Jak biegać najszybciej/najdalej?

Joanna Matuszak ★ Joanna Wojciechowicz ★ Jakub Koral ★ Marcin Miśkiewicz

10.06.2022

Agenda

- Jak sprintować? – przegląd wybranych modeli.
- Jak biegać na 400 metrów? – wprowadzenie i dopasowanie pełnego modelu zaproponowanego przez Josepha B. Kellera.
- „Na ile mnie stać?”, czyli jak oszacować energię początkową.
- Jak biegać na dłuższych dystansach? – przegląd wybranych modeli empirycznych.

Sprint – Model Kellera

W modelu Kellera szukana prędkość spełnia równanie

$$\frac{dv}{dt} + \frac{d\tau}{dt} = f(t),$$

a bilans tlenowy dany jest wzorem

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - fv.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań różniczkowych ma postać

$$v(t) = F\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \qquad (1)$$

Sprint – Model Tibshiraniego

Z postaci funkcji *v(t)* (wzór (1)) możemy odczytać, że szybkość biegacza będzie stale rosnąć z czasem. Z obserwacji wynika jednak, że szybkość sprinterów nieznacznie maleje pod koniec wyścigu, więc Tibshirani przyjął, że

$$f(t) = F - ct.$$

Ostatecznie otrzymujemy

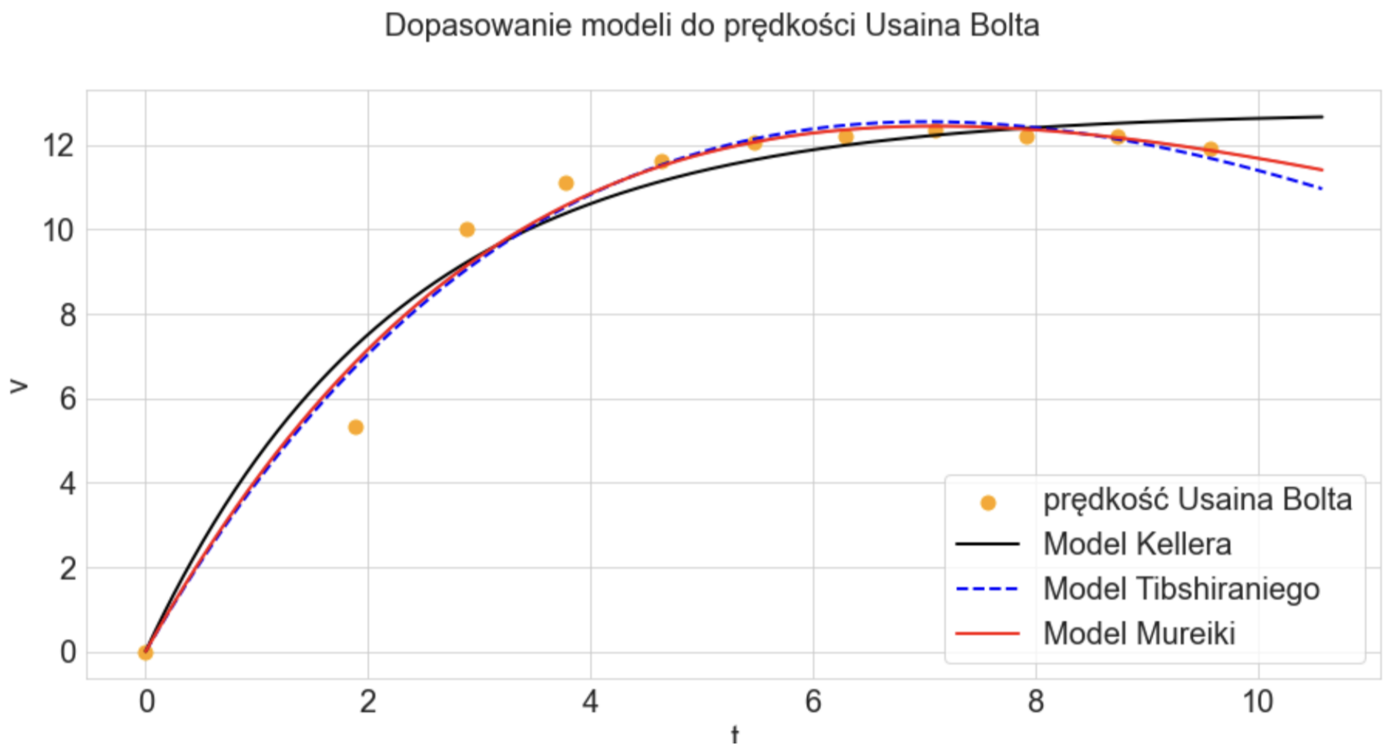
$$v(t) = k - ct\tau - ke^{-t/\tau}. \qquad (2)$$

Sprint – Model Mureiki

W 2001 roku Jonas R. Mureika zaproponował kwazifizyczny model sprintów. Łączy on uzasadnienia zarówno fizyczne jak i matematyczne, stąd przymiotnik kwazifizyczny. Na zmianę prędkości biegacza wpływają cztery siły na jednostkę masy

$$\frac{dv}{dt} = f_s + f_m - f_v - f_d. \qquad (3)$$

Dopasowanie modeli do danych



Keller – faza przyspieszania

Dla krótkich biegów mogliśmy przyjąć, że przez cały czas biegu przykładana jest maksymalna siła *F*. W przypadku dłuższych biegów jest to jedynie pierwsza faza do momentu t_1, co możemy zapisać jako

$$v(t) = F\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{t}_1.$$

Keller – faza zwalniania

W ramach optymalnej strategii biegu, w pewnym momencie t_2 biegacz osiąga minimalny poziom energii. Nie jest wtedy już możliwe przyspieszanie ani utrzymanie stałej prędkości i zaczyna ona maleć do końca biegu w chwili *T*. Na podstawie tego założenia otrzymujemy

$$v(t) = \sqrt{\sigma\tau + [v^2(t_2) - \sigma\tau]e^{2(t_2 - t)/\tau}}, \quad t_2 \le t \le T.$$

Keller – faza środkowa

Pozostało nam znalezienie optymalnej funkcji prędkości na przedziale $[t_1, t_2]$. W tym celu będziemy maksymalizować drogę przebytą w czasie. Naszą przestrzeń rozwiązań ograniczać będzie funkcja energii. Ostatecznie mamy

$$v(t) = \frac{\tau}{\lambda},\ t_1 \leq t \leq t_2.$$

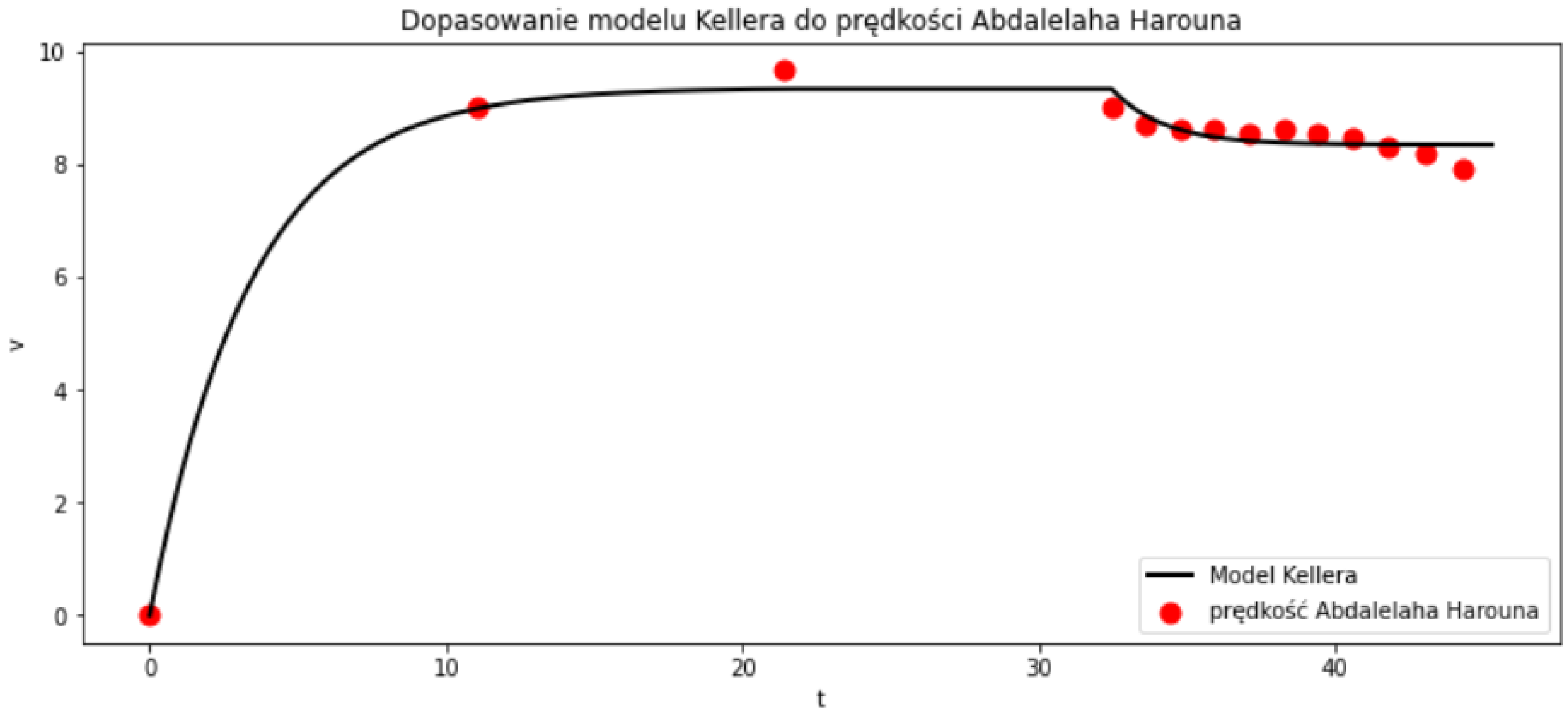
Keller – podsumowanie

Podsumowując, cały profil prędkości biegu wygląda następująco

$$v(t) = \begin{cases} F\tau(1 - e^{-t/\tau}), & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \frac{\tau}{\lambda}, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ \sqrt{\sigma\tau + \left[v^2(t_2) - \sigma\tau\right] e^{2(t_2-t)/\tau}}, & t_2 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Mnożnik Lagrange'a można usunąć dodając warunki gwarantujące ciągłość funkcji.

Dopasowanie modelu do danych



„Na ile mnie stać?” $X \approx E_0$

Z modelu Kellera wiemy, że optymalna strategia jest dla $X = E_0$.

Jeśli $X > E_0$, to biegaczowi się wydaje, że jest wytrzymalszy niż w rzeczywistości i zmęczy się przedwcześnie.

Jeśli $X < E_0$, to biegaczowi się wydaje, że jest słabszych niż w rzeczywistości i zostaną mu potem niewykorzystane siły.

Zakładamy, że biegacz nie potrafi ocenić podczas biegu, czy dobrze zarządza energią, dlatego zawsze trzyma się początkowej strategii.

Troje biegaczy – wyścig

Zdefiniujmy troje biegaczy: **Asię**, **Marcina** i **Kubę**.

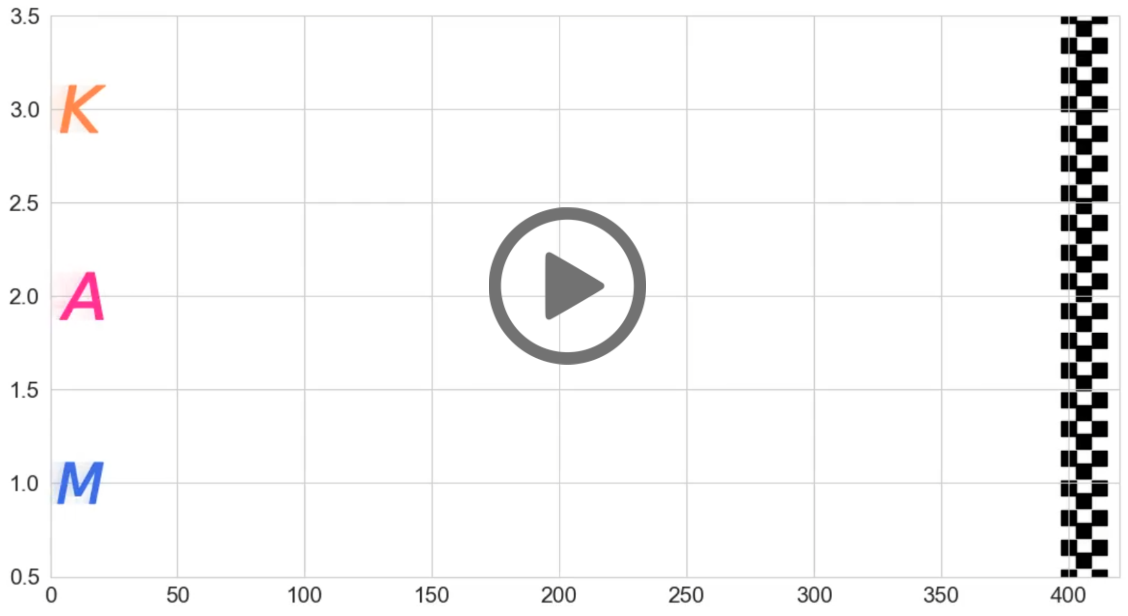
Wszyscy mają taką samą energię początkową E_0.
Biegacze mają zamiar ścigać się na dystansie 400 m.

Asia zna swoje E_0.

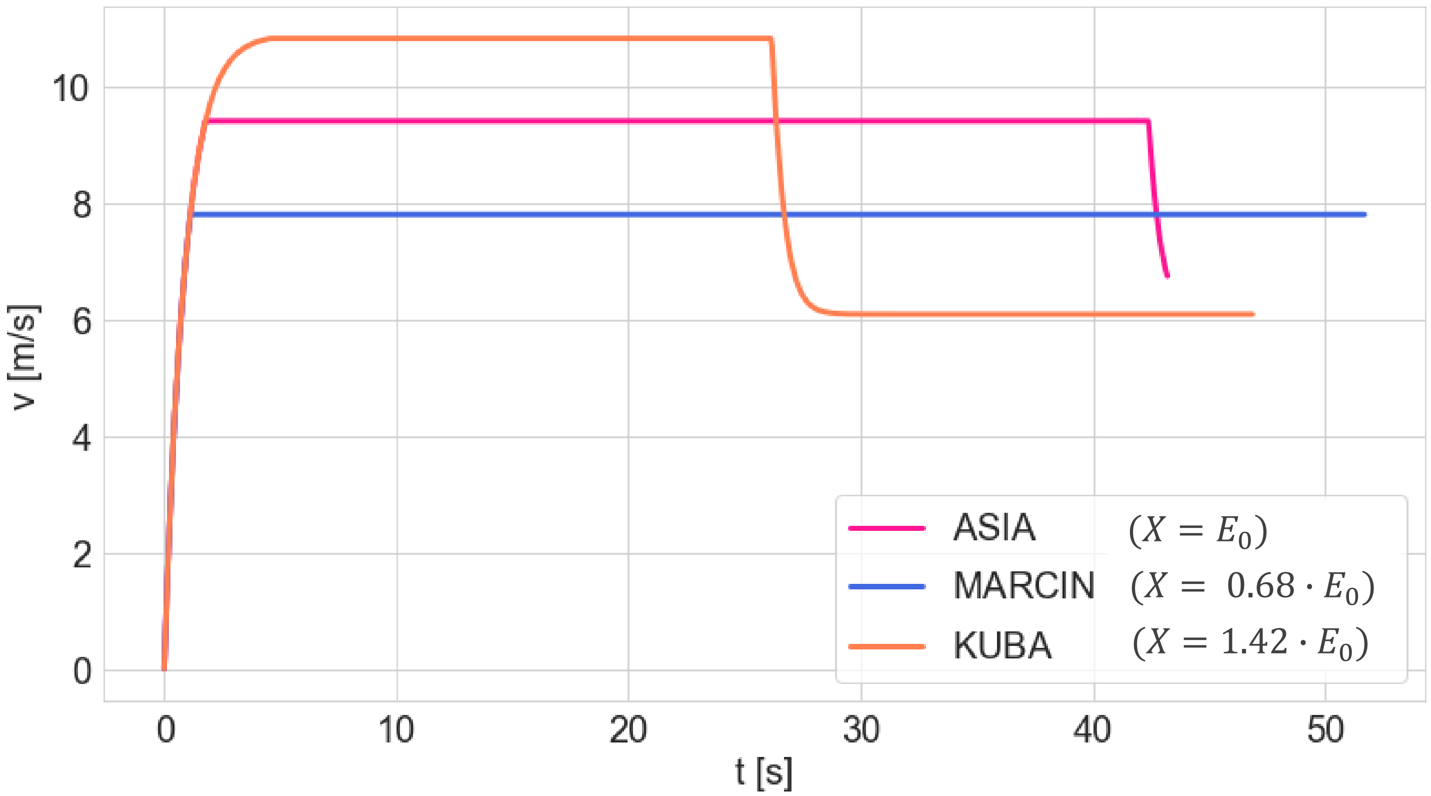
Marcin przyjmuje X o 42% mniejsze niż prawdziwe E_0.

Kuba przyjmuje X o 42% większe niż prawdziwe E_0.

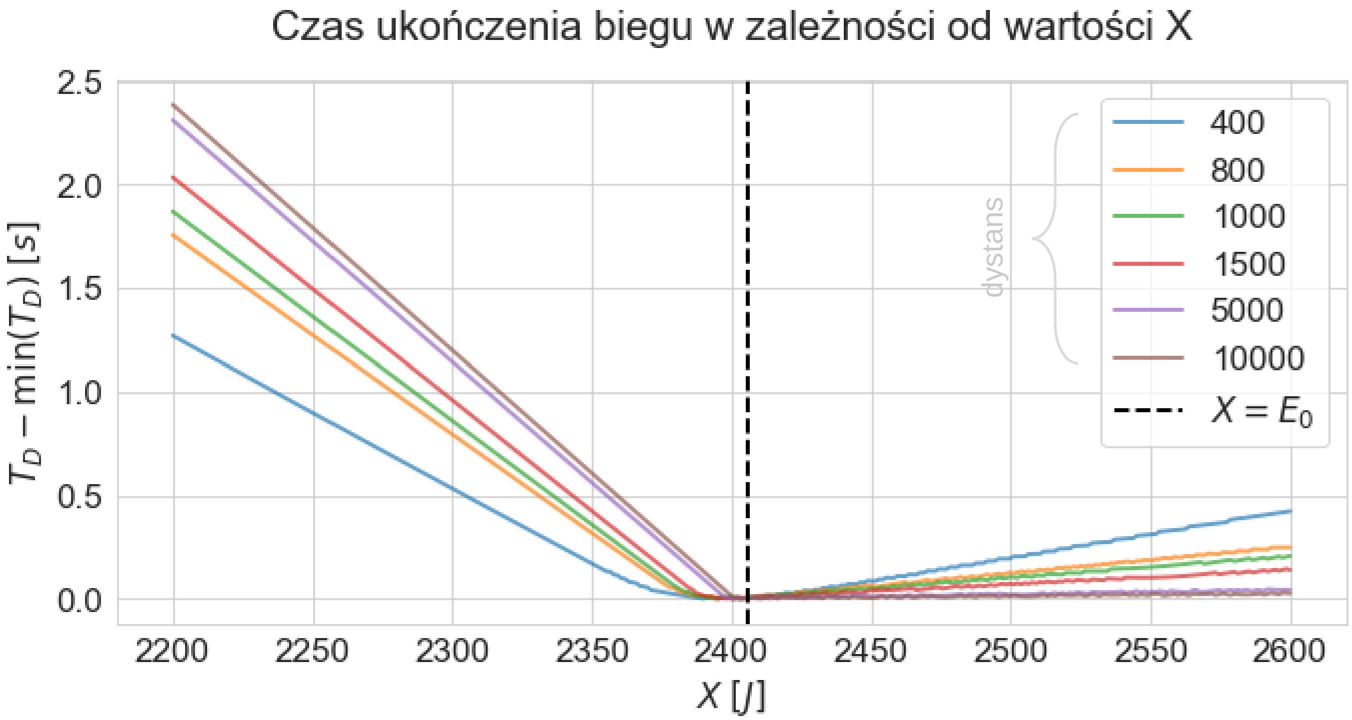
Kto wygra, a kto będzie ostatni?



Profile prędkości biegaczy



Ogólne wnioski



Rozkład T

Zakładając uproszczoną postać funkcji $T = g(X)$

$$g(x) = \begin{cases} bx + a, & x < E_0 \\ dx + c, & x > E_0 \end{cases}$$

oraz przyjmując $X \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, możemy analitycznie wyznaczyć

rozkład czasu ukończenia biegu T.

Rozkład T

$$P(T > y) = P\left(X > \frac{y-a}{b}\right) + P\left(X < \frac{y-c}{d}\right).$$

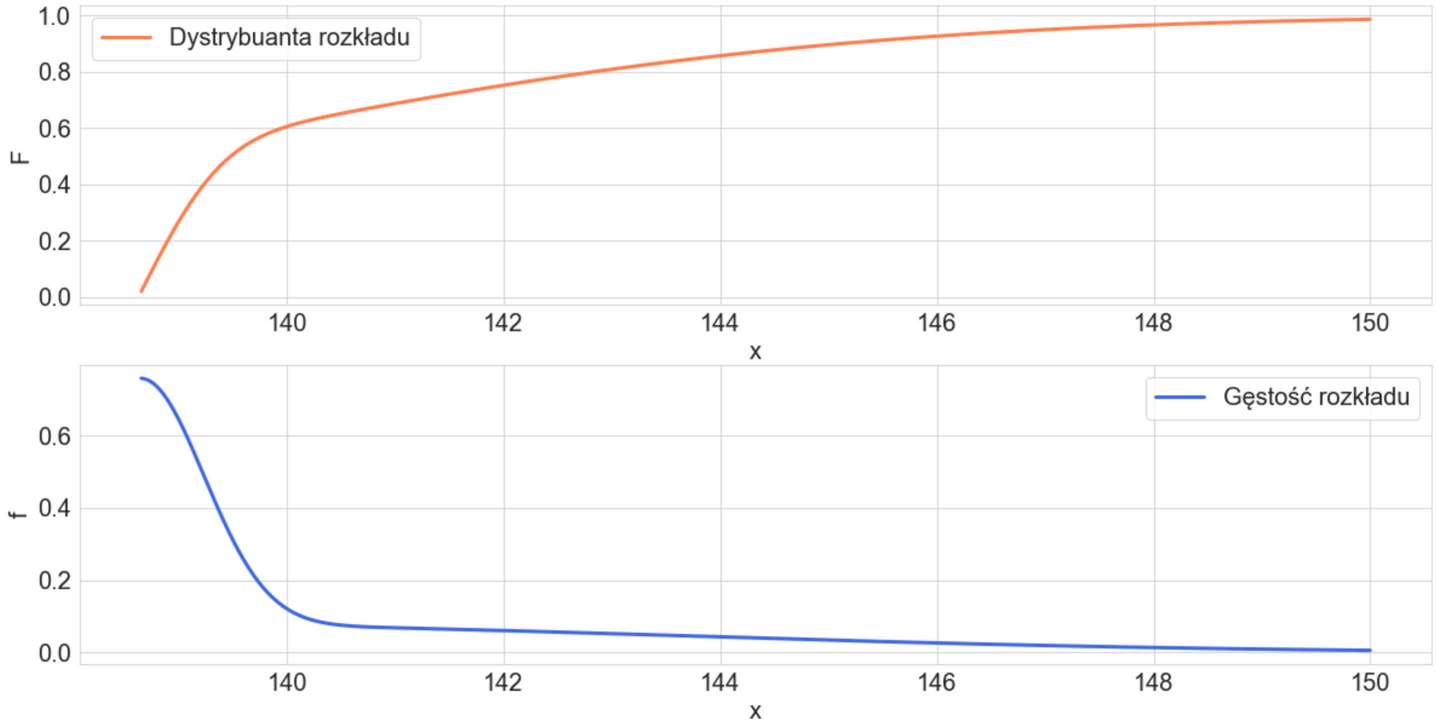
$$F_T(y) = P(T \leq y) = \Phi\left(\frac{(y-a)/b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(y-c)/d - m}{\sigma}\right)$$

$$f_T = \frac{1}{b\sigma}\phi\left(\frac{(y-a)/b - m}{\sigma}\right) - \frac{1}{d\sigma}\phi\left(\frac{(y-c)/d - m}{\sigma}\right)$$

$$E(T) = E(g(X)) = (1 - \Phi(-m\,\sigma)) \cdot \left(a + b\left[m + \sigma\frac{\phi(-m/\sigma^2)}{1 - \Phi(-m/\sigma^2)}\right]\right) +$$

$$+\Phi(-m/\sigma) \cdot \left(c + d\left[m + \sigma\frac{-\phi(-m/\sigma^2)}{\Phi(-m/\sigma^2)}\right]\right).$$

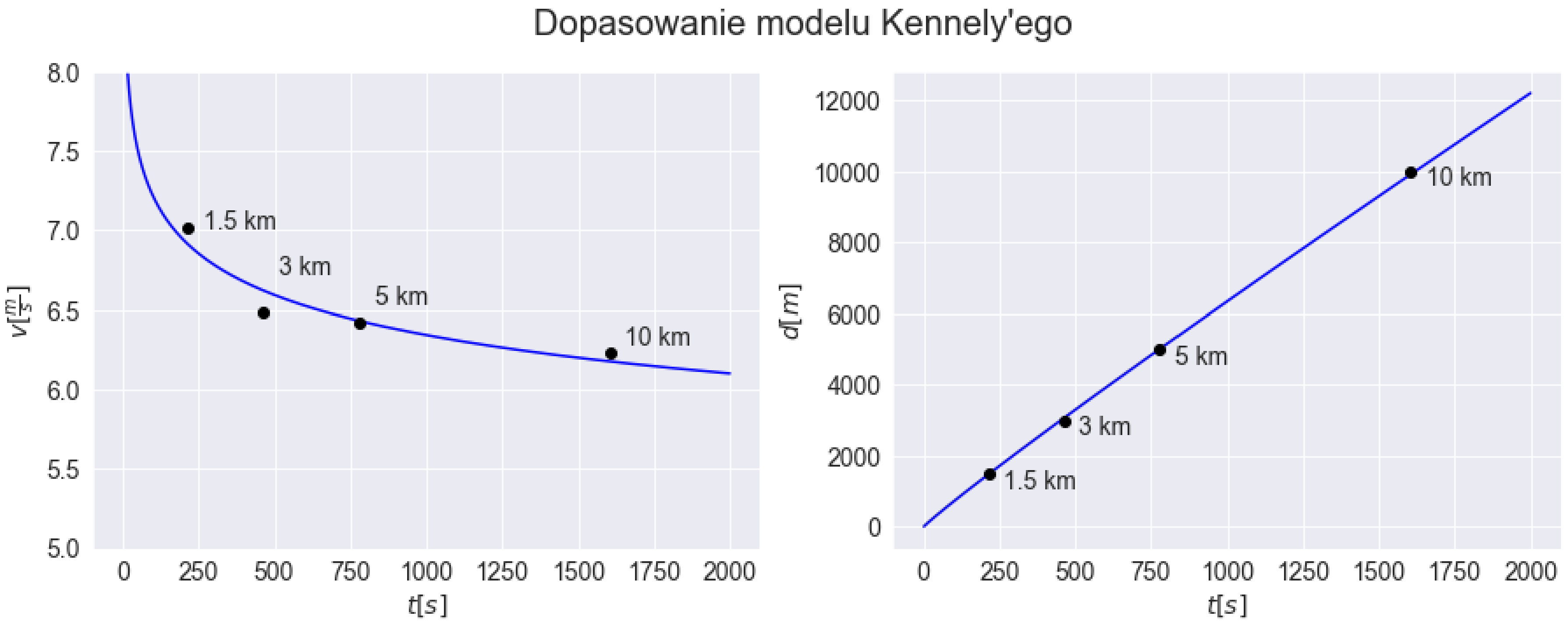
Rozkład *T* (*D* = 400 m.)



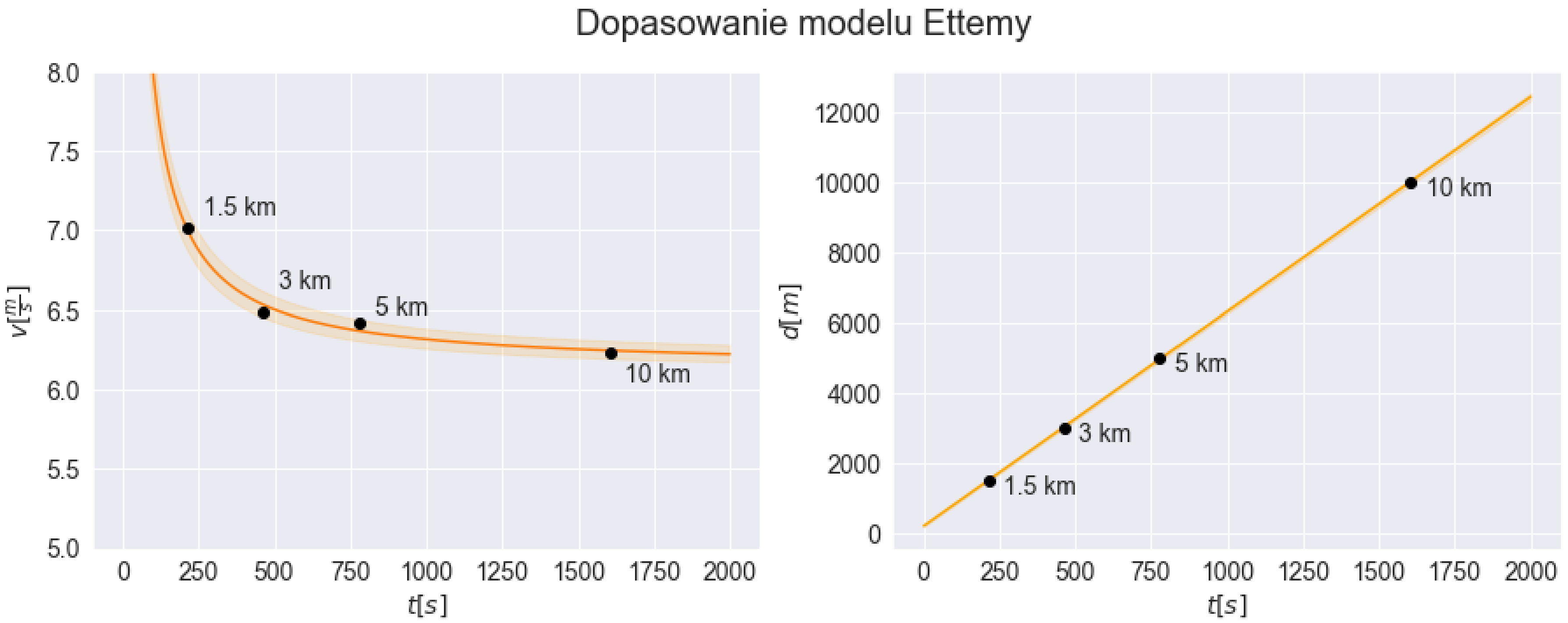
Modele empiryczne

Kennelly'ego	$v(t) = kt^{g-1}$	$(*)$
Ettemy	$v(t) = \frac{A}{t} + v_c$	$(**)$
Mortona	$v(t) = v_c + \frac{A}{t+C}$	$(***)$
Péronneta-Thibaulta	$v(t) = v_{MAS} - E \ln\left(\frac{t}{420}\right)$	$(\dagger)$
Hopkinsa	$v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}}$	$(\ddagger)$

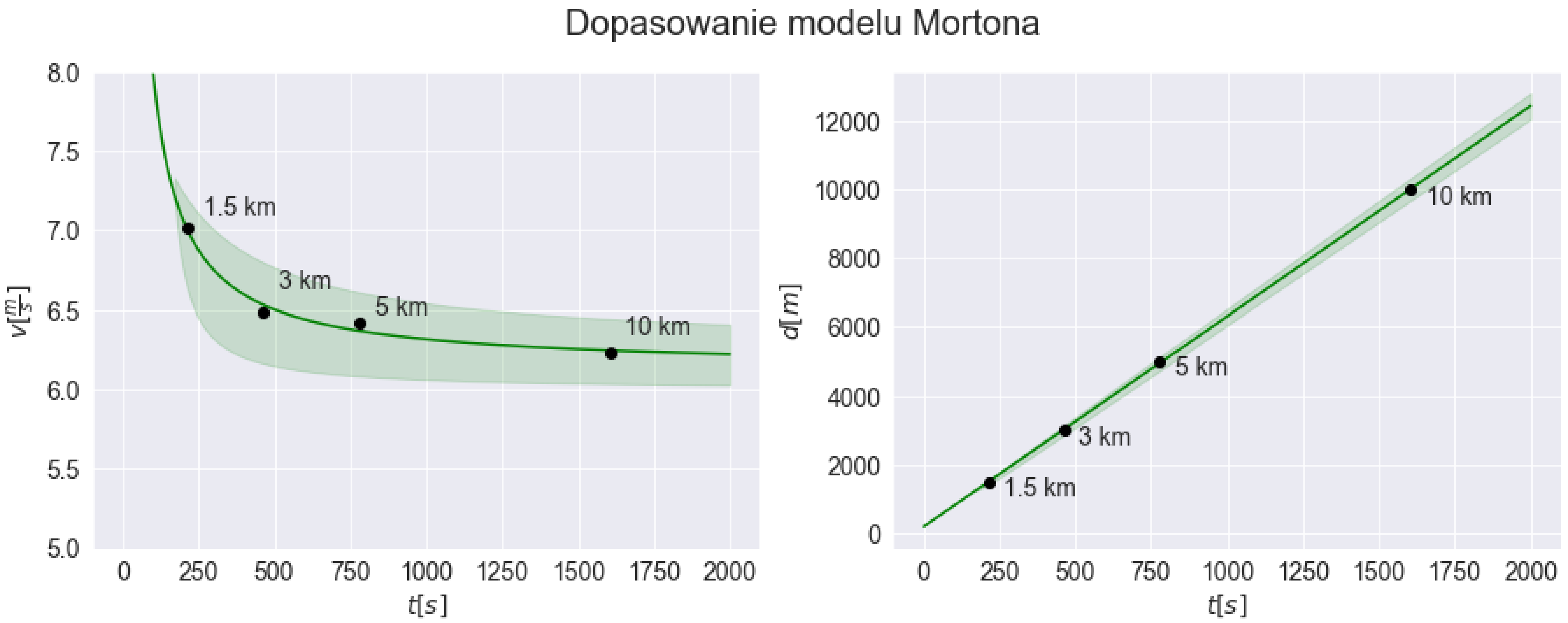
Dopasowanie modelu Kennelly’ego



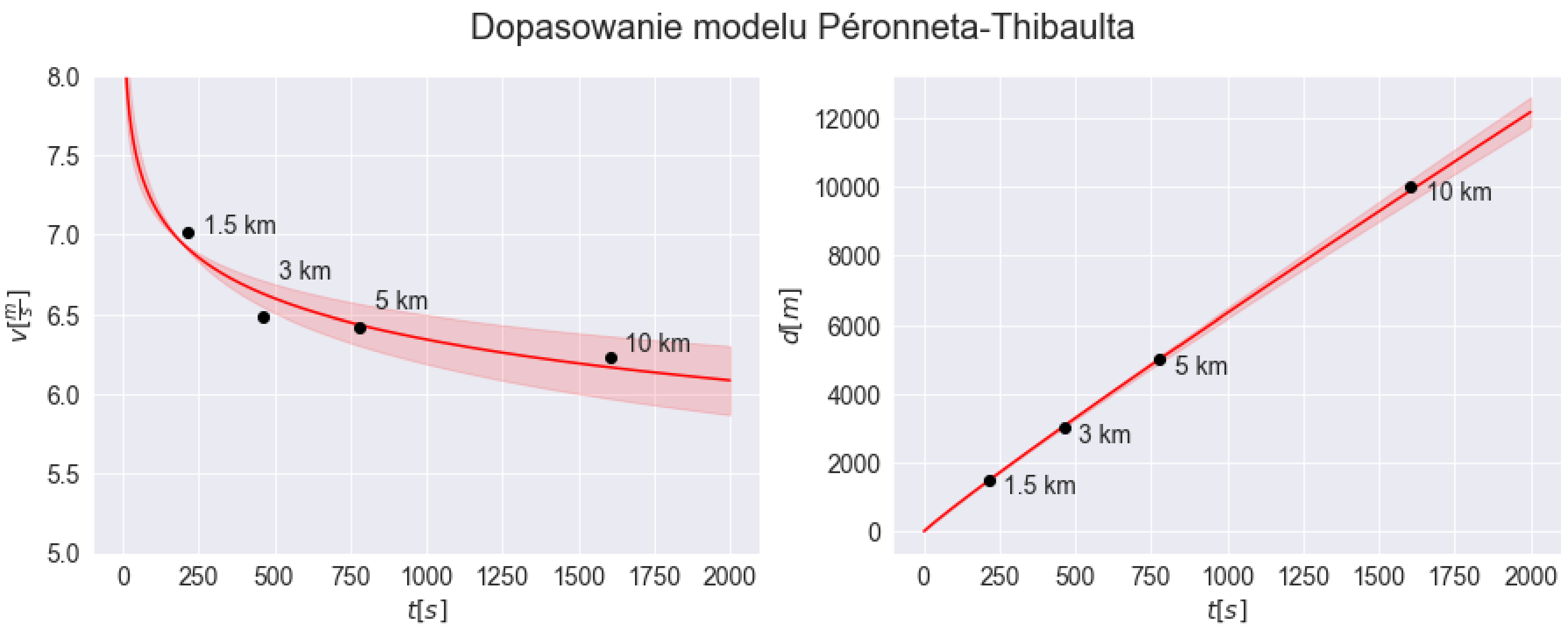
Dopasowanie modelu Ettemy



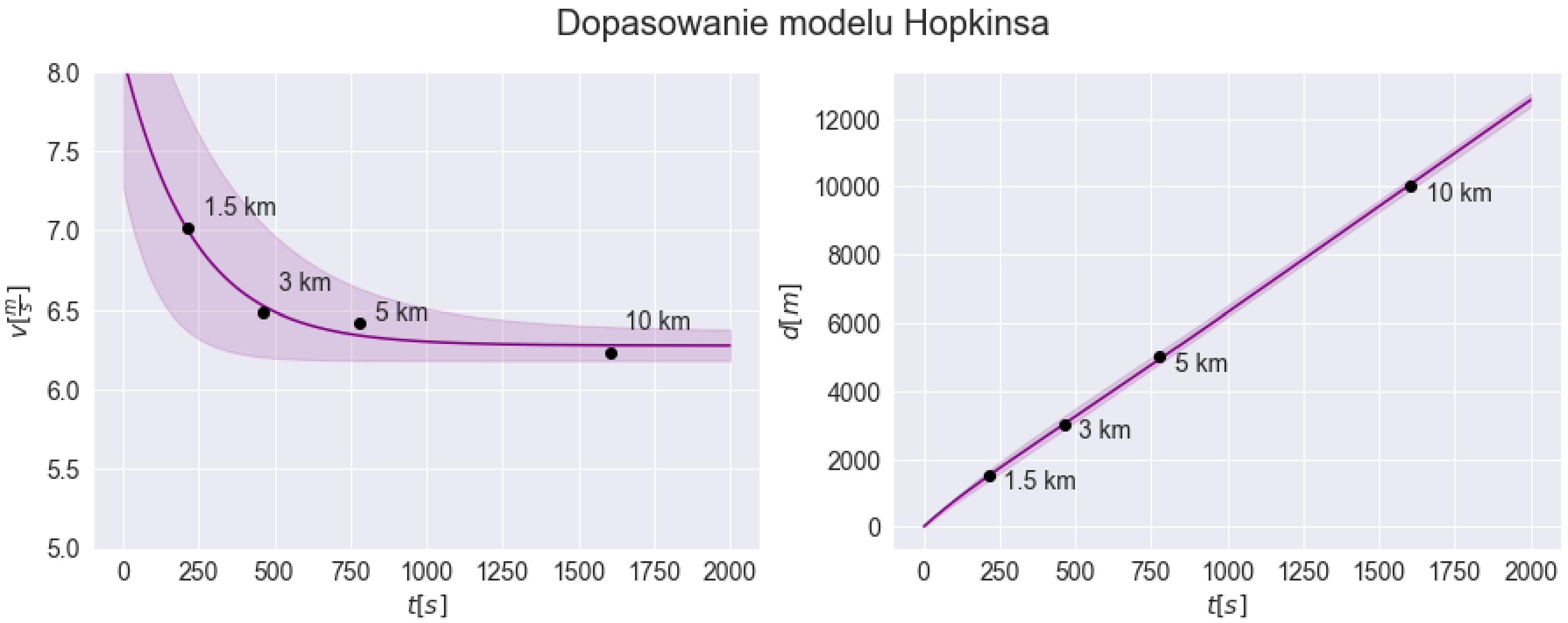
Dopasowanie modelu Mortona



Dopasowanie modelu Péronneta-Thibaulta



Dopasowanie modelu Hopkinsa



Porównanie modeli dla 20 biegaczy

Model	**Typ**	***MSE***
Kennelly'ego	potęgowy	0.0415
Ettemy	hiperboliczny	0.1076
Mortona	hiperboliczny	0.0568
Péronneta-Thibaulta	logarytmiczny	0.0317
Hopkinsa	wykładniczy	0.0211

Porównanie predykcji modeli dla 10 biegaczy

Model	Typ	*MSE*
Kennelly'ego	potęgowy	0.1150
Ettemy	hiperboliczny	0.6372
Mortona	hiperboliczny	0.3731
Péronneta-Thibaulta	logarytmiczny	0.1088
Hopkinsa	wykładniczy	0.5414

Podczas naszej pracy walczyliśmy z…

- Zagadnieniami z rachunku wariacyjnego (sterowanie optymalne)
- Licznymi problemami numerycznymi
- Założeniami testów statystycznych
- Niezweryfikowanymi źródłami naukowymi

Bibliografia

[1] Joseph B. Keller, *Optimal Velocity in a Race*

[2] Robert Tibshirani, *Who is the Fastest Man in the World?*

[3] Jonas R. Mureika, *A realistic quasi-physical model of the 100 m dash*

[4] Joseph B. Keller, *A theory of competitive running*

[5] Daniel Witt, *Optimal Strategies for Stochastic Models of Running Performance*

[6] H. Vandewalle, *Modelling of Running Performances: Comparisons of Power-Law, Hyperbolic, Logarithmic, and Exponential Models in Elite Endurance Runners,*