

MOwNiT - Rozwiązywanie równań i układów równań nieliniowych

Jakub Frączek

21 maja 2024

1 Wstęp

Zadanie polegało na wyznaczeniu pierwiastków równania $f(x) = 0$ na zadanym przedziale $[a, b]$. W zadaniu należało wykorzystać metodę Newtona i metodę Siecznych, a punkty wybrać co 0.1 na przedziale $[a, b]$. Dla metody siecznych jeden z końców przedziału miał być ustalony tak jak dla metody Newtona, a drugi jako początek albo koniec przedziału $[a, b]$. Następnie porównać działania tych metod stosując dwa różne kryteria stopu.

2 Funkcja dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

$$f(x) = x^2 - n * \sin(x)^m$$

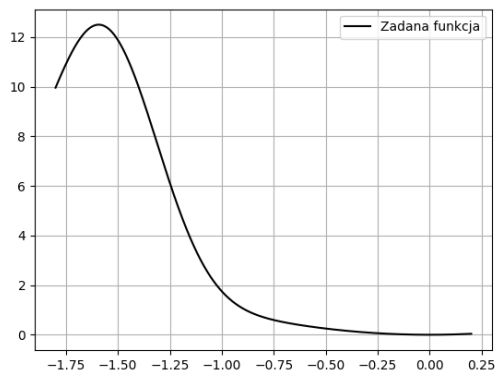
gdzie:

$$n = 10, m = 15, x \in [-1.8, 0.2]$$

zatem:

$$f(x) = x^2 - 10 * \sin(x)^{15}, x \in [-1.8, 0.2]$$

Zatem wykres zadanej funkcji wygląda następująco:



3 Dane techniczne

3.1 Hardware

Laptop z procesorem Intel Core i5-9300H 2.4GHz oraz 32 GB pamięci RAM.

3.2 Software

Wykorzystany został system Windows 11 x64 oraz język Python w wersji 3.11.8 wraz z bibliotekami:

- math
- enum
- matplotlib
- numpy
- seaborn

4 Kryteria stopu

Kryteria stopu służą do zatrzymania wykonywania programu, gdy przybliżenie miejsca zerowego uznajemy za "dość dobre".

4.1 Wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka

Jednym z kryteriów była wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka równania $f(x) = 0$.

$$|x^{(i+1)} - x^{(i)}| < \rho$$

4.2 Wartość bezwzględna wartości funkcji

Kolejnym kryterium była wartość bezwzględna wartości funkcji f , w punkcie przybliżającym położenie pierwiastka.

$$|f(x)^{(i)}| < \rho$$

5 Metoda Newtona

Do zaimplementowania metody Newtona wykorzystałem wzór:

$$f(\alpha) = 0 = f(x_{i-1} + h) = f(x_{i-1}) + h \cdot f'(x_{i-1}) + \dots \text{ (pomijamy)}$$

gdzie:

$$\alpha - \text{prosty pierwiastek}, x - \text{przblnienie } \alpha, h = -\frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

zatem otrzymujemy wzór iteracyjny:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

6 Metoda siecznych

Do zaimplementowania metody siecznych wykorzystałem wzór:

$$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f_{i+1} - f_i} \cdot f_{i+1}$$

Przy czym, startujemy z x_0 , x_1 i nie badamy $f_0 \cdot f_1$

7 Wyniki

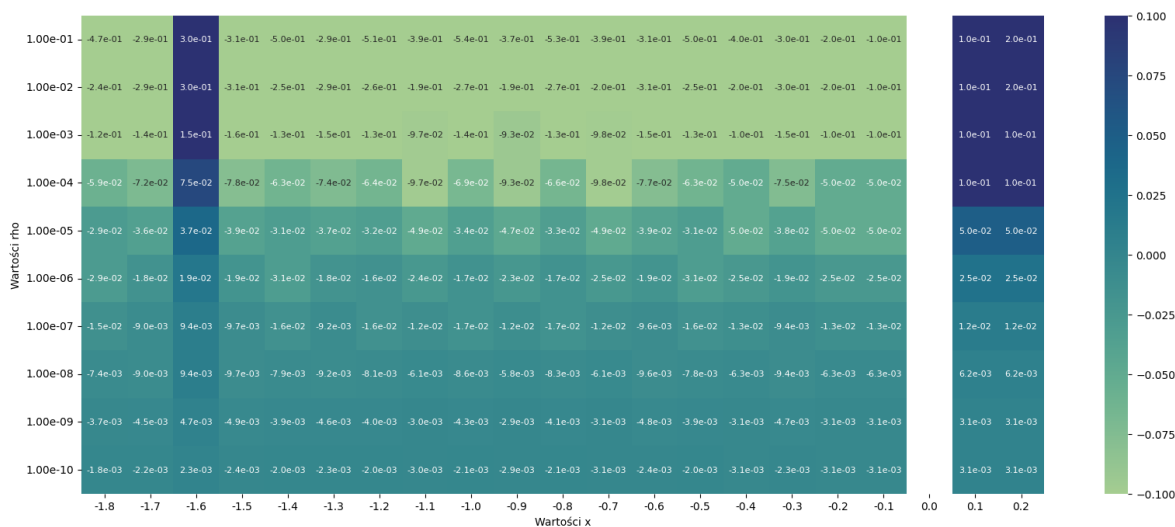
Analizę przeprowadziłem dla wartości $\rho \in [10^{-1}, 10^{-20}]$, wartości x zaczynając od początku dziedziny, robiąc krok co 0.1 i kończąc lewym krańcem przedziału. Za maksymalną liczbę iteracji wybrałem liczbę 1000. Dodatkowo analiza została przeprowadzona dla dwóch różnych kryteriów stopu.

7.1 Wyniki dla metody Newtona

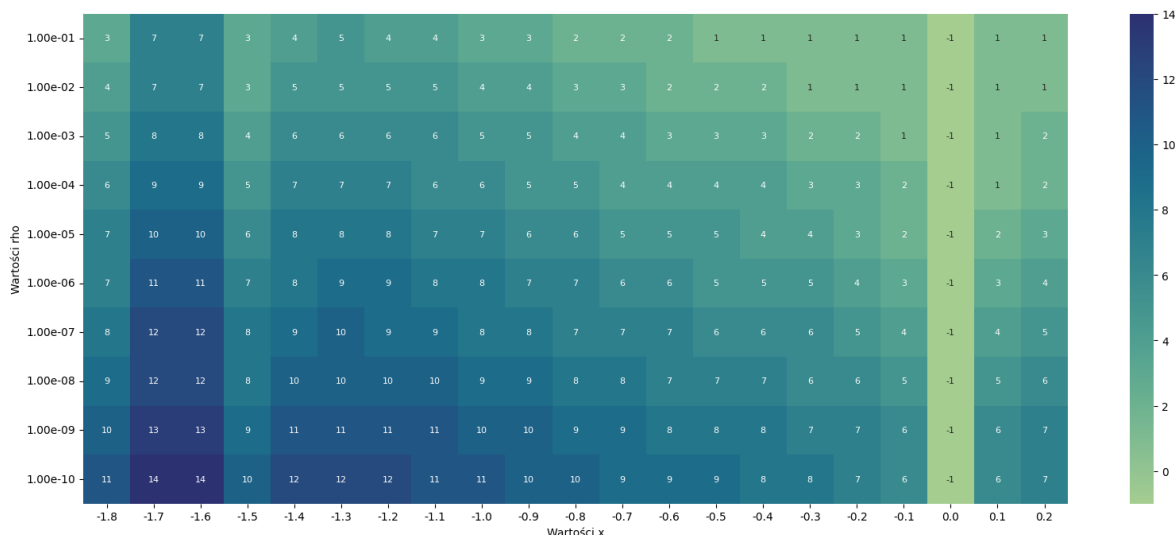
Wyniki zostały podzielone ze względu na kryterium stopu oraz wartości parametru ρ . Poza tym, w każdym przypadku $x \in [-1.8, 0.2]$.

7.1.1 Kryterium wartości bezwzględnej wartości funkcji, $\rho \in [10^{-1}, 10^{-10}]$

Jak widać na poniższych wykresach, dla $x = 0$ nie udało się obliczyć wartości pierwiastka, z kolei w innych punktach była ona dość bliska prawdziwej wartości, a precyzja zwiększała się wraz z zwiększeniem dokładności (zmniejszeniem wartości parametru ρ). Jak widać zwiększanie dokładności oraz oddalenie od położenia pierwiastka prowadzi do zwiększenia liczby iteracji, ale nie do spadku dokładności.



Wykres 1: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



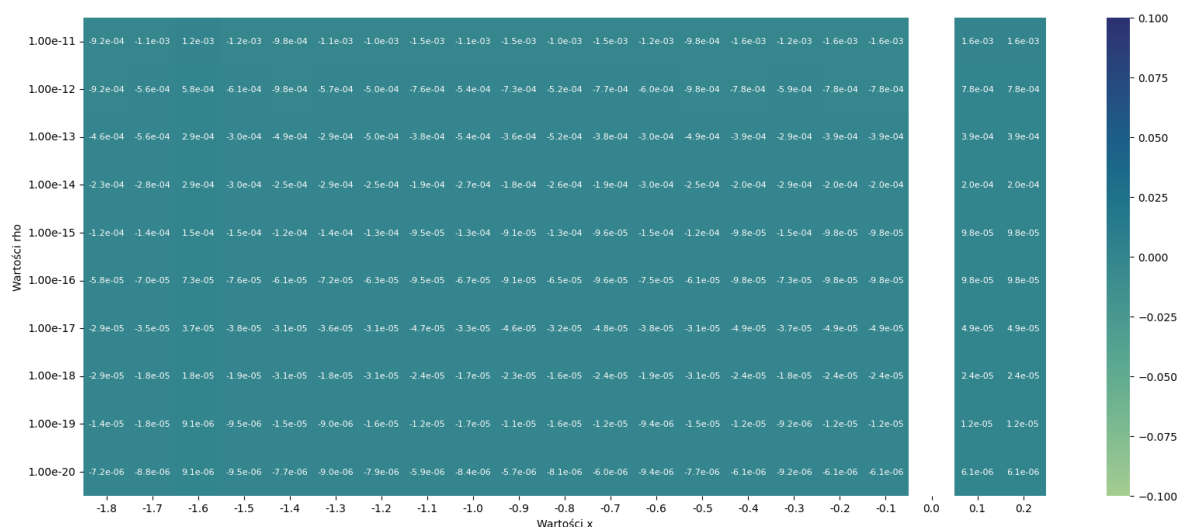
Wykres 2: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

W poniższej tabeli przedstawiona została najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

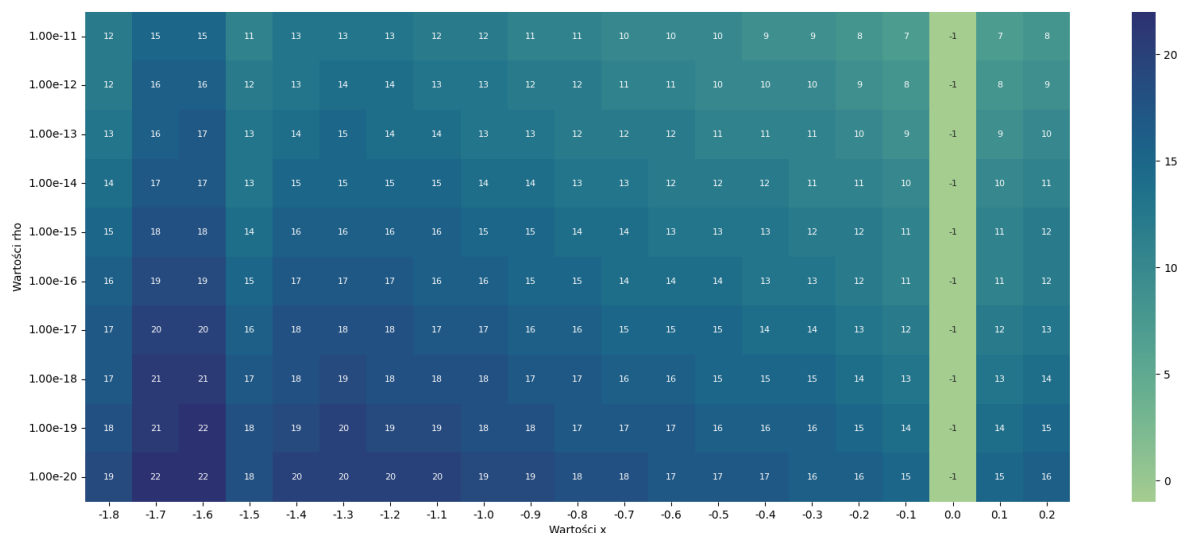
Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-1.8e-03
Liczba iteracji	11
Wartość ρ	1.0e-10
Wartość początkowa x	-1.8

7.1.2 Kryterium wartości bezwzględnej wartości funkcji, $\rho \in [10^{-11}, 10^{-20}]$

Na poniższych wykresach doskonale widać, że zmniejszenie wartości parametru ρ prowadzi w każdym przypadku do zwiększenia dokładności oraz liczby iteracji. Ponownie widać, że wybierając coraz bardziej oddalone punkty od prawdziwej wartości pierwiastka otrzymujemy coraz większą liczbę iteracji.



Wykres 3: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



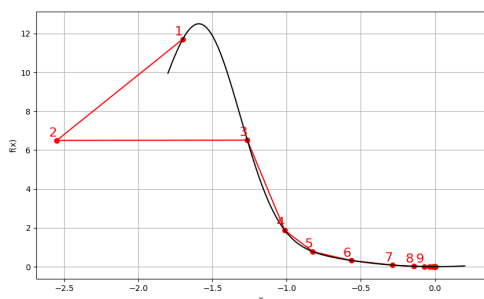
Wykres 4: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

W poniższej tabeli przedstawiona została najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

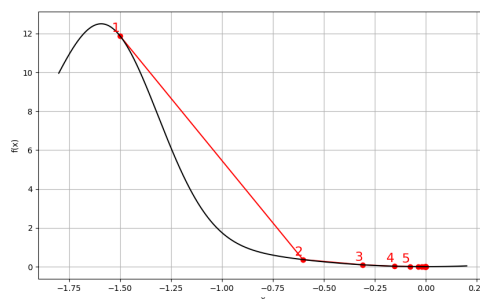
Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-5.7e-06
Liczba iteracji	19
Wartość ρ	1.0e-20
Wartość początkowa x	-0.9

7.1.3 Wizualizacja kroków algorytmu Newtona, dla kryterium wartości bezwzględnej

Z uwagi na występowanie maksimum lokalnego w zadanym przedziale, a co zmniejszania się wartości funkcji po obu stronach maksimum oraz brak stanowczych różnic w otrzymanych przybliżeniach postanowiłem sporządzić wykresy pokazujące działanie algorytmu Newtona krok po kroku.



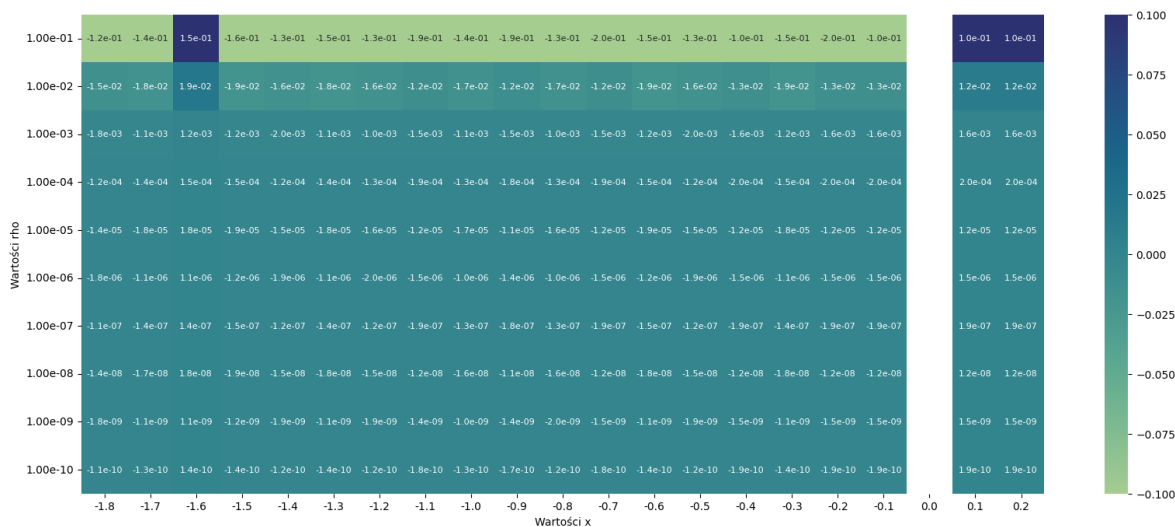
Wykres 5: Kolejne kroki algorytmu Newtona, $\rho = 1 \cdot 10^{-5}$, $x = -1.7$



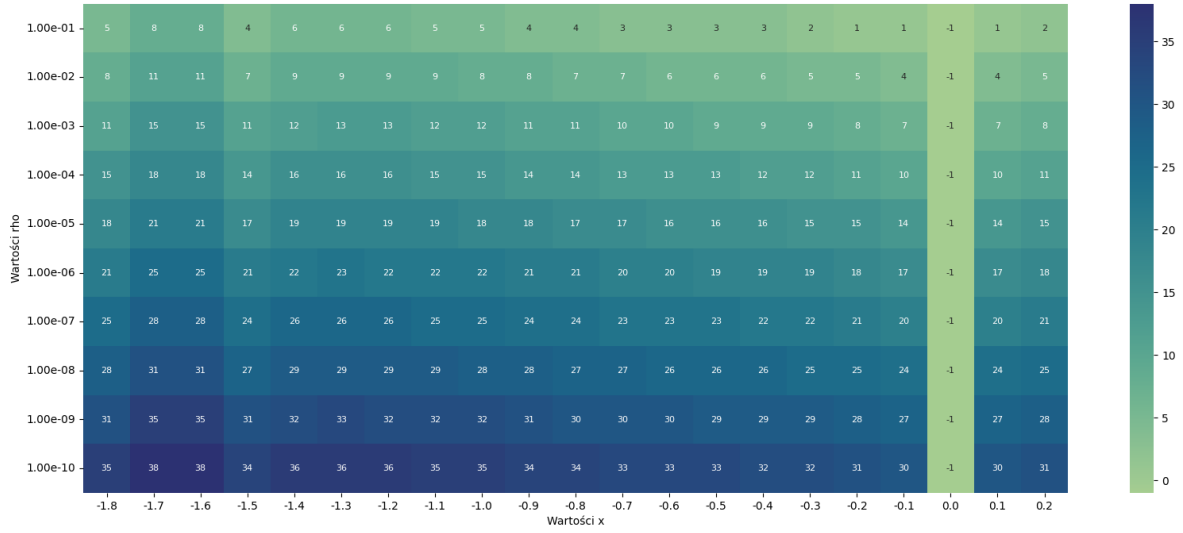
Wykres 6: Kolejne kroki algorytmu Newtona, $\rho = 1 \cdot 10^{-5}$, $x = -1.5$

7.1.4 Wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka, $\rho \in [10^{-1}, 10^{-10}]$

Jak widać, w tym przypadku sytuacja jest bardzo podobna. Również otrzymujemy dobre przybliżenie pierwiastka, jednak liczba potrzebnych iteracji jest niemal dwukrotnie większa, niż w przypadku kryterium stopu związane z wartością bezwzględną wartości funkcji. Ponownie liczba iteracji zwiększa się wraz z wzrostem odległości od pierwiastka



Wykres 7: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



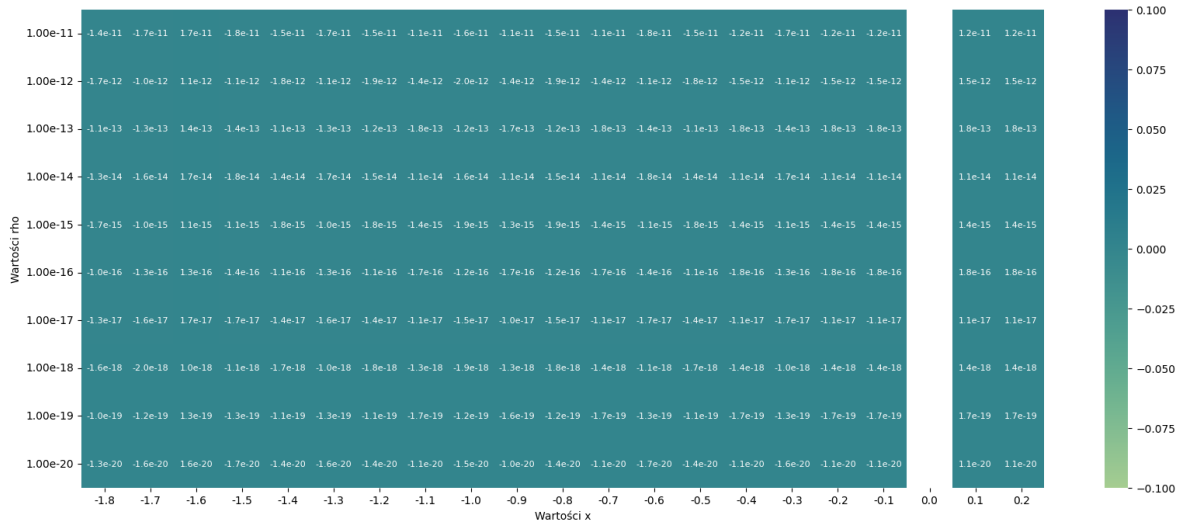
Wykres 8: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

W poniższej tabeli przedstawiona została najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

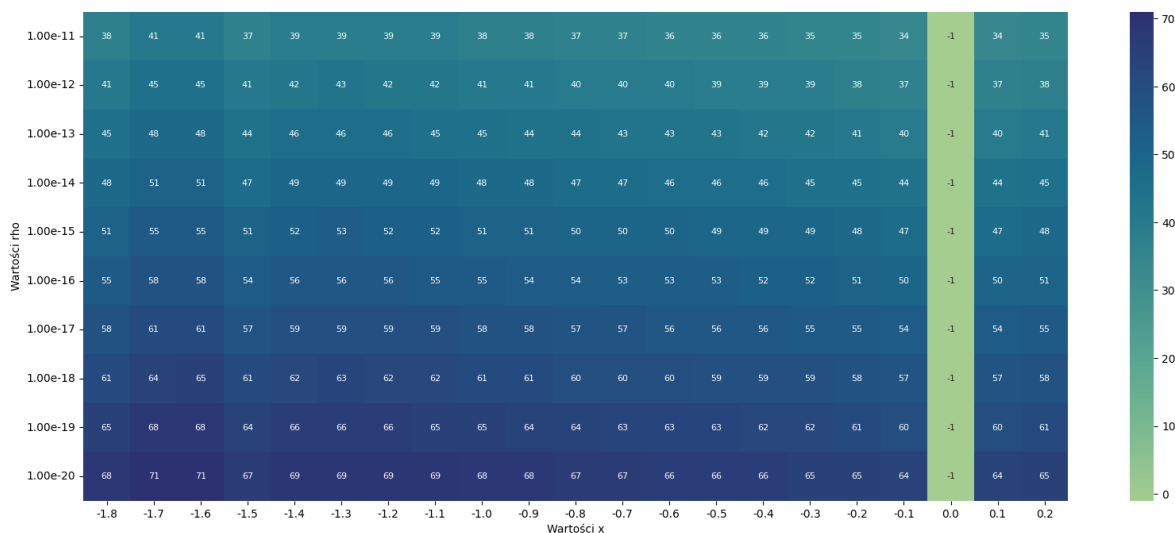
Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-1.1e-10
Liczba iteracji	35
Wartość ρ	1.0e-10
Wartość początkowa x	-1.8

7.1.5 Wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka, $\rho \in [10^{-11}, 10^{-20}]$

Ponownie na poniższych wykresach doskonale widać, że zmniejszenie wartości parametru ρ prowadzi w każdym przypadku do zwiększenia dokładności oraz liczby iteracji oraz że wybierając coraz bardziej oddalone punkty od prawdziwej wartości pierwiastka otrzymujemy coraz większą liczbę iteracji.



Wykres 9: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



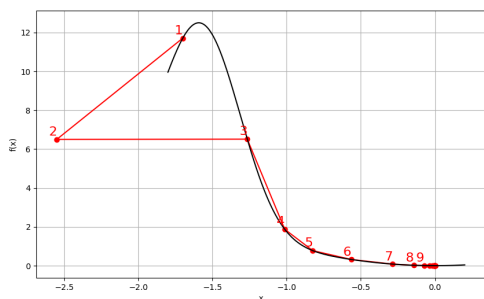
Wykres 10: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

W poniższej tabeli przedstawiona została najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

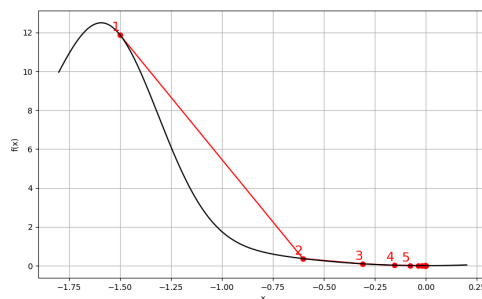
Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-1.0e-20
Liczba iteracji	69
Wartość ρ	1.0e-20
Wartość początkowa x	-0.9

7.1.6 Wizualizacja kroków algorytmu Newtona, dla kryterium wartości bezwzględnej różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka

Z uwagi na występowanie maksimum lokalnego w zadanym przedziale, a co zmniejszania się wartości funkcji po obu stronach maksimum oraz brak stanowczych różnic w otrzymanych przybliżeniach postanowiłem sporządzić wykresy pokazujące działanie algorytmu Newtona krok po kroku.



Wykres 11: Kolejne kroki algorytmu Newtona, $\rho = 1 \cdot 10^{-5}$, $x = -1.7$



Wykres 12: Kolejne kroki algorytmu Newtona, $\rho = 1 \cdot 10^{-5}$, $x = -1.5$

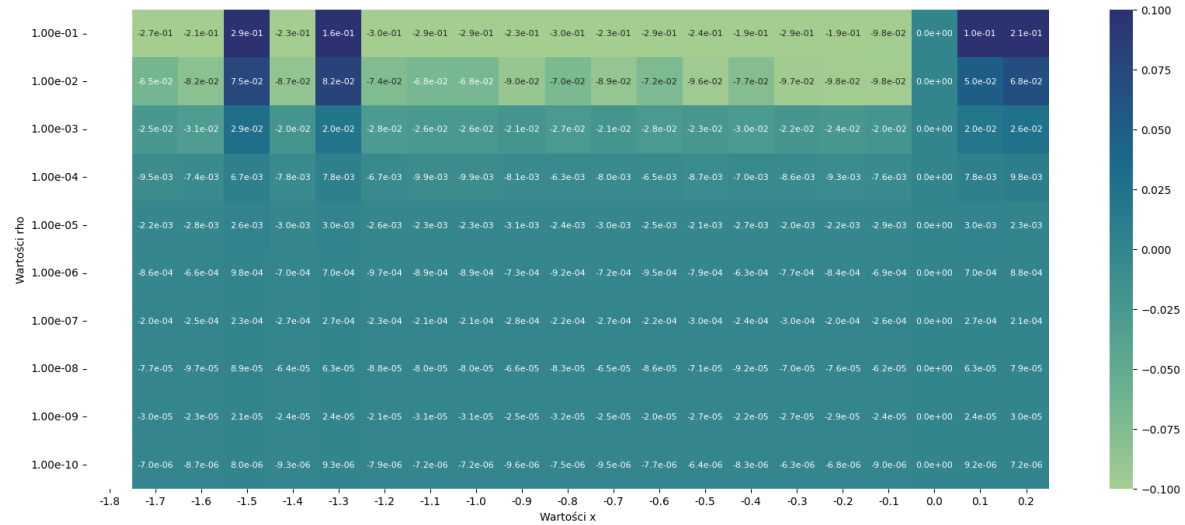
Jak widać powyżej algorytm trochę "ucieka" w lewo, ale potem wraca spowrotem w okolice pierwiastka

7.2 Wyniki dla metody siecznych

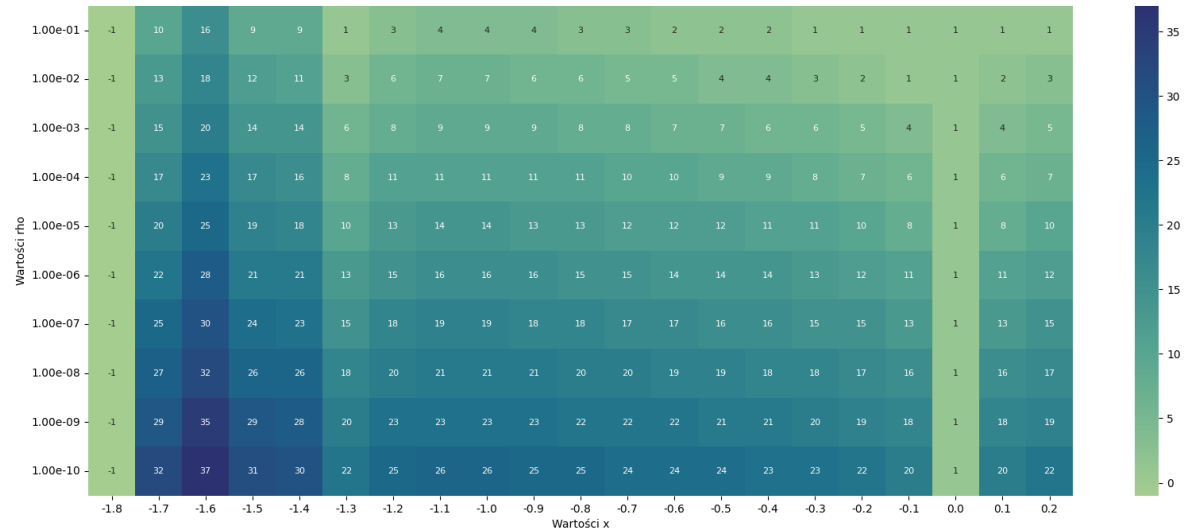
Wyniki zostały podzielone ze względu na kryterium stopu oraz wartości parametru ρ . Poza tym, w każdym przypadku jeden z początków przedziału stanowi początek lub koniec $[a, b]$, a drugi $x \in [-1.8, 0.2]$. Z uwagi na to, że za każdym razem dla przedziału, który kończy lub zaczyna od 0.0 otrzymujemy dokładną wartość pierwiastka. Pomiąłem przy szukaniu najlepszego przybliżenia i w tabelach pod mapami cieplnymi pokazane są drugie najlepsze przybliżenia.

7.2.1 Kryterium wartości bezwzględnej wartości funkcji, $\rho \in [10^{-1}, 10^{-10}]$, początek przedziału ustalony na -1.8

Jak widać na poniższym wykresie wszystkie wartości są bardzo zbliżone do szukanego pierwiastka. Natomiast z uwagi na specyfikę funkcji tj. $f(0) = 0$, dla przedziału $[-1.8, 0.0]$ otrzymujemy dokładny wynik w pierwszej iteracji.



Wykres 13: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



Wykres 14: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

W tabli poniżej przedstawiona została druga najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba

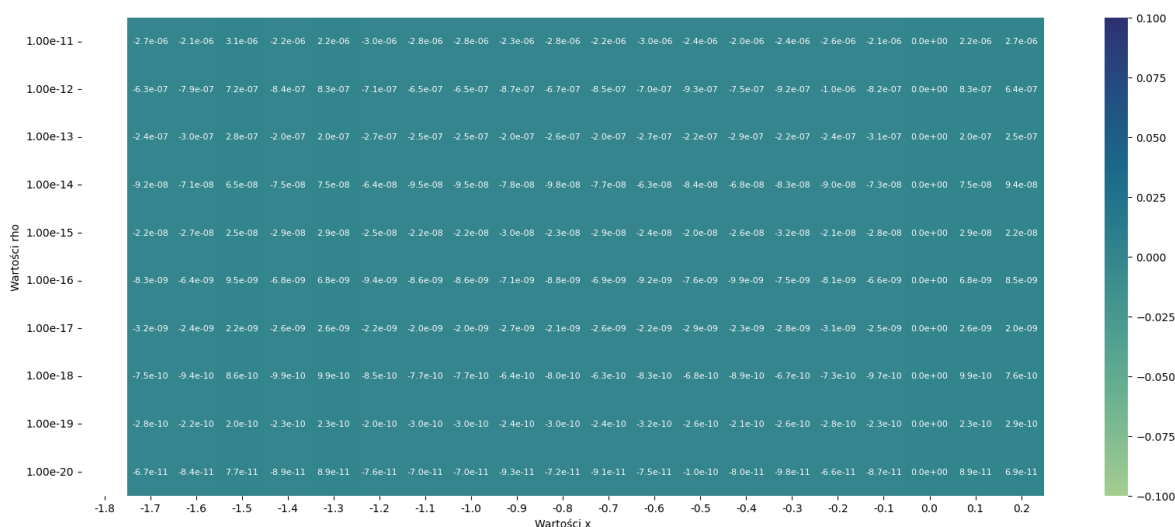
iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-6.3e-06
Liczba iteracji	23
Wartość ρ	1.0e-10
Początek przedziału	-1.8
Koniec przedziału	-0.3

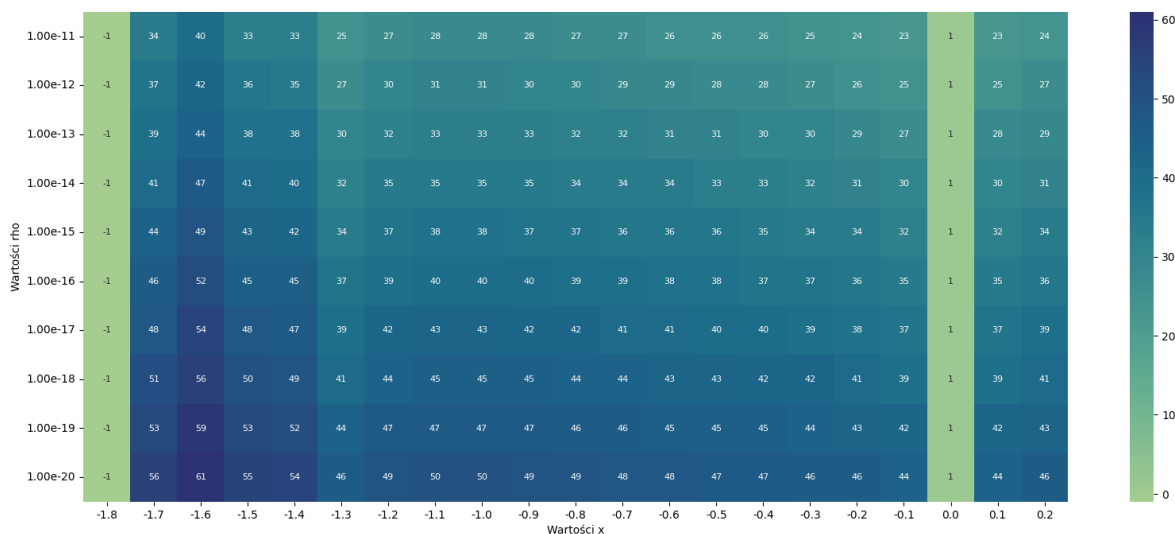
Tabela 1: Wartość drugiego najlepszego przybliżenia

7.2.2 Kryterium wartości bezwzględnej wartości funkcji, $\rho \in [10^{-11}, 10^{-20}]$, początek przedziału ustalony na -1.8

Ponownie zmniejszenie wartości ρ prowadzi do otrzymania lepszego przybliżenia (poza punktem 0.0).



Wykres 15: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



Wykres 16: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

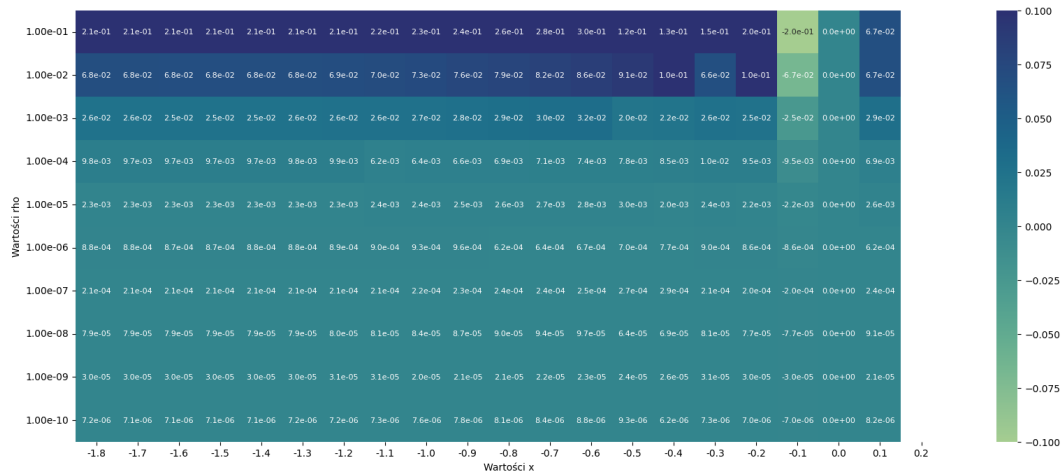
W tabli poniżej przedstawiona została druga najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-6.6e-11
Liczba iteracji	46
Wartość ρ	1.0e-20
Początek przedziału	-1.8
Koniec przedziału	-0.2

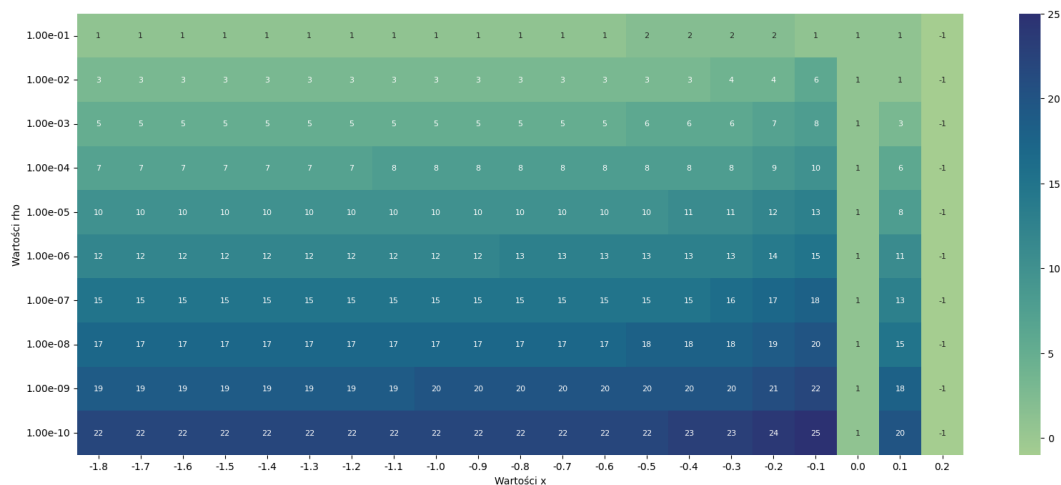
Tabela 2: Wartość drugiego najlepszego przybliżenia

7.2.3 Kryterium wartości bezwzględnej wartości funkcji, $\rho \in [10^{-1}, 10^{-10}]$, koniec przedziału ustalony na 0.2

Otrzymane wyniki są bliskie szukanemu pierwiastkowi, a zmniejszenie parametru ρ prowadzi do zwiększenia dokładności. Ponownie najlepsze otrzymane przybliżenie jest tożsame z prawdziwą wartością pierwiastka.



Wykres 17: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



Wykres 18: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

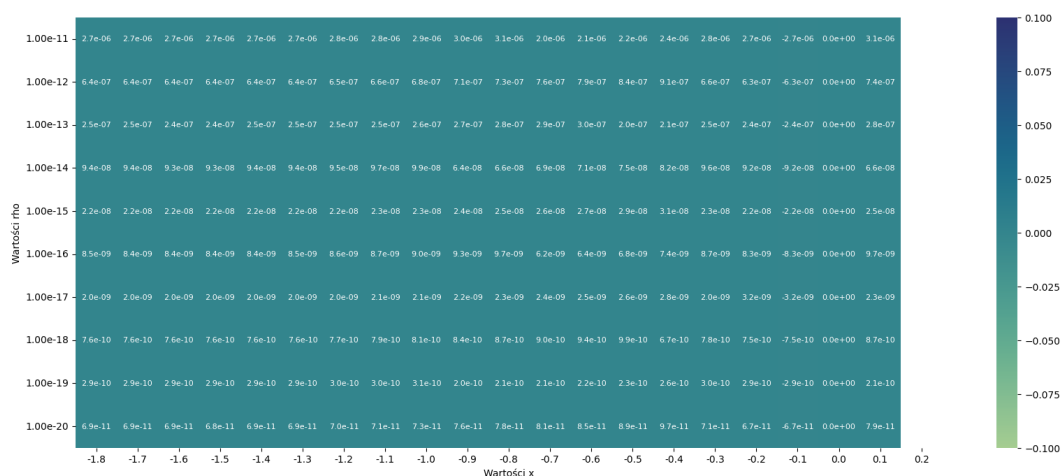
W tabli poniżej przedstawiona została druga najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	6.2-06
Liczba iteracji	26
Wartość ρ	1.0e-10
Początek przedziału	-0.4
Koniec przedziału	0.2

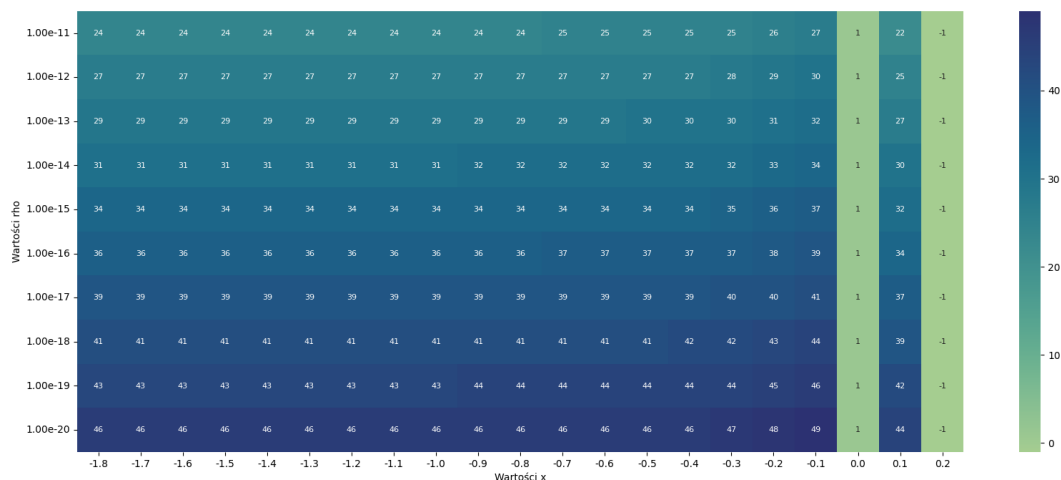
Tabela 3: Wartość drugiego najlepszego przybliżenia

7.2.4 Kryterium wartości bezwzględnej, $\rho \in [10^{-11}, 10^{-20}]$, koniec przedziału ustalony na 0.2

Zmniejszenie parametru ρ znacznie polepszyło otrzymane przybliżenie. Jak widać na mapie cieplnej przybliżona się bardzo bliskie szukanemu pierwiastkowi.



Wykres 19: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



Wykres 20: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

W tabli poniżej przedstawiona została druga najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba

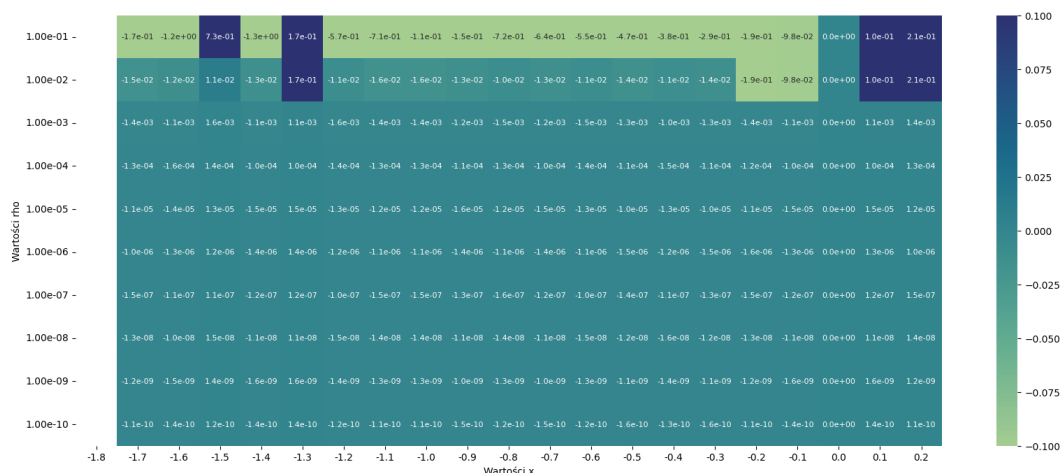
iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	6.7-11
Liczba iteracji	48
Wartość ρ	1.0e-20
Początek przedziału	-0.2
Koniec przedziału	0.2

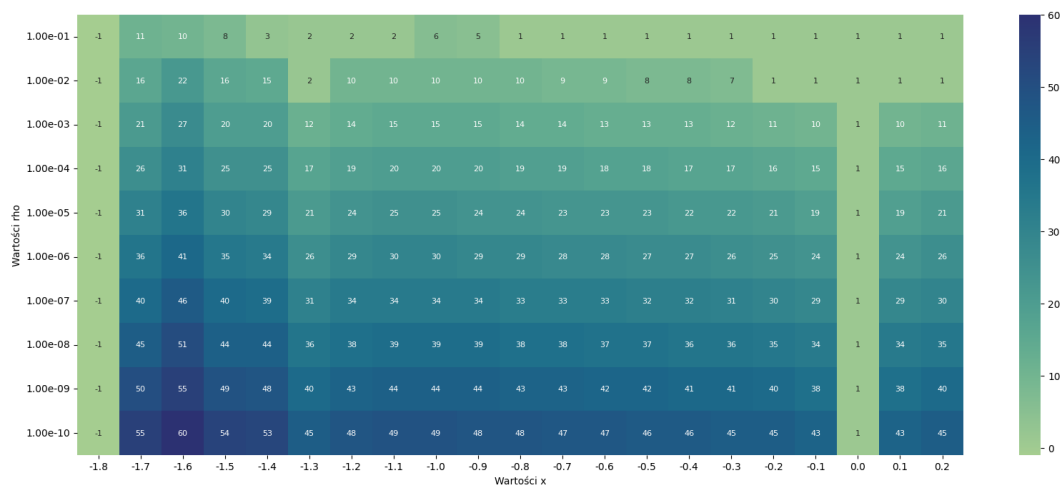
Tabela 4: Wartość drugiego najlepszego przybliżenia

7.2.5 Wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka, $\rho \in [10^{-1}, 10^{-10}]$, początek przedziału ustalony na -1.8

Jak widać na poniższym wykresie wszystkie wartości są bliskie szukanemu pierwiastkowi, poza wartościami, gdzie $\rho \in [1e-01, 1e-02]$. W tym przedziale otrzymane przybliżenie jest dość słabe.



Wykres 21: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



Wykres 22: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

W tabli poniżej przedstawiona została druga najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba

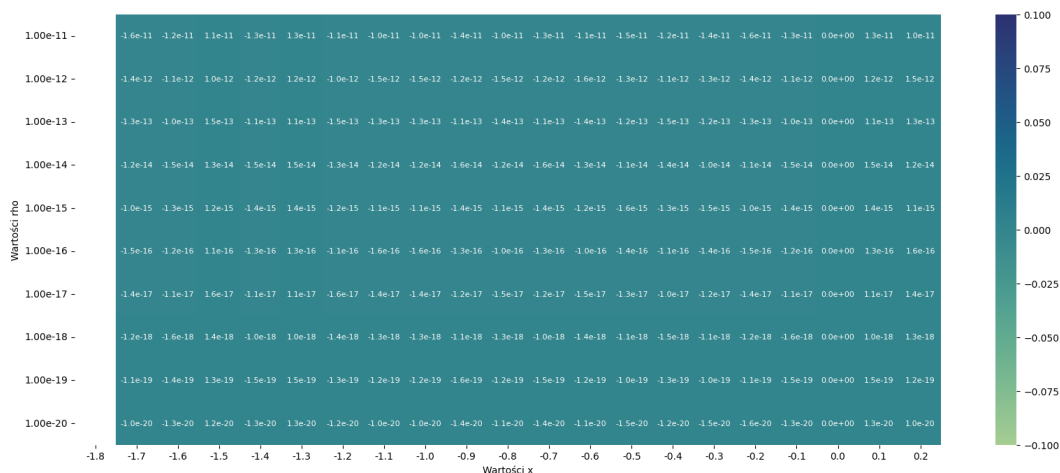
iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-1.1e-10
Liczba iteracji	45
Wartość ρ	1.0e-10
Początek przedziału	-1.8
Koniec przedziału	-0.2

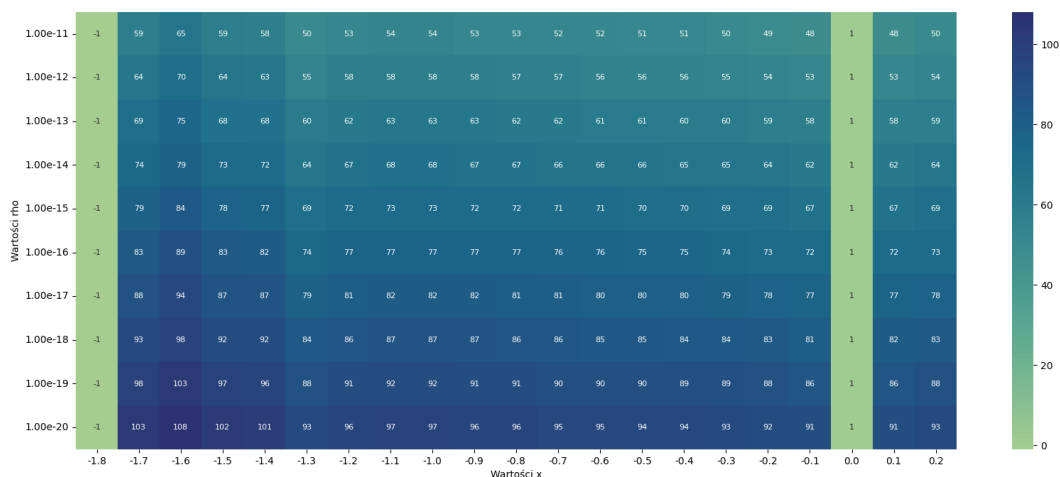
Tabela 5: Wartość drugiego najlepszego przybliżenia

7.2.6 Wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka, $\rho \in [10^{-11}, 10^{-20}]$, początek przedziału ustalony na -1.8

Ponownie nie ma żadnych zaskoczeń, przybliżenie w każdym przypadku jest bardzo dobre i bliskie szukanej wartości.



Wykres 23: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



Wykres 24: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

W tabli poniżej przedstawiona została druga najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba

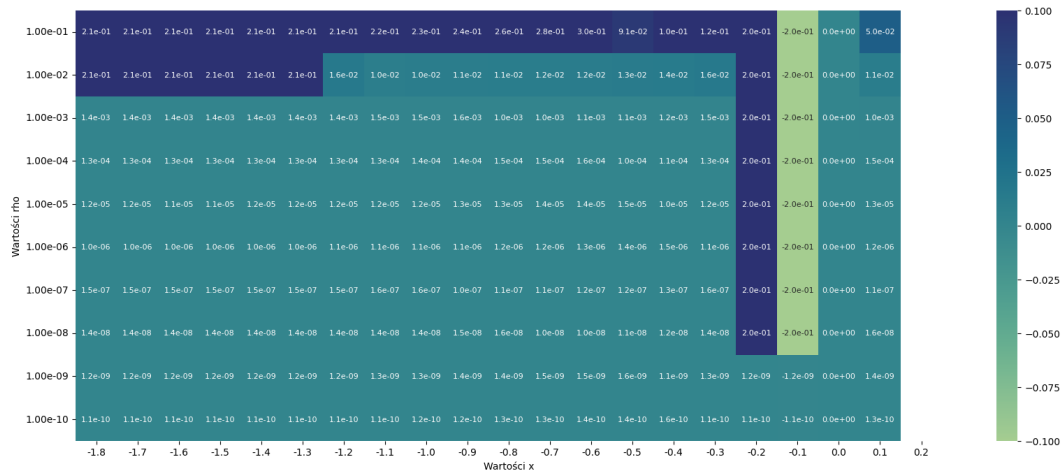
iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-1.0e-20
Liczba iteracji	103
Wartość ρ	1.0e-20
Początek przedziału	-1.8
Koniec przedziału	-1.7

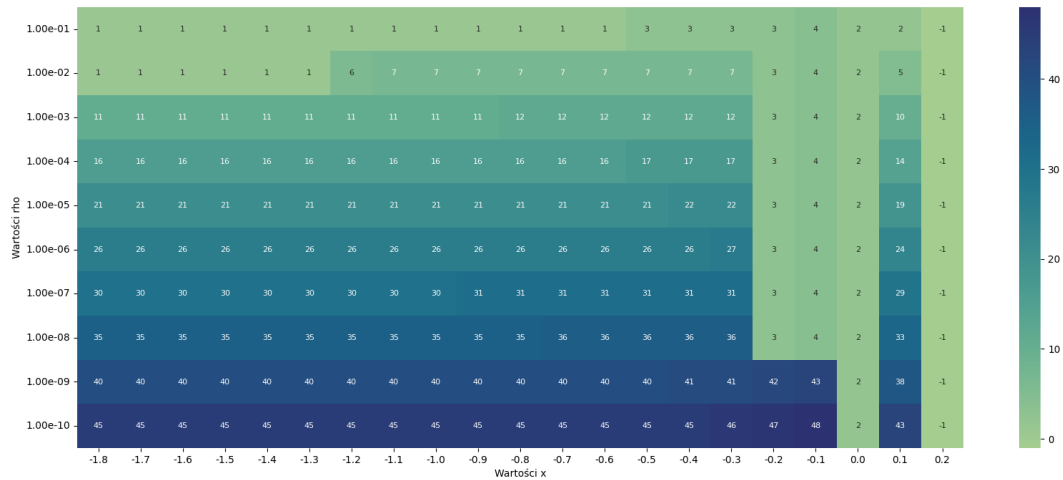
Tabela 6: Wartość drugiego najlepszego przybliżenia

7.2.7 Wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka, $\rho \in [10^{-1}, 10^{-10}]$, koniec przedziału ustalony na 0.2

W tym przypadku, przy wybraniu początku przedziału jako -0.2 lub -0.1 i wartości $\rho \in [1e-01, 1e08]$ przybliżenie jest bardzo złe podobnie dzieje się przy wybraniu początku przedziału jako liczbę z zakresu $[-1.8, -0.3]$ i $\rho = 1e-01$ oraz początku przedziału z zakresu $[-1.8, -1.3]$ i $\rho = 1e-02$.



Wykres 25: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



Wykres 26: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

W tabli poniżej przedstawiona została druga najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba

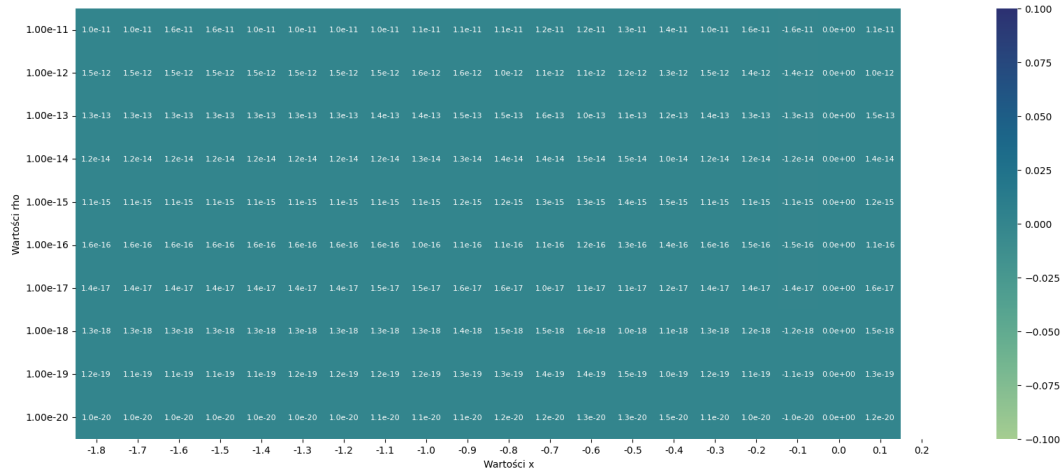
iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-1.1e-10
Liczba iteracji	103
Wartość ρ	1.0e-10
Początek przedziału	-0.2
Koniec przedziału	0.2

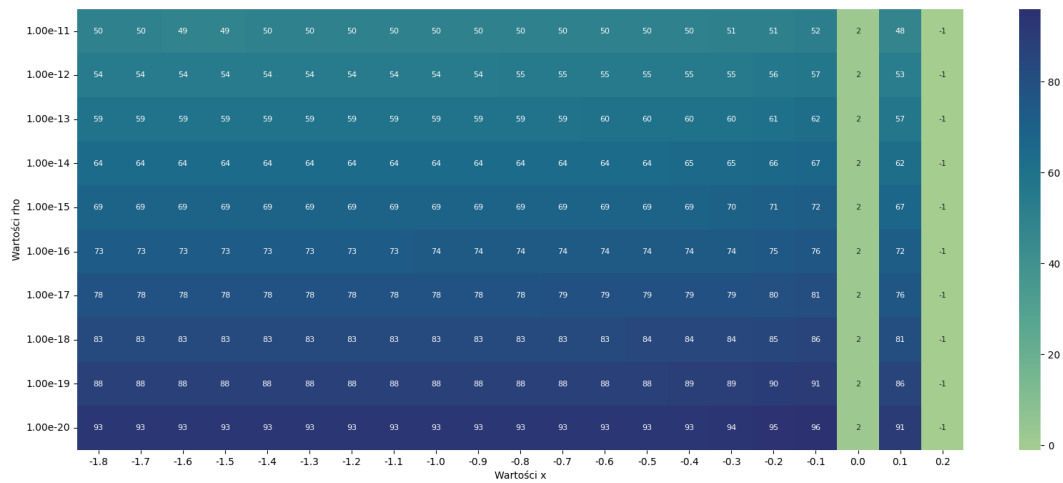
Tabela 7: Wartość drugiego najlepszego przybliżenia

7.2.8 Wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka, $\rho \in [10^{-11}, 10^{-20}]$, koniec przedziału ustalony na 0.2

W tym przypadku już przybliżenie w każdej sytuacji jest dobre, i polepsza się wraz z zmniejszeniem wartości ρ .



Wykres 27: Wykres wartości pierwiastka w zależności od ρ i x



Wykres 28: Wykres liczby iteracji w zależności od ρ i x

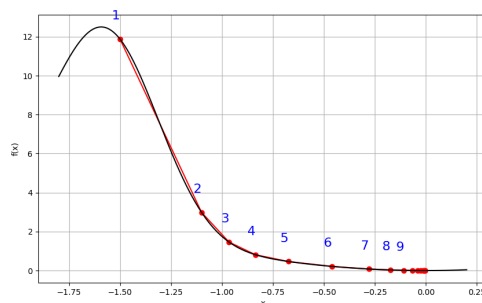
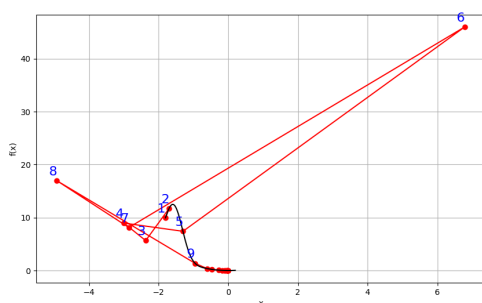
Z uwagi na to, że za każdym razem dla przedziału, który kończy lub zaczyna od 0.0 otrzymuję dokładną wartość pierwiastka. Pominąłem ją w tym zestawieniu i w tabli poniżej przedstawiona została druga

najlepsza otrzymana wartość przybliżenia (Oraz liczba iteracji, ρ i początkowe x dla którego została otrzymana) dla danych wartości parametru ρ oraz kryterium stopu w zestawieniu z prawdziwą wartością pierwiastka.

Prawdziwa wartość pierwiastka	0.0
Najlepsze przybliżenie	-1.0e-20
Liczba iteracji	95
Wartość ρ	1.0e-20
Początek przedziału	-0.2
Koniec przedziału	0.2

7.2.9 Wizualizacja kroków algorytmu Siecznych, dla różnych parametrów

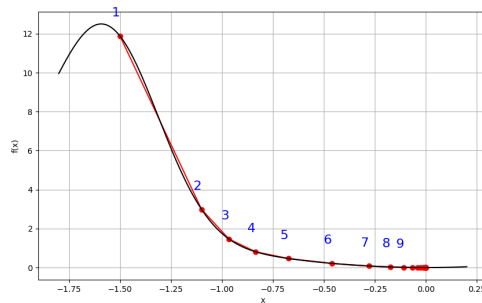
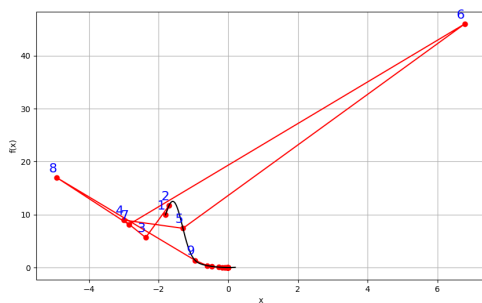
Dla kryterium wartości bezwzględnej:



Wykres 29: Kolejne kroki algorytmu Siecznych,
 $\rho = 1 \cdot 10^{-5}$, $x_0 = -1.8$, $x_1 = -1.7$

Wykres 30: Kolejne kroki algorytmu Siecznych,
 $\rho = 1 \cdot 10^{-5}$, $x_0 = -1.5$, $x_1 = -1.1$

Dla kryterium wartości bezwzględnej różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka:



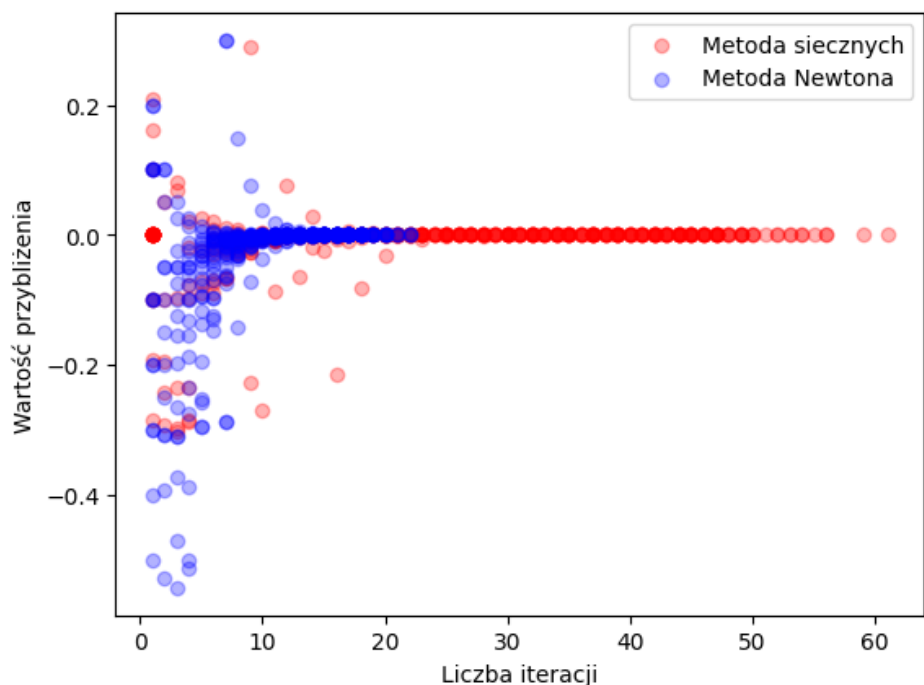
Wykres 31: Kolejne kroki algorytmu Siecznych,
 $\rho = 1 \cdot 10^{-5}$, $x_0 = -1.8$, $x_1 = -1.7$

Wykres 32: Kolejne kroki algorytmu Siecznych,
 $\rho = 1 \cdot 10^{-5}$, $x_0 = -1.5$, $x_1 = -1.1$

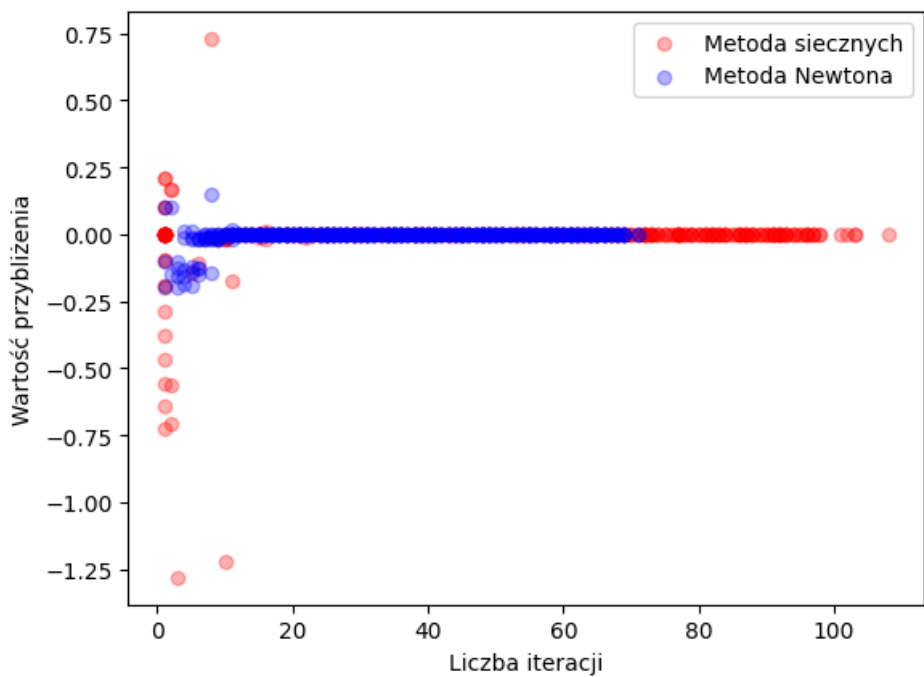
Jak widać na powyższych wykresach, ponownie maksimum lokalne wprowadza zamieszanie w algorytmie, jednak po wykonaniu kilkudziesięciu iteracji wartość pierwiastka jest przybliżana poprawnie.

8 Porównanie efektywności obu algorytmów

Na poniższych wykresach (25 i 26) wyraźnie widać, że metoda siecznych wykonuje znacznie więcej iteracji od metody newtona. Obie metody przy odpowiednio dobranym ρ dają akceptowalny wynik.



Wykres 33: Porównanie metody Newtona i Siecznych dla kryterium wartości bezwzględnej



Wykres 34: Porównanie metody Newtona i Siecznych dla kryterium wartości bezwzględnej różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka

9 Najlepsze otrzymane przybliżenie

Najlepsze przybliżenie otrzymałem przy wykorzystaniu metody siecznych, ustaleniu początku lub końca przedziału $x = 0.0$ i dowolnej wartości ρ . Powodem tego jest, to że funkcja f dla wartości 0 również zwraca 0.

10 Wnioski

- Metoda Newtona wykonuje znacznie mniej iteracji i często zwraca lepsze przybliżenie
- Metoda siecznych nie wymaga znania pochodnej funkcji, co może być dużą zaletą