

Rozwiązanie
standardowego
i ułamkowego równania
Fokkera-Plancka przy
pomocy metody
spektralnej

Jakub Koral

Hubert Woszczek

Aleksander Jakóbczyk

Agenda

Czym jest równanie
Fokkera-Plancka (FPE)?
Jakie typy dyfuzji wyróżniamy?
Równanie Fokkera-Plancka dla
procesu Itô

Opis algorytmu
Rozwiązanie równania
Fokkera-Plancka
dla procesu
Ornsteina-Uhlenbecka

Własności metody spektralnej
Krótkie podsumowanie projektu

Wstęp

Teoria

Rozwiązanie FPE

Rozwiązanie FFPE

Podsumowanie

Funkcje Hermite'a i kwadratura
Gaussa-Hermite'a
Funkcja Mittag-Lefflera
Pochodna ułamkowa Caputo

Rozszerzenie metody na
ułamkowe równanie
Fokkera-Plancka
Macierzowa funkcja
Mittaga-Lefflera



Czym jest równanie Fokkera-Plancka (FPE)?

- Równanie różniczkowe cząstkowe



Czym jest równanie Fokkera-Plancka (FPE)?

- Równanie różniczkowe cząstkowe
- Opisuje ewolucję czasową funkcji gęstości prawdopodobieństwa



Czym jest równanie Fokkera-Plancka (FPE)?

- Równanie różniczkowe cząstkowe
- Opisuje ewolucję czasową funkcji gęstości prawdopodobieństwa
- Łączy światy probabilistyki i deterministycznych równań różniczkowych



Czym jest równanie Fokkera-Plancka (FPE)?

- Równanie różniczkowe cząstkowe
- Opisuje ewolucję czasową funkcji gęstości prawdopodobieństwa
- Łączy światy probabilistyki i deterministycznych równań różniczkowych
- W szczególnych przypadkach istnieją rozwiązania analityczne

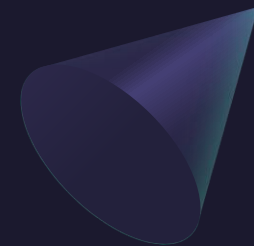


Czym jest równanie Fokkera-Plancka (FPE)?

- Równanie różniczkowe cząstkowe
- Opisuje ewolucję czasową funkcji gęstości prawdopodobieństwa
- Łączy światy probabilistyki i deterministycznych równań różniczkowych
- W szczególnych przypadkach istnieją rozwiązania analityczne
- Stosowane w naukach przyrodniczych, teorii informacji, teorii grafów, data science, finansach, ekonomii, itp.



Jakie typy dyfuzji wyróżniamy?

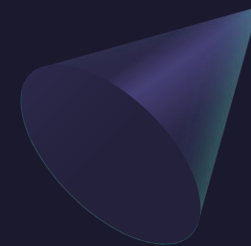


SUBDYFUZJA

- $E[(X_t - X_0)^2] \propto t^\alpha, \quad \alpha < 1$
- Zachodzi w ośrodkach, w których ruch cząsteczek jest szczególnie utrudniony (np. ośrodki porowate lub żele)



Jakie typy dyfuzji wyróżniamy?



SUBDYFUZJA

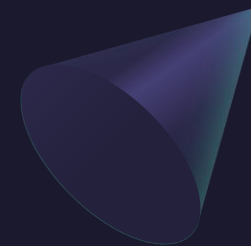
- $\mathbb{E}[(X_t - X_0)^2] \propto t^\alpha, \quad \alpha < 1$
- Zachodzi w ośrodkach, w których ruch cząsteczek jest szczególnie utrudniony (np. ośrodki porowate lub żele)

NORMALNA DYFUZJA

- $\mathbb{E}[(X_t - X_0)^2] \propto t$
- Zachodzi w standardowych ośrodkach



Jakie typy dyfuzji wyróżniamy?



SUBDYFUZJA

- $\mathbb{E}[(X_t - X_0)^2] \propto t^\alpha, \quad \alpha < 1$
- Zachodzi w ośrodkach, w których ruch cząsteczek jest szczególnie utrudniony (np. ośrodki porowate lub żele)



NORMALNA DYFUZJA

- $\mathbb{E}[(X_t - X_0)^2] \propto t$
- Zachodzi w standardowych ośrodkach



SUPERDYFUZJA

- $\mathbb{E}[(X_t - X_0)^2] \propto t^\alpha, \quad \alpha > 1$
- Zachodzi w ośrodkach turbulentnych



Równanie Fokkera-Plancka dla procesu Itô

Będziemy rozważać klasę FPE odpowiadających procesowi Itô

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \\ X_{t_0} = X_0, \end{cases}$$

gdzie W_t to proces Wienera (in. ruch Browna). Ewolucja rozkładu prawdopodobieństwa $f(x, t)$ związanego z tym procesem stochastycznym spełnia następujące FPE

$$\partial_t f(x, t) = -\partial_x(\mu(x, t)f(x, t)) + \frac{1}{2}\partial_{xx}(a(x, t)f(x, t)),$$

gdzie $\sigma(X_t, t) = \sqrt{a(X_t, t)}$.

Funkcje Hermite'a

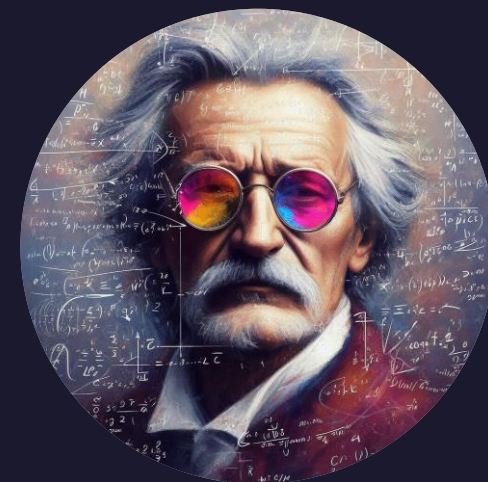
Wielomiany Hermite'a to znany ciąg wielomianów ortogonalnych zadanych wzorem rekurencyjnym:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

z początkowymi wielomianami $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$. Natomiast funkcje Hermite'a definiuje się jako:

$$\tilde{H}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\alpha x) w_\alpha^{-1}(x),$$

gdzie $w_\alpha(x) = e^{\alpha^2 x^2}$ jest funkcją ważącą.



Funkcje Hermite'a – dlaczego i po co?

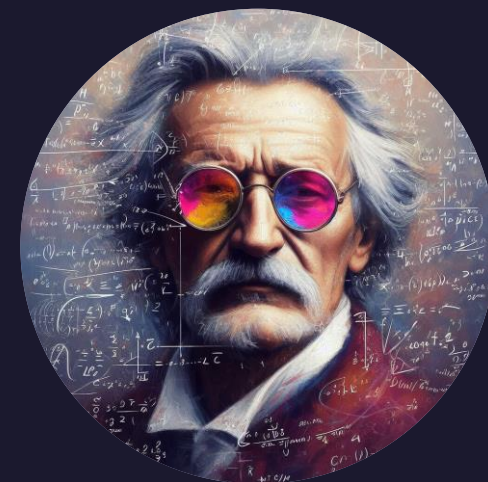
Zauważamy, że zbiór funkcji $\{\tilde{H}_n(x), n \geq 1\}$ definiują $L^2_{w_\alpha}(\mathbb{R})$ -ortogonalną przestrzeń, dla tego dla każdego y z tej przestrzeni możemy zapisać

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{y}_n \tilde{H}_n(x),$$

ze współczynnikami \hat{y}_n zadanymi wzorem

$$\hat{y}_n = \int_{\mathbb{R}} y(x) \tilde{H}_n(x) w_\alpha(x) dx, \quad n \geq 0.$$

Użyjemy tego do przybliżenia warunku początkowego.



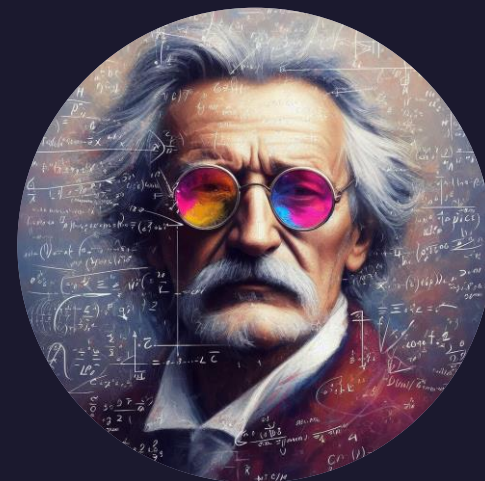
Kwadratura Gaussa-Hermite'a

Całki, które musimy policzyć, aby uzyskać współczynniki \hat{y}_n nie zawsze są proste! Dlatego je również przybliżymy przy pomocy kwadratury Gaussa-Hermite'a.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

gdzie x_i są pierwiastkami wielomianu Hermite'a n -tego stopnia. Wagi w_i dane są wzorami

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 [H_{n-1}(x_i)]^2}.$$

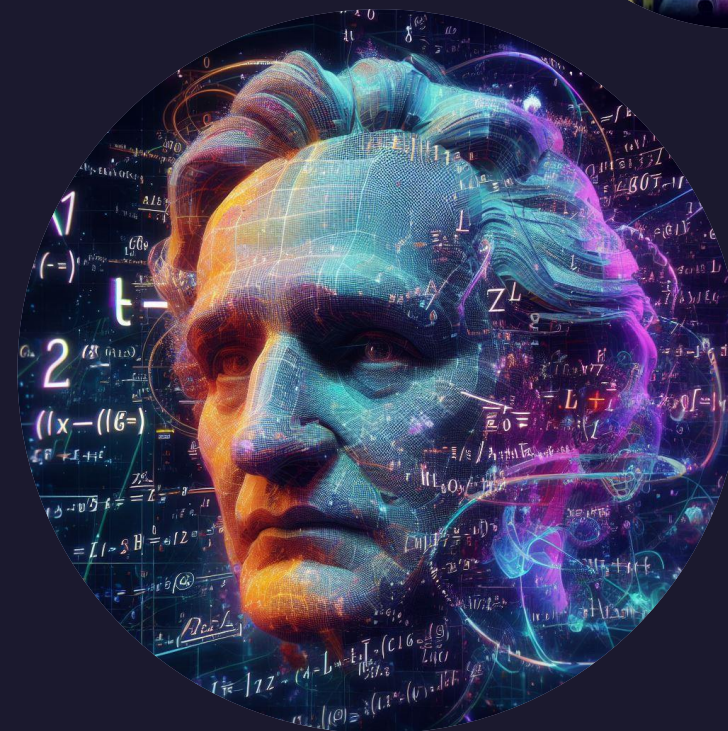


Funkcja Mittag-Lefflera

Funkcja Mittag-Lefflera $E_{\nu,\theta}$ to funkcja specjalna, która zależy od dwóch zespolonych parametrów ν i θ . Można ją zdefiniować poprzez następujący szereg, jeśli $\text{Re}(\nu) > 0$:

$$E_{\nu,\theta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\nu k + \theta)}.$$

Gdy $\theta = 1$, stosujemy skrócony zapis $E_{\nu}(z) = E_{\nu,1}(z)$. Warto również odnotować, że dla $\nu = 1$ otrzymujemy funkcję e^z .



Pochodna ułamkowa Caputo

Pochodne ułamkowe stanowią uogólnienie pojęcia pochodnych n -tego rzędu na rząd rzeczywisty. Jedną z możliwych form pochodnej ułamkowej jest pochodna Caputo. Definiuje się ją jako

$$D_t^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \nu)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\nu-1} f^n(\tau) d\tau, \\ n = [\nu].$$



Opis algorytmu

Rozważmy FPE odpowiadający procesowi Ornsteina-Uhlenbecka i dla prostoty przyjmijmy, że $\mu(x, t) = \gamma x + u$ i $a(x, t) = 2c$, gdzie $\gamma < 0$ i $u, c > 0$ są stałymi. W takim przypadku FPE ma formę

$$\begin{cases} \partial_t f(x, t) = -\partial_x((\gamma x + u)f(x, t)) + c\partial_{xx}f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T); \\ f(x, 0) = \rho(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zatem gęstość $f(x, t)$ i warunek początkowy $\rho(x)$ są przybliżane w przestrzeni funkcji Hermite'a poprzez

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n(t) \tilde{H}_n(x), \quad \rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n^0 \tilde{H}_n(x),$$

gdzie $\hat{f}_n^0 = \int_{\mathbb{R}} y(x) \tilde{H}_n(x) w_{\alpha}(x) dx, \quad n \geq 0.$

Opis algorytmu (2)

Wprowadzając rozwinięcie w przestrzeni Hermite'a $\text{span}\{\tilde{H}_n(x), n \geq 0\}$ do naszego zagadnienia otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}\hat{f}_n(t) = n\gamma\hat{f}_n(t) + \alpha u\sqrt{2u}\hat{f}_{n-1}(t) + (\gamma + 2\alpha^2 c)\sqrt{n(n-1)}\hat{f}_{n-2}(t),$$

dla $\hat{f}_{-1}(t) = \hat{f}_{-2}(t) \equiv 0$. Jest to nieskończony układ równań. Zatem musimy go zdyskretyzować

$$[\hat{f}_0(t), \hat{f}_1(t), \dots] \approx [\hat{f}_{\Delta,0}(t), \hat{f}_{\Delta,1}(t), \dots, \hat{f}_{\Delta,N}(t)].$$

Teraz nasze zagadnienie wygląda następująco

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{f}_{\Delta,n}(t) = n\gamma\hat{f}_{\Delta,n}(t) + \alpha u\sqrt{2u}\hat{f}_{\Delta,n-1}(t) + (\gamma + 2\alpha^2 c)\sqrt{n(n-1)}\hat{f}_{\Delta,n-2}(t), \\ \hat{f}_{\Delta,n}(0) = \hat{f}_n^0. \end{cases}$$



Opis algorytmu (3)

Zapisując macierzowo dostajemy

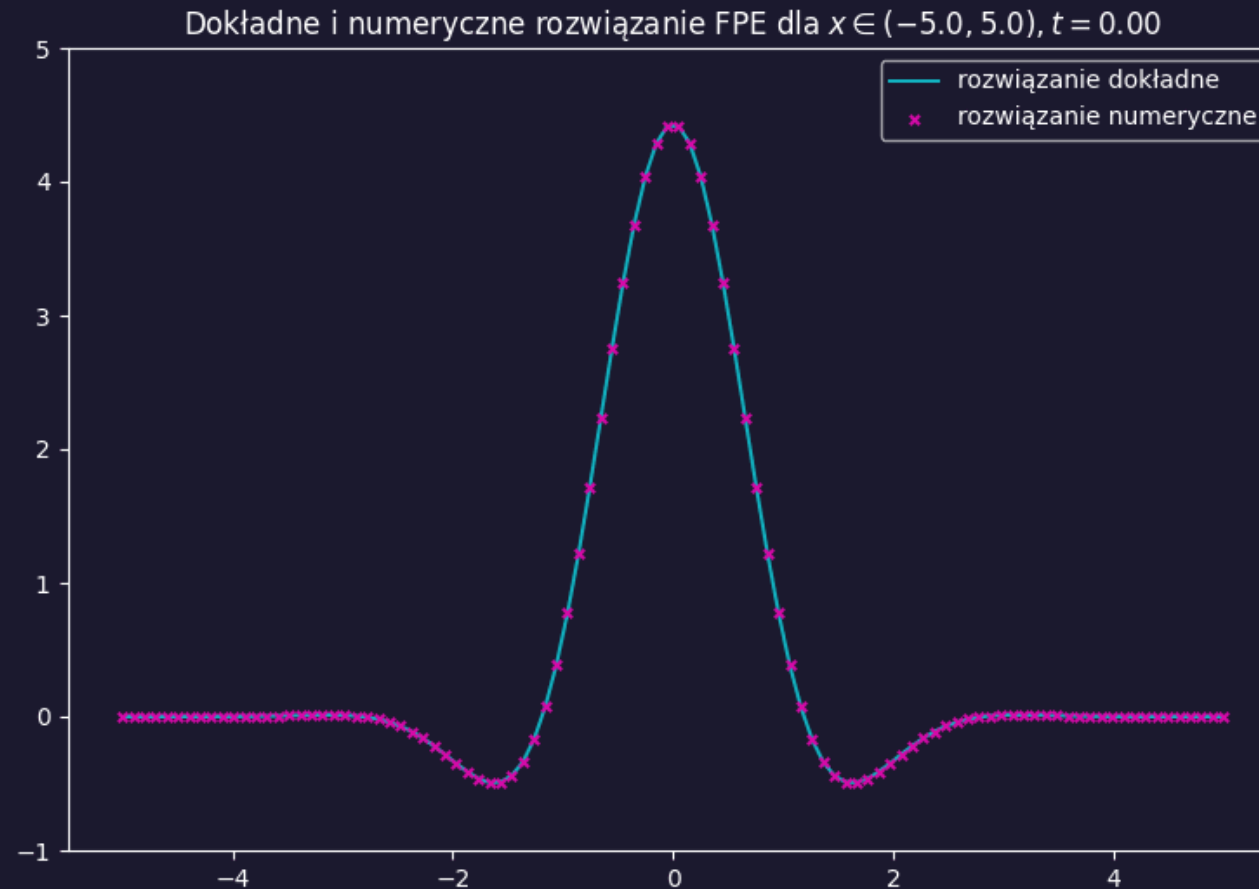
$$\frac{d\hat{f}_{\Delta}}{dt} = M_f \hat{f}_{\Delta}, \quad \text{gdzie } \hat{f}_{\Delta} = [\hat{f}_{\Delta,0}(t), \hat{f}_{\Delta,1}(t), \dots, \hat{f}_{\Delta,N}(t)]^T$$

oraz M_f to macierz trójdzielna $(N + 1) \times (N + 1)$ zadana wzorem

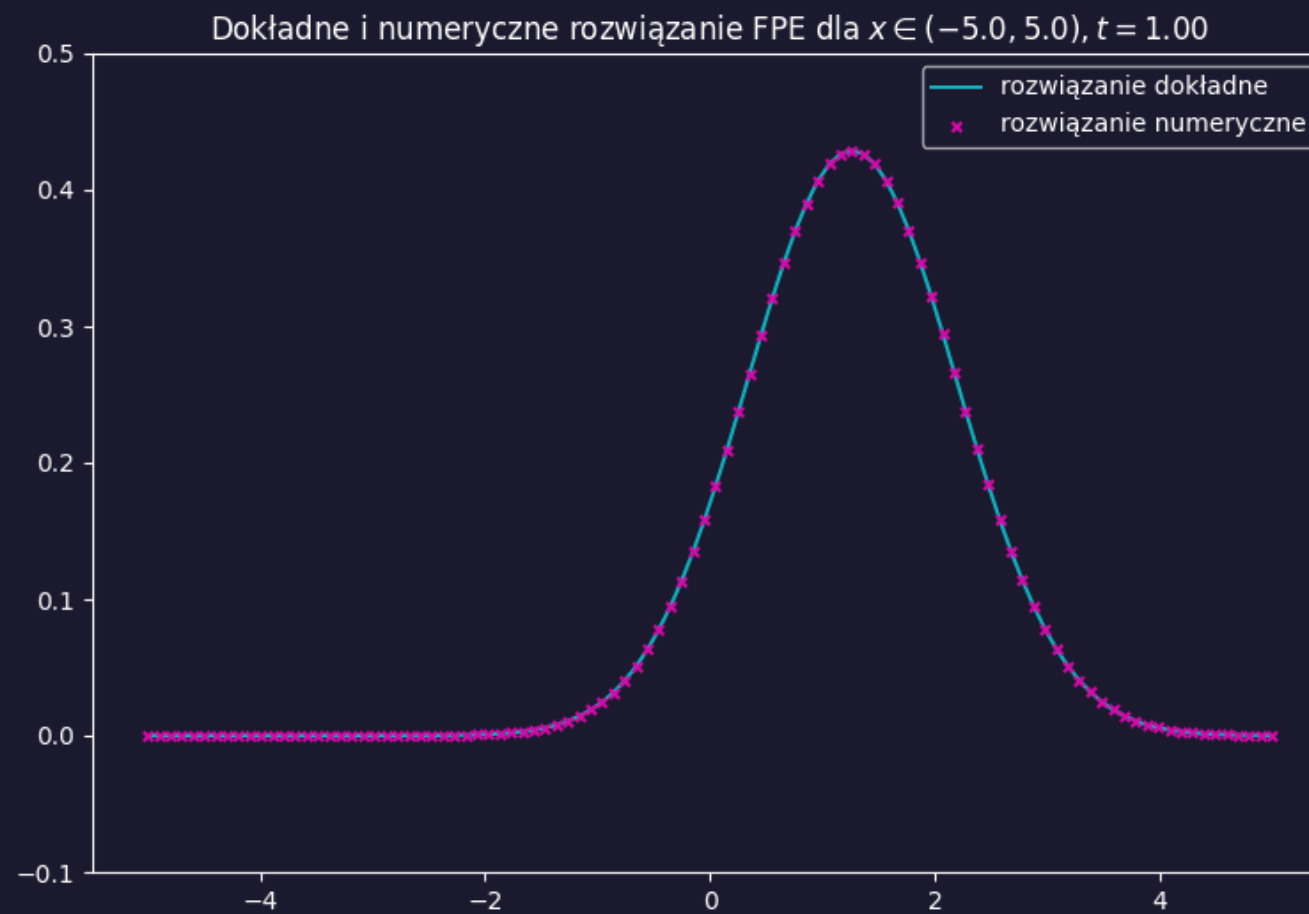
$$(M_f)_{ij} = \begin{cases} n\gamma, & i = j, \\ \alpha u \sqrt{2n}, & i = j + 1, \\ (\gamma + 2\alpha^2 c) \sqrt{n(n-1)}, & i = j + 2, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Jest to bodaj najprostsze równanie różniczkowe, którego rozwiązaniem jest $\hat{f}_{\Delta} = e^{M_f t} \hat{f}_n^0$.

Rozwiązanie FPE dla $f(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \exp\left(\frac{\pi^2}{8}\right)\right)$



Rozwiązanie FPE dla $f(x, 0) = \delta(x)$



Rozszerzenie dla ułamkowego równania Fokkera-Plancka

Rozważmy teraz ułamkowe równanie Fokkera-Plancka (FFPE). Stosując analogiczne rozumowanie, otrzymamy zagadnienie

$$\begin{cases} D_t^\nu \hat{f}_\Delta = M_f \hat{f}_\Delta, \\ \hat{f}_\Delta(0) = \hat{f}_n^0, \end{cases}$$

gdzie $\nu \in (0, 1)$. Jego rozwiązanie to $\hat{f}_\Delta = E_\nu(M_f t^\nu) \hat{f}_n^0$, gdzie $E_\nu(\cdot)$ to funkcja Mittag-Lefflera.

Problem: nie istnieje implementacja takiej funkcji na macierze w Pythonie ☹



Macierzowa funkcja Mittag-Lefflera

CZEGO NIE ROBIĆ?

Naiwnie można byłoby założyć, że dla $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ wystarczy:

$$E_\nu(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{\Gamma(\nu k + 1)} \approx \sum_{k=0}^K \frac{X^k}{\Gamma(\nu k + 1)},$$

Dla odpowiednio dużego K . Nie możemy jednak wziąć zbyt dużego K ze względu na funkcję Γ .

CO ROBIĆ?

Jeżeli $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna to możemy zapisać

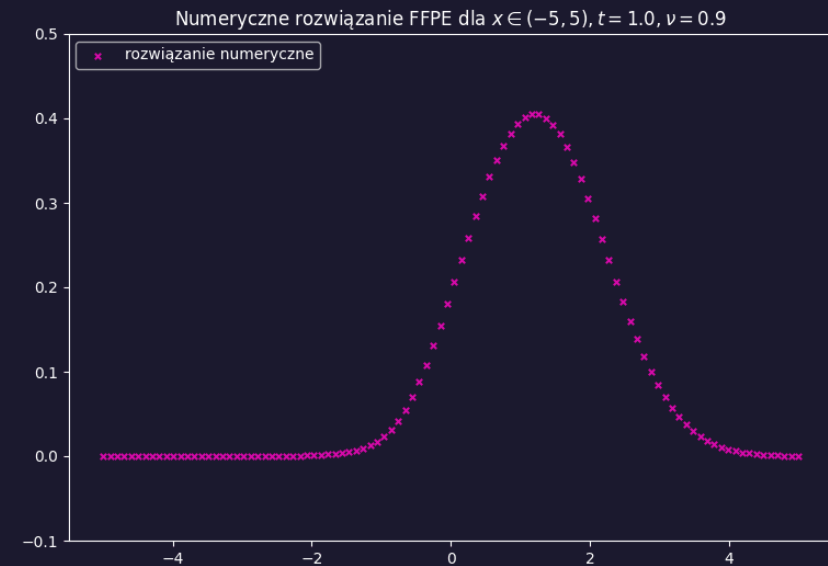
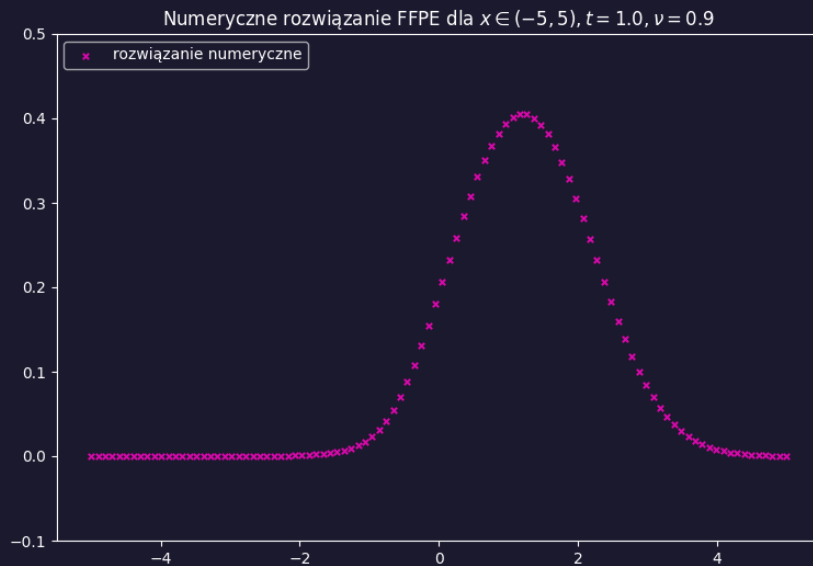
$$E_\nu(X) = P^{-1} \text{diag} \left(E_\nu(\vec{\lambda}) \right) P,$$

gdzie $\vec{\lambda}$ to wektor wartości własnych X ,
 $\text{diag} \left(E_\nu(\vec{\lambda}) \right)$ to macierz, której główna przekątna wypełniona jest wartościami $E_\nu(\vec{\lambda})$,
a P to macierz przejścia.

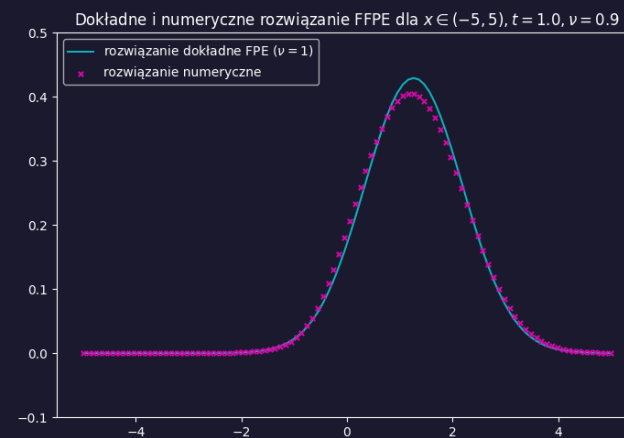
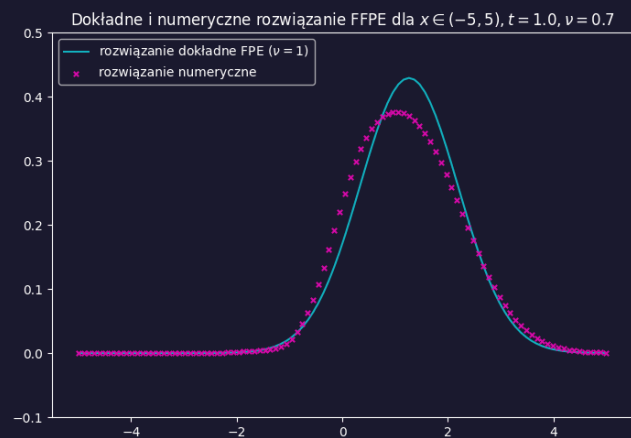
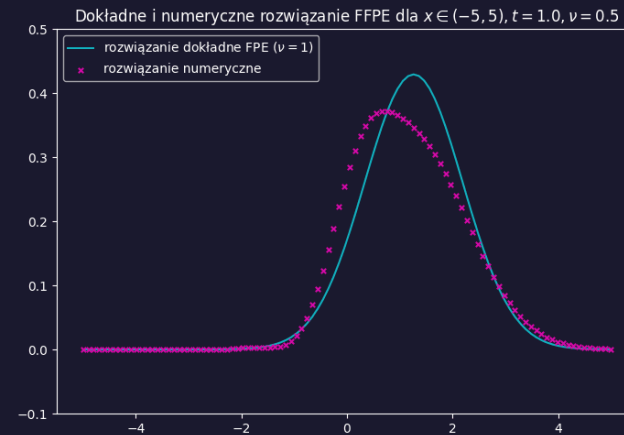
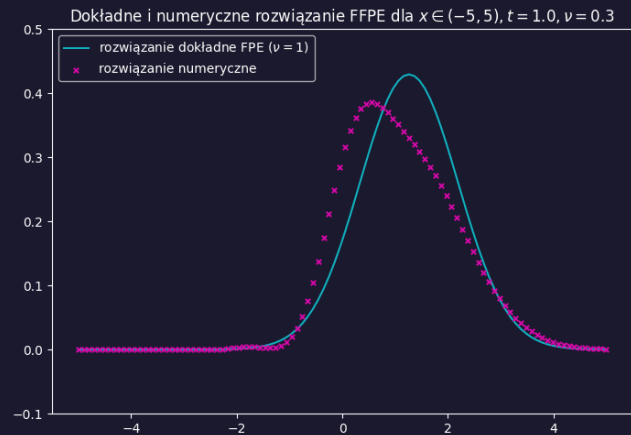
Macierzowa funkcja Mittag-Lefflera – wizualizacja problemu

CZEGO NIE ROBIĆ?

CO ROBIĆ?



Porównanie rozwiązań FPE i FFPE



Własności metody spektralnej

- zachowanie własności rozkładu

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\Delta}(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} f_{\Delta}(x, 0) dx$$

- zbieżność po czasie i przestrzeni
- stabilność





Dziękuję za uwagę!



github.com/JakubKoral/FPE