

MOwNiT - Zagadnienie interpolacji Lagrange'a oraz Newtona

Jakub Frączek

14 marca 2024

1 Temat ćwiczenia

1.1 Przygotowanie

Zagadnienie interpolacji: Dla zagadnienia Lagrange'a przygotować program wyznaczający wielomian interpolujący zgodnie ze wzorem Lagrange'a oraz Newtona.

W obu przypadkach węzły mogą być rozmieszczone:

- równomiernie w całym przedziale (uwzględniając końce przedziału),
- zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa.

Przygotować program do wizualizacji wykresu funkcji zadanej określoną liczbą punktów lub określonym wzorem.

1.2 Właściwe ćwiczenie

1. Dla jednej z poniższych funkcji (podanej w zadaniu indywidualnym) wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. $n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20$). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa*. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

1.3 Funkcja dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

$$f(x) = 10 * m + \frac{x^2}{k} - 10 * m * \cos(k * x)$$

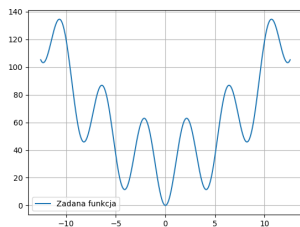
gdzie:

$$k = 1.5$$

$$m = 3.0$$

$$x \in [-4\pi, 4\pi]$$

Wykres funkcji (wykres 1)



Wykres 1: Dana funkcja

2 Dane techniczne

2.1 Hardware

Doświadczenie zostało przeprowadzone na komputerze z procesorem Intel Core i5-9300H 2.40 GHz oraz 32 GB pamięci RAM 2666 MHz.

2.2 Software

Wykorzystany został język Python w wersji 3.11.8 wraz z bibliotekami:

- math
- copy
- matplotlib
- numpy

3 Metody interpolacji

3.1 Interpolacja Lagrange'a

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a można wyrazić wzorem:

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) L_k$$

gdzie:

$f(x_k)$ – wartości funkcji w punktach x_k

$L_k(x) = \frac{d}{m} = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ – baza Lagrange'a

3.2 Interpolacja Newtona

Wielomian interpolacyjny Newtona można wyrazić wzorem:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] * (x - x_0) * (x - x_1) * \dots * (x - x_{i-1})$$

gdzie:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

.

.

.

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

4 Metody szacowania błędu przybliżenia funkcji

4.1 Największa różnica wartości funkcji

Największa różnica między wartością funkcji interpolowanej, a funkcji interpolującej:

$$\max_{x \in [a, b]} |F(x) - P_n(x)|$$

4.2 Błąd średniokwadratowy

Suma kwadratów różnic między wartością funkcji interpolowanej, a funkcji interpolującej podzielona przez ilość punktów, w których wykonujemy porównanie:

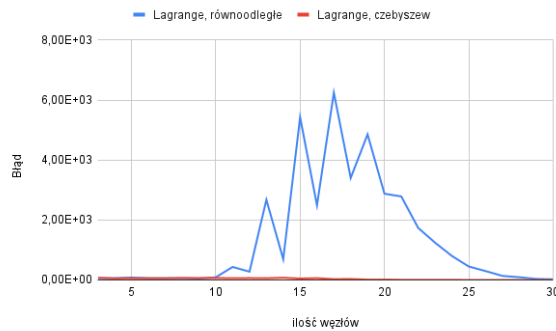
$$\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N (F(x_i) - P_n(x_i))^2$$

5 Wyniki

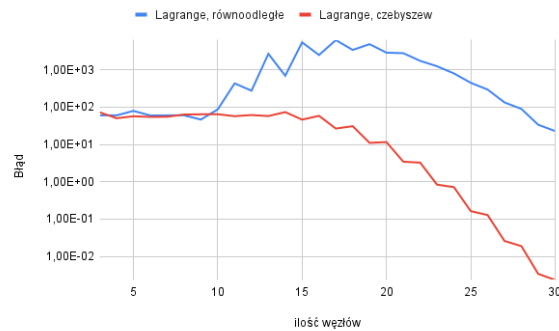
Błędy zostały policzone z wykorzystaniem 1000 równoodlegle wygenerowanych punktów.

5.1 Błąd maksymalny dla węzłów z zakresu [3, 30]

W tym przypadku największą rozbieżność otrzymałem pomiędzy równoodległą generacją węzłów, a generacją zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa. Różnica pomiędzy zastosowanymi algorytmami interpolacji była niewielka i objawiała się dopiero na 6 / 7 miejscu po przecinku. Z tego powodu na poniższych dwóch wykresach (wykres 2 i wykres 3) zaprezentowane zostały rezultaty interpolacji Lagrange'a. Wykres 3 został wykonany w skali logarytmicznej, ponieważ wartości znacznie różniły się rzędami.

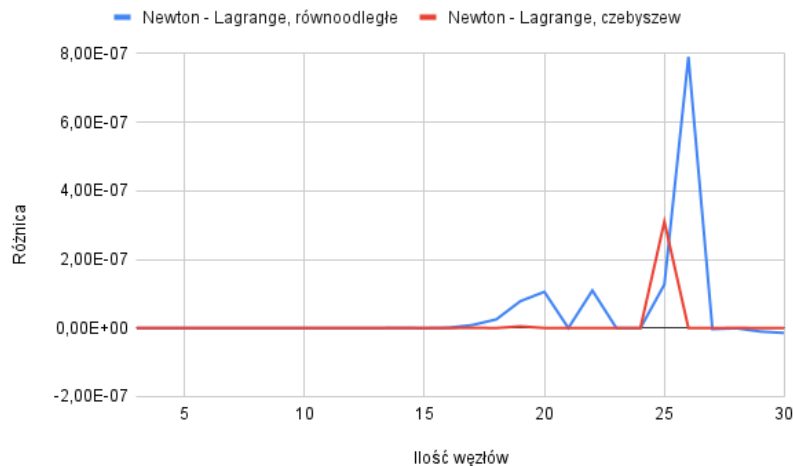


Wykres 2: Błąd maksymalny



Wykres 3: Błąd w skali logarytmicznej

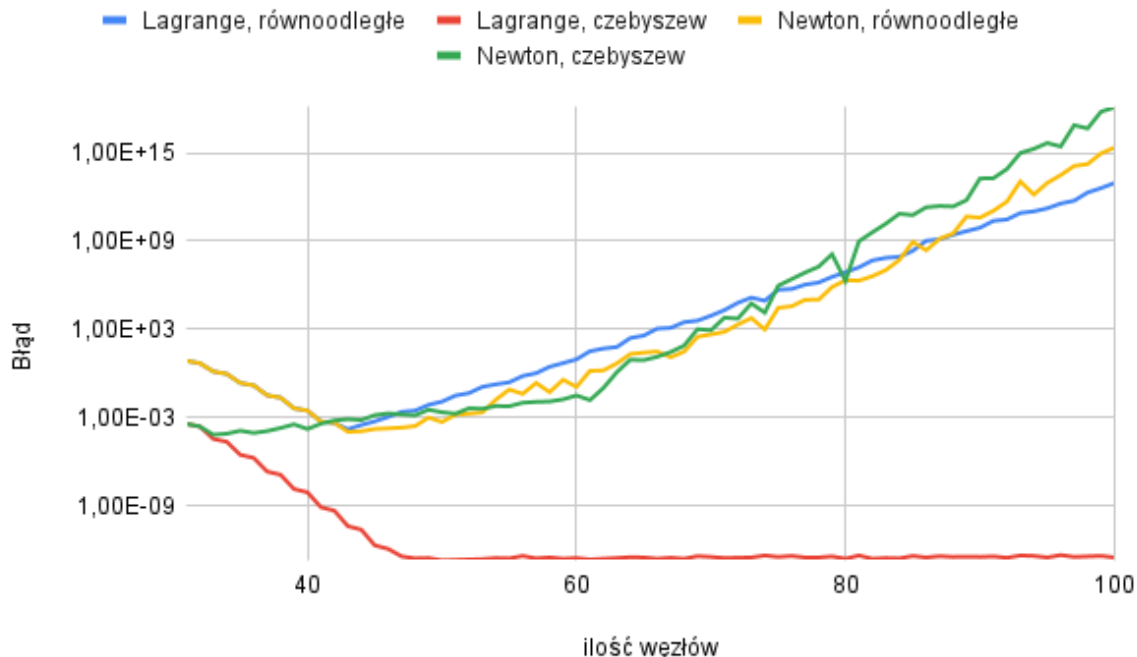
A następnie wykres pokazujący właśnie tę niewielką różnicę pomiędzy algorytmami Lagrange'a i Newtona (wykres 4).



Wykres 4: Różnica błędów maksymalnych dla różnych algorytmów interpolacji

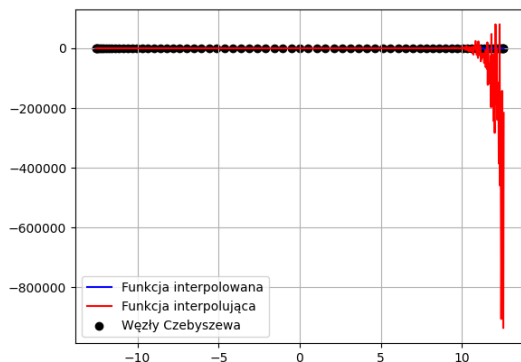
5.2 Błąd maksymalny dla węzłów z zakresu [31, 100]

Przy 30 / 40 wykorzystanych węzłach wyniki otrzymane przez zastosowanie różnych algorytmów interpolacji zaczynają się rozbiegać, co zostało zaprezentowane na wykresie 5. Dla interpolacji Lagrange'a z wykorzystaniem węzłów wygenerowanych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa wynik jest obarczony najmniejszym błędem.

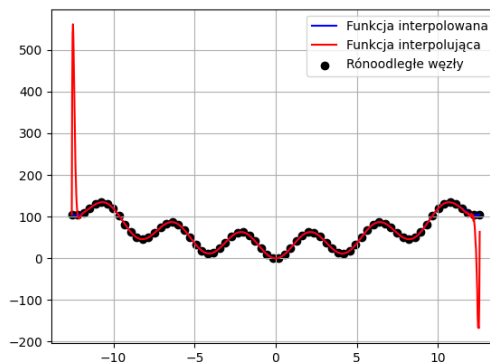


Wykres 5: Błąd maksymalny w skali logarytmicznej

Niespodziewanie interpolacja Newtona w takiej samej konfiguracji jest obciążona bardzo dużym błędem (wykres 6). Dla porównania na wykresie 7 zaprezentowana została interpolacja Newtona, ale z równoodległymi węzłami.



Wykres 6: Interpolacja Newtona z 70 węzłami Czebyszewa

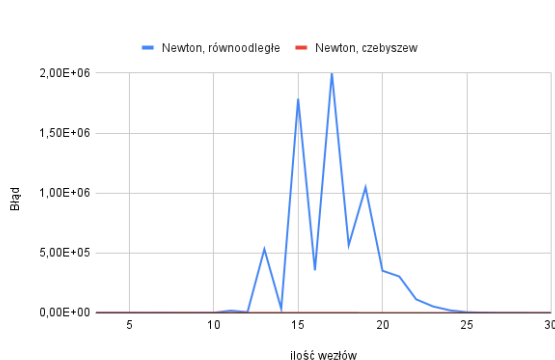


Wykres 7: Interpolacja Newtona z 70 równoodległymi węzłami

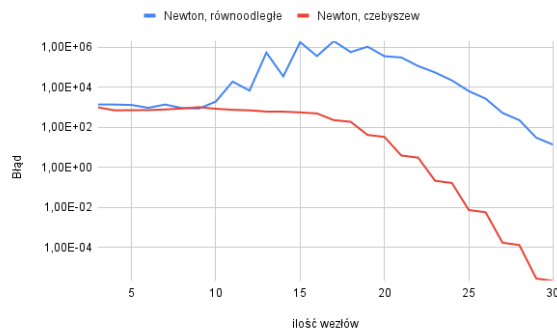
Najprawdopodobniej na wykresie 6 zachodzi błąd związany z obliczeniami numerycznymi, a na wykresie 7 dodatkowo efekt Rungego.

5.3 Błąd średniokwadratowy dla węzłów z zakresu [3, 30]

Podobnie jak dla błędu maksymalnego, wartości różniły się znacznie w zależności od sposobu doboru węzłów, a różnica w wykorzystanym algorytmie była marginalna, z tego powodu zdecydowałem się pokazać tą różnicę korzystając z interpolacji Newtona. Jak w poprzednim razem obok zwykłego wykresu skorzystałem ze skali logarytmicznej, ponieważ wartości znacznie różniły się rzędami.

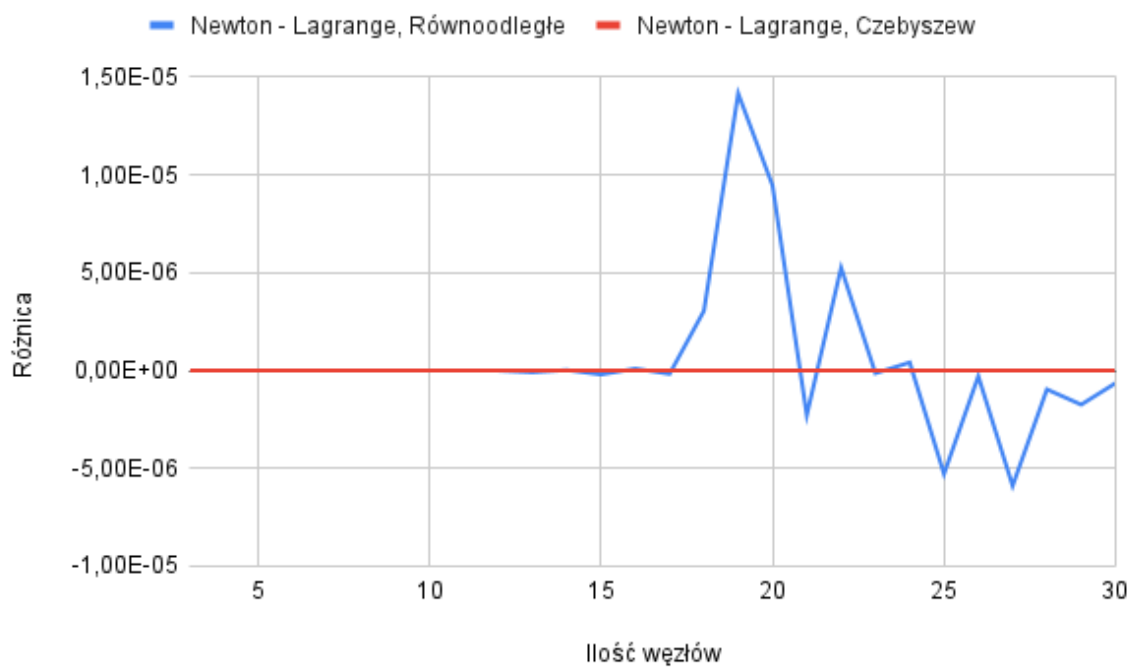


Wykres 8: Błąd średniokwadratowy



Wykres 9: B. średniokwadratowy w skali logarytmicznej

A następnie nakreślić różnicę między sposobami interpolacji (wykres 10).

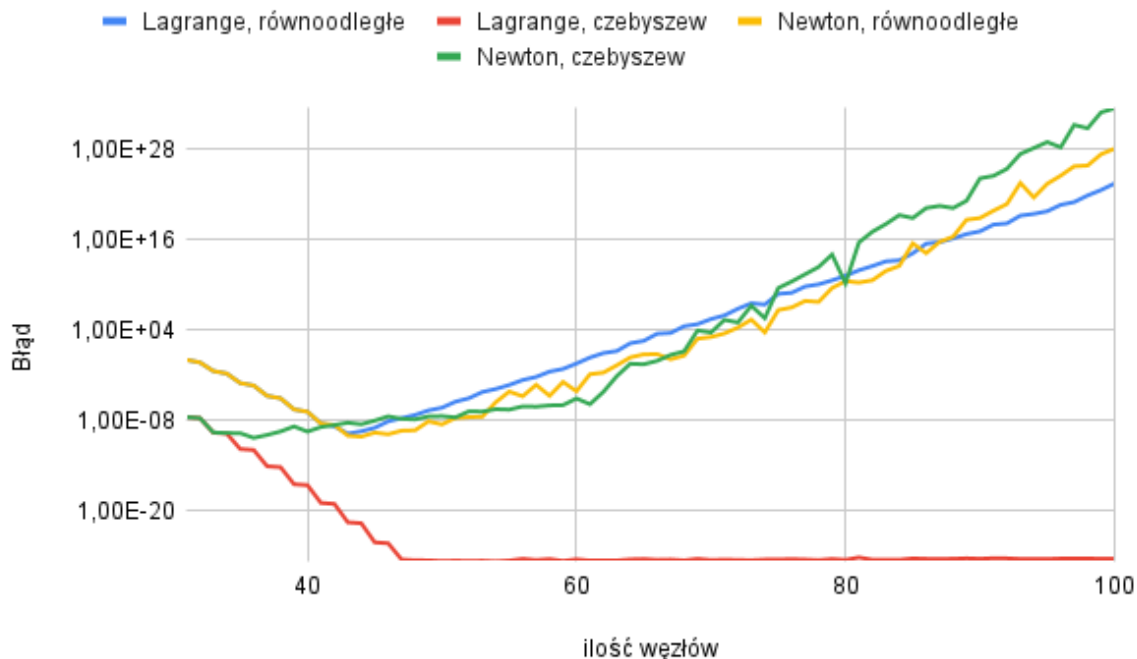


Wykres 10: Różnica błędów średniokwadratowych

Jak widać różnicy pomiędzy algorytmami w przypadku węzłów Czebyszewa praktycznie nie było, a skromna różnica dla równoodległych węzłów pojawiła się w miejscu, gdzie efekt Rungego był największy.

5.4 Błąd średniokwadratowy dla węzłów z zakresu [31, 100]

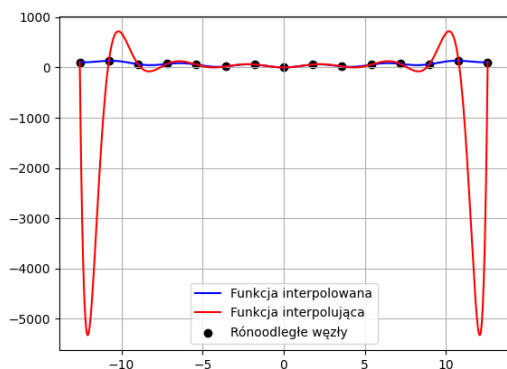
Również podobnie jak dla błędu maksymalnego błędy zaczynają się rozbiegać około 30/40 węzła oraz interpolacja Lagrange'a wraz z węzłami Czebyszewa wypada najlepiej. Co można zobaczyć na wykresie 11 wykonanym w skali logarytmicznej.



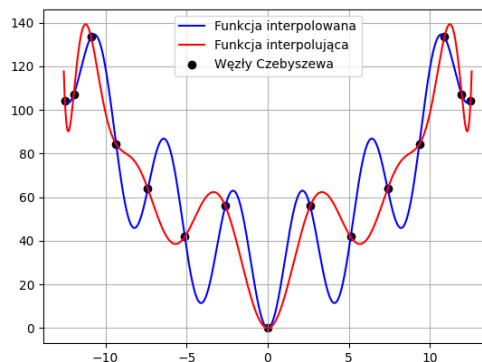
Wykres 11: Błąd średniokwadratowy w skali logarytmicznej

5.5 Efekt Rungego

Efekt Rungego na początku swój "peak"osiąga dla 15 równoodległych węzłów (wykres 12). Dla porównania poniżej na wykresie 13 znajduje się interpolacja z wykorzystaniem węzłów Czebyszewa.



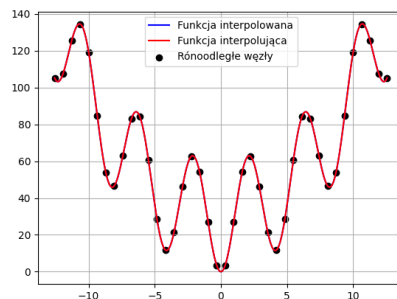
Wykres 12: Efekt Rungego dla interpolacji Lagrange'a



Wykres 13: Brak efektu Rungego dla interpolacji Lagrange'a

Następnie można zauważyć, że efekt Rungego staje się coraz mniejszy począwszy od 16 węzła i przestaje występować dla około 40 równoodległych węzłów. Dla przykładu poniżej zamieszczony

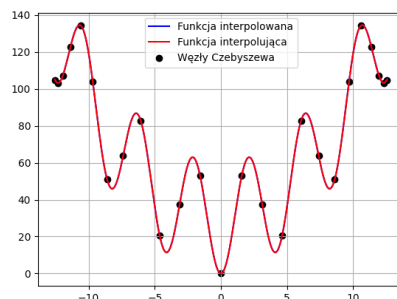
wykres 14, który prezentuje taką sytuację dla interpolacji Newtona. Taka sama sytuacja zachodzi dla algorytmu Lagrange'a.



Wykres 14: Interpolacja Newtona dla 40 równoodległych węzłów

5.6 Najlepsze przybliżenie interpolowanej funkcji

Niezaprzeczalnie najlepsze wyniki otrzymałem dla interpolacji Lagrange'a wraz z węzłami wyznaczonymi zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa, gdzie dla 25 węzłów (wykres 15) wynik jest bardzo zadowalający i obciążony niewielkim błędem, który zmniejsza się (dla 100 węzłów) z rzędu 10^{-3} aż do 10^{-27} ze względu na błąd średniokwadratowy oraz z rzędu 10^{-1} do 10^{-13} ze względu na maksymalną różnicę wartości funkcji.



Wykres 15: Interpolacja Lagrange'a dla 25 węzłów Czebyszewa

Warto zwrócić uwagę, że dobre (choć dużo gorsze) przybliżenie dają wszystkie inne konfiguracje w okolicy 40 węzła. Jednak przy zwiększeniu tej liczby dokładność bardzo szybko maleje i mamy do czynienia ponownie z efektem Rungego i niedokładnością zapisu liczby zmiennoprzecinkowej co generuje bardzo duże błędy.

ilość węzłów	Lagrange, w. równ.	Lagrange, w. czeb.	Newton, w. równ.	Newton, w. czeb.
25	6,34E+03	7,26E-03	6,34E+03	7,26E-03
50	5,74E-07	2,49E-27	3,45E-09	4,39E-08
75	7,50E+08	4,01E-27	5,23E+06	4,41E+09
100	3,31E+23	4,93E-27	1,38E+28	3,13E+33

Tabela 1: Prównanie błędu średniokwadratowego dla wszystkich konfiguracji

6 Wnioski

- W przypadku interpolowanej funkcji algorytm Lagrange'a wraz z węzłami wyznaczonymi zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa okazał się dawać najlepsze rezultaty
- Interpolacje na równoodległych węzłach są obarczone dużym błędem ze względu na efekt Rungego
- Algorytm Newtona przy dużej ilości węzłów zaczyna generować ogromne błędy z uwagi na niedokładną reprezentację liczb zmiennoprzecinkowych
- Oba algorytmy dają zadowalający wynik w okolicach 40 węzła niezależnie od użytego sposobu ich generowania, co jest bardzo nieintuicyjne, ponieważ dokładność dla równoodległych węzłów powinna cały czas maleć z uwagi na efekt Rungego
- Wykres błędu maksymalnego wygląda podobnie do wykresu błędu średniokwadratowego, natomiast wartości różnią się rzędami wielkości