

Sprawozdanie obliczenia naukowe

Lista 2

Jakub Kowal

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

Zadanie polega na wprowadzeniu niewielkich zmian do danych wejściowych, żeby sprawdzić uwarunkowanie zadania 5 z listy 1

1.2 Wyniki

Float64:

Operacja	Typ	Wynik
pa	Stare Dane	$1.025\,188\,136\,829\,667\,2 \times 10^{-10}$
	Nowe Dane	$-0.004\,296\,342\,739\,891\,585$
	Cond()	$4.190\,784\,781\,900\,21 \times 10^7$
pb	Stare Dane	$-1.564\,330\,887\,049\,436\,6 \times 10^{-10}$
	Nowe Dane	$-0.004\,296\,342\,998\,713\,953$
	Cond()	$2.746\,441\,227\,906\,976\,6 \times 10^7$
pc	Stare Dane	0.0
	Nowe Dane	$-0.004\,296\,342\,842\,280\,865$
	Cond()	Inf
pd	Stare Dane	0.0
	Nowe Dane	$-0.004\,296\,342\,842\,280\,865$
	Cond()	Inf

Float32:

Operacja	Typ	Wynik
pa32	Stare Dane	−0.499 944 3
	Nowe Dane	−0.499 944 3
	Cond()	0.0
pb32	Stare Dane	−0.454 345 7
	Nowe Dane	−0.454 345 7
	Cond()	0.0
pc32	Stare Dane	−0.5
	Nowe Dane	−0.5
	Cond()	0.0
pd32	Stare Dane	−0.5
	Nowe Dane	−0.5
	Cond()	0.0

1.3 Wnioski

Dla Float64 zadanie jest bardzo źle uwarunkowane, ponieważ wskaźnik uwarunkowania zadania, jest bardzo duży. W przykładach c i d sięga nawet nieskończoności. Dla Float32 te zmiany nie wpływają na uwarunkowanie zadania, ponieważ nasze zmiany gubiły się podczas redukcji cyfr znaczących.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

W zadaniu trzeba narysować wykres funkcji:

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

Następnie policzyć granicę:

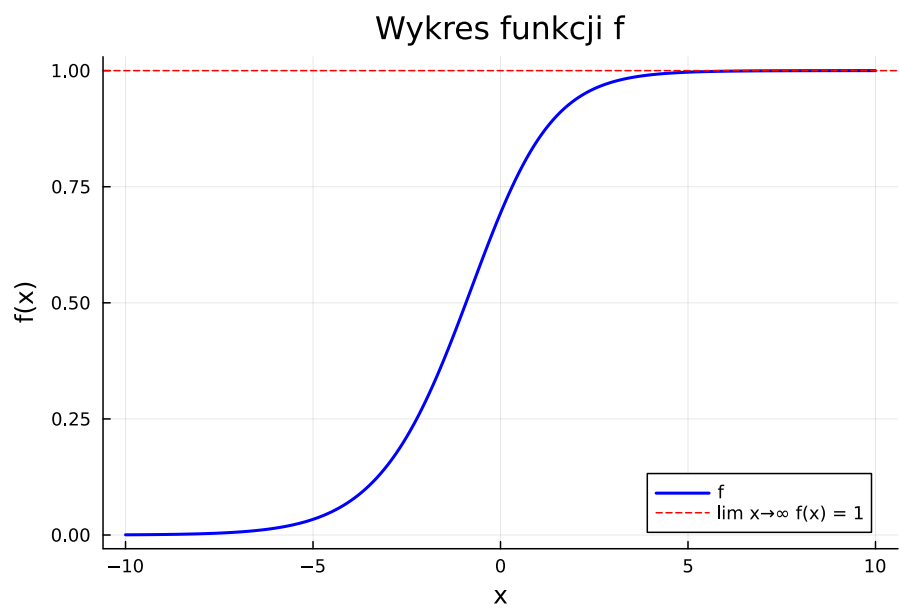
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Oraz porównać wykresy z wyliczoną granicą.

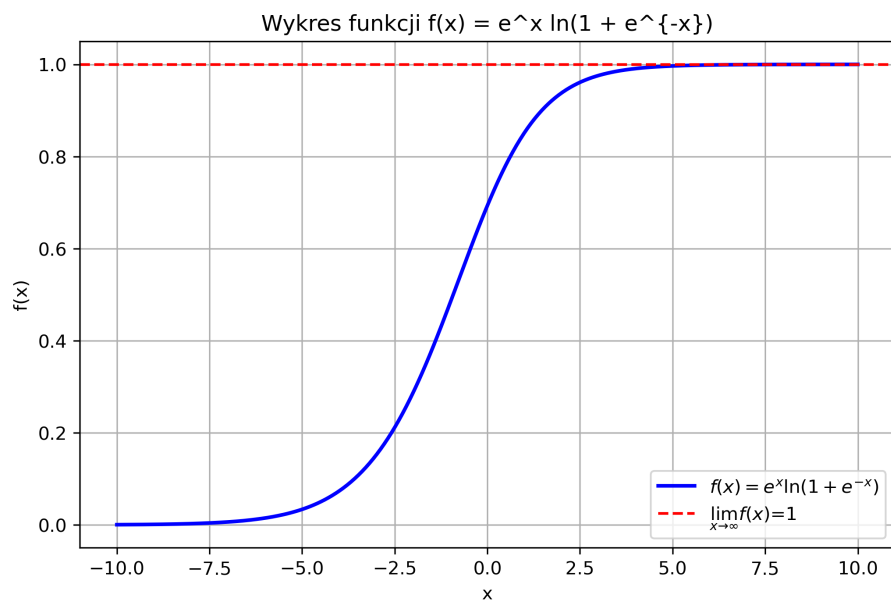
2.2 Wyniki

Granice:

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty \lim &= 0 \\ x \rightarrow \infty \lim &= 1 \end{aligned}$$



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x)$ wygenerowany w Julii



Rysunek 2: Wykres funkcji $f(x)$ wygenerowany w pythonie

2.3 Wnioski

Jak widać na wykresie 1 wygenerowanym w Julii, lub na wykresie 2 wygenerowanym w pythonie, funkcja ta zbiega do 1 zgodnie z wyliczoną granicą.

3 Zadanie 3

3.1 Wyniki

Wyniki dla Macierzy Hilb:

N	Typ rozwiązania	Błąd względny
1	Gauss	0.0
	Inv	0.0
2	Gauss	$5.661\,048\,867\,003\,676 \times 10^{-16}$
	Inv	$1.404\,333\,387\,430\,680\,3 \times 10^{-15}$
3	Gauss	$8.022\,593\,772\,267\,726 \times 10^{-15}$
	Inv	0.0
4	Gauss	$4.137\,409\,622\,430\,382 \times 10^{-14}$
	Inv	0.0
5	Gauss	$1.682\,842\,629\,922\,719\,5 \times 10^{-12}$
	Inv	$3.354\,436\,058\,435\,963\,2 \times 10^{-12}$
6	Gauss	$2.618\,913\,302\,311\,624 \times 10^{-10}$
	Inv	$2.016\,375\,940\,434\,765\,4 \times 10^{-10}$
7	Gauss	$1.260\,686\,722\,417\,154\,8 \times 10^{-8}$
	Inv	$4.713\,280\,397\,232\,037 \times 10^{-9}$
8	Gauss	$6.124\,089\,555\,723\,088 \times 10^{-8}$
	Inv	$3.077\,483\,903\,096\,22 \times 10^{-7}$
9	Gauss	$3.875\,163\,418\,503\,247\,5 \times 10^{-6}$
	Inv	$4.541\,268\,303\,176\,643 \times 10^{-6}$
10	Gauss	$8.670\,390\,237\,096\,91 \times 10^{-5}$
	Inv	0.000 250 149 341 182 488 6
11	Gauss	0.000 158 278 081 585 904 35
	Inv	0.007 618 304 284 315 809
12	Gauss	0.133 962 083 720 853 44
	Inv	0.258 994 120 804 705
13	Gauss	0.110 397 011 178 682 64
	Inv	5.331 275 639 426 837
14	Gauss	1.455 408 712 765 964 3
	Inv	8.714 992 751 048 14
15	Gauss	4.696 668 350 857 427
	Inv	7.344 641 453 111 494
16	Gauss	54.155 189 545 646 02
	Inv	29.848 842 070 735 41
17	Gauss	13.707 236 683 836 307
	Inv	10.516 942 378 369 349
18	Gauss	10.257 619 124 632 317
	Inv	24.762 070 989 128 866
19	Gauss	102.159 834 862 708 27
	Inv	109.945 507 328 782 84
20	Gauss	108.317 773 462 062 05
	Inv	114.344 031 525 575 72

Wyniki dla macierzy Matcond:

N	C	Typ rozwiązania	Błąd względny
5	1.0	Gauss	$2.220\,446\,049\,250\,313 \times 10^{-16}$
		Inv	$1.110\,223\,024\,625\,156\,5 \times 10^{-16}$
	10.0	Gauss	$7.818\,997\,388\,068\,909 \times 10^{-16}$
		Inv	$4.965\,068\,306\,494\,546 \times 10^{-16}$
	10 000.0	Gauss	$1.404\,333\,387\,430\,680\,4 \times 10^{-16}$
		Inv	$1.374\,858\,882\,450\,988\,2 \times 10^{-13}$
	1.0×10^8	Gauss	$6.804\,459\,704\,896\,332 \times 10^{-10}$
		Inv	$6.333\,678\,266\,375\,997 \times 10^{-10}$
	1.0×10^{13}	Gauss	0.000 229 351 120 107 414 82
		Inv	$8.631\,674\,575\,031\,098 \times 10^{-5}$
	1.0×10^{17}	Gauss	3.188 349 061 503 315
		Inv	0.418 184 085 885 032 2
10	1.0	Gauss	$1.755\,416\,734\,288\,350\,4 \times 10^{-16}$
		Inv	$2.937\,374\,022\,976\,103 \times 10^{-16}$
	10.0	Gauss	$4.168\,883\,761\,650\,163 \times 10^{-16}$
		Inv	$3.349\,121\,675\,321\,943 \times 10^{-16}$
	10 000.0	Gauss	$1.986\,945\,058\,591\,428 \times 10^{-13}$
		Inv	$3.540\,793\,478\,199\,175 \times 10^{-14}$
	1.0×10^8	Gauss	$2.021\,580\,377\,196\,233\,3 \times 10^{-9}$
		Inv	$1.539\,149\,683\,065\,564\,3 \times 10^{-9}$
	1.0×10^{13}	Gauss	0.000 223 663 581 473 606 63
		Inv	0.000 172 903 020 925 479 66
	1.0×10^{17}	Gauss	1.088 156 894 260 934 8
		Inv	0.225 164 480 489 098 84
20	1.0	Gauss	$5.484\,097\,192\,022\,683 \times 10^{-16}$
		Inv	$4.198\,346\,204\,284\,728 \times 10^{-16}$
	10.0	Gauss	$4.927\,689\,594\,407\,735 \times 10^{-16}$
		Inv	$5.376\,277\,206\,893\,598 \times 10^{-16}$
	10 000.0	Gauss	$1.782\,301\,417\,701\,839\,7 \times 10^{-13}$
		Inv	$1.315\,834\,155\,549\,535\,5 \times 10^{-13}$
	1.0×10^8	Gauss	$4.606\,463\,401\,416\,786 \times 10^{-9}$
		Inv	$3.980\,420\,992\,607\,652\,3 \times 10^{-10}$
	1.0×10^{13}	Gauss	$4.376\,080\,773\,842\,657\,5 \times 10^{-5}$
		Inv	$1.378\,710\,965\,614\,410\,5 \times 10^{-5}$
	1.0×10^{17}	Gauss	3.089 472 405 210 816 7
		Inv	0.254 242 565 725 258 7

Wyniki cond dla macierzy rzędu 6 (oraz $c = 10^7$)

Cond A hilb: $1.4951058642254665 \times 10^7$

Cond A matcond: $1.000000003815985 \times 10^8$

3.2 Wnioski

Błędy względne tych dwóch algorytmów są bardzo zbliżone, ale wydaje mi się, że algorytm z inwersją osiągał niższe błędy.

Warto dodać, że $\text{rank}(A)$ czasami zwracał niższy rząd macierzy, niż prawdziwy, ponieważ pomijał wartości w macierzy, które były za niskie.

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Mamy obliczyć miejsca zerowe wielomianu funkcją $\text{roots}()$, następnie porównać obliczone miejsca zerowe do prawdziwych (liczby od 1 do 20). Dodatkowo spróbować obliczyć te wielomiany za pomocą miejsc zerowych oraz wyjaśnić skąd się biorą rozbieżności. Powtórzyć eksperyment dla zaburzonych danych oraz wyjaśnić zjawisko.

4.2 Wyniki

A)

Tabela bez zmian współczynnika

Obliczone miejsce zerowe	Operacja	Wynik
0.9999999999996989	$ P(Z_k) $	35 696.509 647 882 57
	$ p(Z_k) $	36 626.425 482 422 805
	$ k - z_k $	$3.010\,924\,842\,783\,424\,5 \times 10^{-13}$
2.0000000000283182	$ P(Z_k) $	176 252.600 266 684 05
	$ p(Z_k) $	181 303.933 672 576 62
	$ k - z_k $	$2.831\,823\,664\,450\,894\,3 \times 10^{-11}$
2.9999999995920965	$ P(Z_k) $	279 157.696 882 408 7
	$ p(Z_k) $	290 172.285 889 168 6
	$ k - z_k $	$4.079\,034\,887\,638\,499\,6 \times 10^{-10}$
3.9999999837375317	$ P(Z_k) $	$3.027\,109\,298\,899\,108\,5 \times 10^6$
	$ p(Z_k) $	$2.041\,537\,290\,275\,090\,1 \times 10^6$
	$ k - z_k $	$1.626\,246\,826\,091\,915 \times 10^{-8}$
5.000000665769791	$ P(Z_k) $	$2.291\,747\,375\,656\,707\,6 \times 10^7$
	$ p(Z_k) $	$2.089\,462\,500\,696\,218\,8 \times 10^7$
	$ k - z_k $	$6.657\,697\,912\,970\,661 \times 10^{-7}$
5.999989245824773	$ P(Z_k) $	$1.290\,241\,728\,420\,509\,5 \times 10^8$
	$ p(Z_k) $	$1.125\,048\,457\,756\,299\,5 \times 10^8$
	$ k - z_k $	$1.075\,417\,522\,677\,923\,9 \times 10^{-5}$
7.000102002793008	$ P(Z_k) $	$4.805\,112\,754\,602\,064 \times 10^8$
	$ p(Z_k) $	$4.572\,908\,642\,730\,946 \times 10^8$
	$ k - z_k $	0.000 102 002 793 007 649 47

Obliczone miejsce zerowe	Operacja	Wynik
7.999355829607762	$ P(Z_k) $	$1.637\,952\,021\,896\,113\,6 \times 10^9$
	$ p(Z_k) $	$1.555\,645\,937\,735\,738\,3 \times 10^9$
	$ k - z_k $	$0.000\,644\,170\,392\,238\,407\,9$
9.002915294362053	$ P(Z_k) $	$4.877\,071\,372\,550\,003 \times 10^9$
	$ p(Z_k) $	$4.687\,816\,175\,648\,389 \times 10^9$
	$ k - z_k $	$0.002\,915\,294\,362\,052\,734$
9.990413042481725	$ P(Z_k) $	$1.363\,863\,819\,545\,812\,8 \times 10^{10}$
	$ p(Z_k) $	$1.263\,460\,189\,694\,920\,5 \times 10^{10}$
	$ k - z_k $	$0.009\,586\,957\,518\,274\,986$
11.025022932909318	$ P(Z_k) $	$3.585\,631\,295\,130\,865 \times 10^{10}$
	$ p(Z_k) $	$3.300\,128\,474\,498\,415 \times 10^{10}$
	$ k - z_k $	$0.025\,022\,932\,909\,317\,674$
11.953283253846857	$ P(Z_k) $	$7.533\,332\,360\,358\,197 \times 10^{10}$
	$ p(Z_k) $	$7.388\,525\,665\,404\,988 \times 10^{10}$
	$ k - z_k $	$0.046\,716\,746\,153\,142\,81$
13.07431403244734	$ P(Z_k) $	$1.960\,598\,812\,433\,081\,7 \times 10^{11}$
	$ p(Z_k) $	$1.847\,621\,509\,314\,419\,3 \times 10^{11}$
	$ k - z_k $	$0.074\,314\,032\,447\,340\,14$
13.914755591802127	$ P(Z_k) $	$3.575\,134\,782\,310\,431\,5 \times 10^{11}$
	$ p(Z_k) $	$3.551\,427\,752\,842\,084\,4 \times 10^{11}$
	$ k - z_k $	$0.085\,244\,408\,197\,873\,16$
15.075493799699476	$ P(Z_k) $	$8.216\,271\,236\,455\,97 \times 10^{11}$
	$ p(Z_k) $	$8.423\,201\,558\,964\,254 \times 10^{11}$
	$ k - z_k $	$0.075\,493\,799\,699\,476\,23$
15.946286716607972	$ P(Z_k) $	$1.551\,497\,888\,049\,406\,7 \times 10^{12}$
	$ p(Z_k) $	$1.570\,728\,736\,625\,802 \times 10^{12}$
	$ k - z_k $	$0.053\,713\,283\,392\,028\,19$
17.025427146237412	$ P(Z_k) $	$3.694\,735\,918\,486\,229 \times 10^{12}$
	$ p(Z_k) $	$3.316\,978\,223\,889\,236\,3 \times 10^{12}$
	$ k - z_k $	$0.025\,427\,146\,237\,412\,046$
17.99092135271648	$ P(Z_k) $	$7.650\,109\,016\,515\,867 \times 10^{12}$
	$ p(Z_k) $	$6.344\,853\,141\,791\,28 \times 10^{12}$
	$ k - z_k $	$0.009\,078\,647\,283\,519\,814$
19.00190981829944	$ P(Z_k) $	$1.143\,527\,374\,972\,119\,5 \times 10^{13}$
	$ p(Z_k) $	$1.228\,571\,736\,671\,966 \times 10^{13}$
	$ k - z_k $	$0.001\,909\,818\,299\,438\,370\,6$
19.999809291236637	$ P(Z_k) $	$2.792\,410\,639\,368\,072\,7 \times 10^{13}$
	$ p(Z_k) $	$2.318\,309\,535\,271\,638 \times 10^{13}$
	$ k - z_k $	$0.000\,190\,708\,763\,362\,579\,25$

B)

Tabela ze zmianą współczynnika

Obliczone miejsce zerowe	Operacja	Wynik
0.999999999998357 + 0.0im	$ P(Z_k) $	20 259.872 313 418 207
	$ p(Z_k) $	19 987.872 313 406 835
	$ k - z_k $	$1.643\,130\,076\,445\,231\,7 \times 10^{-13}$
2.0000000000550373 + 0.0im	$ P(Z_k) $	346 541.413 759 383 6
	$ p(Z_k) $	352 369.413 808 795 8
	$ k - z_k $	$5.503\,730\,804\,434\,781 \times 10^{-11}$
2.99999999660342 + 0.0im	$ P(Z_k) $	$2.258\,059\,700\,119\,700\,7 \times 10^6$
	$ p(Z_k) $	$2.416\,241\,558\,251\,843\,3 \times 10^6$
	$ k - z_k $	$3.396\,579\,906\,222\,996\,2 \times 10^{-9}$
4.000000089724362 + 0.0im	$ P(Z_k) $	$1.054\,263\,179\,039\,547\,8 \times 10^7$
	$ p(Z_k) $	$1.126\,370\,230\,029\,202\,3 \times 10^7$
	$ k - z_k $	$8.972\,436\,216\,225\,788 \times 10^{-8}$
4.99999857388791 + 0.0im	$ P(Z_k) $	$3.757\,830\,916\,585\,153 \times 10^7$
	$ p(Z_k) $	$4.475\,744\,423\,806\,908 \times 10^7$
	$ k - z_k $	$1.426\,112\,089\,752\,962\,2 \times 10^{-6}$
6.000020476673031 + 0.0im	$ P(Z_k) $	$1.314\,094\,332\,556\,944\,6 \times 10^8$
	$ p(Z_k) $	$2.142\,103\,165\,803\,931\,7 \times 10^8$
	$ k - z_k $	$2.047\,667\,303\,095\,579\,4 \times 10^{-5}$
6.99960207042242 + 0.0im	$ P(Z_k) $	$3.939\,355\,874\,647\,618 \times 10^8$
	$ p(Z_k) $	$1.784\,617\,342\,786\,064\,4 \times 10^9$
	$ k - z_k $	0.000 397 929 577 579 780 87
8.007772029099446 + 0.0im	$ P(Z_k) $	$1.184\,986\,961\,371\,896 \times 10^9$
	$ p(Z_k) $	$1.868\,697\,217\,000\,985\,7 \times 10^{10}$
	$ k - z_k $	0.007 772 029 099 445 632
8.915816367932559 + 0.0im	$ P(Z_k) $	$2.225\,522\,123\,307\,770\,7 \times 10^9$
	$ p(Z_k) $	$1.374\,630\,977\,514\,299\,3 \times 10^{11}$
	$ k - z_k $	0.084 183 632 067 441 4
10.095455630535774 - 0.6449328236240688im	$ P(Z_k) $	$1.067\,792\,123\,293\,015\,7 \times 10^{10}$
	$ p(Z_k) $	$1.490\,069\,535\,200\,058 \times 10^{12}$
	$ k - z_k $	0.651 958 683 038 040 7
10.095455630535774 + 0.6449328236240688im	$ P(Z_k) $	$1.067\,792\,123\,293\,015\,7 \times 10^{10}$
	$ p(Z_k) $	$1.490\,069\,535\,200\,058 \times 10^{12}$
	$ k - z_k $	1.110 918 027 271 656 1
11.793890586174369 - 1.6524771364075785im	$ P(Z_k) $	$3.140\,196\,234\,442\,948\,5 \times 10^{10}$
	$ p(Z_k) $	$3.296\,279\,235\,571\,714\,5 \times 10^{13}$
	$ k - z_k $	1.665 281 290 598 479
11.793890586174369 + 1.6524771364075785im	$ P(Z_k) $	$3.140\,196\,234\,442\,948\,5 \times 10^{10}$
	$ p(Z_k) $	$3.296\,279\,235\,571\,714\,5 \times 10^{13}$
	$ k - z_k $	2.045 820 276 678 427 7
13.992406684487216 - 2.5188244257108443im	$ P(Z_k) $	$2.157\,665\,405\,951\,858 \times 10^{11}$
	$ p(Z_k) $	$9.546\,022\,365\,750\,216 \times 10^{14}$
	$ k - z_k $	2.518 835 871 190 904

Obliczone miejsce zerowe	Operacja	Wynik
13.992406684487216 + 2.5188244257108443im	$ P(Z_k) $	$2.157\,665\,405\,951\,858 \times 10^{11}$
	$ p(Z_k) $	$9.546\,022\,365\,750\,216 \times 10^{14}$
	$ k - z_k $	2.712 880 531 284 709 7
16.73074487979267 - 2.812624896721978im	$ P(Z_k) $	$4.850\,110\,893\,921\,027 \times 10^{11}$
	$ p(Z_k) $	$2.742\,106\,076\,928\,478 \times 10^{16}$
	$ k - z_k $	2.906 001 873 537 510 6
16.73074487979267 + 2.812624896721978im	$ P(Z_k) $	$4.850\,110\,893\,921\,027 \times 10^{11}$
	$ p(Z_k) $	$2.742\,106\,076\,928\,478 \times 10^{16}$
	$ k - z_k $	2.825 483 521 349 608
19.5024423688181 - 1.940331978642903im	$ P(Z_k) $	$4.557\,199\,223\,869\,993 \times 10^{12}$
	$ p(Z_k) $	$4.252\,485\,876\,520\,372\,5 \times 10^{17}$
	$ k - z_k $	2.454 021 446 312 976 4
19.5024423688181 + 1.940331978642903im	$ P(Z_k) $	$4.557\,199\,223\,869\,993 \times 10^{12}$
	$ p(Z_k) $	$4.252\,485\,876\,520\,372\,5 \times 10^{17}$
	$ k - z_k $	2.004 329 444 309 948 6
20.84691021519479 + 0.0im	$ P(Z_k) $	$8.756\,386\,551\,865\,696 \times 10^{12}$
	$ p(Z_k) $	$1.374\,374\,355\,999\,76 \times 10^{18}$
	$ k - z_k $	0.846 910 215 194 789 4

4.3 Wnioski

Proces jest niestabilny, bo widać że niewielkie zmiany w danych nakładają się i kumulują w większe dysproporcje. Dodatkowo zauważamy jak zaokrąglanie liczb powoduje niepoprawne wyniki przy obliczaniu wyników wielomianów. W tabelach 1 i 2 jasno ukazuje się wielka dysproporcja w wynikach (które powinny być równe 0). Wielomian Wilkinsona jest źle uwarunkowany, ponieważ delikatne zmiany w danych prowadzą do dużych zmian w wyniku. Ponadto poprzez zaburzenie jednego współczynnika o liczbę ϵ powoduje wielkie zmiany w miejscach zerowych wyliczanych przez `roots()`. Pojawiają się "zera zespolone" oraz miejsca zerowe się powtarzają. Dlaczego dochodzi do tak dużych błędów? Te minimalne zmiany w połączeniu z obrzymimi liczbami powodują redukcję cyfr znaczących, co prowadzi do kolejnych błędnych zaokrągleń i redukcji.

5 Zadanie 5

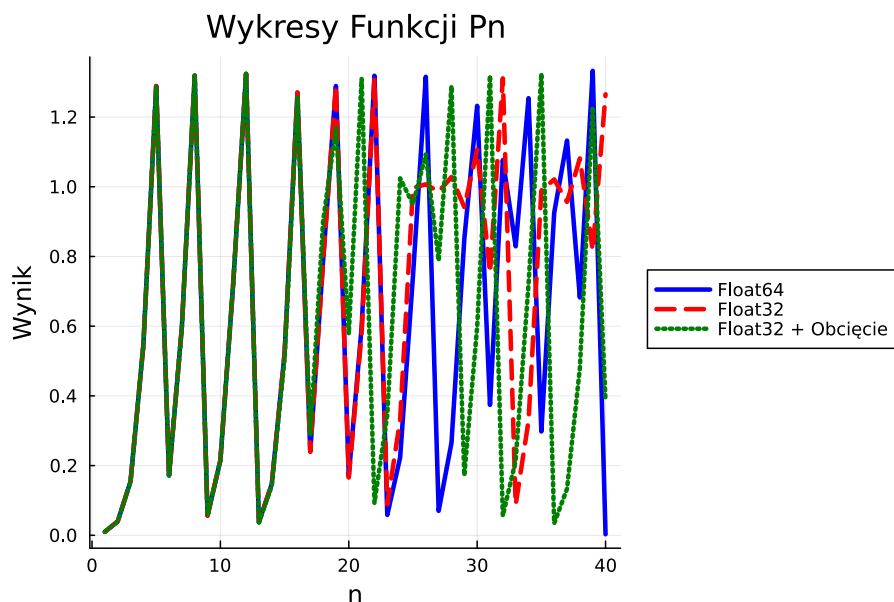
5.1 Opis problemu

Rozważamy równanie:

$$p_{n+1} = p_n + r p_n (1 - p_n)$$

dla danych $p_0 = 0,01$ i $r = 3$. Mamy wykonać 40 iteracji oraz 40 iteracji z obcięciem liczby po 10 iteracji w arytmetyce Float32. Ponadto wykonać 40 iteracji tego równania w arytmetyce Float64 i porównać wyniki.

5.2 Wyniki



Rysunek 3: Wyniki równań zadania 5

5.3 Wnioski

Wykres wyników zadania piątego 3 idealnie obrazuje nam zjawisko niestabilności. Porównując wykresy funkcji dla Float32 możemy zauważyć jak błędy wynikające z obcięcia cyfr rosną znacząco razem z kolejnymi iteracjami. Błędy zaczynają się od niewielkich różnic, ale wraz z kolejnymi iteracjami znacząco odbiegają od poprawnego wyniku. Wyniki dla Float64 odbiegają od tych dla Float32, co oznacza, że zaokrąglenia też powodują tutaj niestabilność. Mają one wpływ na kolejne iteracje co kumuluje błędy.

6 Zadanie 6

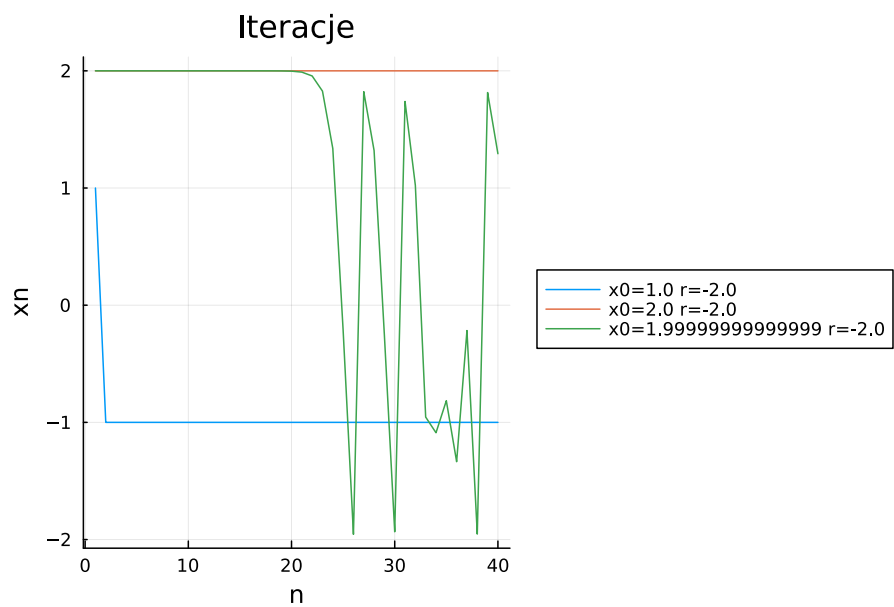
6.1 Opis zadania

Rozważamy równanie:

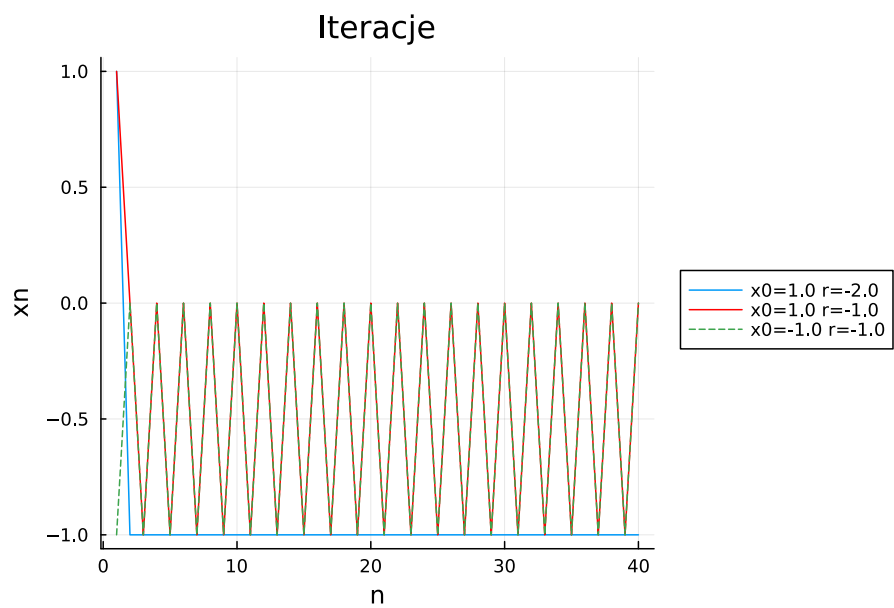
$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

dla różnych danych c i x_0 . Mamy zwrócić uwagę na zachowanie tych ciągów.

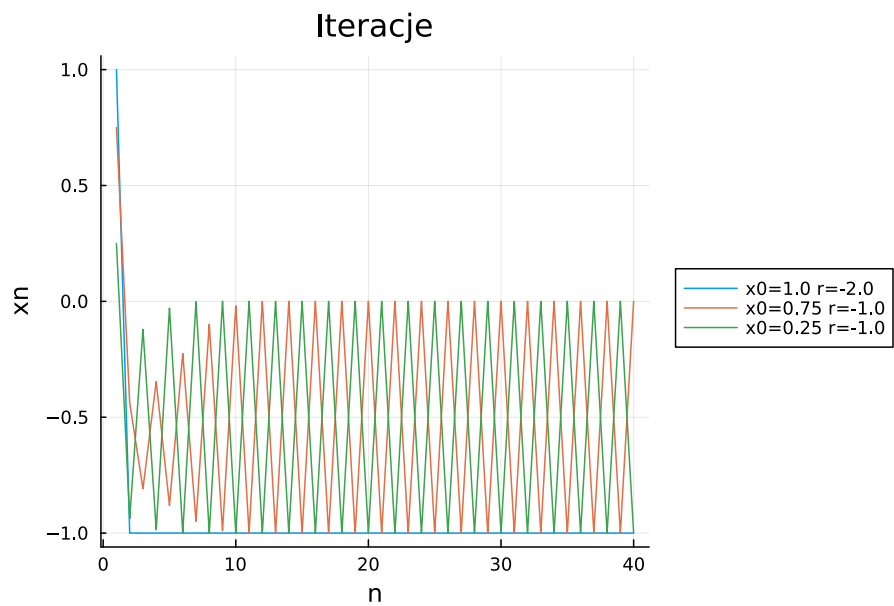
6.2 Wyniki



Rysunek 4: Wyniki dla 1), 2), 3)



Rysunek 5: Wyniki dla 1), 4), 5)



Rysunek 6: Wyniki dla 1), 6), 7)

6.3 Wnioski

Na wykresie 4 możemy zauważyć jak drobne zaburzenie danych może prowadzić do błędnych wyników.