MOwNiT - Aproksymacja trygonometryczna

Jakub Frączek

18 kwietnia 2024

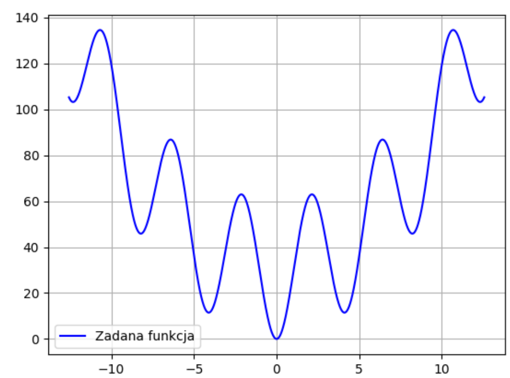
1 Funkcja dla której przeprowadzone zostało doświadczenie

$$f(x) = 10 * m + \frac{x^2}{k} - 10 * m * cos(k * x)$$

gdzie:

$k = 1.5$
$m = 3.0$
$x \in [-4\pi, 4\pi]$

Wykres funkcji:



2 Dane techniczne

2.1 Hardware

Laptop z procesorem Intel Core i5-9300H 2.4GHz oraz 32 GB pamięci RAM.

2.2 Software

Wykorzystany został system Windows 11 x64 oraz język Python w wersji 3.11.8 wraz z bibliotekami:

- math
- copy
- matplotlib
- numpy

3 Aproksymacja

Ogólny wzór na przybliżenie aproksymacyjne

$$F(x) = c_o\phi_o(x) + c_1\phi_1(x) + ... + c_m\phi_m(x) = \Sigma_{i=0}^{m} c_i\phi_i(x)$$

W tym przypadku za funkcje bazowy przyjmuję

$$(\phi_i(x)) = 1, sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x), ..., sin(mx), cos(mx)$$

Wzory przybliżające szukaną funkcję wielomianem trygonometrycznym

$$F_m(x) = \frac{1}{2} \cdot a_0 + \Sigma_{j=1}^{m}(a_j \cdot cos(j \cdot x) + b_j \cdot sin(j \cdot x)$$

$$a_j = \frac{2}{n} \cdot \Sigma_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot cos(j \cdot x_i)$$

$$b_j = \frac{2}{n} \cdot \Sigma_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot sin(j \cdot x_i)$$

Przyjmując n + 1 rónoodległych węzłów aproksymacji opisanych wzorem $x_i = n \cdot i \cdot \frac{\pi}{2}$, to kolejne elementy bazy będą do siebie ortogonalne i stworzą układ normalny dobrze uwarunkowany.
Wielomianami trygonometrycznimi można aproksymować dowolną funkcję okresową, jak wynika z tw. Weierstrassa

Tw. Weierstrassa: Jeśli $f(x)$ jest funkcją określoną i ciągłą w przedziale $[a, b]$ oraz okresową o okresie równym 2π i dane jest $\epsilon > 0$, to wówczas istnieje wielomian trygonometryczny $W(x)$, określony w $[a, b]$ taki, że $|f(x) - W(x)| < \epsilon$ dla każdego $x \in [a, b]$.

4 Metody szacowania błędu przybliżenia funkcji

Wszystkie błędy zostały policzone z dokładnością do 100 równoodległych punktów.

4.1 Największa różnica wartości funkcji

Największa różnica między wartością funkcji aproksymowanej, a funkcji aproksymującej:

$$\max_{x \in [a,b]} |F(x) - \mathrm{P}_n(x)|$$

4.2 Błąd średniokwadratowy

Suma kwadratów różnic mięcy wartością funkcji aproksymowanej, a funkcji aproksymującej podzielona przez liczba punktów, w których wykonujemy porównanie:

$$\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{F(x_i)} - \mathrm{P_n(x_i)})^2$$

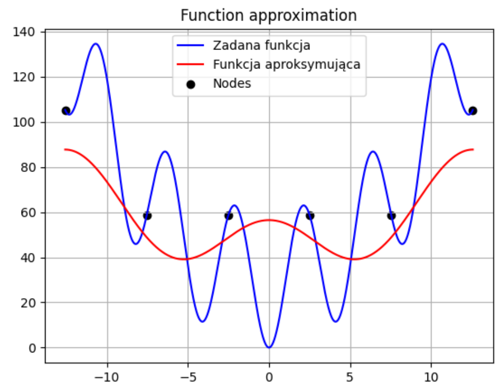
5 Analiza

Podczas analizy funkcji aproksymującej, stopnie wielomianu dobrałem tak, aby nie przekraczały połowy liczby węzłów, co zagwarantowało, że układ był dobrze uwarunkowany. Ilość punktów wykorzystywanych przy liczdeniu błędów średniokwadratowego i maksymalnego oraz rysowaniu funkcji wynosi 1000.

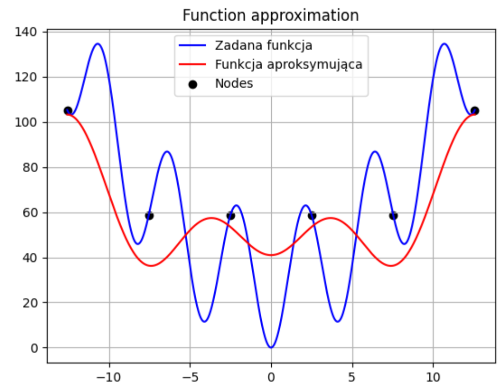
6 Przebieg funkcji dla wybranej liczby węzłów

6.1 Dla 6 węzłów

Jak widać na poniższych wykresach (wykres 1, wykres 2), dla 6 węzłów przybliżenie jest bardzo słabe.

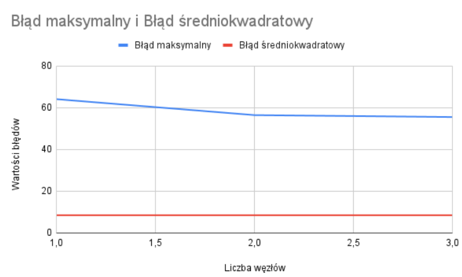


Wykres 1: Wielomian 2 stopnia



Wykres 2: Wielomian 3 stopnia

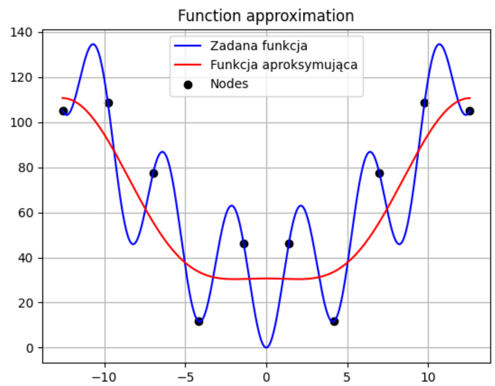
Poniżej, na wykresie 3 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



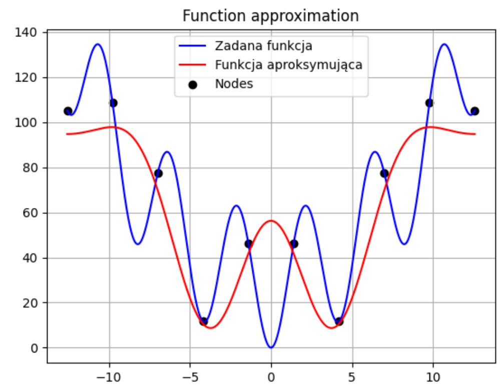
Wykres 3: Wartości błędów

6.2 Dla 10 węzłów

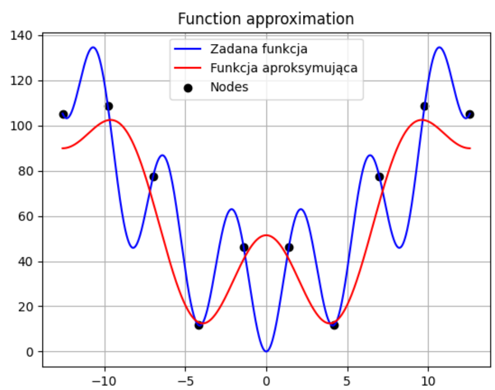
Dla 10 węzłów aproksymacja jest zuważalnie lepsza, a funkcja aproksymująca zaczyna się lepiej dopasowywać. Niestety zwiększanie stopnia wielomianu powyżej 3 ma niewielki wpływ na dokładność (wykres 4, wykres 5, wykres 5, wykres 6).



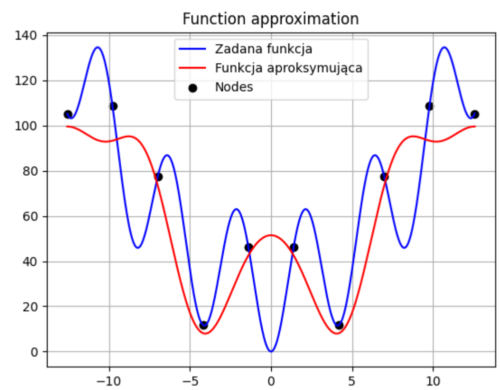
Wykres 4: Wielomian 2 stopnia



Wykres 6: Wielomian 4 stopnia

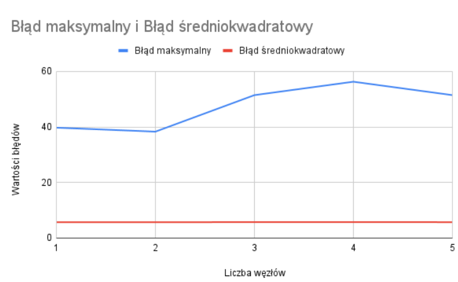


Wykres 5: Wielomian 3 stopnia



Wykres 7: Wielomian 5 stopnia

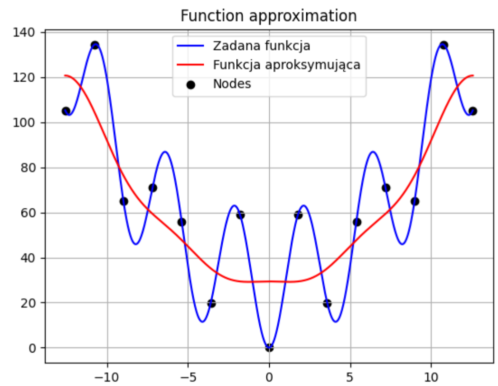
Poniżej, na wykresie 8 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



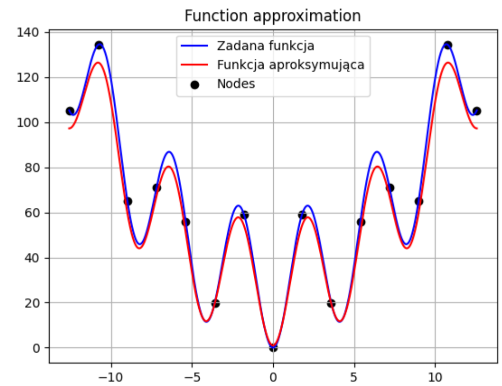
Wykres 8: Wartości błędów

6.3 Dla 15 węzłów

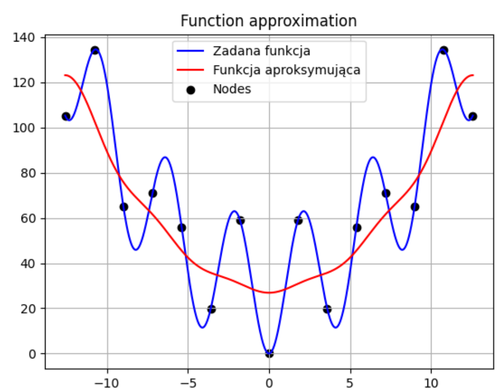
W tym przypadku od 6 stopnia wielomianu dostajemy całkiem dobre przybliżenie. Jak widać zachodzi znaczna różnica pomiędzy wielomianem stopnia 5 i stopnia 6 (wykres 9, wykres 10, wykres 11 oraz wykres 12).



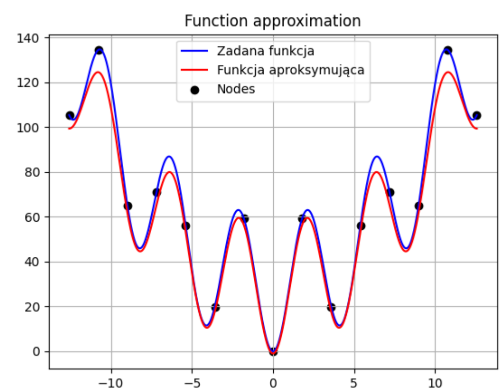
Wykres 9: Wielomian 4 stopnia



Wykres 11: Wielomian 6 stopnia

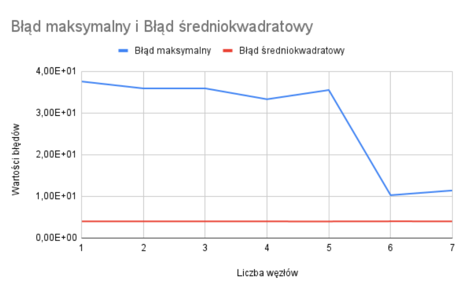


Wykres 10: Wielomian 5 stopnia



Wykres 12: Wielomian 7 stopnia

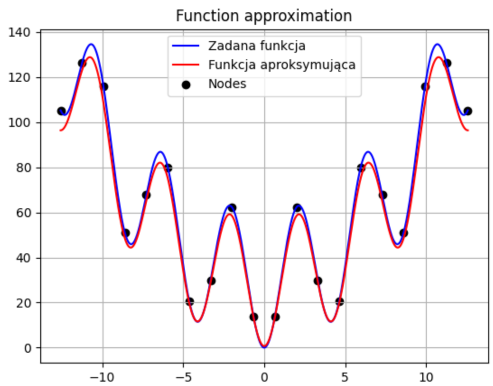
Poniżej, na wykresie 13 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



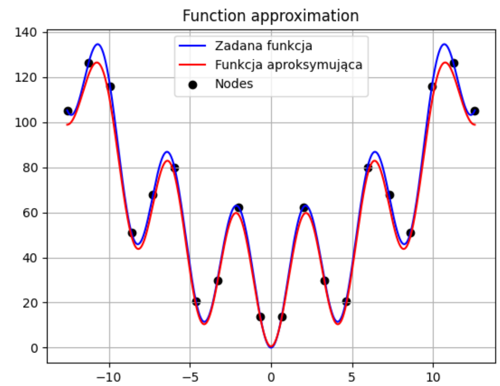
Wykres 13: Wartości błędów

6.4 Dla 20 węzłów

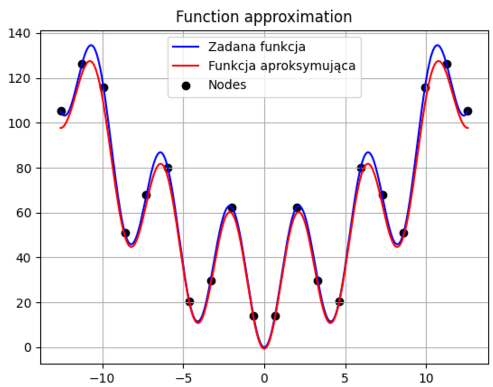
Tutaj (wykres 14, wykres 15, wykres 16 i wykres 17) przybliżenie jest jeszcze lepsze. Jedynie można zauważyć niedokładność na krańcach przedziału.



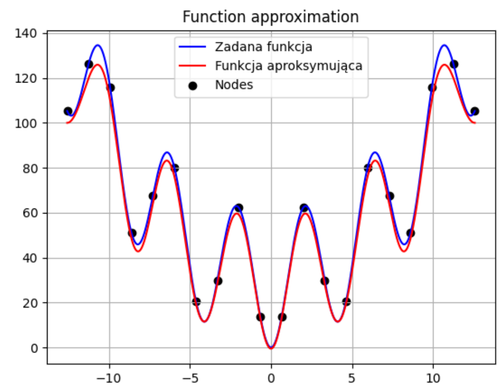
Wykres 14: Wielomian 6 stopnia



Wykres 16: Wielomian 8 stopnia

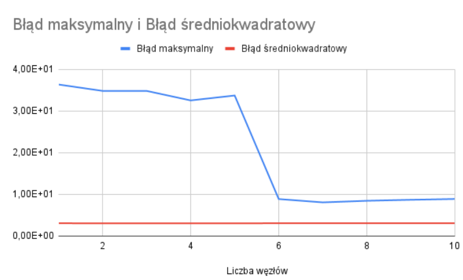


Wykres 15: Wielomian 7 stopnia



Wykres 17: Wielomian 9 stopnia

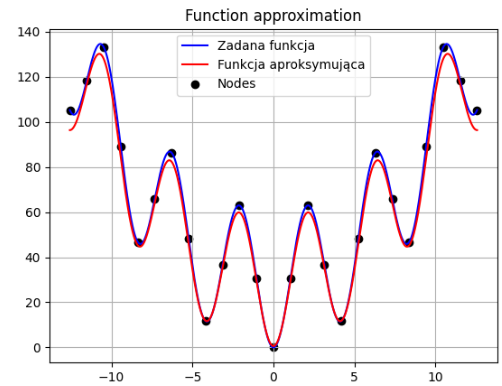
Poniżej, na wykresie 18 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



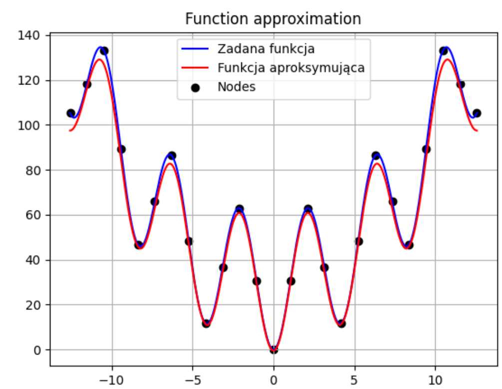
Wykres 18: Wartości błędów

6.5 Dla 25 węzłów

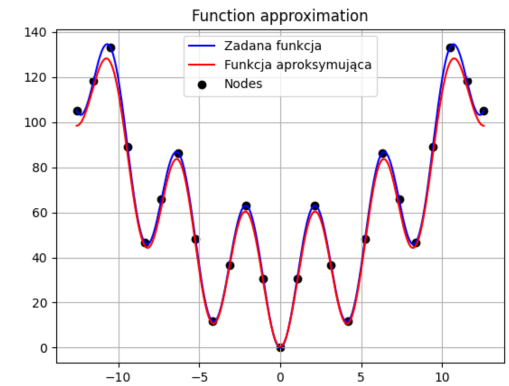
Jak widać na poniższych wykresach (wykres 19, wykres 20, wykres 21 i wykres 22) przybliżenie jest już dość dobre i pozostaje mniej więcej takie samo dla liczby stopni większej lub równej 6.



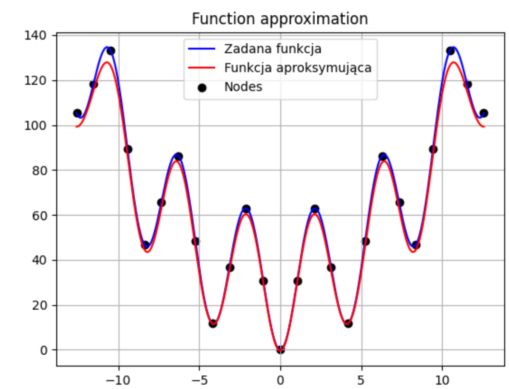
Wykres 19: Wielomian 6 stopnia



Wykres 20: Wielomian 7 stopnia

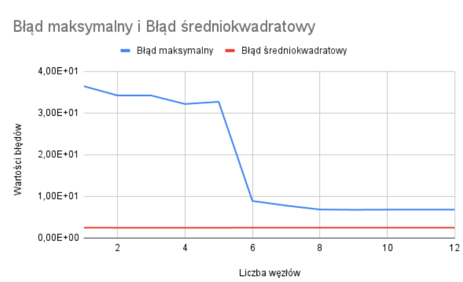


Wykres 21: Wielomian 8 stopnia



Wykres 22: Wielomian 9 stopnia

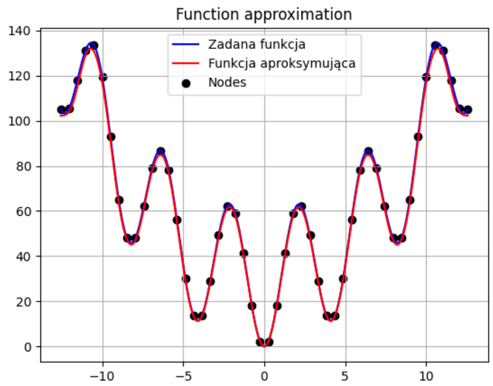
Poniżej, na wykresie 23 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



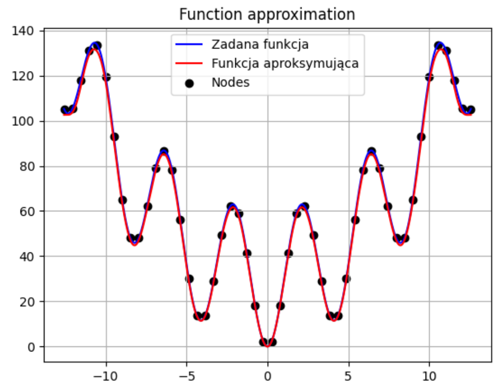
Wykres 23: Wartości błędów

6.6 Dla 50 węzłów

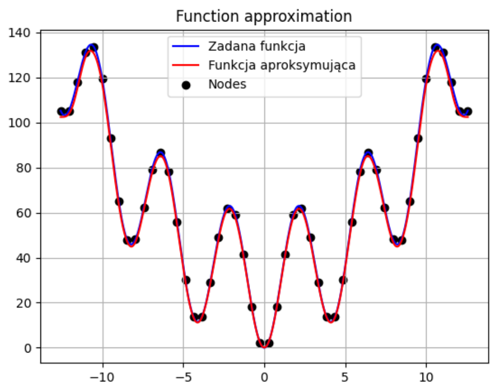
Dla 50 węzłów przybliżenie jest już bardzo dobre, nie widać błędów na krańcach przedziałów (wykres 24, wykres 25, wykres 26 i wykres 27).



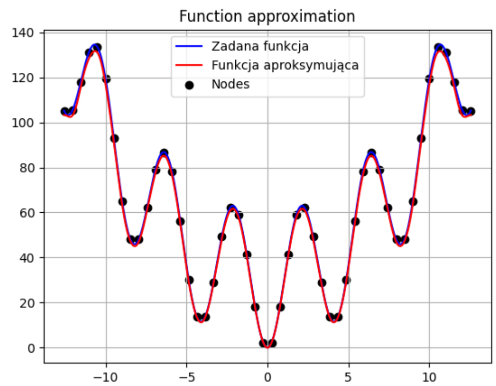
Wykres 24: Wielomian 6 stopnia



Wykres 26: Wielomian 8 stopnia

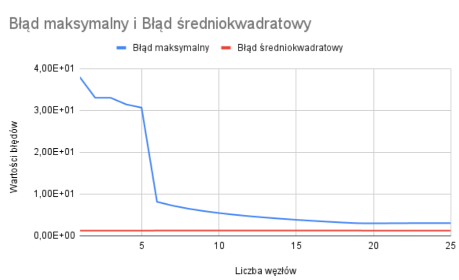


Wykres 25: Wielomian 7 stopnia



Wykres 27: Wielomian 9 stopnia

Poniżej, na wykresie 28 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.

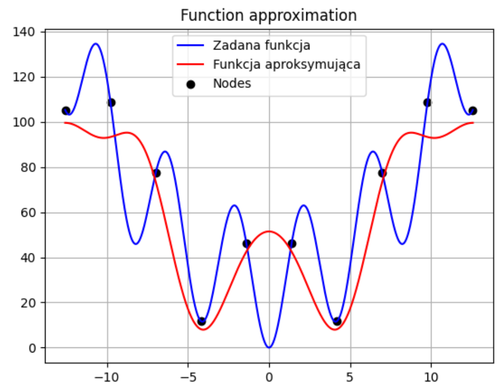


Wykres 28: Wartości błędów

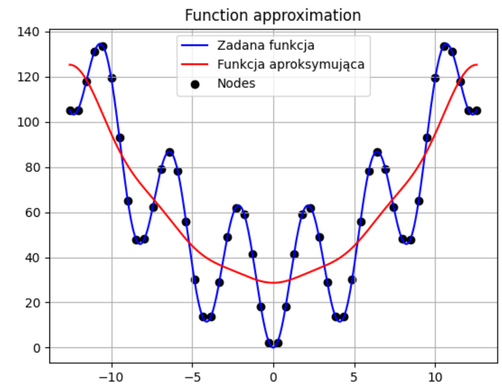
7 Przebieg funkcji dla wybranego stopnia wielomianu

7.1 Dla 5 stopnia

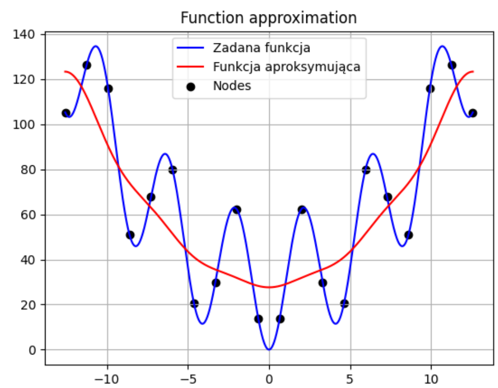
Jak widać na poniższych wykresach (wykres 29, wykres 30, wykres 31 i wykres 32), dla wielomianu 5 stopnia przybliżenie jest złe i zwiększanie liczby węzłów praktycznie nie ma wpływu na dokładność aproksymacji.



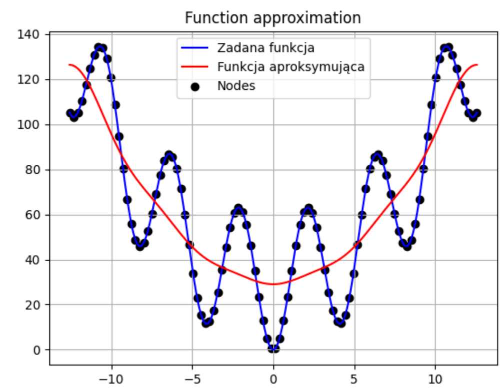
Wykres 29: Dla 10 węzłów



Wykres 31: Dla 50 węzłów

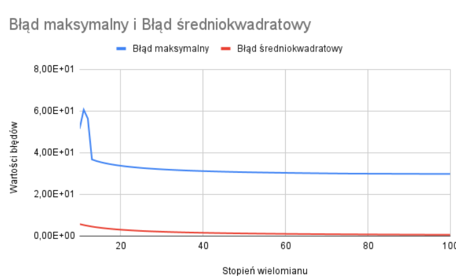


Wykres 30: Dla 20 węzłów



Wykres 32: Dla 100 węzłów

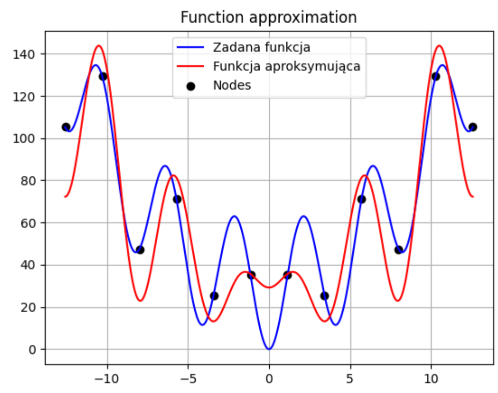
Poniżej, na wykresie 33 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



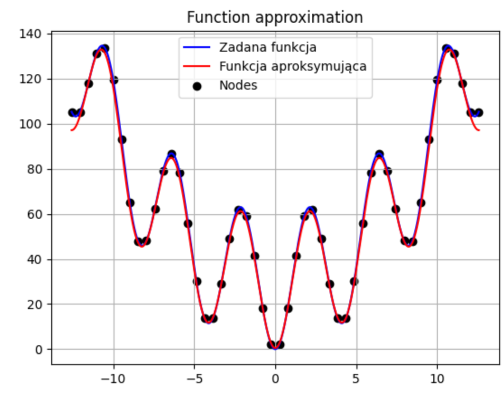
Wykres 33: Wartości błędów

7.2 Dla 6 stopnia

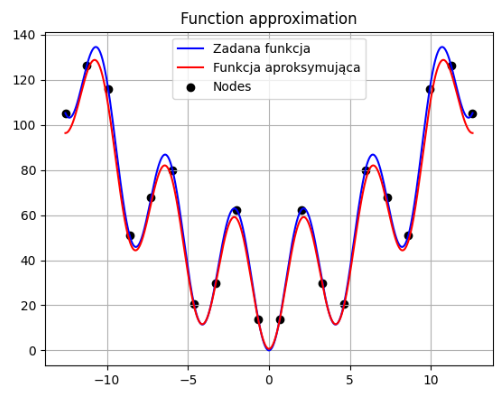
Jak widać dla wielomianu 6-go stopnia można otrzymać bardzo dobre przybliżenie, a zwiększanie liczby węzłów ma realny wpływ na dokładność (wykres 34, wykres 35, wykres 36 i wykres 37).



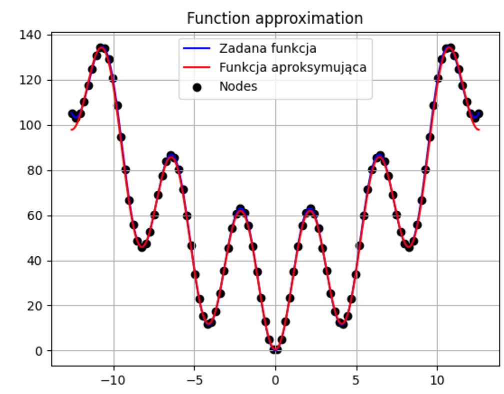
Wykres 34: Dla 12 węzłów



Wykres 36: Dla 50 węzłów

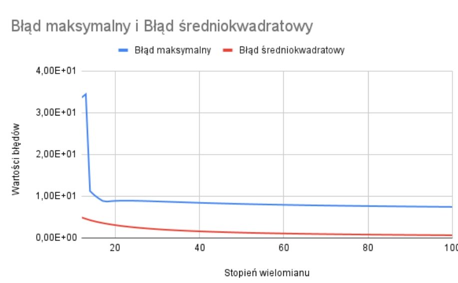


Wykres 35: Dla 20 węzłów



Wykres 37: Dla 100 węzłów

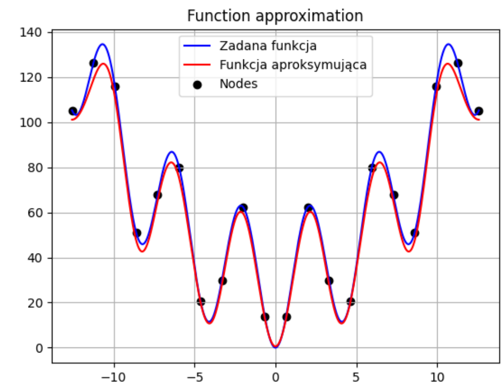
Poniżej, na wykresie 38 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



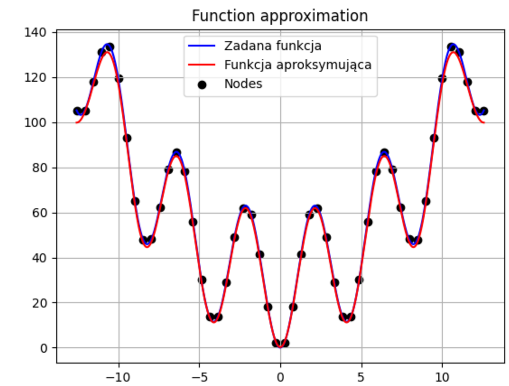
Wykres 38: Wartości błędów

7.3 Dla 10 stopnia

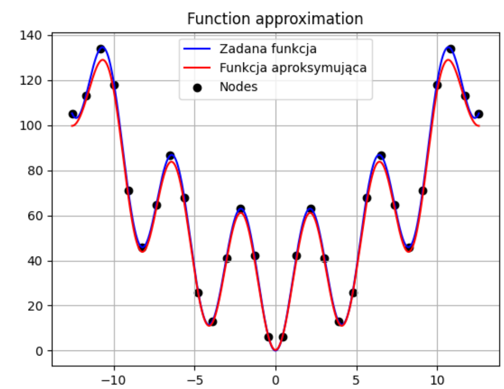
Jak widać na poniższych wykresach (wykres 39, wykres 40, wykres 41 i wykres 42), przybliżenie jest zdecydowanie lepsze na krańcach przedziałów, niż dla stopnia 6-go.



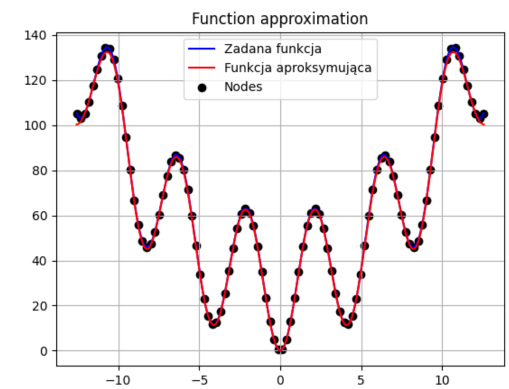
Wykres 39: Dla 20 węzłów



Wykres 41: Dla 50 węzłów

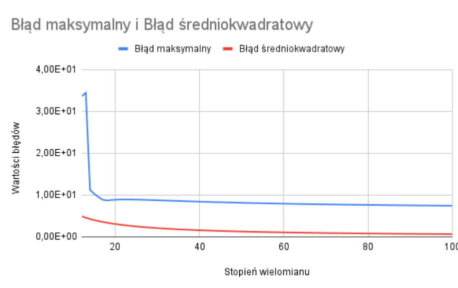


Wykres 40: Dla 30 węzłów



Wykres 42: Dla 100 węzłów

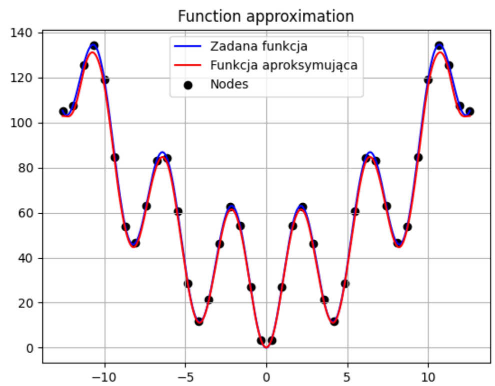
Poniżej, na wykresie 43 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



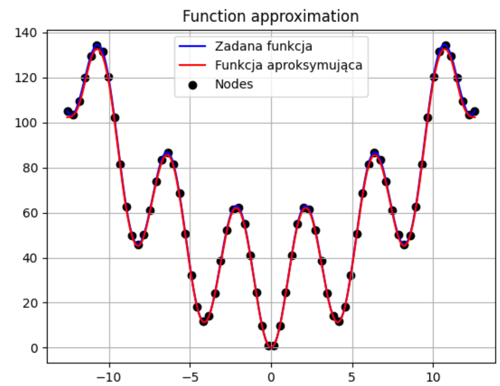
Wykres 43: Wartości błędów

7.4 Dla 20 stopnia

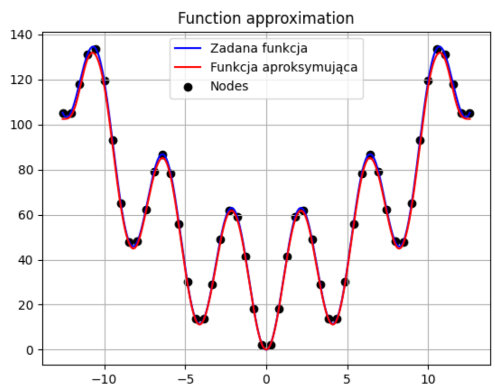
Dla wielomianu 20-go stopnia przybliżenie na krańcach przedziału staje sie coraz lepsze i błąd jest już niemal niezauważalny (wykres 44, wykres 45, wykres 46 oraz wykres 47).



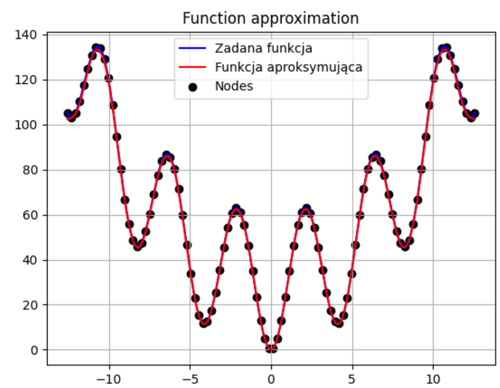
Wykres 44: Dla 40 węzłów



Wykres 46: Dla 70 węzłów

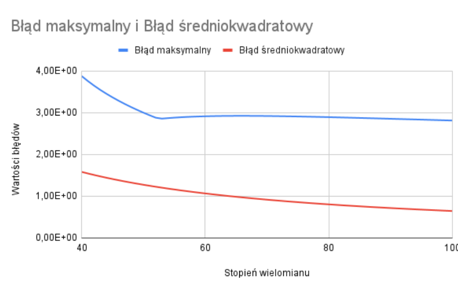


Wykres 45: Dla 50 węzłów



Wykres 47: Dla 100 węzłów

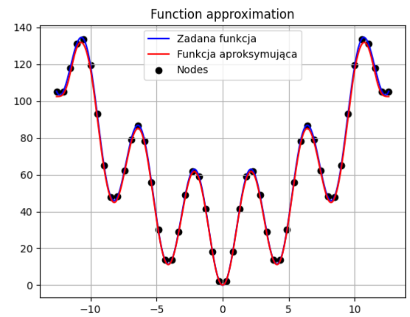
Poniżej, na wykresie 48 przedstawione zostały wartości błędów dla wszystkich możliwych stopni wielomianu.



Wykres 48: Wartości błędów

8 Najlepsze przyblizenie funkcji

Najlepsze przybliżenie aproksymowanej funkcji otrzymałem dla 50 węzłów i wielomianu 20 stopnia, został on pokazany na poniższym wykresie, a jego błąd maksymalny i średniokwadratowy poniżej w tabelce. Można powiedzieć, że jest to naprawdę dobre przybliżenie.



Wykres 49: Najlepsze przybliżenie funkcji

Błąd maksymalny	3.001944813353049
Błąd średniokwadratowy	1.2747973802059938

9 Wnioski

- Aproksymacja wielomianami trygonometrycznimi daje naprawdę dobre przybliżenie funkcji
- Od 6 stopnia wielomianu jesteśmy już w stanie otrzymać dobre przybliżenie
- Zwiększanie liczby węzłów prowadzi do zwiększenia dokładności przybliżenia
- Zwiększanie stopnia wielomianu również powoduje zwiększenie dokładności, ale w dużo mniejszym stopniu.
- W tym przypadku układ był dobrze uwarunkowany i jak widać przełożyło się to w znacznym stopniu na otrzymane wyniki.