

# MOwNiT - Porównanie metod interpolacji i aproksymacji dla zadanej funkcji

Jakub Frączek

April 2024

## 1 Dane techniczne

### 1.1 Hardware

Laptop z procesorem Intel Core i5-9300H 2.4GHz oraz 32 GB pamięci RAM.

### 1.2 Software

Wykorzystany został system Windows 11 x64 oraz język Python w wersji 3.11.8 wraz z bibliotekami:

- math
- copy
- matplotlib
- numpy

## 2 Funkcja dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

$$f(x) = 10 * m + \frac{x^2}{k} - 10 * m * \cos(k * x)$$

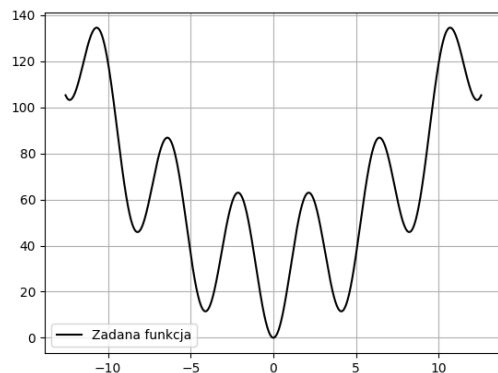
gdzie:

$$k = 1.5$$

$$m = 3.0$$

$$x \in [-4\pi, 4\pi]$$

Wykres funkcji:



### 3 Własności funkcji w zadanym przedziale

- Symetryczna względem osi OY
- Liczne oscylacje
- Znaczne skoki wartości funkcji na krańcach przedziałów

### 4 Metody przybliżania funkcji

Poniżej opisane są metody, które zostały wykorzystane do przybliżania funkcji.

#### 4.1 Interpolacja

Jest to metoda, która polega na wyznaczeniu funkcji interpolującej, która w danym przedziale przyjmuje ustalone wartości w z góry zadanych punktach. Funkcja interpolująca może być wielomianem algebraicznym lub składać się z kilku funkcji.

W szczególności wykorzystane zostały:

- Interpolacja Lagrange’a
- Interpolacja Newtona
- Interpolacja Hermite’a
- Interpolacja funkcją sklejaną 2-go stopnia z warunkami brzegowymi:
  - Natural boundary
  - Clamped boundary
- Interpolacja funkcją sklejaną 3-go stopnia z warunkami brzegowymi:
  - Default boundary
  - Natural boundary

#### 4.2 Aproksymacja

Polega na znalezieniu funkcji aproksymującej, która nie przechodzi przez wszystkie zadane punkty (tak jak było w interpolacji), tylko odzwierciedla ogólny trend w danych, tj. czasem przechodzi pomiędzy węzłami, tak by jak najlepiej dopasować się do funkcji.

W szczególności wykorzystane zostały:

- Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi
- Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi

### 5 Analiza

W poniższych podpunktach opisane zostały problemy występujące dla danego typu przybliżenia ze względu na charakter funkcji.

Sposoby liczenia błędów

$$\max_{x \in [a, b]} |F(x) - P_n(x)|$$

$$\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N (F(x_i) - P_n(x_i))^2$$

## 5.1 Interpolacja Lagrange'a

### 5.1.1 Opis teoretyczny

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a można wyrazić wzorem:

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) L_k$$

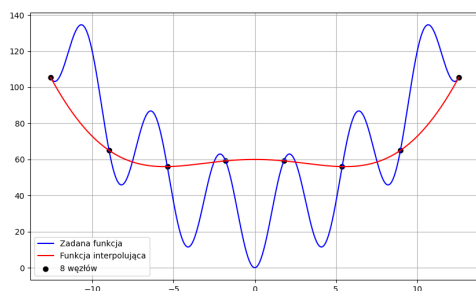
gdzie:

$f(x_k)$  – wartości funkcji w punktach  $x_k$

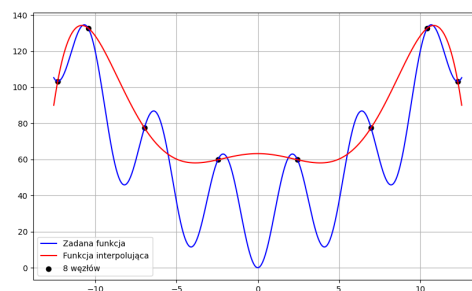
$$L_k(x) = \frac{1}{m} = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad \text{– baza Lagrange'a}$$

### 5.1.2 Napotkane trudności

Pierwsza napotkana trudność przy interpolacji bezpośrednio wynika z dużych oscylacji funkcji, jak widać na poniższych wykresach węzły ułożyły się tak, że przybliżenie jest bardzo złe właśnie w wyniku oscylacji funkcji. Ta sytuacja zachodzi zarówno jak i dla równoodległych węzłów, jak i węzłów Czebyszewa.

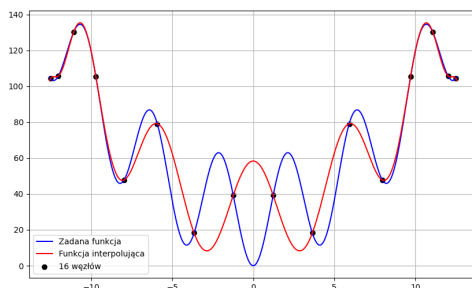


Rysunek 1: Wykres dla 8 równoodległych węzłów



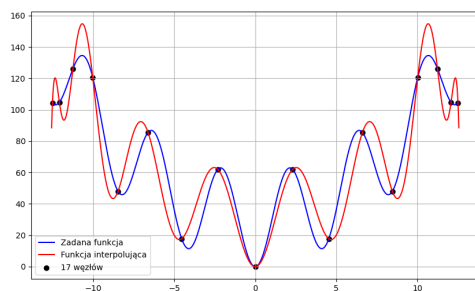
Rysunek 2: Wykres dla 8 węzłów Czebyszewa

Ten problem dobrze widać, też na przykładzie większej liczby węzłów Czebyszewa. Ponieważ jest ich więcej na krańcach przedziałów to przybliżenie jest tam dobre, a z uwagi na ich mniejszą ilość w środku znaczna oscylacja funkcji powoduje problemy z przybliżeniem właśnie w środku przedziału.



Rysunek 3: Wykres dla 16 węzłów Czebyszewa

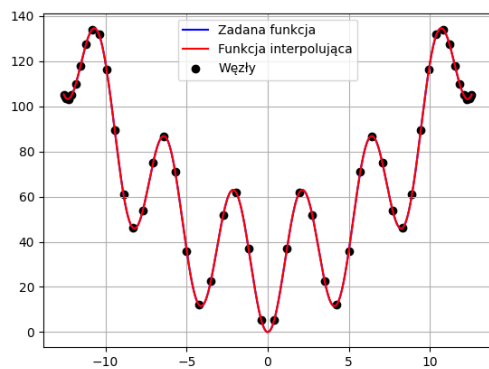
Kolejnym problemem była znaczna zmiana w wartościach funkcji na krańcach przedziałów, która powodowała problemy z przybliżeniem właśnie w okolicy, w której zachodziła ta szybka zmiana wartości, z tego powodu zdarzało się, że przybliżenie "wybiegało" znacznie poza funkcję, ta sytuacja została zaprezentowana poniżej.



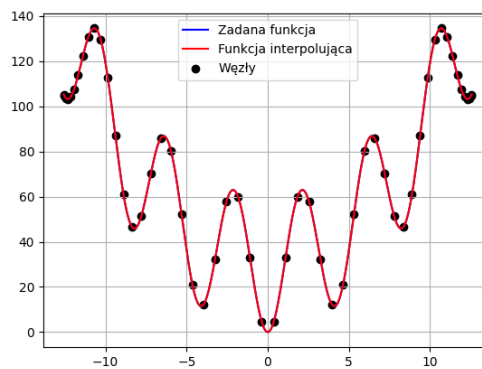
Rysunek 4: Wykres dla 17 węzłów Czebyszewa

### 5.1.3 Najlepsze otrzymane przybliżenie

Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd maksymalny (dla 50 węzłów) oraz średniokwadratowy (dla 54 węzłów), można otrzymać korzystając jedynie z generacji węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa, a wartości błędów są dużo mniejsze niż w przypadku węzłów równoodległych.



Rysunek 5: Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd maksymalny



Rysunek 6: Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd średniokwadratowy

Na poniższych wykresach są podane wartości błędów dla powyższych wykresów.

Błąd maksymalny	1.9895196601282805e-13
Błąd średniokwadratowy	2.296897441475515e-27

Tabela 1: Wartości błędów

## 5.2 Interpolacja Newtona

### 5.2.1 Opis teoretyczny

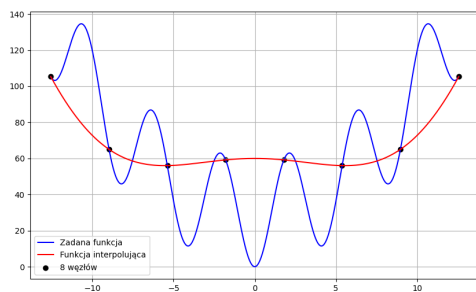
$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] * (x - x_0) * (x - x_1) * \dots * (x - x_{i-1})$$

gdzie:

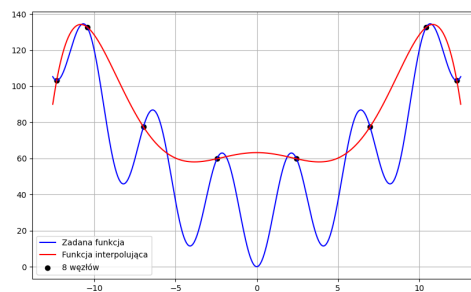
$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \\ f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \\ &\vdots \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

### 5.2.2 Napotkane trudności

Podobnie jak w przypadku interpolacji lagrange'a duża oscylacja wartości funkcji prowadzi do sytuacji, gdzie przybliżenie jest bardzo złe i przypomina linię prostą. To samo zachodzi zarówno dla równoodległych węzłów, jak i węzłów Czebyszewa. Ta sytuacja została pokazana poniżej.

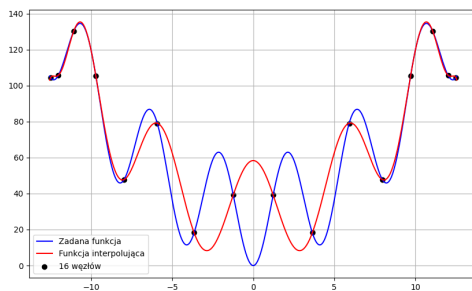


Rysunek 7: Wykres dla 8 równoodległych węzłów



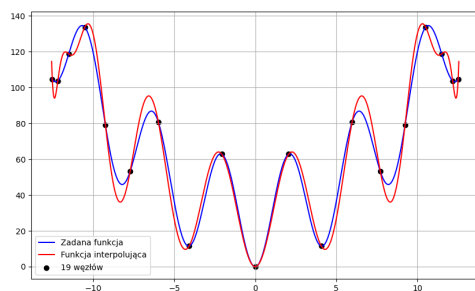
Rysunek 8: Wykres dla 8 węzłów Czebyszewa

Ponownie, przy zwiększeniu liczby węzłów Czebyszewa na krańcach przedziałów otrzymujemy dobre przybliżenie, a w środku z uwagi na mniejszą ich "gęstość" przybliżenie zaczyna się psuć, właśnie z uwagi na szybkie zmiany wartości, jak widać na poniższym wykresie.



Rysunek 9: Wykres dla 16 węzłów Czebyszewa

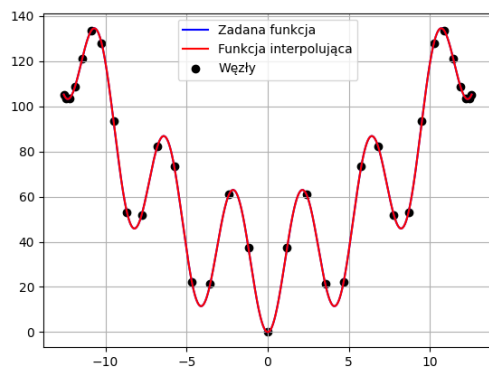
Zauważalny jest również problem ze zmianą wartości funkcji na krańcach przedziałów, co powoduje problemy z dopasowaniem się interpolacji w tych obszarach. Co zostało zaprezentowane na wykresie poniżej.



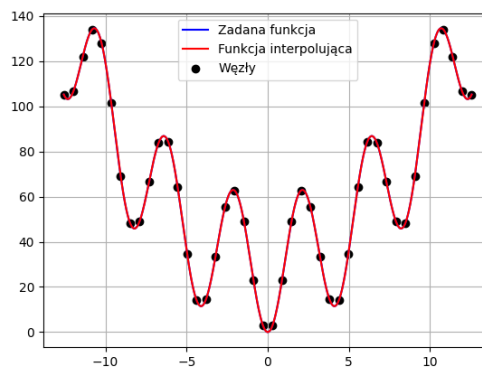
Rysunek 10: Wykres dla 16 węzłów Czebyszewa

### 5.2.3 Najlepsze otrzymane przybliżenie

Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd maksymalny otrzymałem dla 100 węzłów czebyszewa, a ze względu na błąd średniokwadratowy dla 100 równoodległych węzłów. Zachodzi znaczna różnica w najlepszym przybliżeniu dla błędu maksymalnego, węzły Czebyszewa dają przybliżenie lepsze, aż o 5 rzędów wartości.



Rysunek 11: Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd maksymalny



Rysunek 12: Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd średniokwadratowy

W poniższej tabeli przedstawione są wartości błędów dla poprzednich wykresów.

Błąd maksymalny	6.877908359115281e-05
Błąd średniokwadratowy	8.220356191804188e-11

Tabela 2: Wartości błędów

## 5.3 Interpolacja Hermite'a

### 5.3.1 Opis teoretyczny

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i p_i(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{(s(i)+j)} \cdot p_{s(i)+j}(x)$$

gdzie:

$$p_{s(0)}(x) = 1$$

$$p_{s(i)+j}(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_{i-1})^{m_{i-1}} (x - x_i)^j$$

$$s(i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0 \\ m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1} & \text{dla } i > 0 \end{cases}$$

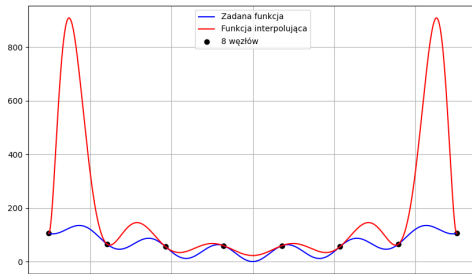
$$i = 0, 1, \dots, k$$

$$j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

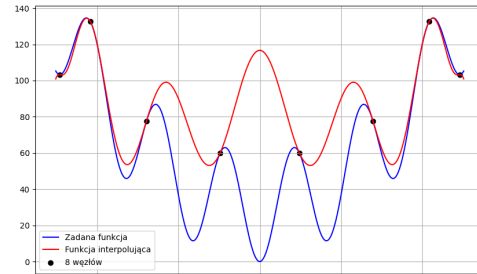
Współczynniki  $b_l$  to kolejne ilorazy różnicowe.

### 5.3.2 Napotkane trudności

Podobnie jak dla interpolacji Newtona i Lagrange'a dla dość małej ilości węzłów oscylacja funkcji powoduje duży błąd w przybliżeniu, jak widać na poniższych wykresach. Dodatkowo dla węzłów równoodległych zachodzi efekt Rungego.

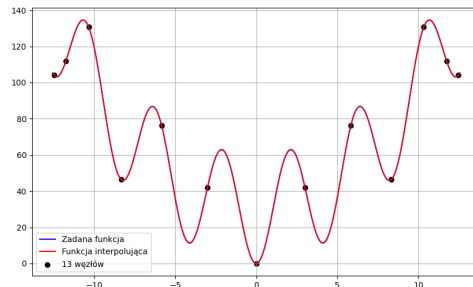


Rysunek 13: Wykres dla 8 równoodległych węzłów



Rysunek 14: Wykres dla 8 węzłów Czebyszewa

Zupełnie przeciwnie do interpolacji Lagrange'a i Newtona dla 16 węzłów Czebyszewa otrzymujemy całkiem dobre przybliżenie. W praktyce już od 13 węzła przybliżenie jest akceptowalne, co zostało zaprezentowane poniżej.



Rysunek 15: Wykres dla 13 węzłów Czebyszewa

Jeśli chodzi o problem z znaczym wzrostem wartości funkcji, to praktycznie tutaj nie występuje. Prawdopodobnie dzieje się tak ze względu na wykorzystanie pochodnej funkcji do obliczeń.

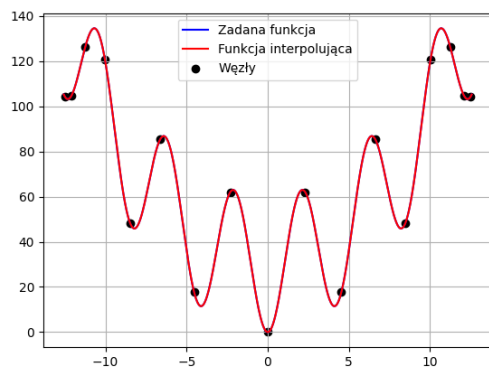
Dodatkowym problemem w interpolacji Hermite'a był znaczny błąd przybliżenia występujący na krawędzi przedziału, który zwiększał się wraz z wzrostem liczby węzłów. Ta sytuacja została pokazana na wykresie poniżej.



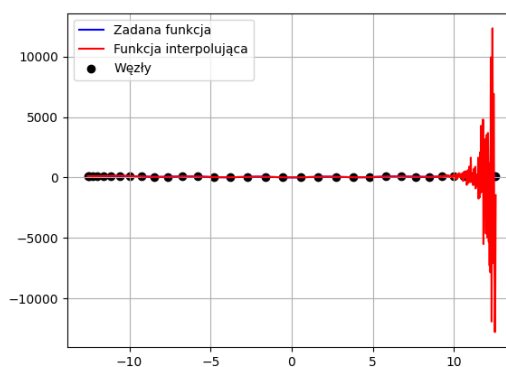
Rysunek 16: Wykres dla 40 węzłów Czebyszewa

### 5.3.3 Najlepsze otrzymane przybliżenie

Jak widać dla najmniejszego błędu maksymalnego dostajemy dobre przybliżenie, ale ze względu na błąd średniokwadratowy wcale tak nie jest, a błąd przybliżenia na krańcu przedziału jest bardzo duży.



Rysunek 17: Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd maksymalny



Rysunek 18: Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd średniokwadratowy

W tabeli poniżej przedstawione zostały wartości błędów dla powyższych wykresów

Błąd maksymalny	0.0002819640489661879
Błąd średniokwadratowy	5.6728812264079556e-11

Tabela 3: Wartości błędów



## 5.4 Interpolacja funkcją sklejaną 2-go stopnia

### 5.4.1 Opis teoretyczny

#### Wyznaczanie współczynników

Kwadratowa funkcja sklejana musi spełniać warunki:

- $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$  (1)
- $S_i(x_i) = f(x_i) = y_i$  (2)
- $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$  (3)
- $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$  (4)

Podstawiam  $x_i$  do (1) i korzystam z własności (2), z tego otrzymuję:

$$y_i = S_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 = a_i \Rightarrow a_i = y_i \quad (5)$$

Korzystając z warunku (1) i (4):

$$b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$c_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \quad (6)$$

Korzystając z (1), (2), (3) i (5):

$$y_{i+1} = S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 \quad (7)$$

Korzystając z (6) i (7):

$$y_{i+1} - y_i = b_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = b_i + \frac{1}{2}b_{i+1} - \frac{1}{2}b_i$$

$$2 \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = b_{i+1} + b_i$$

$$b_i + b_{i-1} = 2 \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Oznaczam  $\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$  jako  $v$  i tworzę układ równań w celu wyliczenia współczynnika  $b_i$

$$b_1 + b_2 = 2v_2$$

$$b_2 + b_3 = 2v_3$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2} + b_{n-1} = 2v_{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ \vdots \\ 2v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Jak widać jest  $n - 1$  równań i  $n$  niewiadomych, zatem trzeba będzie ustalić dodatkowy warunek brzegowy.

### Natural Boundary

Założenia:

$$S'_1(x_1) = 0 \quad \vee \quad S'_{n-1}(x_n) = 0 \quad (8)$$

Korzystając z (1) i (8):

$$S'_1(x_1) = 0 = b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) \Rightarrow b_1 = 0 \quad (9)$$

Zatem:

$$b_1 + b_2 = 2v_2 \Rightarrow b_2 = 2v_2$$

$$b_2 + b_3 = 2v_3 \Rightarrow b_3 = 2v_3 - 2v_2$$

$$\vdots$$

$$b_n = 2(v_n - v_{n-1} + v_{n-2} - \dots \pm v_2)$$

### Clamped Boundary

Założenia:

$$S'_1(x_1) = f'_1(x) \quad \vee \quad S'_{n-1}(x_n) = f'_{n-1}(x) \quad (10)$$

$f'_1(x)$  można zapisać jako:

$$f'_1(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (11)$$

Korzystając z (1), (10) i (11):

$$b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = v_2$$

Zatem:

$$b_1 + b_2 = 2v_2 \Rightarrow b_2 = v_2$$

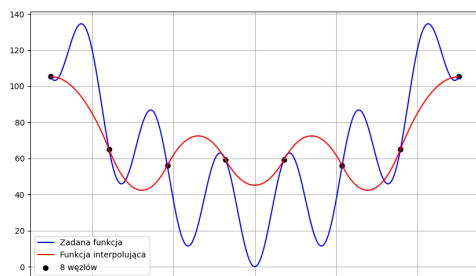
$$b_2 + b_3 = 2v_3 \Rightarrow b_3 = 2v_3 - v_2$$

$$\vdots$$

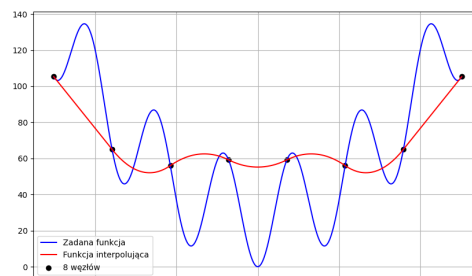
$$b_n = 2(v_n - v_{n-1} + v_{n-2} + \dots \pm v_3) \pm v_2$$

## 5.5 Napotkane trudności

Ponownie dla małej liczby węzłów przybliżenie nie było najlepsze ze względu na duże oscylacje funkcji, jak widać na poniższych wykresach.

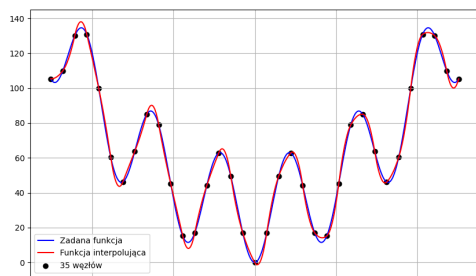


Rysunek 19: Wykres dla 8 równoodległych węzłów i Natural Boundary

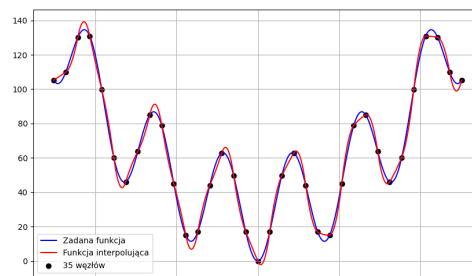


Rysunek 20: Wykres dla 8 równoodległych węzłów i Clamped Boundary

Przy wykorzystaniu funkcji sklejanej 2-go stopnia występowały problemy z dopasowaniem funkcji interpolującej w punktach przegięcia funkcji, co zostało zaprezentowane poniżej. Problem ten występował zarówno dla Natural Boundary, jak i clamped Boundary. Na szczęście wraz z zwiększeniem liczby węzłów problem znika.

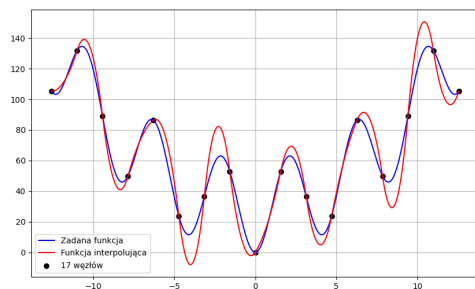


Rysunek 21: Wykres dla 35 równoodległych węzłów i Natural Boundary



Rysunek 22: Wykres dla 35 równoodległych węzłów i Clamped Boundary

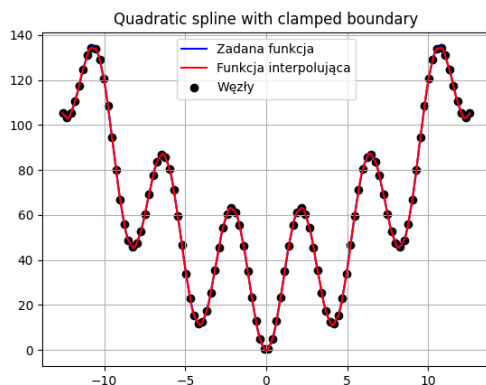
Występowały też dość osobliwe błędy w losowych miejscach. Jak widać poniżej funkcja jest dopasowana dość dobrze w większości miejsc, jednak w paru występuje znaczny błąd. Taka sama własność zachodzi dla Natural Boundary i Clamped Boundary, a miejsca, w których zachodzą błędy zmieniają się wraz z zmianą liczby węzłów.



Rysunek 23: Wykres dla 17 równoodległych węzłów i Natural Boundary

### 5.5.1 Najlepsze otrzymane przybliżenie

W przypadku funkcji skleanej 2-go stopnia przybliżenie polepsza się wraz z zwiększeniem liczby węzłów, zatem najlepsze przybliżenie w obu przypadkach otrzymałem dla 100 węzłów. Jak widać jest to dobre przybliżenie



Rysunek 24: Najlepsze przybliżenie funkcji ze względu na błąd maksymalny i średniokwadratowy

W tabeli poniżej przedstawiono wartości błędów dla powyższych wykresów.

Błąd maksymalny	0.5527769402251668
Błąd średniokwadratowy	0.16001239042418153

Tabela 4: Wartości błędów

## 5.6 Funkcja sklejana 3-go stopnia

### Wyznaczanie współczynników

Wzór na sześcienną funkcję sklejaną został podany poniżej:

$$s(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_i) + c_i \cdot (x - x_i)^2 + d_i \cdot (x - x_i)^3 \text{ dla } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Dodatkowo funkcja sklejana 3-go stopnia musi spełniać poniższe warunki:

- $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$
- $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$
- $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$
- $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$

Ponieważ  $S_i(x)$  jest sześcienna, to  $S''_i(x)$  jest liniowa na przedziale  $[x_i, x_{i+1}]$ . Wprowadzam  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , wtedy:

$$S''_i(x) = S''_i(x_i) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + S''_i(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{h_i}$$

Całkując dwukrotnie otrzymuję:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i} (x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x)$$

, gdzie C i D - stałe całkowania Korzystając z warunków interpolacji:  $S_i(x_i) = y_i$  oraz  $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  można wyliczyć C i D. Po wyliczeniu tych stałych otrzymujemy:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i} (x - x_i)^3 + \left( \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S''_i(x_{i+1})h_i}{6} \right) (x - x_i) + \left( \frac{y_i}{h_i} - \frac{S''_i(x_i)h_i}{6} \right) (x_{i+1} - x)$$

W powyższym wzorze nadal nie znamy  $S''_i(x)$ . W celu jego wyliczenia należy skorzystać z warunku ciągłości pierwszej pochodnej. Różniczkując zatem  $S_i(x)$ :

$$S'_i(x_i) = -\frac{h_i}{3} S''_i(x_i) - \frac{h_i}{6} S''_i(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

Dla przejrzystości należy wprowadzić dwa symbole:

- $\sigma_i = \frac{1}{6} S''_i(x_i)$
- $\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$

Wtedy:

$$\begin{aligned} S'_i(x_i) &= -2\sigma_i h_i - \sigma_{i+1} h_i + \Delta_i \\ S'_i(x_i) &= \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \end{aligned}$$

Wtedy:

$$S'_{i-1}(x_i) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

Teraz korzystając z warunku ciągłości ( $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ ):

$$\Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

Finalnie otrzymujemy układ równań liniowych:

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n-1$$

Jak można zauważyć w układzie równań mamy n niewiadomych i n - 2 równań, zatem należy określić dwa dodatkowe warunki brzegowe.

## Default Boundary

Warunki:

- $C_1(x)$  - f. sześcienna przez pierwsze 4 punkty
- $C_n(x)$  - f. sześcienna przez ostatnie 4 punkty

$$S'''(x_1) = C_1''' \quad S'''(x_n) = C_n'''$$

Stałe  $C_1'''$  i  $C_n'''$  mogą być określone bez znajomości  $C_1(x)$  i  $C_n(x)$ :

- $\Delta_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$
- $\Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i}$
- $\Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}$

Różniczkując wzór na  $S''(x)$  na przedziale  $[x_i, x_{i+1}]$ , otrzymujemy:

$$S'''(x_1) = C_1'''(x_1) \Rightarrow \frac{6}{h_1}(\sigma_2 - \sigma_1) = 6\Delta_i^{(3)}$$

$$S'''(x_n) = C_n'''(x_n) \Rightarrow \frac{6}{h_{n-1}}(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = 6\Delta_{n-3}^{(3)}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

- $-h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)}$
- $h_{n-1}\sigma_{n-1} - h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)}$

Finalnie otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{bmatrix}$$

## Natural Boundary

Warunki:

$$S''(x_1) = S''(x_n) = 0$$

Biorąc pod uwagę, że  $\sigma_i = \frac{1}{6}S''_i(x_i)$  otrzymujemy:

$$S''(x_1) = S''_1(x_1) = 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = 0$$

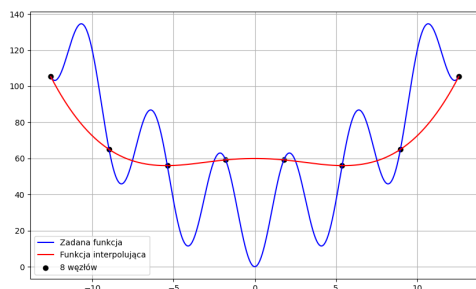
$$S''(x_n) = S''_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow \sigma_n = 0$$

Dzięki temu otrzymujemy:

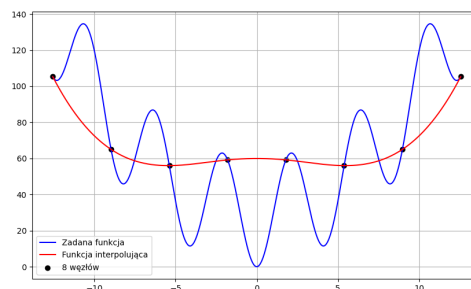
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 5.7 Napotkane trudności

Jak w przypadku innych metod interpolacji występuje problem z przybliżeniem z powodu dużej oscylacji wartości funkcji. Występuje on zarówno dla Default Boundary, jak i Natural Boundary.

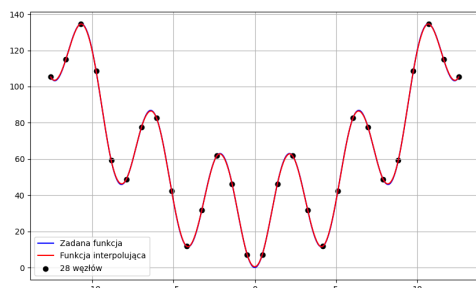


Rysunek 25: Wykres dla 8 równoodległych węzłów i Default Boundary

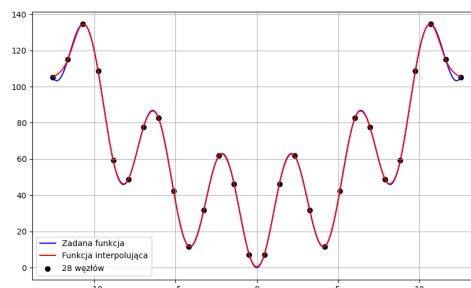


Rysunek 26: Wykres dla 8 równoodległych węzłów i Natural Boundary

Widoczny był też problem z przybliżeniem na krańcach przedziałów. Został on zaprezentowany poniżej. Błąd ten występuje zarówno dla małej, jak i dużej liczby węzłów i jest bardziej widoczny dla Natural Boundary, a dla Default Boundary znacznie szybciej zanika.

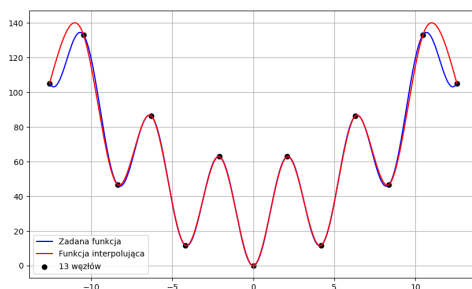


Rysunek 27: Wykres dla 28 równoodległych węzłów i Default Boundary



Rysunek 28: Wykres dla 28 równoodległych węzłów i Natural Boundary

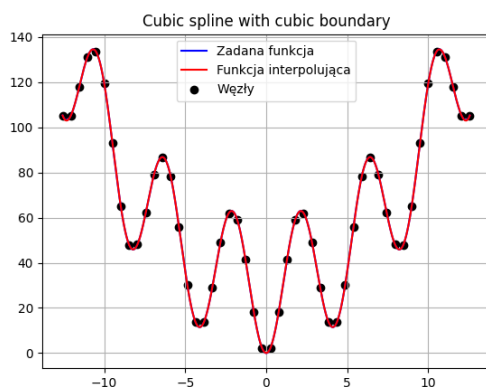
Dla 13 równoodległych węzłów i Natural Boundary otrzymałem bardzo "szczęśliwe" ułożenie węzłów, które dało bardzo dobre przybliżenie w środku przedziału. Natomiast widoczny jest problem z przybliżeniem na krańcach przedziałów, ze względu na znaczny wzrost wartości funkcji w tym obszarze/



Rysunek 29: Dobre przybliżenie dla 13 równoodległych węzłów i Natural Boundary

### 5.7.1 Najlepsze otrzymane przybliżenie

Najlepsze przybliżenie zarówno ze względu na błąd maksymalny, jak i średniokwadratowy otrzymałem dla 50 równoodległych węzłów i Default Boundary. Otrzymane przybliżenie jest zadowalające.



Rysunek 30: Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd maksymalny i średniokwadratowy

Poniżej w tabeli przedstawione są wartości błędów dla powyższych wykresów

Błąd maksymalny	0.2206113875498943
Błąd średniokwadratowy	0.0012792870753556306

Tabela 5: Wartości błędów



## 6 Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

### 6.0.1 Opis teoretyczny

Funkcja bazowe, czyli ciągi jednomianów  $\varphi_j(x) = x^j, j = 0, 1, \dots, m$

Funkcja aproksymująca:  $f(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$

F(x) - zadana na zbiorze dyskretnym  $\{x_i\}, i = 0, 1, \dots, n$

Szukamy takich współczynników  $a_j$ , że:

$$\min! \sum_{i=0}^n w(x_i) [F(x_i) - f(x_i)]^2$$

Układ normalny:

$$\sum_{i=0}^n w(x_i) [F(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j] x_i^k \stackrel{k \leftarrow \frac{\partial f}{\partial a_k}}{=} 0, k = 0, 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^k \sum_{j=0}^m a_j x_i^j = \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) x_i^k, k = 0, 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=0}^m \left( \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^{j+k} \right) a_j = \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) x_i^k$$

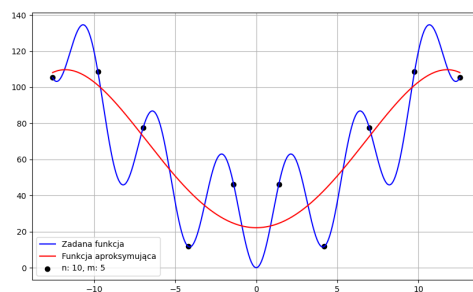
W postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \dots & \sum w_i x_i^m \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \dots & \sum w_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum w_i x_i^m & \sum w_i x_i^{m+1} & \sum w_i x_i^{m+2} & \dots & \sum w_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_i F_i \\ \sum w_i F_i x_i \\ \vdots \\ \sum w_i F_i x_i^m \end{pmatrix}$$

$$G \cdot A = B$$

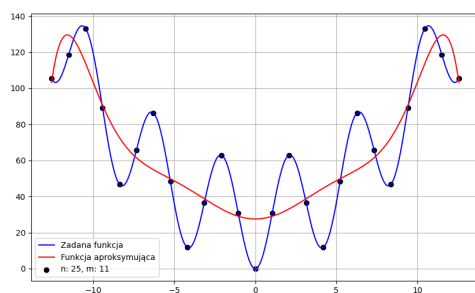
### 6.1 Napotkane trudności

W tym przypadku duża oscylacja funkcji ma znaczny wpływ na przybliżenie, gdyż wartości niejako się kompensują i funkcja aproksymująca "przebiega" przez środek zdanej funkcji. Sytuacja ta ustępuje dopiero przy bardzo dużej ilości węzłów.



Rysunek 31: Dobre przybliżenie dla 10 węzłów i wielomianu 5 stopnia

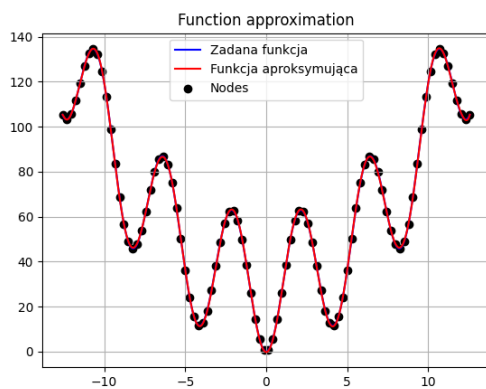
Jak widać na poniższym wykresie ponad dwukrotne zwiększenie liczby węzłów niemal nie poprawiło aproksymacji, z uwagi na niefortunne ułożenie węzłów. Zatem z uwagi na specyfikę funkcji ilość węzłów musi być naprawdę duża.



Rysunek 32: Aproksymacja dla 25 węzłów i wielomianu 11 stopnia

### 6.1.1 Najlepsze otrzymane przybliżenie

Najlepsze przybliżenie otrzymałem dla 94 węzłów i 25 stopnia wielomianu. Jak widać, ze względu na specyfikę funkcji liczba węzłów musiała być naprawdę duża, żeby uzyskać dobre przybliżenie.



Rysunek 33: Najlepsze przybliżenie ze względu na błąd maksymalny i średniokwadratowy

W poniższej tabeli znajdują się wartości błędów dla powyższego wykresu.

Błąd maksymalny	0.5014720569615605
Błąd średniokwadratowy	0.0017181768299556364

Tabela 6: Wartości błędów

## 6.2 Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi

### 6.2.1 Opis teoretyczny

Ogólny wzór na przybliżenie aproksymacyjne

$$F(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_m\phi_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i\phi_i(x)$$

W tym przypadku za funkcje bazowe przyjmuję

$$(\phi_i(x)) = 1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(mx), \cos(mx)$$

Wzory przybliżające szukaną funkcję wielomianem trygonometrycznym

$$F_m(x) = \frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cdot \cos(j \cdot x) + b_j \cdot \sin(j \cdot x))$$

$$a_j = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \cos(j \cdot x_i)$$

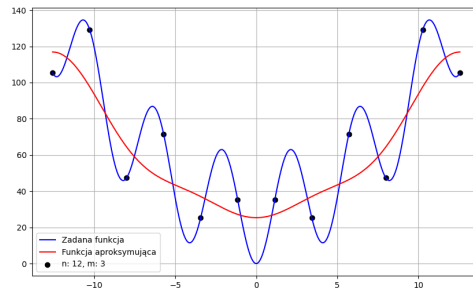
$$b_j = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \sin(j \cdot x_i)$$

Przyjmując  $n + 1$  równoodległych węzłów aproksymacji opisanych wzorem  $x_i = n \cdot i \cdot \frac{\pi}{2}$ , to kolejne elementy bazy będą do siebie ortogonalne i stworzą układ normalny dobrze uwarunkowany.

Wielomianami trygonometrycznymi można aproksymować dowolną funkcję okresową, jak wynika z tw. Weierstrassa

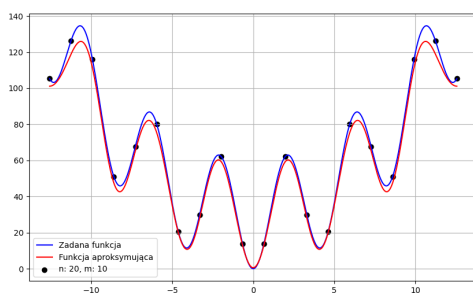
### 6.2.2 Napotkane Trudności

Podobnie jak w poprzednich przypadkach niekorzystne ustawienie węzłów w połączeniu z oscylacją funkcji dawało złe przybliżenie, co widać na poniższym wykresie.



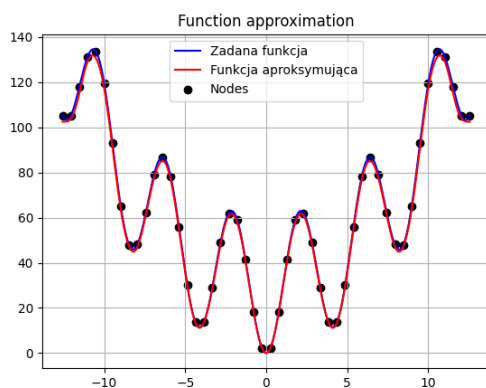
Rysunek 34: Przybliżenie dla 12 węzłów i wielomianu 3 stopnia

Występowały także trudności z dopasowaniem wielomianu w punktach, gdzie zmienia się monotoniczność, co widać na poniższym wykresie. Największy błąd widać w górnych punktach, a w dolnych przybliżenie jest dobre.



Rysunek 35: Przybliżenie dla 20 węzłów i wielomianu 10 stopnia

### 6.2.3 Najlepsze otrzymane przybliżenie



Rysunek 36: Najlepsze otrzymane przybliżenie

W poniższej tabeli znajdują się wartości błędów dla powyższego wykresu.

Błąd maksymalny	3.001944813353049
Błąd średniokwadratowy	1.2747973802059938

Tabela 7: Wartości błędów

## 7 Wnioski

- Największy problemem z zadaną funkcją była jej znaczna oscylacja, co było problemem dla każdej metody przybliżenia funkcji
- Drugim najważniejszym problemem była znaczna zmiana wartości funkcji na krańcach przedziałów, co również powodowało masę błędów przybliżenia na krańcach przedziałów i dochodziło do sytuacji, gdzie w środku przedziału przybliżenie było bardzo dobre, a na krańcach bardzo złe.
- Dla każdej metody przybliżenie przy odpowiednio dobranych parametrach jesteśmy w stanie otrzymać zadowalające przybliżenie, jednak w niektórych przypadkach takie przybliżenie może być bardzo niewydatne obliczeniowo.
- Nie można jednoznacznie wskazać najlepszej metody przybliżenia, każda z nich ma swoje wady i zalety. Powinna ona być dobrana do funkcji oraz zastosowania