Metody Optymalizacji
Lista1

Jakub Gogola
236412

1 kwietnia 2020r.

1 Wstęp

Celem niniejszej listy było rozwiązanie problemów programowania liniowego za pomocą pakietu `GNU GLPK`. Poniżej zostały przedstawione badane problemy w formie krótkiego wstępu teoretycznego, prezentacji wyników wraz z obserwacjami oraz płynących z nich wniosków.

2 Macierz Hilberta

Zadanie to miało na celu przeprowadzenie testu na odporność algorytmów programowania liniowego dla macierzy Hilberta, która jest źle uwarunkowana. Macierz ta, o wymiarach $n \times n$ powoduje złe uwarunkowanie zagadnienia nawet dla małych wartości n. Przyjmujemy oczywiście, że $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Model formalny

W zadaniu należało zminimalizować następującą funkcję kosztu (celu):

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{1}$$

przy zadanych warunkach:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \leqslant \mathbf{0} \tag{2}$$

Elementy macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ oraz $\mathbf{c}$ definiujemy następująco:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1, \dots, n \tag{3}$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, i = 1, \dots, n \tag{4}$$

Wiadomo ponadto, że rozwiązaniem tego zadania jest wektor $\mathbf{x}$, gdzie $x_i = 1$ dla $i = 1, \dots, n$.

2.2 Wyniki

Sprawdzono wyniki zwracane przez algorytm dla wybranych $n \in \{3, \dots, 10\}$ oraz policzono dla nich błędy względne biorąc pod uwagę dokładne rozwiązanie problemu.

n	$\frac{\|x-\tilde{x}\|_2}{\|x\|_2}$
3	0.49944413545905658181
4	0.57319666936288748982
5	0.62227055813228582259
6	0.65760905509139500058
7	0.68443694572811120125
8	0.70559171560962452574
9	0.72275770153513396732
10	0.73700258669560170244

2.3 Obserwacje

Na podstawie przedstawionych w tabeli wartości błędu względnego dla poszczególnych wartości $n \in \{3, \ldots 10\}$ można zauważyć, że wraz ze zwiększaniem się rozmiaru macierzy $\mathbf{A}$ rośnie wartość błędu.

2.4 Wnioski

Na podstawie dokonanych obserwacji oraz zaprezentowanych wyników można stwierdzić, że programowanie liniowe nie jest odporne dla błędy dla każdego zadanego w nim problemu, czego przykładem jest opisany powyżej problem dla macierzy Hilberta.

3 Problem rozmieszczenia kamperów

W tym zadaniu należało zbadać problem rozmieszczenia kamperów w poszczególnych miastach w zależności od zdefiniowanej liczby ich nadmiaru bądź też niedoboru. Oczekiwanym rozwiązaniem był taki transfer pojazdów pomiędzy poszczególnymi przedstawicielstwami firmy, że koszt tego transferu był jak najmniejszy.

Przedstawicielstwa firmy znajdowały się w 13 europejskich miastach. Każda z filii miała do dyspozycji (wypożyczenia) kampery w klasach *Standard* oraz *VIP*. W każdym mieście mogły występować niedobór danego rodzaju (wymagane było przesłanie kamperów z innego miasta) lub nadmiar (kampery mogły zostać wysłane do innego miasta lub zastąpić inny rodzaj kampera w danym mieści o ile ich standard na to pozwalał). Nadmiary i niedobory były zdefiniowane jako dane wejściowe dla zadania, podobnie jak tabela zawierająca odległości pomiędzy poszczególnymi miastami.

3.1 Model formalny

W przedstawianym problemie należało zminimalizować następującą funkcję celu:

$$\min \sum_{(c_1,c_2) \in C \times C, t \in T} m_{c_1 c_2 t} d_{c_1 c_2} k_t \tag{5}$$

gdzie C reprezentuje zbiór wszystkich miast, w których znajdują się przedstawicielstwa firmy, a T zbiór rodzajów dostępnych kamperów. Ponadto $m_{c_1 c_2 t}$ oznacza liczbę kamperów rodzaju t które należy przemieścić pomiędzy miastami c_1 i c_2 (dane te są przechowywane w macierzy M), $d_{c_1 c_2}$ to odległość pomiędzy zadanymi miastami (macierz D), a k_t koszt przemieszczenia danego rodzaju kampera (macierz K).

Dodatkowo zadane były następujące ograniczenia:

- $m_{c_1 c_2 t} \geqslant 0$, gdzie $c_1, c_2 \in C, t \in T$ - liczba przemieszczonych kamperów pomiędzy poszczególnymi miastami jest zawsze nieujemna,
- $\sum_{c_2 \in C} m_{c_1 c_2 t} = red_{c_2 t}$, gdzie , $c_1 \in C, t \in T$ - liczna kamperów wysłanych z danego miasta musi być równa liczbie kamperów nadmiarowych w danym mieście (red to macierz zawierająca informacje o nadmiarze kamperów w poszczególnych miastach),
- $\sum_{c_2 \in C} m_{c_2 c_1 r} \geqslant def_{c_1 r}$,gdzie $c_1 \in C$ - liczba kamperów typu r (w wyższym standardzie) wysłanych do innego miasta może być większa niż niedobór typu r w tym mieście, ponieważ mogą one zastępować kampery o standardzie niższym,
- $\sum_{t \in T} \sum_{c_2} m_{c_2 c_1 t} = \sum_{t \in T} def_{c_1 t}$, gdzie $c_1 \in C$ - suma kamperów wysłanych do danego miasta musi być taka sama jak niedobór tych pojazdów w danym mieście.

3.2 Wyniki

Dla danych dołączonych do zadania (odległości pomiędzy miastami zostały pobrane za pomocą `API` Google Maps) otrzymano następujące transfery dla kamperów (transfer kamperów typu *VIP* w obrębie tego samego miasta oznacza wypełnienie niedoboru kamperów typu *Standard* za pomocą kamperów wyższej klasy):

```
Move 4 VIP campers from Bratyslawa to Bratyslawa
Move 4 VIP campers from Bratyslawa to Krakow
Move 2 VIP campers from Brno to Brno
Move 4 VIP campers from Budapeszt to Budapeszt
Move 4 VIP campers from Koszyce to Krakow
Move 3 VIP campers from Lipsk to Berlin
Move 3 VIP campers from Lipsk to Lipsk
Move 4 VIP campers from Lipsk to Praga
Move 3 Standard campers from Praga to Berlin
Move 7 Standard campers from Praga to Brno
Move 2 VIP campers from Rostok to Berlin
Move 2 VIP campers from Rostok to Rostok
Move 2 VIP campers from Gdansk to Gdansk
Move 4 Standard campers from Krakow to Budapeszt
Move 4 Standard campers from Krakow to Koszyce
Move 2 Standard campers from Krakow to Wroclaw
Move 8 Standard campers from Szczecin to Berlin
Move 4 VIP campers from Szczecin to Berlin
Move 4 Standard campers from Szczecin to Gdansk
Move 6 VIP campers from Wroclaw to Wroclaw
Move 4 VIP campers from Wroclaw to Warszawa
Move 14 Standard campers from Warszawa to Gdansk
```

Powyższe dane zwrócone przez solwer zostały przedstawione w nieco czytelniejszej formie w poniższej tabeli:

Z	Do	Typ	Ile?
Bratysława	Bratysława	VIP	4
Bratysława	Kraków	VIP	4
Brno	Brno	VIP	2
Budapeszt	Budapeszt	VIP	4
Koszyce	Kraków	VIP	4
Lipsk	Berlin	VIP	3
Lipsk	Lipsk	VIP	3
Lipsk	Praga	VIP	4
Praga	Berlin	Standard	3
Praga	Brno	Standard	7
Rostok	Berlin	VIP	2
Rostok	Rostok	VIP	2
Gdańsk	Gdańsk	VIP	2
Kraków	Budapeszt	Standard	4
Kraków	Koszyce	Standard	4
Kraków	Wrocław	Standard	2
Szczecin	Berlin	Standard	8
Szczecin	Berlin	VIP	4
Szczecin	Gdańsk	Standard	4
Wrocław	Wrocław	VIP	6
Wrocław	Warszawa	VIP	4
Warszawa	Gdańsk	Standard	14

Ponadto, całkowity koszt przemieszczenia kamperów wyniósł 16682.55.

3.3 Całkowitoliczbowość a otrzymane wyniki

W zadaniu zostało postawione pytanie o wpływie założenia całkowitoliczbowości parametrów wejściowych na otrzymywane wyniki. Zostało to sprawdzone i nałożenie takiego ograniczenia na parametry nie spowodowały zmiany w otrzymywanych wynikach, zatem nie jest ono tutaj wymagane.

4 Optymalizacja kosztów produkcji i maksymalizacja zysku

W tym zadaniu problem dotyczył firmy produkującej pewne produkty z kupowanych przez nią surowców.

4.1 Model formalny

W tym zadaniu w pierwszej kolejności zostaną przedstawione zmienne, którymi się w nim posłużono, w celu łatwiejszego zdefiniowania funkcji celu oraz zadanych dla problemu ograniczeń.

- M_1, M_2, M_3 - wymagana do zakupu ilość surowców 1, 2 i 3,
- A, B, C, D - ilość wytworzonych produktów A, B oraz C,
- Q_{A1}, Q_{A2}, Q_{A3} - wymagane ilości surowców do wytworzenia produktu A,
- Q_{B1}, Q_{B2}, Q_{B3} - wymagane ilości surowców do wytworzenia produktu B,
- TQ_A - sumaryczna ilość surowców potrzebna do wytworzenia produktu A,
- TQ_B - sumaryczna ilość surowców potrzebna do wytworzenia produktu B,
- Q_{C1} - wymagane ilości surowców do wytworzenia produktu C,
- Q_{D2} - wymagane ilości surowców do wytworzenia produktu D,
- W_{A1}, W_{A2}, W_{A3} - odpady poszczególnych surowców z produktu A,
- W_{B1}, W_{B2}, W_{B3} - odpady poszczególnych surowców z produktu B,
- $WU_{A1}, WU_{A2}, WU_{A3}$ - odpady poszczególnych surowców z produktu A przeznaczone do utylizacji,
- $WU_{B1}, WU_{B2}, WU_{B3}$ - odpady poszczególnych surowców z produktu B przeznaczone do utylizacji,
- $WC_{A1}, WC_{A2}, WC_{A3}$ - odpady poszczególnych surowców z produktu A przeznaczone do produkcji produktu C,
- $WD_{B1}, WD_{B2}, WD_{B3}$ - odpady poszczególnych surowców z produktu B przeznaczone do produkcji produktu D.

Ponadto wszystkie zmienne są nieujemne, a dla surowców wprowadzono następujące ograniczenia na ich ilość:

$$\begin{gathered} M_1 \in [2000, 6000] \\ M_2 \in [3000, 5000] \\ M_3 \in [4000, 7000] \end{gathered}$$

Maksymalizowana była następująca funkcja celu:

$$\begin{gathered} \max(3 \cdot A + 2.5 \cdot B + 0.6 \cdot C + 0.5 \cdot D \\ -(2.1 \cdot M_1 + 1.6 \cdot M_2 + M_3) \\ -(0.1 \cdot WU_{A1} + 0.1 \cdot WU_{A2} + 0.2 \cdot WU_{A3}) \\ -(0.05 \cdot WU_{B1} + 0.05 \cdot WU_{B2} + 0.4 \cdot WU_{B3})) \end{gathered}$$

gdzie współczynniki przy zmiennych oznaczających produkty oznaczają ceny ich zbytu, współczynniki przy surowcach to koszty zakupu, a przy pozostałych zmiennych - koszty utylizacji konkretnych odpadów.

Zadane zostały następujące ograniczenia:

- $M_1 \geqslant Q_{A1} + Q_{B1} + Q_{C1}$ - ilość surowca 1 powinna być co najmniej taka, jak suma jego zawartości w poszczególnych produktach,
- $M_2 \geqslant Q_{A2} + Q_{B2} + Q_{C2}$ - analogicznie dla surowca 2,
- $M_3 \geqslant Q_{A3} + Q_{B3} + Q_{C3}$ - analogicznie dla surowca 3,
- $QT_A = Q_{A1} + Q_{A2} + Q_{A3}$ - ilość produktu A to suma ilości użytych do jego produkcji surowców,

- $Q_{A1} \geqslant 0.2 \cdot A$ - produkt A zawiera co najmniej 20% surowca 1,
- $Q_{A2} \geqslant 0.4 \cdot A$ - produkt A zawiera co najmniej 40% surowca 2,
- $Q_{A3} \leqslant 0.1 \cdot A$ - produkt A zawiera co najwyżej 10% surowca 3,
- $W_{A1} = 0.1 \cdot Q_{A1}$ - na produkcie A traci się 10% surowca 1,
- $W_{A2} = 0.2 \cdot Q_{A2}$ - na produkcie A traci się 20% surowca 2,
- $W_{A3} = 0.4 \cdot Q_{A3}$ - na produkcie A traci się 40% surowca 3,
- $A = QT_A - W_{A1} - W_{A2} - W_{A3}$ - końcowa ilość produktu A to ilość użytych do jego wytworzenia surowców pomniejszona o ilość odpadów
- $QT_B = Q_{B1} + Q_{B2} + Q_{B3}$ - ilość produktu B to suma ilości użytych do jego produkcji surowców,
- $Q_{B1} \geqslant 0.1 \cdot B$ - produkt B zawiera co najmniej 10% surowca 1,
- $Q_{B3} \leqslant 0.3 \cdot 3$ - produkt B zawiera co najwyżej 30% surowca 3,
- $W_{B1} = 0.2 \cdot Q_{B1}$ - na produkcie B traci się 20% surowca 1,
- $W_{B2} = 0.2 \cdot Q_{B2}$ - na produkcie B traci się 20% surowca 2,
- $W_{B3} = 0.5 \cdot Q_{B3}$ - na produkcie B traci się 50% surowca 3,
- $B = QT_B - W_{B1} - W_{B2} - W_{B3}$ - końcowa ilość produktu B to ilość użytych do jego wytworzenia surowców pomniejszona o ilość odpadów
- $C = Q_{C1} + WC_{A1} + WC_{A2} + WC_{A3}$ - produkt C składa się z zadanej ilości surowca 1 i odpadów z produktu A,
- $Q_{C1} = 0.2 \cdot C$ - produkt C zawiera 20% surowca 1,
- $WC_{A1} \leqslant W_{A1}$ - do produktu C użyto nie więcej odpadów surowca 1 niż uzyskano ich z produktu A,
- $WC_{A2} \leqslant W_{A2}$ - do produktu C użyto nie więcej odpadów surowca 2 niż uzyskano ich z produktu A,
- $WC_{A3} \leqslant W_{A3}$ - do produktu C użyto nie więcej odpadów surowca 3 niż uzyskano ich z produktu A,
- $WU_{A1} = W_{A1} - WC_{A1}$ - liczba zniszczonych odpadów surowca 1 z produktu A jest różnicą całkowitej ilości odpadów i liści odpadów wykorzystanych do produkcji C,
- $WU_{A2} = W_{A2} - WC_{A2}$ - liczba zniszczonych odpadów surowca 2 z produktu A jest różnicą całkowitej ilości odpadów i liści odpadów wykorzystanych do produkcji C,
- $WU_{A3} = W_{A3} - WC_{A3}$ - liczba zniszczonych odpadów surowca 3 z produktu A jest różnicą całkowitej ilości odpadów i liści odpadów wykorzystanych do produkcji C,
- $D = Q_{D1} + WD_{B1} + WD_{B2} + WD_{B3}$ - produkt D składa się z zadanej ilości surowca 2 i odpadów z produktu B,
- $Q_{D1} = 0.3 \cdot D$ - produkt D zawiera 30% surowca 2,
- $WD_{B1} \leqslant W_{B1}$ - do produktu D użyto nie więcej odpadów surowca 1 niż uzyskano ich z produktu B,
- $WD_{B2} \leqslant W_{B2}$ - do produktu D użyto nie więcej odpadów surowca 2 niż uzyskano ich z produktu B,
- $WD_{B3} \leqslant W_{B3}$ - do produktu D użyto nie więcej odpadów surowca 3 niż uzyskano ich z produktu B,
- $WU_{B1} = W_{B1} - WC_{B1}$ - liczba zniszczonych odpadów surowca 1 z produktu B jest różnicą całkowitej ilości odpadów i liści odpadów wykorzystanych do produkcji D,

- $WU_{B2} = W_{B2} - WC_{B2}$ - liczba zniszczonych odpadów surowca 2 z produktu B jest różnicą całkowitej ilości odpadów i liści odpadów wykorzystanych do produkcji D,
- $WU_{B3} = W_{B3} - WC_{B3}$ - liczba zniszczonych odpadów surowca 3 z produktu B jest różnicą całkowitej ilości odpadów i liści odpadów wykorzystanych do produkcji D,

4.2 Wyniki

W wyniku użycia solwera `GLPK` do przedstawionego problemu uzyskano następujące wyniki:

Zupełny zysk zakładu wyniósł 5461.696658$ będący wypadkową zysku uzyskanego ze sprzedaży i poniesionych kosztów produkcji (zakup surowców i koszty utylizacji).

Ponadto ustalono, że należy zakupić $M_1 = 6000$, $M_2 = 5000$ oraz $M_3 = 4000$ poszczególnych surowców.

Należy wyprodukować $A = 9537.275064$ kg produktu A oraz $B = 2416.452442$ kg produktu C. Produkcja pozostałych produktów okazała się nieopłacalna. Ponadto na produkt A należy przeznaczyć 5516.709512 kg surowca 1, 5000 kg surowca 2 oraz 953.727506 kg surowca 3. Na produkt C należy przeznaczyć 483.290488 kg surowca 1.

Nie opłaca się utylizować żadnych odpadów powstałych w procesie wytwarzania produktów A (produkt B i powstałe z niego odpady, a co za tym idzie - produkt D, nie są tutaj rozważane, ponieważ nie są wytwarzane z racji nieopłacalności ich produkcji). Z produkcji produktu A otrzymano i przeznaczono na produkcję C następujące ilości surowców: 551.670951 kg surowca 1, 1000 kg surowca 2 oraz 381.491003 kg surowca 3.