Sprawozdanie obliczenia naukowe
Lista 4

Jakub Kowal

Zadania 1–3

Opis zadania

W zadaniach od 1 do 3 trzeba zaimplementować funkcje:

1. Obliczającą ilorazy różnicowe.
2. Obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona w punkcie $x = t$ za pomocą algorytmu Hornera.
3. Wyznaczającą współczynniki postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego.

Implementacje

1. W tym zadaniu wykorzystałem rekurencyjne obliczanie ilorazów różnicowych w taki sam sposób jak występowało to na slajdach z wykładu.
2. Zadanie 2 wykorzystuje wzór na algorytm Hornera podany w zadaniu 8 na liście 4.
3. To zadanie sprawiło najwięcej kłopotów. Oznaczając ilorazy różnicowe $c_n = f_{[x_0,x_1,\dots,x_n]}$ korzystamy z tego, że c_n=a_n, gdzie a_n jest współczynnikiem przy największej potędze w naturalnej postaci wielomianu. Następnie liczymy w tablicy a wartości "aktualnego wielomianu" (Korzystamy z algorytmu Hornera w celu rozwinięcia aktualnego wielomianu) i na początku tablicy ustawiamy aktualny wyraz wolny.

Zadanie 4

Opis zadania

Zadanie polega na napisaniu funkcji interpolującej podaną funkcję $f(x)$, za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona w przedziale

$[a, b]$. W tym celu mamy użyć wcześniej zaimplementowanych funkcji. W dodatku funkcja ta ma rysować wielomian interpolacyjny oraz interpolowaną funkcję w podanym przedziale. Funkcja w tym zadaniu ma na celu stworzenie i zwrócenie wykresu (w celu podstawienia opisów do wykresów przy wywołaniu testu) i wyznaczenie węzłów wielomianu interpolacyjnego dwoma różnymi metodami.

Implementacja

Najpierw wyznaczamy węzły interpolacji metodą doprecyzowaną w wywołaniu funkcji. Mamy dwie możliwe do wywołania metody:

- :rownoodlegle
- :czebyszew

Równoodległe wyznaczane są prostym wzorem: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ dla $k \in [0, n]$. Wyznaczanie węzłów metodą wielomianu Czebyszewa jest trochę bardziej problematyczne. Wzór na miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa stopnia n podany na wykładzie: $r_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2n}$ dla $j \in [0, n-1]$ zwraca pierwiastki jedynie z przedziału [-1,1], więc trzeba te pierwiastki zmapować na podany przedział [a,b].

Zadanie 5

Opis zadania

Należy użyć wcześniej zadeklarowanej funkcji *rysujNnfx* z zadania 4 dla funkcji:

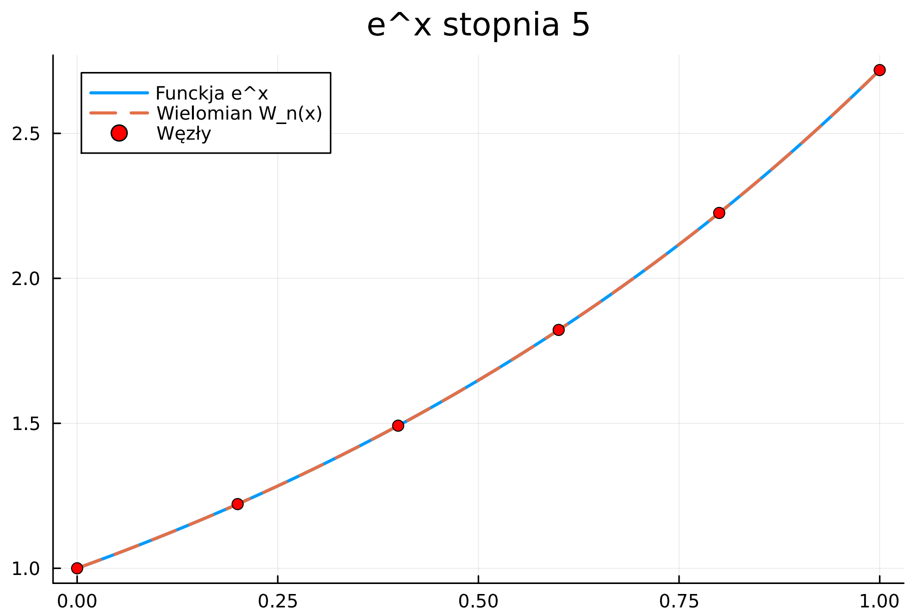
a) $f(x) = e^x$

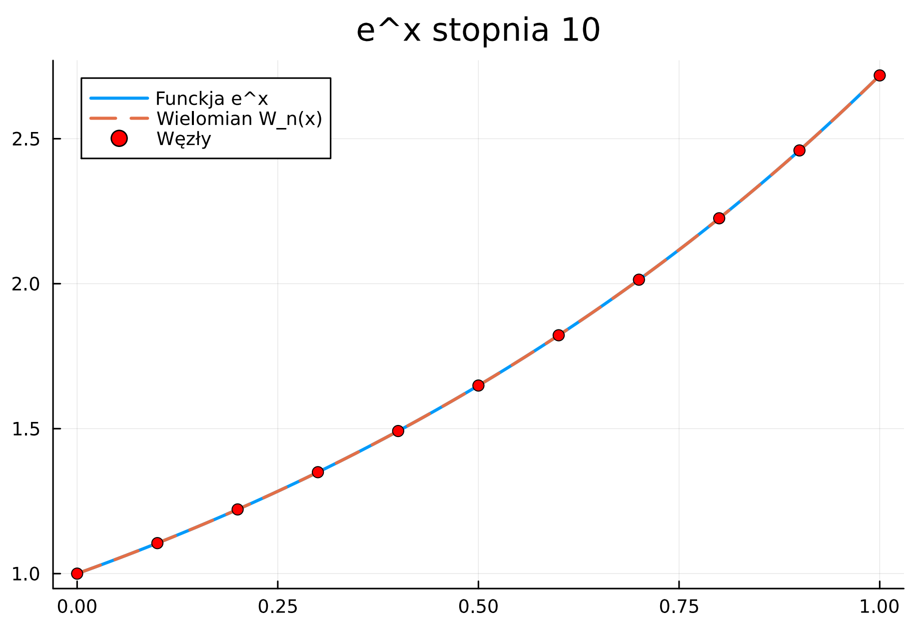
b) $x^2 \sin x$

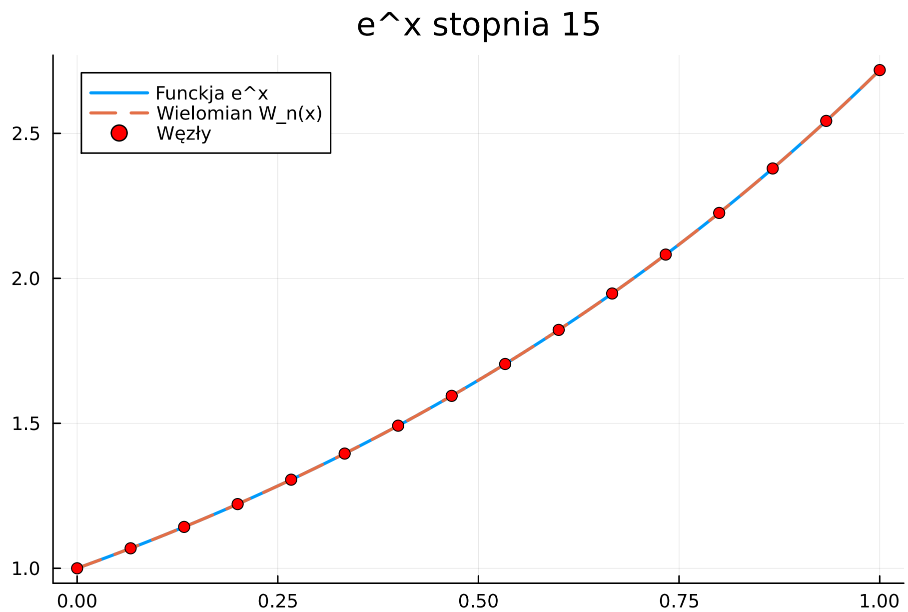
Dla stopni wielomianu $n \in 5, 10, 15$

Wyniki

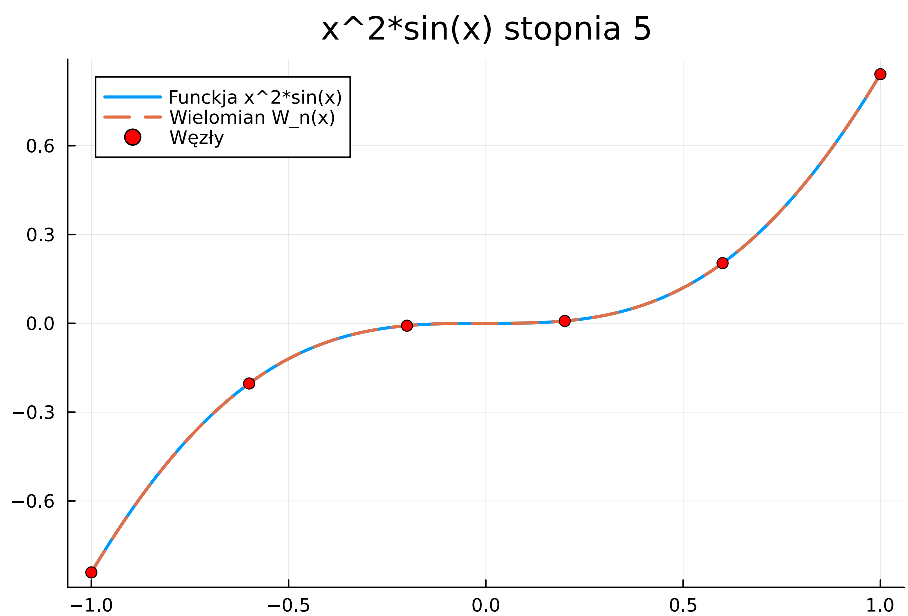
Wyniki dla funkcji e^x

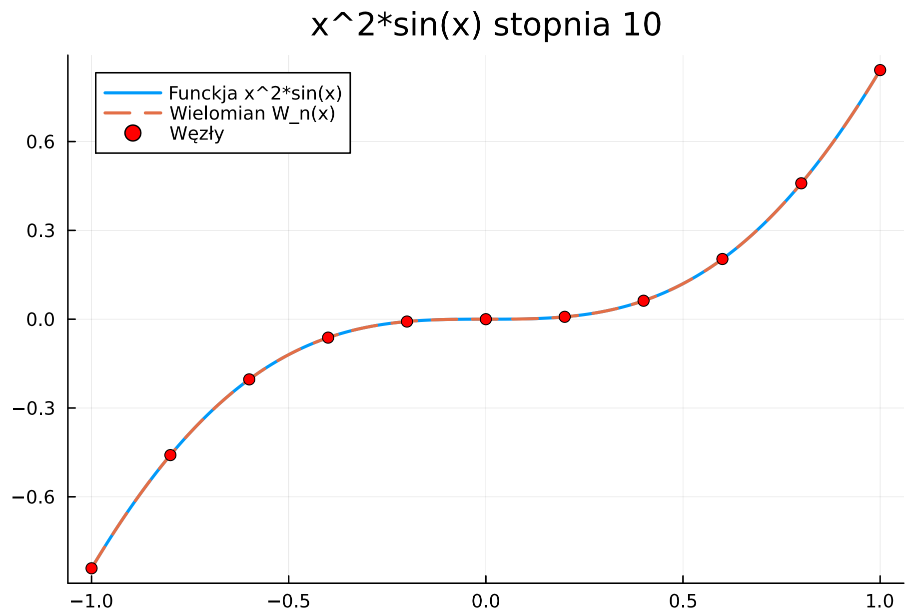

e^x stopnia 5
Funckja e^x
Wielomian W_n(x)
Węzły
1.0
1.5
2.0
2.5
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

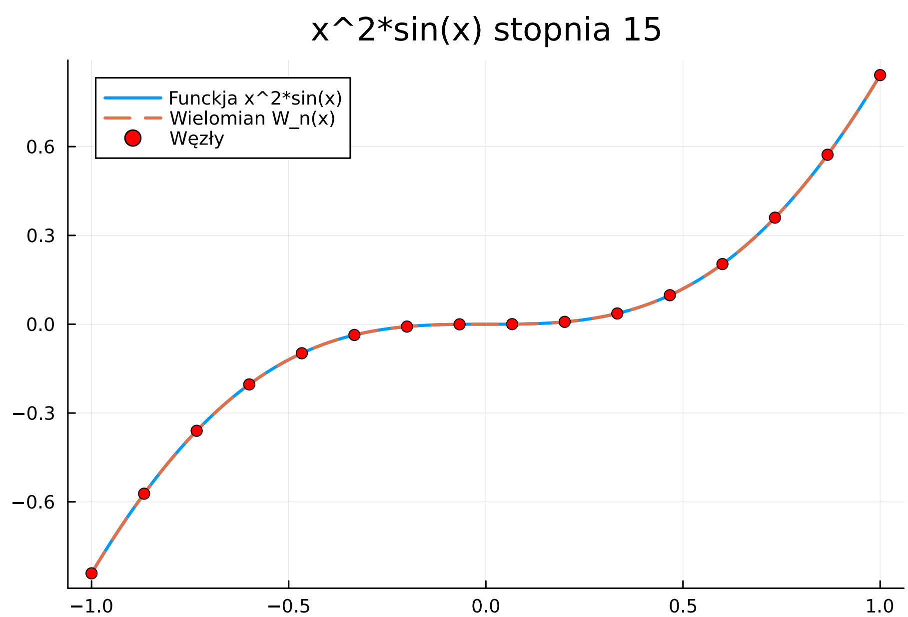

e^x stopnia 10
Funckja e^x
Wielomian W_n(x)
Węzły
1.0
1.5
2.0
2.5
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00



Wyniki dla funkcji $x^x \sin x$







Wnioski

Jak widać na powyższych wykresach wartość interpolacji pokrywa się wręcz z wykresami funkcji, więc spokojnie można określić interpolację, jako bardzo precyzyjne przybliżenie funkcji.

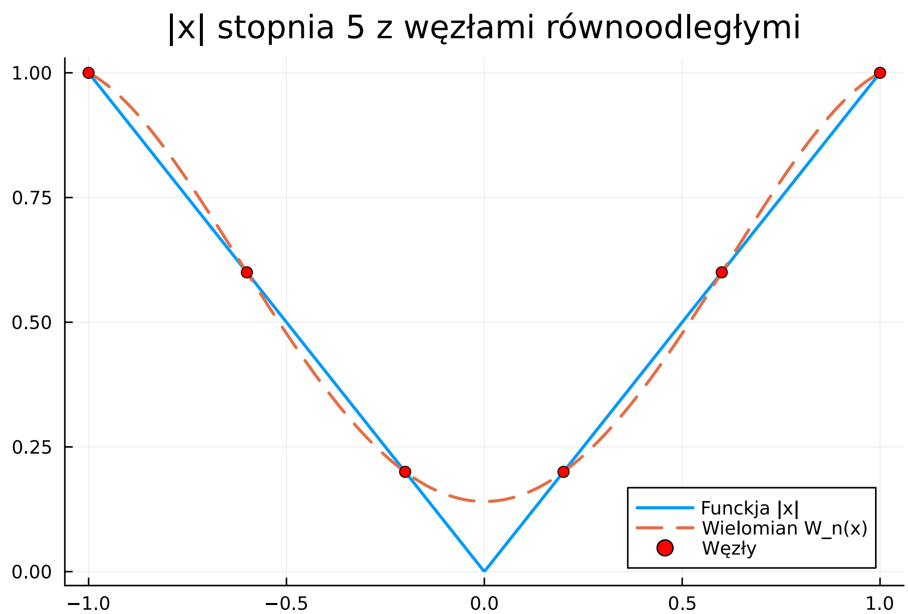
Zadanie 6

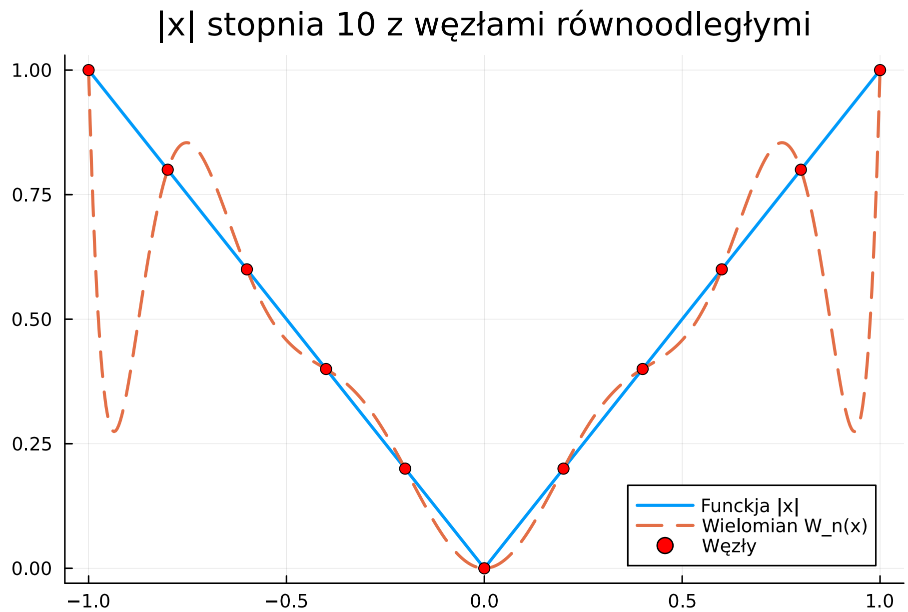
Opis zadania

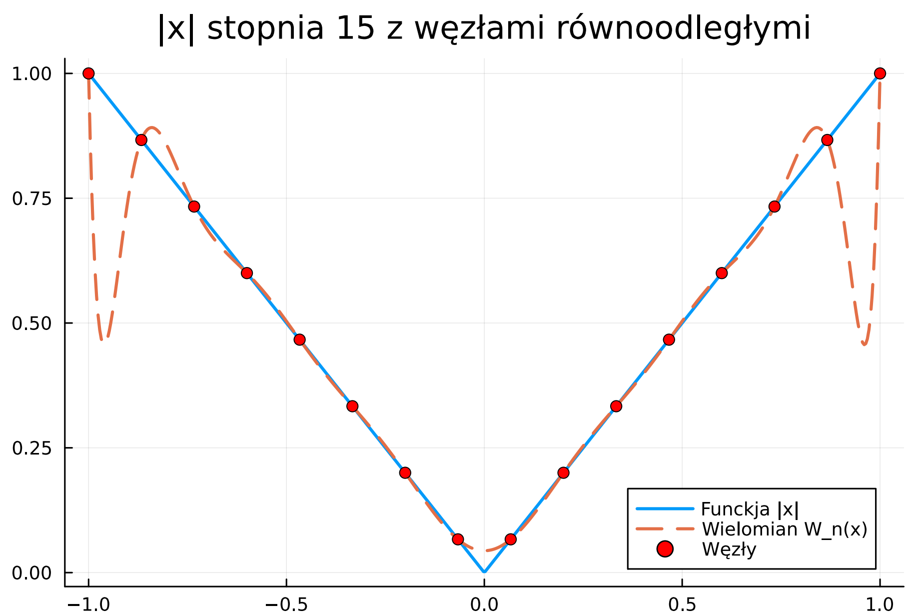
W tym zadaniu trzeba przetestować funkcje $f(x) = |x|$ oraz $\frac{1}{1+x^2}$ dla różnych stopni wielomianu interpolującego, jak i dla dwóch sposobów wyznaczania węzłów. Dla przykładu a przedziałem będzie [-1,1], a dla b [-5,5].

Wyniki

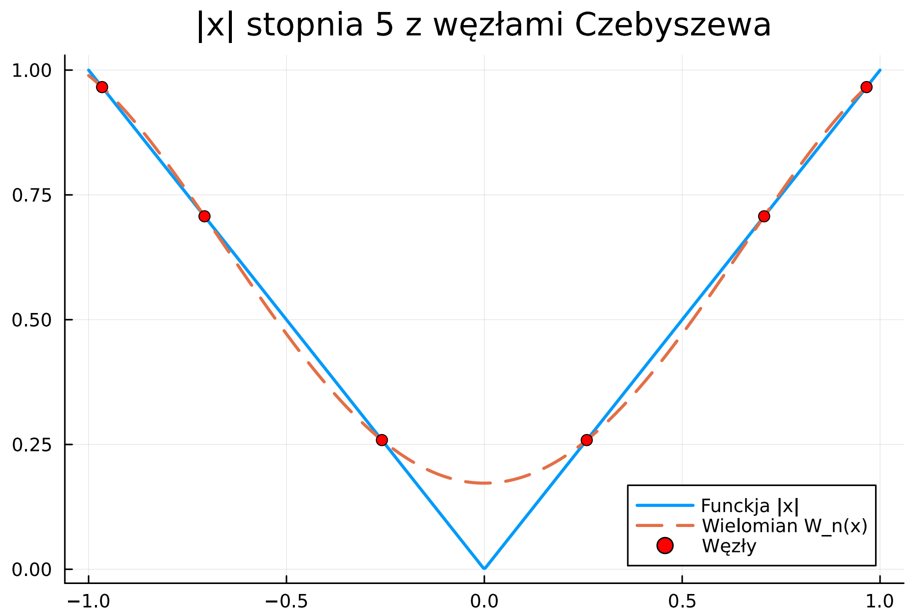
Wyniki dla $f(x) = |x|$ w przedziale [-1,1], wyznaczając węzły równoodległe:

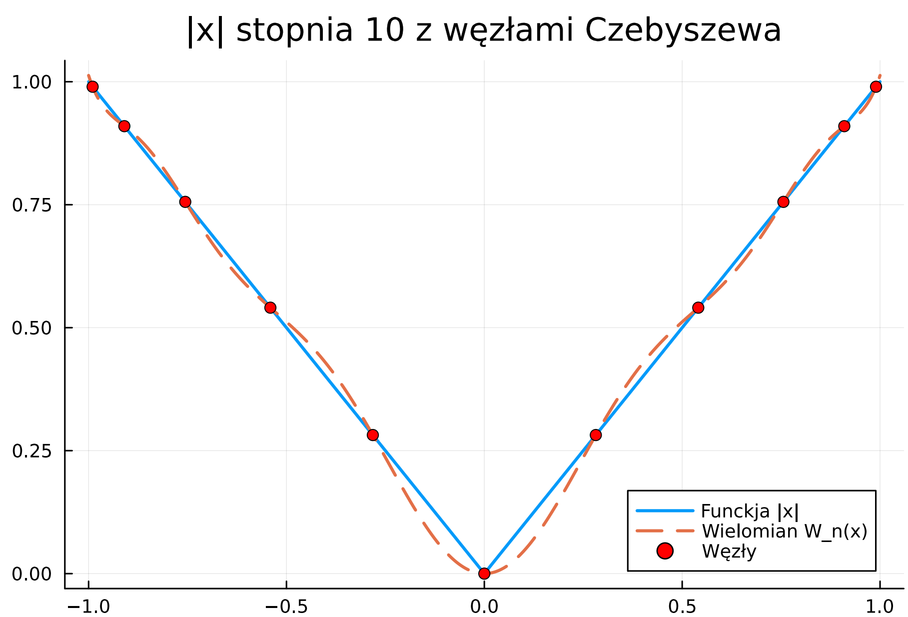


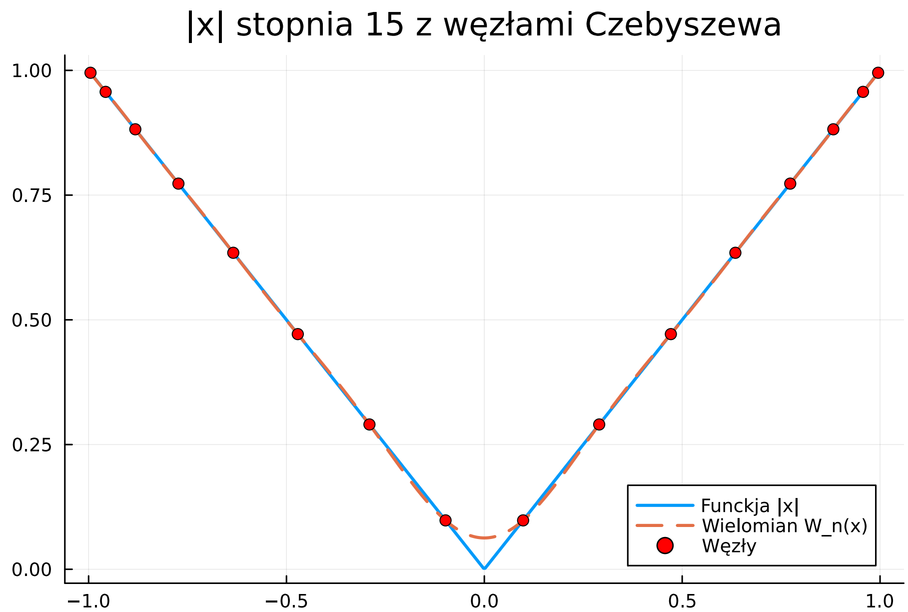




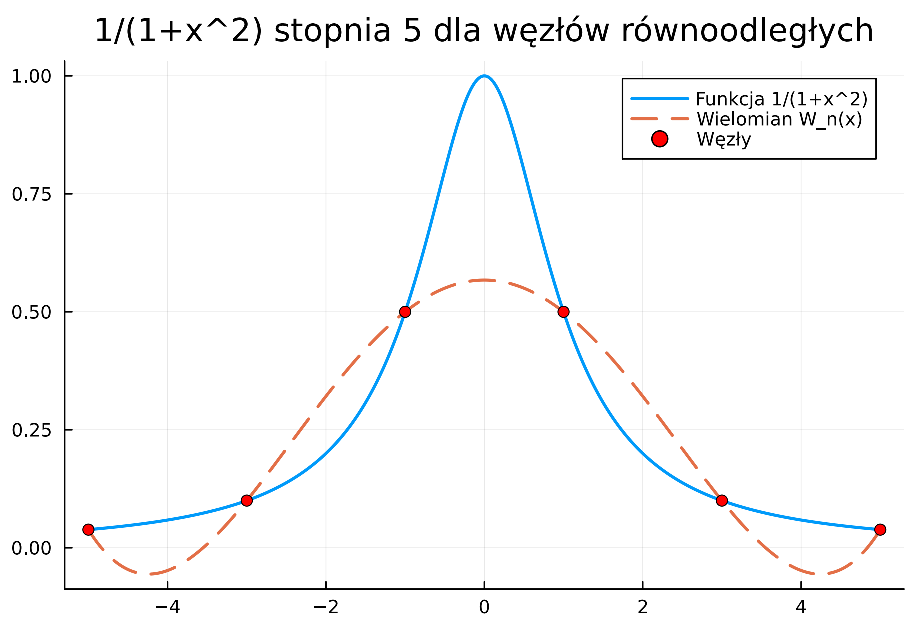
Wyniki dla $f(x) = |x|$ w przedziale [-1,1] biorąc za węzły zera wielomianu Czebyszewa:

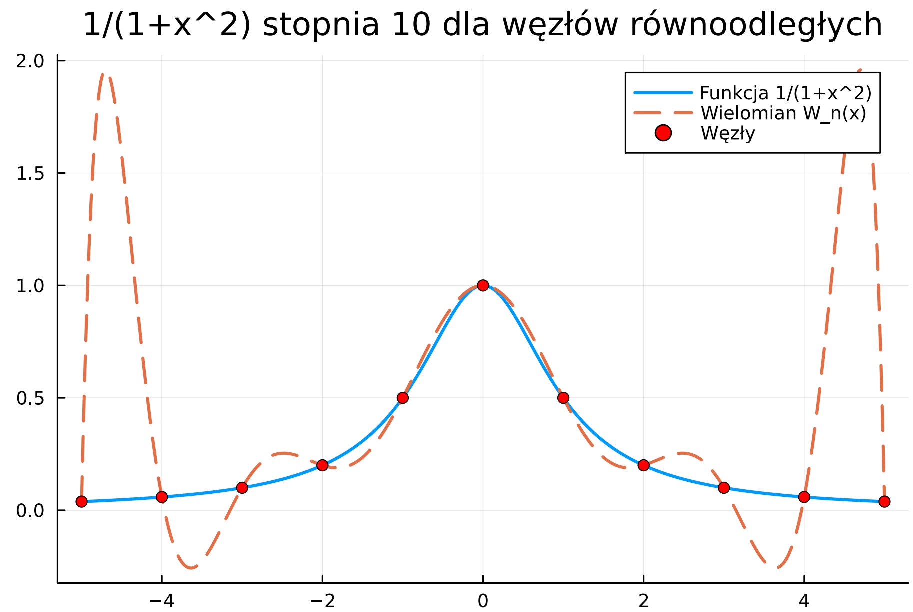

|x| stopnia 5 z węzłami Czebyszewa
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
Funckja |x|
Wielomian W_n(x)
Węzły

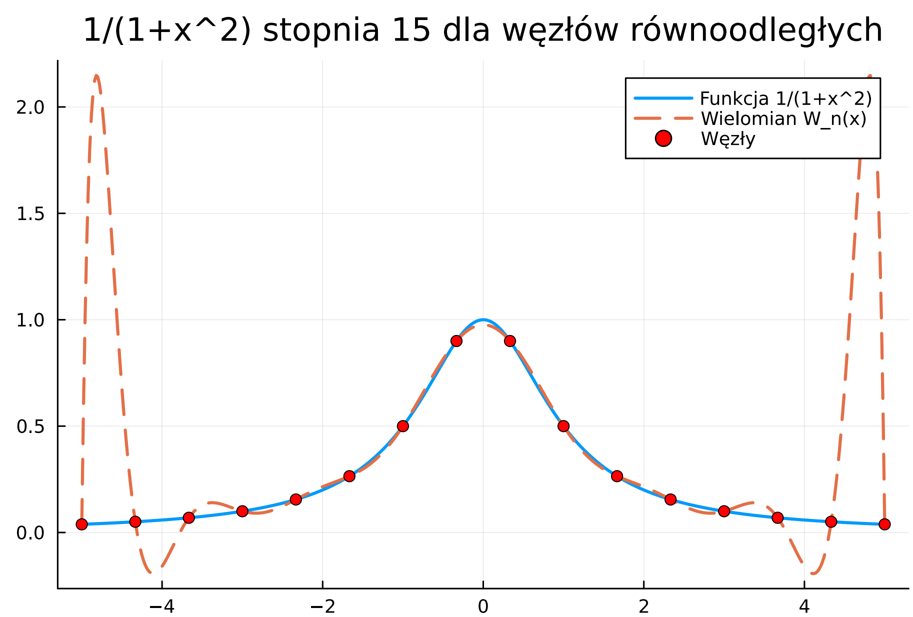

|x| stopnia 10 z węzłami Czebyszewa
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
Funckja |x|
Wielomian W_n(x)
Węzły



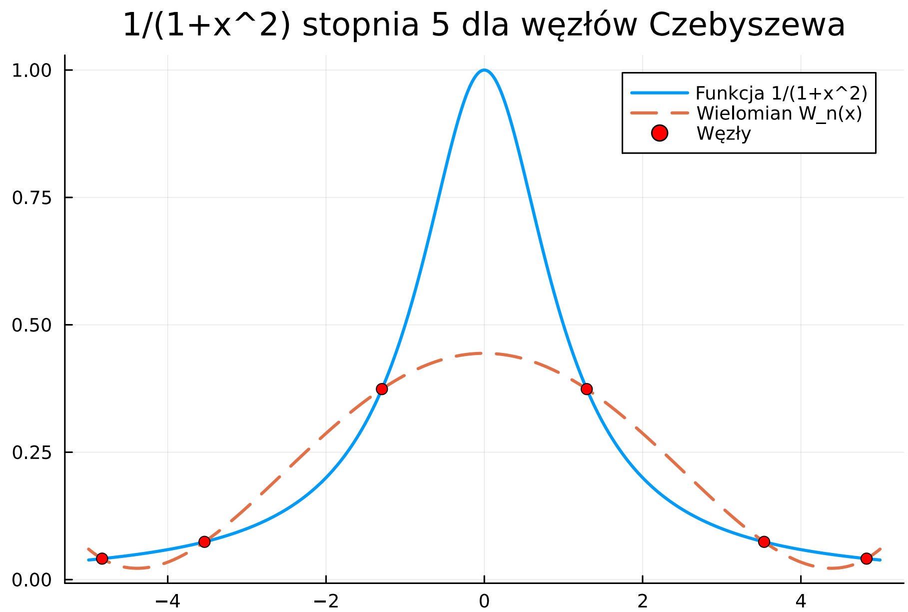
Wyniki dla $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ w przedziale [-5,5], wyznaczając węzły równoodległe:



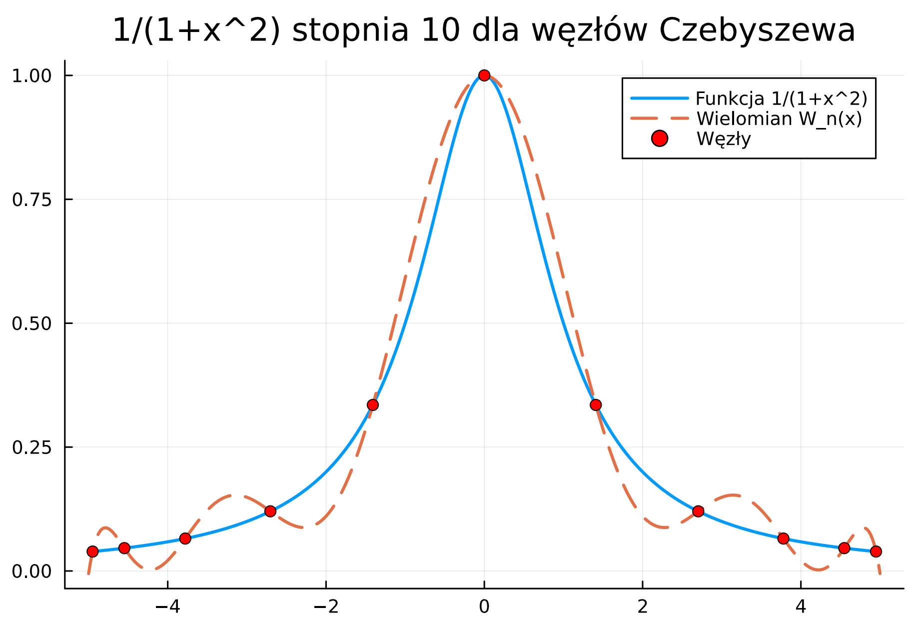




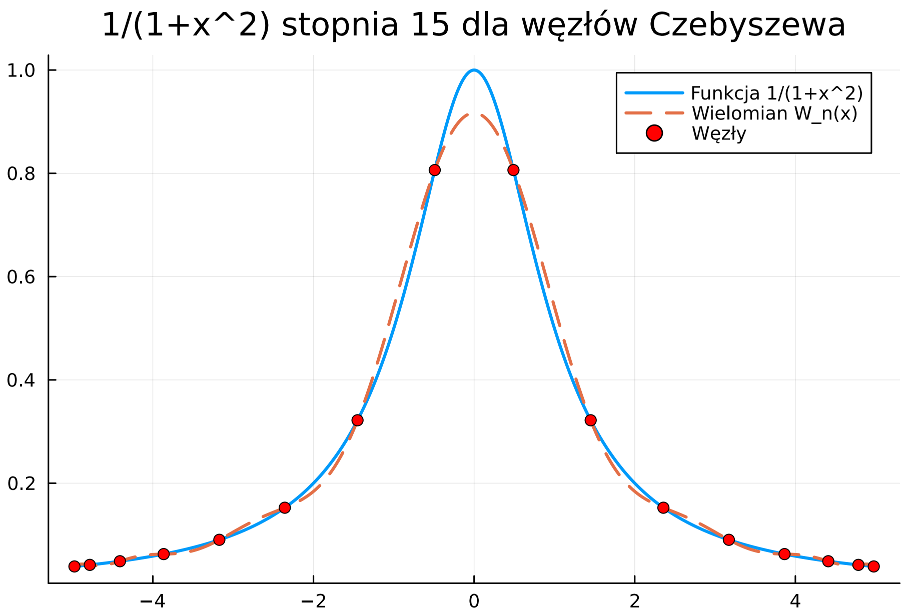
Wyniki dla $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ w przedziale [-5,5] biorąc za węzły zera wielomianu Czebyszewa:



1/(1+x^2) stopnia 5 dla węzłów Czebyszewa
Funkcja 1/(1+x^2)
Wielomian W_n(x)
Węzły
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−4
−2
0
2
4



1/(1+x^2) stopnia 10 dla węzłów Czebyszewa
Funkcja 1/(1+x^2)
Wielomian W_n(x)
Węzły
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−4
−2
0
2
4



Wnioski

Jak widać na załączonych wykresach wybieranie węzłów co równą odległość ma swoje wady. Na wykresach z węzłami równoodległymi w tym zadaniu ukazuje nam się zjawisko Runge'go. Powoduje ono coraz większe błędy przy coraz większych stopniach wielomianu interpolacyjnego, zwłaszcza na brzegach rozważanego przedziału. Można zapobiedz takim wahaniom wybierając węzły za pomocą miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa. Powoduje to badziej "gęste" dobieranie punktów na brzegach przedziału i niweluje wahania widoczne w zjawisku Runge'go.