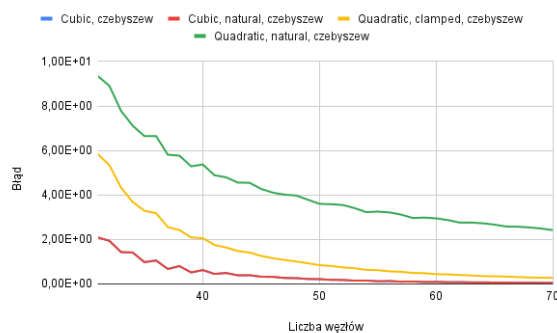
Z kolei z uwagi na węzły Czebyszewa:

- Funkcja sklejana 3-go stopnia, Default Boundary oraz Funkcja sklejana 3-go stopnia, Natural Boundary
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Clamped Boundary
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Natural Boundary

Niestety nawet wartości błęd dla najlepszej metody przybliżenia są dość duże, bo rzędu ok  $10E-2$ .



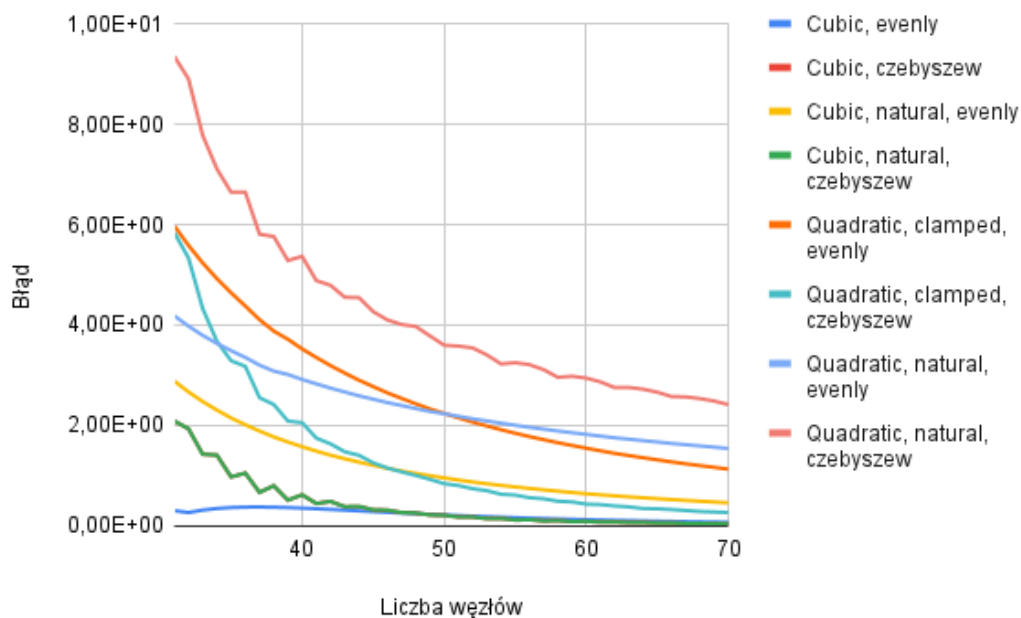
Wykres 8: Błąd maksymalny 31-70 dla równoodległych węzłów



Wykres 9: Błąd maksymalny 31-70 dla węzłów Czebyszewa

Tutaj z uwagi na dość liniowe zachowanie wykresów błędów można by pokusić się o zestawienie wszystkich metod przybliżenia, także ze względu na węzły i porównanie ich efektywności (wykres 10), jednak nadal przybliżenie dość mocno zależy od ilości węzłów i ulega zmianie:





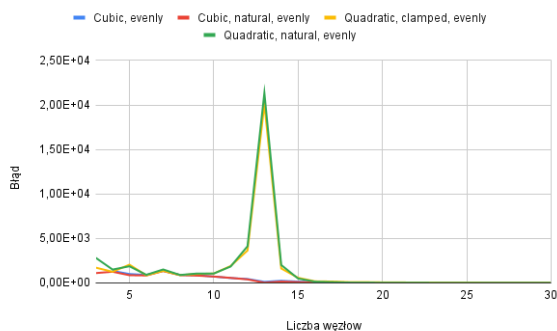
Wykres 10: Porównanie efektywności metod przybliżenia w przedziale [31-70]

## 6.2 Błąd średniokwadratowy

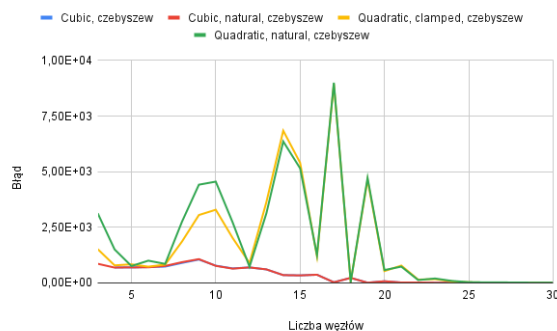
Identycznie jak w przypadku błędu maksymalnego, błąd został wyliczony dla funkcji skleanej 2-go i 3-go stopnia oraz różnych warunków brzegowych. Dla każdego wariantu, wybrałem także dwa sposoby generowania węzłów tj. równoodległe oraz Czebyszewa.

### 6.2.1 Błąd średniokwadratowy dla węzłów z zakresu [3, 31]

Na wykresie dla węzłów równoodległych (wykres 11) błędy są na dość podobnym poziomie, jednak można zaobserwować znaczny peak dla funkcji skleanej 2-go stopnia przy liczbie 10-15 węzłów. Na wykresie dla węzłów Czebyszewa (wykres 12) sytuacja wygląda gorzej.

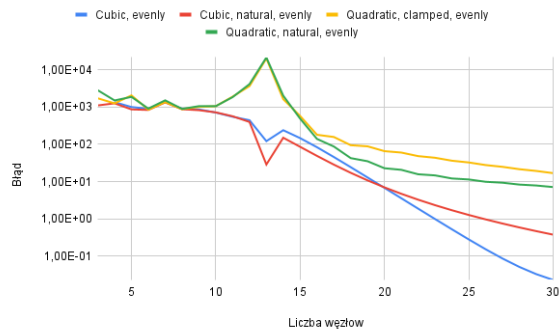


Wykres 11: Błąd średniokwadratowy 3-30 dla równoodległych węzłów

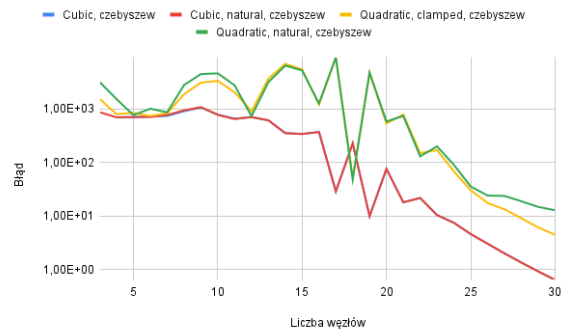


Wykres 12: Błąd średniokwadratowy 3-30 dla węzłów Czebyszewa

Z uwagi na duże podobieństwo wartości błędów zdecydowałem się na wykonanie wykresów w skali logarytmicznej.



Wykres 13: Błąd średniokwadratowy 3-30 dla równoodległych węzłów w skali logarytmicznej



Wykres 14: Błąd średniokwadratowy 3-30 dla węzłów Czebyszewa w skali logarytmicznej

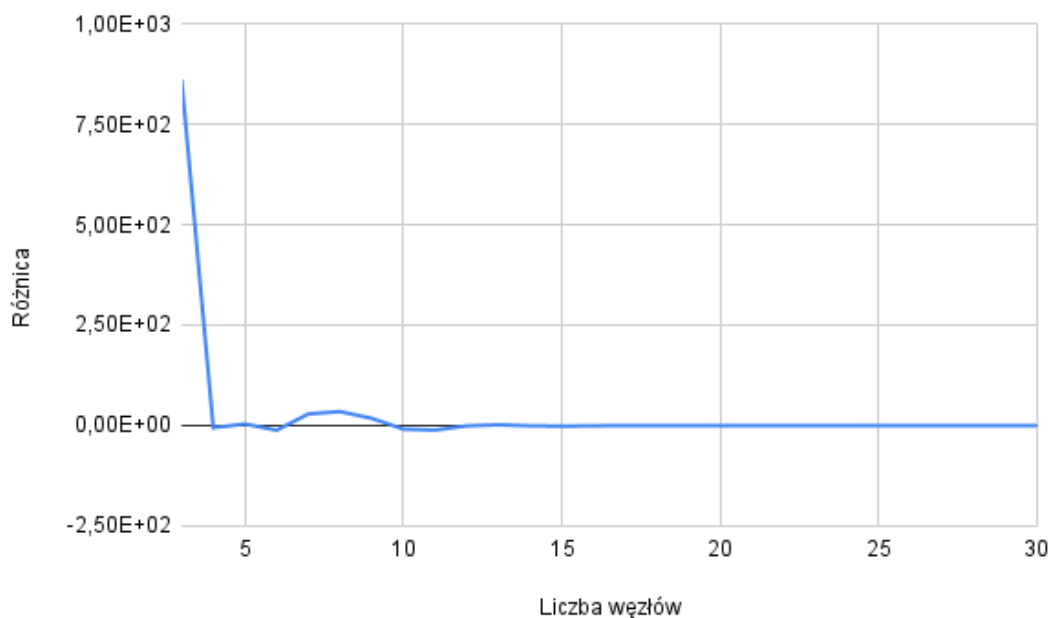
Na wykresie 13 widać, że dla małej ilości węzłów wartości błędów są bardzo zbliżone. Następnie już od 20 węzła kształtuje się, która metoda przybliżania funkcji jest lepsza. Zatem od 20 do 31 węzłów w kolejności od najlepszej metody do najgorszej:

- Funkcja sklejana 3-go stopnia, Default Boundary
- Funkcja sklejana 3-go stopnia, Natural Boundary
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Natural Boundary
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Clamped Boundary

Jeśli chodzi o węzły Czebyszewa (wykres 14):

- Funkcja sklejana 3-go stopnia, Default Boundary, Funkcja sklejana 3-go stopnia, Natural Boundary
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Clamped Boundary
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Natural Boundary

Ze względu na znaczne zbliżenie błędu funkcji sklepanej 3-go stopnia dla dwóch różnych warunków brzegowych, poniżej zamieściłem wykres pokazujący tę różnicę:

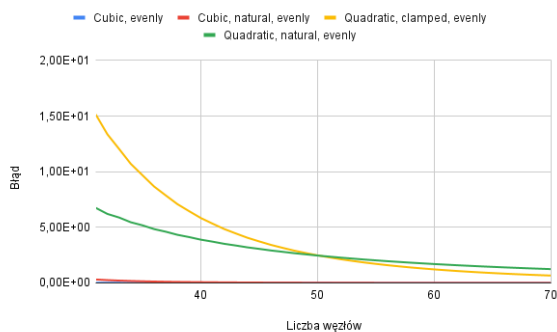


Wykres 15: Różnica dla funkcji sklejaney 3-go stopnia i węzłów Czebyszewa oraz Default Boundary i Natural Boundary

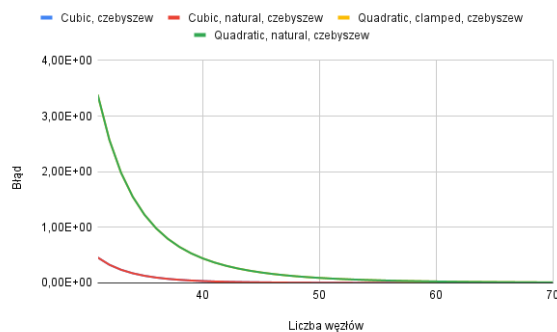
Jak widać na powyższym wykresie 15, wartości są niemal identyczne, duża różnica na początku bierze się stąd, że Default Boundary dla 3 węzłów nie istnieje.

### 6.2.2 Błąd średniokwadratowy dla węzłów z zakresu [31, 70]

Jak widać na poniższych wykresach (16 i 17), w tym przedziale dla odmiany węzły Czebyszewa wypadły całkiem dobrze. Tutaj ponownie wartości błędów są dość niskie, jednak dalej nie jest to jakieś bardzo dobre przybliżenie.

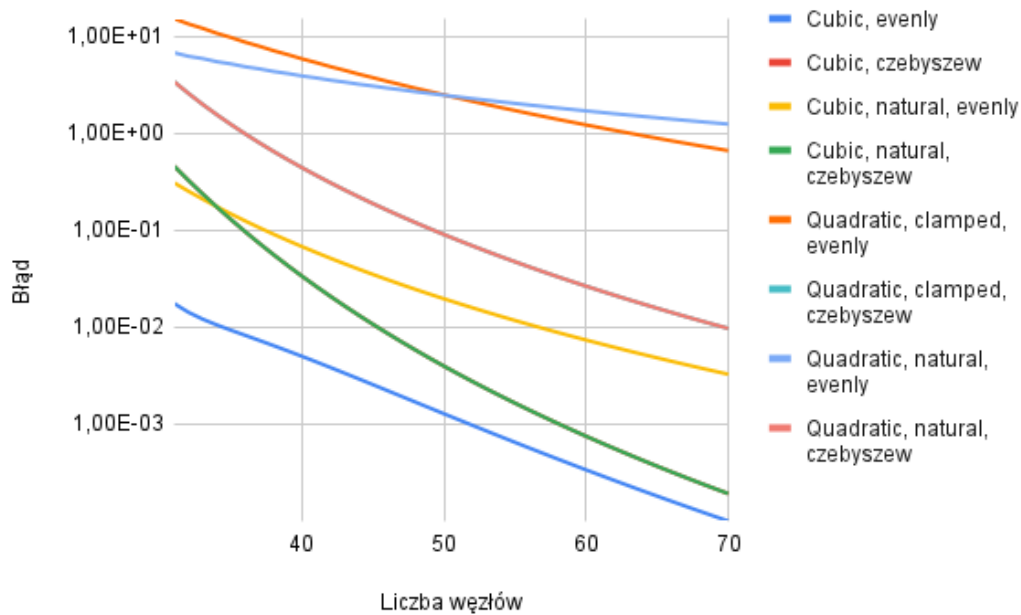


Wykres 16: Błąd średniokwadratowy 31-70 dla równoodległych węzłów



Wykres 17: Błąd średniokwadratowy 31-70 dla węzłów Czebyszewa

Z uwagi na dobry wynik otrzymany dla węzłów Czebyszewa i bliskość błędów otrzymanych dla różnych metod postanowiłem wykonać wykres w skali logarytmicznej, ale dla wszystkich metod łącznie z różnym sposobem generowania węzłów.



Wykres 18: Błąd średniokwadratowy 31-70 w skali logarytmicznej

Tutaj (wykres 18) już bardzo wyraźnie widać wyższość funkcji sklejanej 3-go stopnia oraz wyższość Default Boundary nad Natural Boundary dla funkcji sklejanej 3-go stopnia. Zatem jeśli chcielibyśmy uszeregować metody przybliżenia od najlepszego do najgorszego w tym przedziale, to dostalibyśmy:

- Funkcja sklejana 3-go stopnia, Default Boundary, węzły równoodległe
- Funkcja sklejana 3-go stopnia, Natural Boundary, węzły Czebyszewa, Funkcja sklejana 3-go stopnia, Default Boundary, węzły Czebyszewa
- Funkcja sklejana 3-go stopnia, Natural Boundary, węzły równoodległe
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Natural Boundary, węzły Czebyszewa, Funkcja sklejana 2-go stopnia, Clamped Boundary, węzły Czebyszewa

Następnie dla węzłów z przedziału [31, 50]

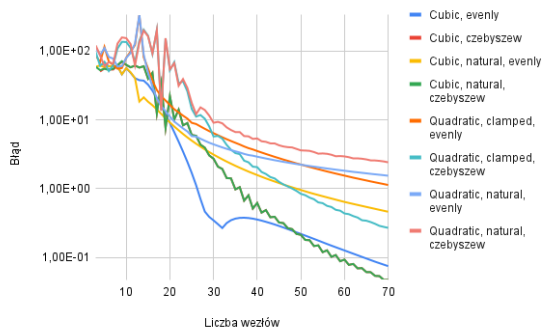
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Natural Boundary, węzły równoodległe
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Clamped Boundary, węzły równoodległe

Następnie dla węzłów z przedziału [50, 70]

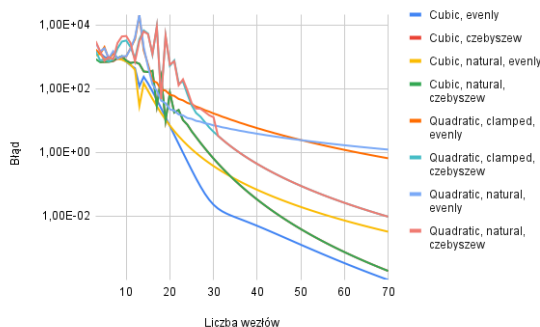
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Clamped Boundary, węzły równoodległe
- Funkcja sklejana 2-go stopnia, Natural Boundary, węzły równoodległe

### 6.3 Porównanie wszystkich metod przybliżenia dla węzłów z zakresu [3, 70]

Jak widać na wykresach (19 i 20), wysokość błędów znacznie różni się dla różnej ilości węzłów i typów ich generowania. Dlatego, w celu ustalenia najlepszej metody przybliżenia należy zobaczyć jaką metoda dla danej ilości węzłów daje najlepsze rezultaty.



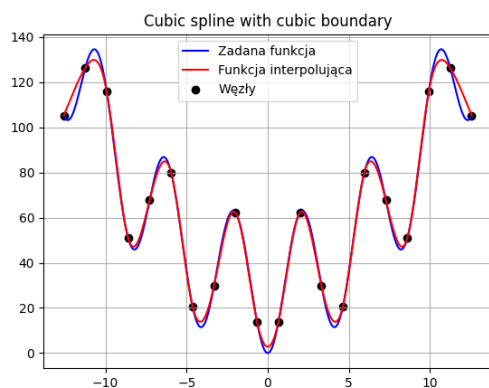
Wykres 19: Błąd maksymalny 3-70 dla w skali logarytmicznej



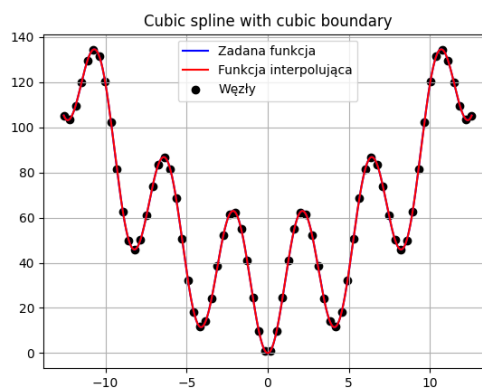
Wykres 20: Błąd średniokwadratowy 3-70 w skali logarytmicznej

## 6.4 Najlepsze przybliżenie

Bardzo ciężko powiedzieć które przybliżenie jest najlepsze. Napewno można stwierdzić, że ze względu na błąd średniokwadratowy od liczby węzłów  $\geq 20$  najlpiej radzi sobie funkcja sklejana 3-go stopnia z równoodległymi węzłami, a przybliżenie uzyskane przez tą funkcję dla 20 (wykres 21) i 70 węzłów wygląda tak:



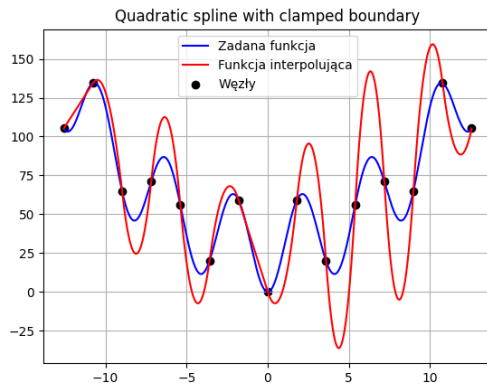
Wykres 21: Przybliżenie dla funkcji sklepanej 3-go stopnia i Default Boundary z 20 równoodległymi węzłami



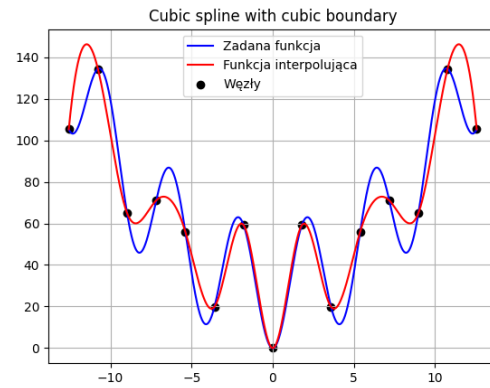
Wykres 22: Przybliżenie dla funkcji sklepanej 3-go stopnia i Default Boundary z 70 równoodległymi węzłami

Można zauważyć, że ze względu na błąd maksymalny w tym przedziale, od ok. 50 węzła lepsze jest przybliżenie dla funkcji sklepanej 3-go stopnia z Natural Boundary i węzłami Czebyszewa.

Natomiast jeśli chodzi o przedział wcześniejszy niż 20 węzłów to jest to bardzo ciężkie do stwierdzenia, która funkcja jest lepsza i bardzo się to zmienia. Napewno z całą pewnością można powiedzieć, że niemal zawsze lepsze przybliżenie otrzymamy dla funkcji sklepanej 3-go stopnia. Tutaj dla porównania poniżej zamieszczam wykres dla 15 węzłów z wykorzystaniem wyranych funkcji sklepanych 2-go i 3-go stopnia:



Wykres 23: Przybliżenie dla funkcji sklejanej 2-go stopnia i Clamped Boundary z 15 równoodległymi węzłami



Wykres 24: Przybliżenie dla funkcji sklejanej 3-go stopnia i Default Boundary z 15 równoodległymi węzłami

## 6.5 Wnioski

- Dla przedziału  $[3, 20]$  węzłów, nie można jasno wskazać, która metoda przybliżenia jest lepsza, ponieważ błąd przybliżenia drastycznie zmienia się w zależności od ilości węzłów
- Od 20 węzłów w górę najlepsze jest przybliżenie funkcją sklejaną 3-go stopnia z równoodległymi węzłami i Default Boundary
- Na ogół przybliżenie funkcją sklejaną 3-go stopnia z równoodległymi węzłami i Default Boundary jest najlepsze
- Na ogół przybliżenie funkcjami sklejanymi 3-go stopnia jest dużo lepsze niż przybliżenie funkcjami sklejanymi 2-go stopnia
- Przybliżenia otrzymane dla węzłów Czebyszewa, szczególnie dla małej ilości węzłów są dość dziwne i często dużo gorsze niż dla węzłów równoodległych
- Jak bardzo ładnie widać na wykresach zwiększenie liczby węzłów prowadzi do zwiększenia dokładności przybliżenia