

Przybliżenie położenia planet w Układzie Słonecznym

Jakub Koral

26–27 listopada 2022

IX Ogólnopolska Matematyczna Konferencja Studentów "OMatKo!!!"

Motywacja

Wyjaśnienie położenia planet w Układzie Słonecznym przez wiele lat nurtowało ludzkość. Pod koniec XVIII wieku Johann Daniel Titius i Johann Elert Bode zaproponowali empiryczne prawo nazwane od ich nazwisk prawem Titiusa–Bodego. Hipoteza ta poprawnie przewidziała położenie Urana i planety karłowatej Ceres, ale nie sprawdziła się dla Neptuna.

Celem pracy jest znalezienie analitycznych wzorów, które pozwolą nam przybliżyć położenie planet w Układzie Słonecznym.

Równowaga hydrostatyczna

Rozpocznijmy od rozważenia infinitezymalnie małego walca o polu podstawy A , wysokości dR i masie dm położonego w odległości R od środka obracającego się dysku gazu. Na walec działają trzy siły. Do wewnątrz dysku dociskany on jest przez siły grawitacji F_g i dośrodkową F_d . Na zewnątrz wypycha go siła ciśnienia dF_P związana z różnicą ciśnień dP wywieranych na jego podstawy. Z I zasady dynamiki Newtona mamy

$$dF_P + F_g + F_d = 0. \quad (1)$$

Po podstawieniach otrzymamy

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} + \frac{d\Phi}{dR} = \Omega^2 R, \quad (2)$$

gdzie Φ to potencjał grawitacyjny, a Ω to prędkość kątowna walca.

Równanie Poissona

Klasyczne równanie Poissona dla grawitacji wyraża się wzorem

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (3)$$

gdzie G to stała grawitacji, a ρ to gęstość. Rozwijając laplasjan we współrzędnych walcowych (R, α, z) dostajemy

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho. \quad (4)$$

Ponieważ jesteśmy zainteresowani fizycznym opisem płaszczyzny przechodzącej przez środek dysku, zakładamy, że $\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$, co upraszcza nam problem do równania postaci

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\Phi}{dR} \right) = 4\pi G \rho. \quad (5)$$

Równanie Lane'a–Emdena

Łącząc (2) i (5) otrzymujemy równanie Lane'a–Emdena dla izotermicznego dysku wyrażające się wzorem

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d}{d\xi} \ln \theta \right) + \theta = \frac{\beta_0^2}{2\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 f^2 \right). \quad (6)$$

gdzie ξ to przeskalowanie promienia, θ przeskalowanie gęstości, β_0 to parametr związany z rotacją, a f jest pewną funkcją ξ . Warunki początkowe tego równania to

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (7)$$

Równanie Lane'a–Emdena (2)

Równanie Lane'a–Emdena możemy zapisać biorąc $\psi = \ln \theta$, wtedy otrzymujemy

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d}{d\xi} \psi \right) + e^{\psi} = \frac{\beta_0^2}{2\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 f^2 \right), \quad (8)$$

Warunki początkowe tego równania to

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = \left. \frac{d\psi}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (9)$$

Rozwiązanie bez i z rotacją

Rozwiązanie równania (6) przy braku rotacji (równoważnie $\beta_0 = 0$) nazywa się rozwiązaniem Stodółkiewicza–Ostriker'a i wyraża się wzorem

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{8}\xi^2\right)^2}. \quad (10)$$

Dla przypadku z rotacją można pokazać, że rozwiązanie będzie miało postać

$$\theta(\xi) = \frac{\beta_0^2}{2} \cdot A \xi^{k-1}, \quad (11)$$

gdzie A i k są pewnymi stałymi całkowania.

Model złożony

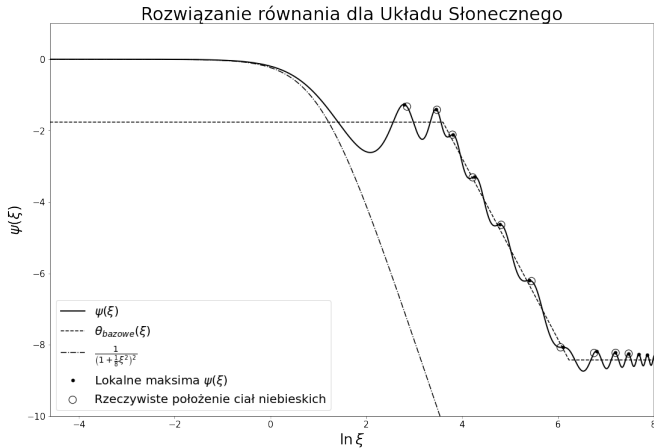
Autorzy [1] proponują model złożony postaci

$$\theta_{\text{bazowe}}(\xi) = \begin{cases} \beta_0^2, & \text{dla } \xi \leq \xi_1^*, \\ \beta_0^2 \cdot \left(\frac{\xi_1^*}{\xi}\right)^\delta, & \text{dla } \xi_1^* < \xi < \xi_2^*, \\ \beta_0^2 \cdot \left(\frac{\xi_1^*}{\xi_2^*}\right)^\delta, & \text{dla } \xi \geq \xi_2^*. \end{cases} \quad (12)$$

Teraz problem sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d}{d\xi} \psi \right) + e^\psi = \theta_{\text{bazowe}}(\xi). \quad (13)$$

Rozwiązanie dla Układu Słonecznego



Rysunek: Rozwiązanie dla Układu Słonecznego

Przybliżenie poprzez rozwinięcie Taylora funkcji e^ψ wokół $\xi = \ln \beta_0^2$

Zauważamy, że dla dużych ξ mamy $\psi(\xi) \rightarrow \ln \beta_0^2$. Spróbujmy zatem rozwinąć e^ψ wokół tej wartości. Otrzymujemy

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \beta_0^2 \psi \approx \beta_0^2 \ln \beta_0^2. \quad (14)$$

Wprowadzając $\eta = \beta_0 \xi$ i dzieląc przez β_0^2 dostajemy

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d\psi}{d\eta} + \psi \approx \ln \beta_0^2. \quad (15)$$

Rozważmy najpierw takie samo równanie, ale z prawą stroną równą 0 i mnożąc przez η^2 mamy

$$\eta^2 \frac{d^2\psi}{d\eta^2} + \eta \frac{d\psi}{d\eta} + \eta^2 \psi \approx 0. \quad (16)$$

Równanie różniczkowe Bessela

Definicja (Równanie różniczkowe Bessela)

Równanie różniczkowe Bessela ma postać

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0, \quad (1)$$

gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Jego rozwiązaniem wyraża się wzorem

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x), \quad (2)$$

gdzie c_1 i c_2 to stałe, a $J_n(x)$ i $Y_n(x)$ to odpowiednio funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, które definiują równania

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k! \Gamma(k+n+1)} \quad Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_{\nu}(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (3)$$

z $\Gamma(\cdot)$ oznaczającym funkcję gamma.

Przybliżenie poprzez rozwinięcie Taylora funkcji e^ψ wokół $\xi = \ln \beta_0^2$ (ciąg dalszy)

Zatem zgodnie z definicją 1, (16) to równanie różniczkowe Bessela z $n = 0$. Zauważamy dalej, że rozwiązanie równania (15) ma postać

$$\psi(\xi) \approx \ln \beta_0^2 (1 - J_0(\beta_0 \xi)). \quad (17)$$

Stosując podobne rozumowanie uzyskujemy wzór dla $\xi \geq \xi_2^*$

$$\psi(\xi) \approx \ln \left[\beta_0^2 \left(\frac{\xi_1^*}{\xi_2^*} \right)^\delta \right] \cdot \left[1 - J_0 \left(\beta_0 \left(\frac{\xi_1^*}{\xi_2^*} \right)^{\frac{\delta}{2}} \xi \right) \right]. \quad (18)$$

Przybliżenia dla $\xi \in (\xi_1^*, \xi_2^*)$

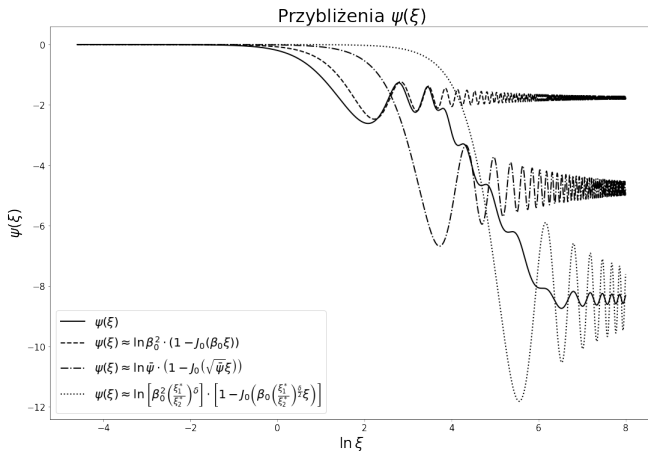
Wiemy już jak przybliżać rozwiązanie, gdy nasze równanie jest równe stałej. Zatem korzystamy z twierdzenia o wartości średniej mamy

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\xi_2^* - \xi_1^*} \int_{\xi_1^*}^{\xi_2^*} \beta_0^2 \left(\frac{\xi_1^*}{\xi} \right)^\delta d\xi = \frac{\beta_0^2 (\xi_1^*)^\delta \left((\xi_2^*)^\delta - (\xi_1^*)^\delta \right)}{(\xi_2^* - \xi_1^*)(1 - \delta)} \quad (19)$$

i stosując podobne rozumowanie co wcześniej

$$\psi(\xi) \approx \ln \bar{\psi} \left(1 - J_0 \left(\sqrt{\bar{\psi}} \xi \right) \right). \quad (20)$$

Przybliżenia $\psi(\xi)$



Rysunek: Przybliżenia $\psi(\xi)$

Przybliżenie maksimów lokalnych

Zatem maksima lokalne d_i można przybliżyć wzorem

$$\hat{d}_i = \begin{cases} \frac{1}{\beta_0} \cdot j_{1,2i} & \text{dla } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \frac{1}{\sqrt{\psi}} \cdot j_{1,2i-6} & \text{dla } i \in \{4, 5, 6\}, \\ \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\xi_1^*}{\xi_2^*} \right)^{-\frac{\delta}{2}} \cdot j_{1,2i-12} & \text{dla } i \in \{7, 8, \dots\}, \end{cases} \quad (21)$$

gdzie $j_{n,k}$ jest k -tym zerem funkcji Bessela n -tego rzędu.

Błąd przybliżenia

Tabela: Porównanie półoś wielkich planet i oszacowań położenia maksimumów lokalnych $\psi(\xi)$

Indeks i	Ciało niebieskie	Półoś wielka a_i [j.a.]	Oszacowanie maksimum lokalnego \hat{d}_i [j.a.]	Błąd względny [%]
1	Merkury	0.387	0.380	−1.809
2	Wenus	0.723	0.721	−0.277
3	Ziemia	1	1.062	6.200
4	Mars	1.524	1.702	11.68
5	Ceres	2.765	3.231	16.85
6	Jowisz	5.203	4.758	−8.553
7	Saturn	9.537	10.63	11.48
8	Uran	19.19	20.19	5.227
9	Neptun	30.07	29.73	−1.134
10	Pluton	39.48	39.26	−0.562
11	Makemake	45.66	48.79	6.844
12	2013 FY ₂₇	58.66	58.31	−0.597
13	Eris	67.89	67.83	−0.082

Bibliografia

- [1] CHRISTODOULOU, D. M. and KAZANAS, D. *Exact Solutions of the Isothermal Lane–Emden Equation with Rotation and Implications for the Formation of Planets and Satellites*. [arXiv:0706.3205](https://arxiv.org/abs/0706.3205). 2007.