1. Temat zadania

Tematem zadanie było rozwiązanie metodą elementów skończonych poniższego równania różniczkowego:

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

Należało:

a) wyprowadzić sformułowanie wariacyjne
b) napisać procedurę generującą układ równań liniowych, rozwiązującą wygenerowany układ równań liniowych oraz rysujący wykres rozwiązania

2. Dokładne równanie różniczkowe do rozwiązanie

$$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

$$u(2) = 3$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$$

3. Wymagania

Program miał przyjmować argument n - liczbę elementów skończonych oraz powinien rysować wykres wyliczonego przybliżenia funkcji. Dodatkowo potrzebne całki powinny zostać wyliczone numerycznie.

4. Użyte technologie

Program został napisany w języku Java, z wykorzystaniem biblioteki Apache Commons Math, która posłużyła do numerycznego obliczenia całek za pomocą kwadratury Gauss-Legendre oraz biblioteki JFreeChart do tworzenia wykresów. Aplikacja przyjmuje liczbę elementów jako argument uruchomienia.

5. Wyprowadzone sformułowanie wariacyjne

Sformułowanie wariacyjne zostało wyprowadzone ręcznie:

Równanie transportu ciepła

$-k(x)\,u''(x)=0$

$u(2)=3 \quad u'(0)+u(0)=20 \quad k(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 2, & x\in[1,2]\end{cases} \qquad [0,2]\ni x \longrightarrow u(x)\in\mathbb{R}$

1° Mnożę przez funkcję testującą v $\qquad h=\frac{2}{n},\ x_i=ih$

$-k(x)\cdot u''(x)\cdot v(x)=0 \,//\!:k(x) \Rightarrow -u''(x)\cdot v(x)=0$

2° Całkuję obustronnie po dziedzinie

$$-\int_0^2 u''(x)v(x)=\int_0^2 0\,dx \overset{}{=}0 \qquad (*)$$

3° Całkuję przez części

$$\int u''(x)v(x)=\left|\begin{array}{l} a(x)=v(x)\\ b'(x)=u''(x)\\ a'(x)=v'(x)\\ b(x)=u'(x)\end{array}\right|=v(x)u(x)+\int v'(x)u'(x)\,dx$$

4° Wstawiam do (*) $\qquad u'(0)+u(0)=20 \Rightarrow u'(0)=20-u(0)$

$$v(x)u'(x)\Big|_0^2+\int_0^2 v'(x)u'(x)\,dx=0$$

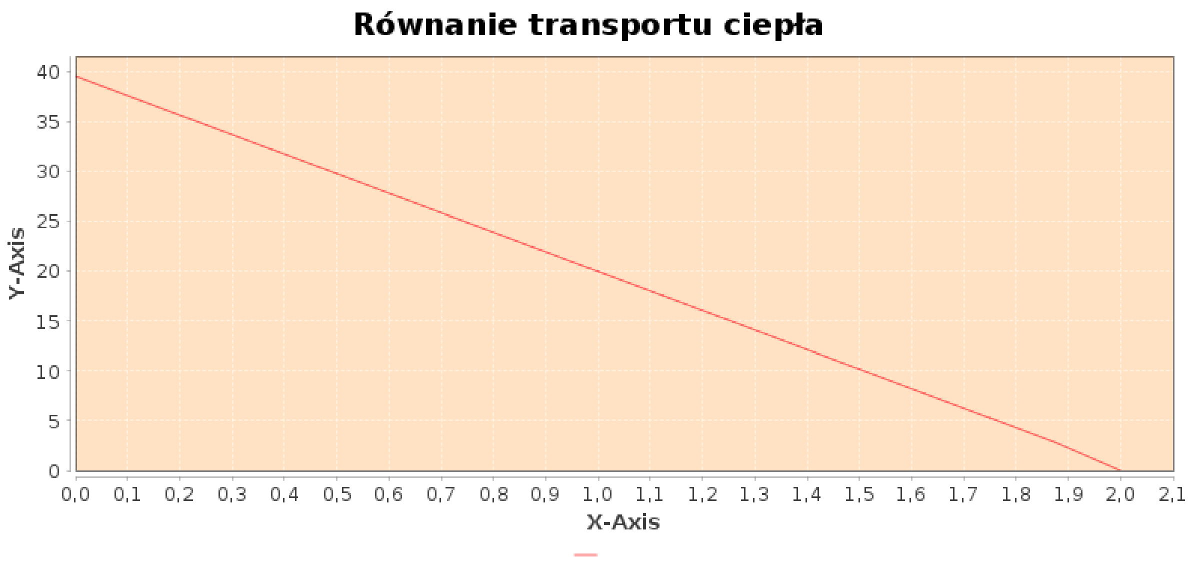
$$\overbrace{v(2)u'(2)}^{0}-\overbrace{v(0)u'(0)}^{v(0)\cdot[20-u(0)]}+\int_0^2 v'(x)u'(x)\,dx=0$$

Warunek brzegowy Dirichleta w $x_0=2$, więc funkcja testowa zeruje się w 2

$$v(0)[20-u(0)]+\int_0^2 v'(x)u'(x)\,dx=0$$

$$20v(0)-v(0)u(0)+\int_0^2 v'(x)u'(x)\,dx=0 \Rightarrow \underbrace{\int_0^2 v'(x)u'(x)\,dx-v(0)u(0)}_{B(u,v)}=\underbrace{-20v(0)}_{L(v)}$$

6. Otrzymany wykres



7. Wykres elementów dla n = 16