

# MOwNiT - Porównanie interpolacji Lagrange'a, Newtona oraz Hermite'a

Jakub Frączek

6 kwietnia 2024

## 1 Temat ćwiczenia

Dla zagadnienia interpolacji Lagrange'a przygotować porównanie działania algorytmów z wykorzystaniem:

- wzoru Lagrange'a
- wzoru Newtona
- wzoru Hermite'a

Węzły w algorytmach interpolacji rozmieszczane są:

- równomiernie w całym przedziale (uwzględniając końce przedziału),
- zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa.

Dla funkcji podanej w zadaniu indywidualnym wyznaczyć wielomian interpolujący dla różnej liczby oraz różnego rozmieszczenia węzłów. Ocenić dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukać wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukać stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównać z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

### 1.1 Funkcja dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

$$f(x) = 10 * m + \frac{x^2}{k} - 10 * m * \cos(k * x)$$

gdzie:

$$k = 1.5$$

$$m = 3.0$$

$$x \in [-4\pi, 4\pi]$$

Wykres funkcji (wykres 1)

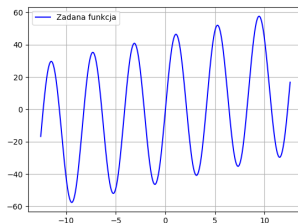


Wykres 1: Dana funkcja

## 2 Dane techniczne

### 2.1 Pochodna funkcji dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

Pochodna funkcji (wykres 2)



Wykres 2: Dana funkcja

### 2.2 Hardware

Laptop z systemem operacyjnym Linux Mint, procesorem AMD Ryzen 5 5500U 2.1 GHZ oraz 8 GB pamięci RAM.

### 2.3 Software

Wykorzystany został system Pop!\_OS x64 oraz język Python w wersji 3.11.8 wraz z bibliotekami:

- math
- copy
- matplotlib
- numpy

## 3 Metody interpolacji

### 3.1 Interpolacja Lagrange'a

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a można wyrazić wzorem:

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) L_k$$

gdzie:

$f(x_k)$  – wartości funkcji w punktach  $x_k$

$L_k(x) = \frac{d}{m} = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$  – baza Lagrange'a

### 3.2 Interpolacja Newtona

Wielomian interpolacyjny Newtona można wyrazić wzorem:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] * (x - x_0) * (x - x_1) * \dots * (x - x_{i-1})$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
f[x_i] &= f(x_i) \\
f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \\
&\vdots \\
f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}
\end{aligned}$$

### 3.3 Iterpolacja Hermite'a

Wielomian interpolacyjny Hermite'a można wyrazić wzorem

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i p_i(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{(s(i)+j)} \cdot p_{s(i)+j}(x)$$

gdzie:

$$p_{s(0)}(x) = 1$$

$$p_{s(i)+j}(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_{i-1})^{m_{i-1}} (x - x_i)^j$$

$$s(i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0 \\ m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1} & \text{dla } i > 0 \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \dots, k$$

$$j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

Współczynniki  $b_i$  to kolejne ilorazy różnicowe.

## 4 Metody szacowania błędu przybliżenia funkcji

### 4.1 Największa różnica wartości funkcji

Największa różnica między wartością funkcji interpolowanej, a funkcji interpolującej:

$$\max_{x \in [a, b]} |F(x) - P_n(x)|$$

### 4.2 Błąd średniokwadratowy

Suma kwadratów różnic między wartością funkcji interpolowanej, a funkcji interpolującej podzielona przez liczbę punktów, w których wykonujemy porównanie:

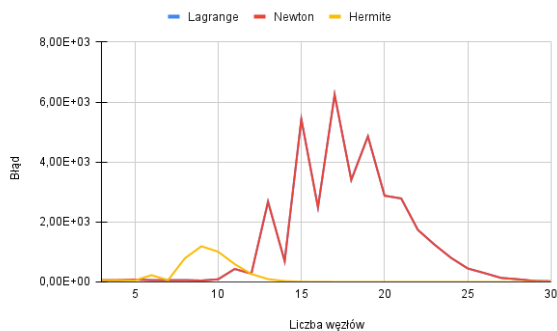
$$\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N (F(x_i) - P_n(x_i))^2$$

## 5 Wyniki

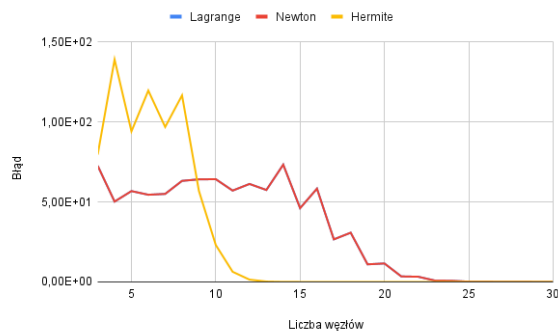
Błędy zostały policzone z wykorzystaniem 1000 równoodlegle wygenerowanych punktów.

### 5.1 Błąd maksymalny dla węzłów z zakresu [3, 30]

Jak widać na wykresie 3, dotyczącym węzłów równoodległych, zdecydowanie najmniejszy błąd otrzymałem dla interpolacji Hermite'a. Jego peak przypadł na ok 9/10 węzeł. Inaczej było w przypadku skorzystania z węzłów Czebyszewa (wykres 4), ponieważ wtedy największą rozbieżność osiągnęła właśnie interpolacja Hermite'a (do 9 węzła). Jednak szybko trend się odwrócił i od ok. 10 węzła błąd był już dużo mniejszy od interpolacji Lagrange'a / Newtona.



Wykres 3: Błąd maksymalny dla równoodległych węzłów



Wykres 4: Błąd maksymalny dla węzłów Czebyszewa

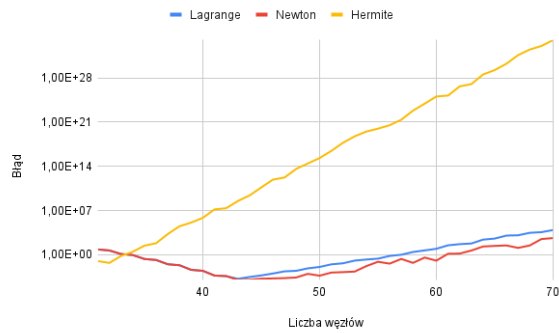
Jak można zaobserwować, na powyższych wykresach nie ma niebieskiej linii, która miała oznaczać interpolację Lagrange'a. Dzieje się tak, ponieważ wartości uzyskiwane przez interpolację Lagrange'a i Newtona są bardzo zbliżone, a co za tym idzie ich błędy maksymalne również. Poniżej na wykresie 5. zaprezentowana jest różnica między błędami tych dwóch interpolacji.



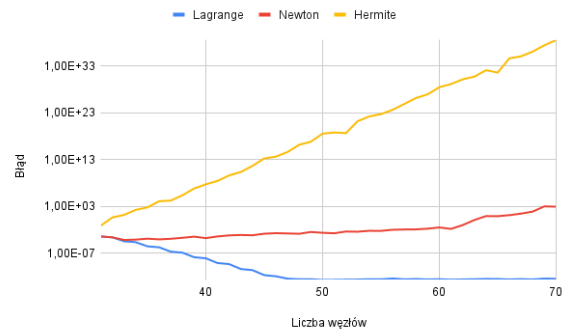
Wykres 5: Różnica między błędami interpolacji Newtona i Lagrange'a

## 5.2 Błąd maksymalny dla węzłów z zakresu [31, 70]

Poniższe wykresy (wykres 6 i 7) prezentują błąd maksymalny dla węzłów z zakresu od 31 do 70. Zostały one wykonane w skali logarytmicznej, ze względu na ogromną rozbieżność między wartościami błędów. Jak widać interpolacja Hermite'a dla węzłów równoodległych popełnia w tym zakresie ogromny błąd w porównaniu do interpolacji Newtona i Lagrange'a. Podobnie jest dla węzłów Czebyszewa, gdzie interpolacja Hermite'a popełnia bardzo duży błąd w porównaniu do dwóch pozostałych interpolacji.

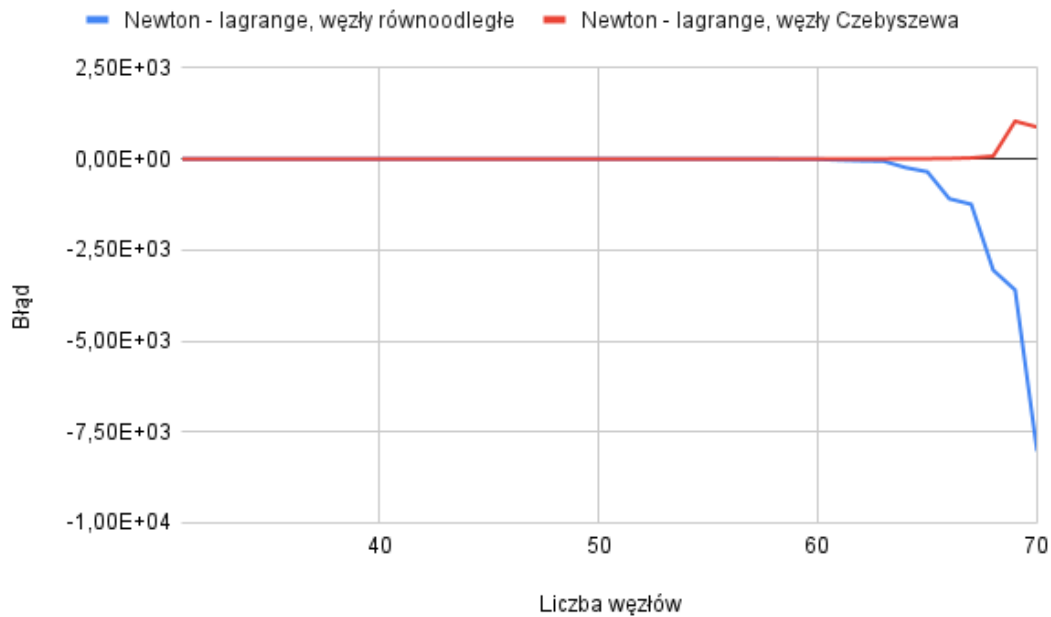


Wykres 6: Błąd maksymalny dla równoodległych węzłów



Wykres 7: Błąd maksymalny dla węzłów Czebyszewa

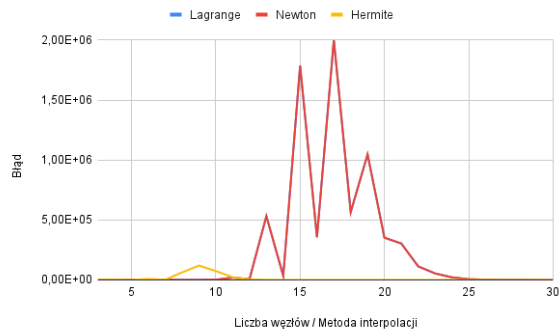
Podobnie jak w zakresie 3-30, błędy interpolacji Lagrange'a i Newtona są bardzo zbliżone, co zostało pokazane poniżej na wykresie 8.



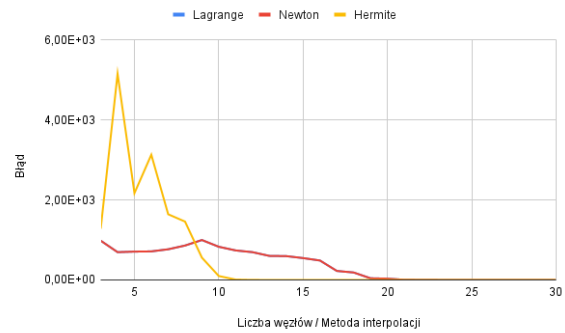
Wykres 8: Różnica między błędami interpolacji Newtona i Lagrange'a

### 5.3 Błąd średniokwadratowy dla węzłów z zakresu [3, 30]

Peak błędu średniokwadratowego dla równoodległych węzłów przypadada na ok. 10 węzeł dla interpolacji Hermite'a, a dla interpolacji Lagrange'a / Newtona na ok. 17 węzeł (Jak widać na wykresie 9). Warto zauważyć, że dla interpolacji Hermite'a efekt Rungego jest dużo mniej widoczny. Natomiast dla węzłów Czebyszewa (wykres 10) podobnie jak w przypadku błędu maksymnego, błąd średniokwadratowy dla interpolacji Hermite'a choć duży na początku szybko maleje i jest dużo mniejszy od innych interpolacji.

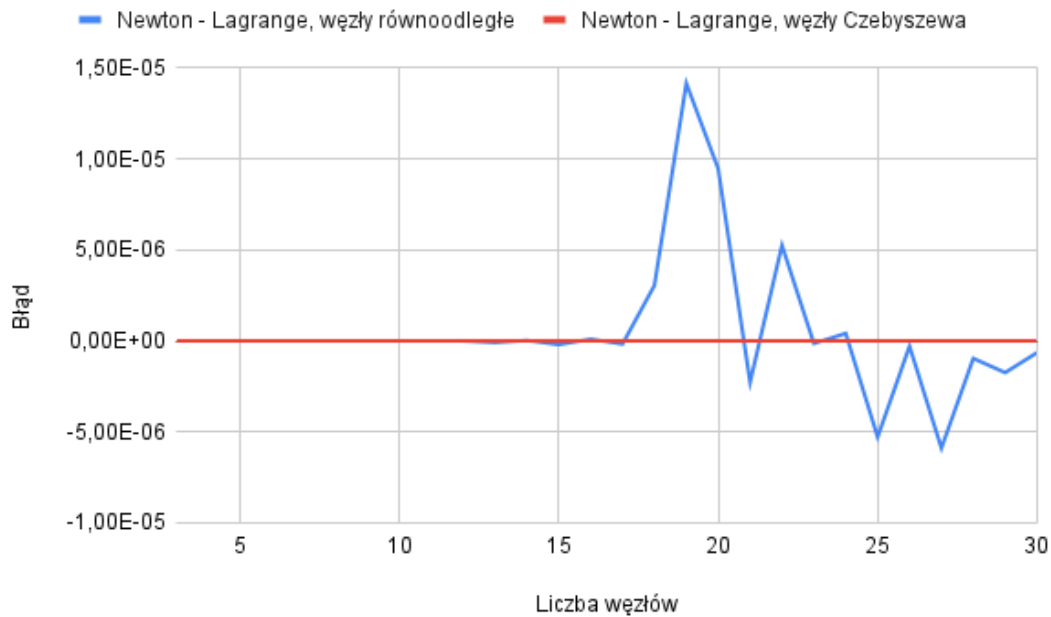


Wykres 9: Błąd średniokwadratowy dla równo-odległych węzłów



Wykres 10: Błąd średniokwadratowy dla węzłów Czebyszewa

Jak w powyższych podpunktach błędy dla interpolacji Newtona oraz Lagrange'a są bardzo zbliżone na co dowodem jest poniższy wykres 11.



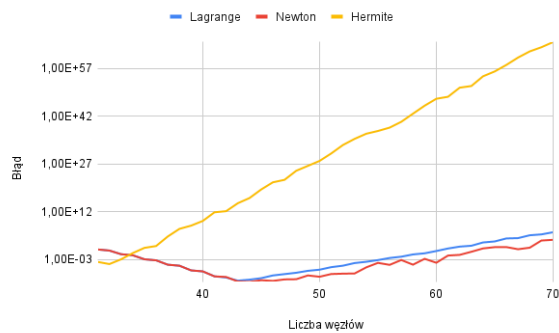
Wykres 11: Różnica między błędami interpolacji Newtona i Lagrange'a

#### 5.4 Błąd średniokwadratowy dla węzłów z zakresu [31, 70]

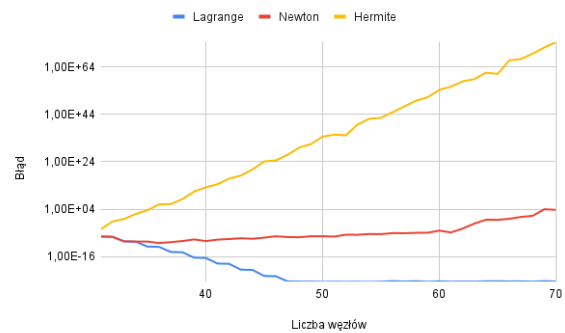
Jak widać na wykresie 12 dla węzłów równoodległych interpolacja Hermite'a staje się bardzo nie-dokładna. Zdecydowanie ciekawszy obraz kształtuje się na wykresie 13 dla węzłów Czebyszewa. Na podstawie tego wykresu można sklasyfikować dokładność trzech omawianych interpolacji w przedziale węzłów 31-70 Czebyszewa, w kolejności od najmniej dokładnej:

- interpolacja Hermite'a
- interpolacja Newtona
- interpolacja Lagrange'a

Przy czym interpolacja Lagrange'a jest w tym przedziale bardzo dokładna, a błąd jest minimalny.



Wykres 12: Błąd średniokwadratowy dla równoodległych węzłów



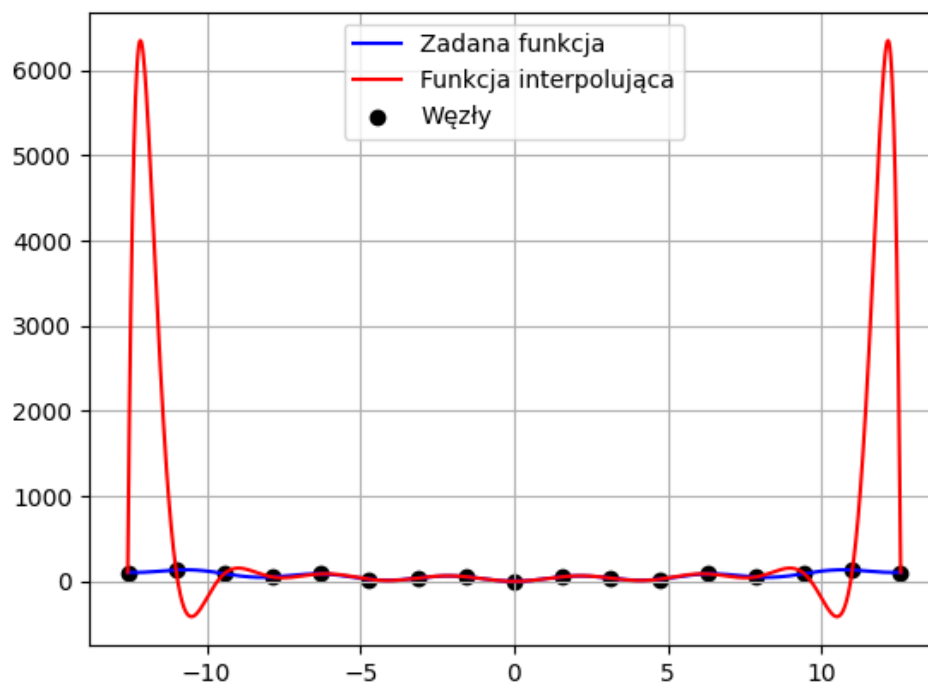
Wykres 13: Błąd średniokwadratowy dla węzłów Czebyszewa

## 5.5 Efekt Rungego

Efekt Rungego (od nazwiska Carla Rungego, niemieckiego matematyka) – pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Efekt Rungego występuje tylko dla węzłów równoodległych i takie przypadki będą rozważone w tej sekcji.

### 5.5.1 Interpolacja Lagrange'a i Newtona

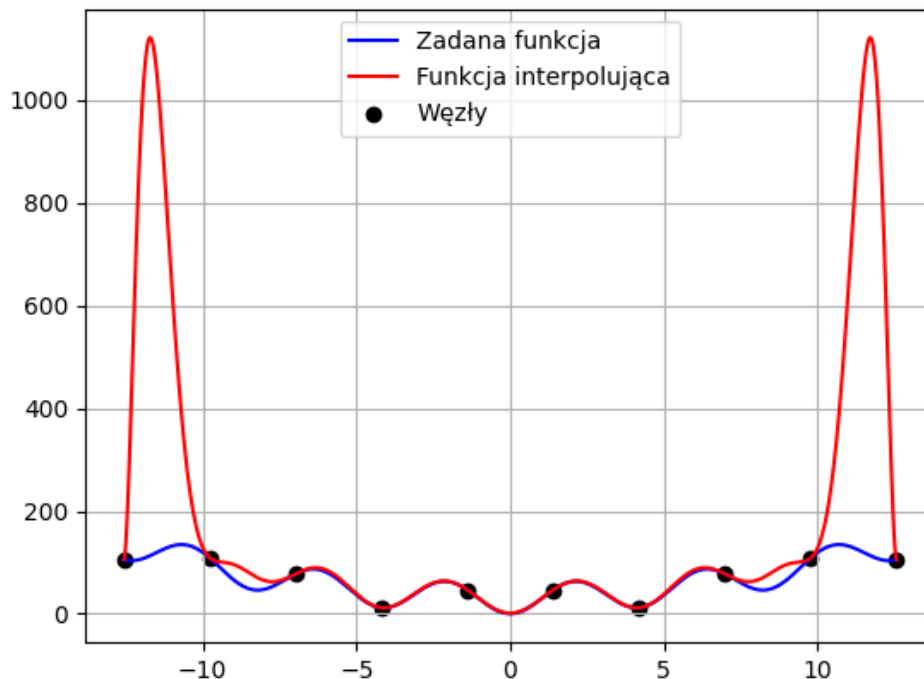
Jak widać na poniższym wykresie (14), efekt Rungego dla interpolacji Lagrange'a jest największy dla 17 równoodległych węzłów. Dokładnie tak samo jest w przypadku interpolacji Newtona, a wykres jest niemal identyczny (różnica niewidoczna na takim wykresie) jak w przypadku Lagrange'a.



Wykres 14: Maksymalny efekt Rungego dla interpolacji Lagrange'a

### 5.5.2 Interpolacja Hermite'a

Dla tej interpolacji efekt Rungego pojawia się wcześniej i jest dużo mniejszy, niż w przypadku dwóch pozostałych interpolacji. A więc jak widać na wykresie 15, "peak" przypada na 10 węzeł.



Wykres 15: Maksymalny efekt Rungego dla interpolacji Hermite'a

### 5.6 Najlepsze przybliżenie interpolowanej funkcji

W celu łatwiejszej oceny, które przybliżenie było lepsze sporządziłem tabelkę (tabela 1), która pokazuje przy którym węzle interpolacja była na najlepszym poziomie lub od kiedy zaczynała być akceptowalna (za próg akceptowalności przyjąłem wartość błędu maksymalnego na poziomie  $10E-4$ ).

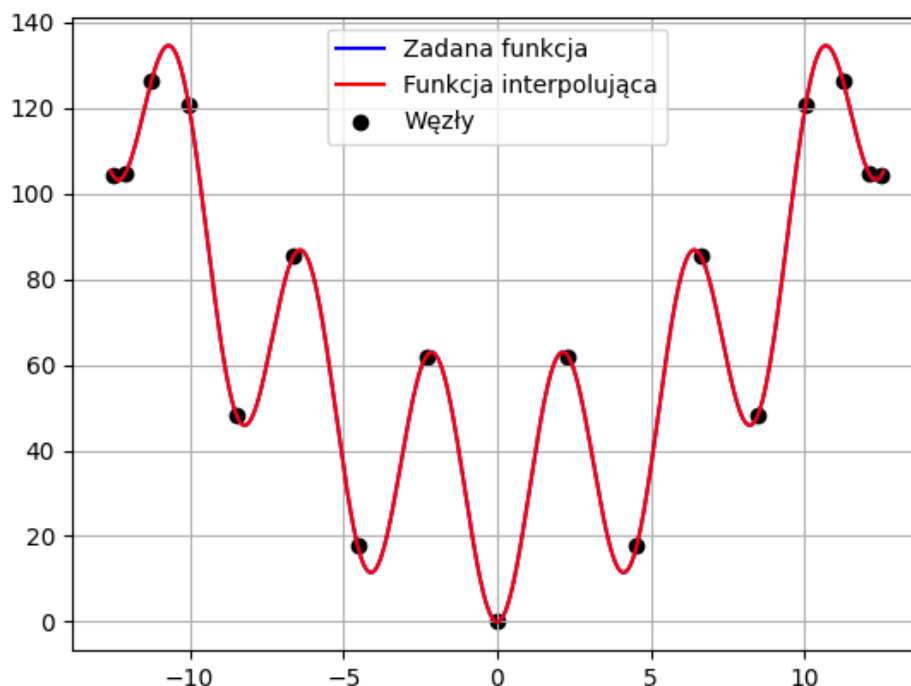
| Interpolacja | Typ węzłów   | Typ błędu         | Najmniejsza wartość błędu | Liczba węzłów z najmniejszą wartością błędu |
|--------------|--------------|-------------------|---------------------------|---|
| Lagrange'a   | równoodległe | Maksymalny        | 5,42E-04                  | 41  |
|              |              | Średniokwadratowy | 4,19E-10                  | 44  |
|              | Czebyszewa   | Maksymalny        | od 3,76E-04 do 3,41E-13   | od 31 do 70                                 |
|              |              | Średniokwadratowy | od 1,68E-04 do 3,40E-27   | od 27 do 70                                 |
| Newtona      | równoodległe | Maksymalny        | 2,67E-04                  | 49  |
|              |              | Średniokwadratowy | 8,22E-11                  | 44  |
|              | Czebyszewa   | Maksymalny        | 3,78E-04                  | 31  |
|              |              | Średniokwadratowy | 1,38E-10                  | 37  |
| Hermite'a    | równoodległe | Maksymalny        | 4,61E-04                  | 21  |
|              |              | Średniokwadratowy | 8,54E-09                  | 23  |
|              | Czebyszewa   | Maksymalny        | 7,92E-04                  | 19  |
|              |              | Średniokwadratowy | 4,46E-09                  | 19  |

Tabela 1: Najlepsze przybliżenie dla różnych interpolacji

Analizując powyższą tabelkę można dojść do wniosku, że jeśli chcemy minimalizować liczbę użytych węzłów (a zazwyczaj chcemy) to należy skorzystać z interpolacji Hermite'a, która dla 19 daje bardzo dobre przybliżenie. Jednak jeśli zależy nam na jak największej możliwej precyzji to trzeba skorzystać z interpolacji Lagrange'a i zwiększać liczbę węzłów, aż osiągniemy zamiejoną precyzję.



Przybliżenie otrzymane dla 19 węzłów Czebyszewa i interpolacji Hermite'a to zostało zaprezentowane na poniższym wykresie (17).



Wykres 16: Najlepsze przybliżenie interpolowanej funkcji

## 5.7 Wybrane wartości błędów interpolacji

Poniżej w tabelach 2, 3, 4, 5, 6, 7 pokazane są wybrane wartości błędów interpolacji w celu jeszcze lepszego zobrazowania z jakimi rzędami wartości mamy do czynienia

### 5.7.1 Interpolacja Lagrange'a - Błąd maksymalny

Jak można zauważyć, węzły Czebyszewa są zdecydowanie lepszym rozwiązaniem dla interpolacji Lagrange'a

| Liczba węzłów / Metoda interpolacji | Lagrange, w. równoodległe | lagrange, w. Czebyszewa |
|-------------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 10                                  | 8,71E+01                  | 6,43E+01                |
| 20                                  | 2,88E+03                  | 1,15E+01                |
| 30                                  | 2,28E+01                  | 2,34E-03                |
| 40                                  | 3,01E-03                  | 8,31E-09                |
| 50                                  | 1,23E-02                  | 1,99E-13                |
| 60                                  | 9,19E+00                  | 2,84E-13                |
| 70                                  | 8,49E+03                  | 3,41E-13                |

Tabela 2: Wybrane wartości błędu maksymalnego dla interpolacji Lagrange'a

### 5.7.2 Interpolacja Lagrange'a Błąd średniokwadratowy

Na przykładzie błędu średniokwadratowego wyższość węzłów Czebyszewa jest jeszcze bardziej widoczna (tabela 3).

| Liczba węzłów / Metoda interpolacji | lagrange, w. równoodległe | lagrange, w. Czebyszewa |
|-------------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 10                                  | 1,89E+03                  | 8,29E+02                |
| 20                                  | 3,52E+05                  | 3,25E+01                |
| 30                                  | 1,34E+01                  | 2,07E-06                |
| 40                                  | 1,65E-07                  | 2,98E-17                |
| 50                                  | 5,74E-07                  | 2,49E-27                |
| 60                                  | 4,22E-01                  | 4,22E-27                |
| 70                                  | 3,34E+05                  | 3,40E-27                |

Tabela 3: Wybrane wartości błędu średniokwadratowego dla interpolacji Lagrange’a

### 5.7.3 Interpolacja Newtona’a - Błąd maksymalny

Jak widać po poniższej tabeli (4), wartości błędów dla interpolacji Newtona są dość zbliżone.

| Liczba węzłów / Metoda interpolacji | Newton, w. równoodległe | Newton, w. Czebyszewa |
|-------------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 10                                  | 8,71E+01                | 6,43E+01              |
| 20                                  | 2,88E+03                | 1,15E+01              |
| 30                                  | 2,28E+01                | 2,34E-03              |
| 40                                  | 3,03E-03                | 1,68E-04              |
| 50                                  | 5,09E-04                | 2,32E-03              |
| 60                                  | 1,23E-01                | 3,23E-02              |
| 70                                  | 4,57E+02                | 8,77E+02              |

Tabela 4: Wybrane wartości błędu maksymalnego dla interpolacji Newtona’a

### 5.7.4 Interpolacja Newton’a - Błąd średniokwadratowy

Podobnie, jak w przypadku błędu maksymalnego wartości są dość zbliżone (tabela 5).

| Liczba węzłów / Metoda interpolacji | Newton, w. równoodległe | Newton, w. Czebyszewa |
|-------------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 10                                  | 1,89E+03                | 8,29E+02              |
| 20                                  | 3,52E+05                | 3,25E+01              |
| 30                                  | 1,34E+01                | 2,07E-06              |
| 40                                  | 1,68E-07                | 3,86E-10              |
| 50                                  | 3,45E-09                | 4,39E-08              |
| 60                                  | 8,70E-05                | 9,62E-06              |
| 70                                  | 1,40E+03                | 5,50E+03              |

Tabela 5: Wybrane wartości błędu średniokwadratowego dla interpolacji Newtona’a

## 5.8 Interpolacja Hermite’a - Błąd maksymalny

Jak widać w tabeli 6, wartości rosną do ogromnych rzędów i interpolacja Hermite’a staje się bezużyteczna już od 30 / 40 węzłów.

| Liczba węzłów / Metoda interpolacji | Hermite, w. równoodległe | Hermite, w. Czebyszewa |
|-------------------------------------|--------------------------|------------------------|
| 10                                  | 1,01E+03                 | 2,31E+01               |
| 20                                  | 1,03E-03                 | 1,56E-03               |
| 30                                  | 3,33E-02                 | 4,60E-02               |
| 40                                  | 7,16E+05                 | 5,22E+07               |
| 50                                  | 2,09E+15                 | 3,47E+18               |
| 60                                  | 1,15E+25                 | 2,85E+28               |
| 70                                  | 9,59E+33                 | 3,37E+38               |

Tabela 6: Wybrane wartości błędu maksymalnego dla interpolacji Hermite’a

## 5.9 Interpolacja Hermite'a - Błąd średniokwadratowy

Podobnie jak dla błędu maksymalnego widać ogromne wartości błędów (tabela 7).

| Liczba węzłów / Metoda interpolacji | Hermite, w. równoodległe | Hermite, w. Czebyszewa |
|-------------------------------------|--------------------------|------------------------|
| 10                                  | 7,43E+04                 | 9,75E+01               |
| 20                                  | 1,75E-08                 | 1,29E-08               |
| 30                                  | 1,87E-05                 | 1,56E-05               |
| 40                                  | 1,20E+09                 | 1,70E+13               |
| 50                                  | 8,65E+27                 | 4,01E+34               |
| 60                                  | 2,95E+47                 | 2,20E+54               |
| 70                                  | 1,89E+65                 | 3,00E+74               |

## 6 Wnioski

- W celu uzyskania dobrego przybliżenia przy dość małej liczbie węzłów należy skorzystać z interpolacji Hermite'a z węzłami Czebyszewa
- W celu uzyskania bardzo dokładnego przybliżenia należy skorzystać z interpolacji Lagrange'a z węzłami Czebyszewa, jednak trzeba liczyć się z tym, że liczba węzłów będzie dość duża
- Interpolacje na równoodległych węzłach są obciążone dużym błędem ze względu na efekt Rungego
- Algorytm Newtona oraz Hermite'a przy dużej ilości węzłów zaczyna generować ogromne błędy z uwagi na niedokładną reprezentację liczb zmiennoprzecinkowych
- Węzły Czebyszewa dają lepsze wyniki od węzłów równoodległych
- Błąd maksymalny pozwala trafnie określić, gdzie zachodzi efekt Rungego (dla małej ilości węzłów). Dla dużej ilości węzłów bardzo widoczny jest problem z reprezentacją liczb zmiennoprzecinkowych w komputerze, ponieważ otrzymane wartości błędów są ogromne
- Każdy algorytm interpolacji ma swoje wady i zalety, dlatego też każdy może być użyteczny w zależności od efektu jaki chcemy osiągnąć (np. minimalizacja liczby węzłów, minimalizacja błędu przybliżenia), zatem nie ma jednego najlepszego algorytmu.