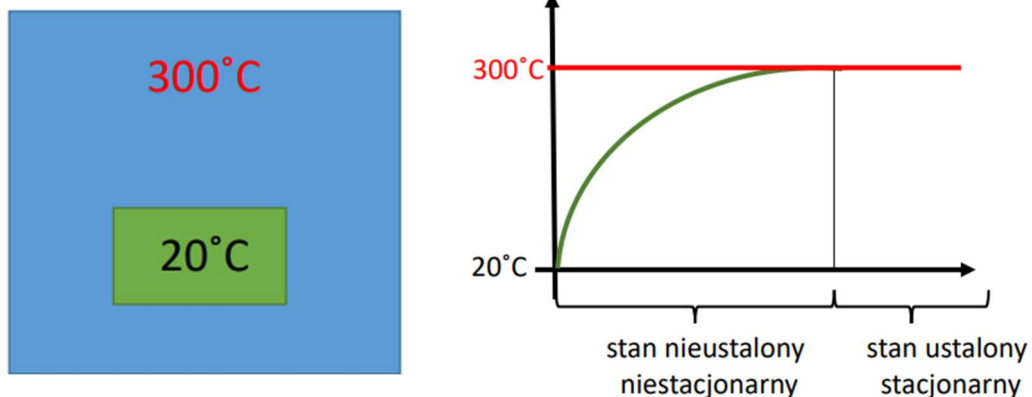


1. Wstęp

Celem projektu było opracowanie programu komputerowego opartego na Metodzie Elementów Skończonych (MES), który umożliwia rozwiązanie niestacjonarnego problemu przewodzenia ciepła w dwuwymiarowym modelu z uwzględnieniem konwekcyjnych warunków brzegowych. Szkic problemu wygląda następująco (temperatura modelu i otoczenia, oraz geometria modelu na schemacie są tylko poglądowe, nie reprezentują danych z problemu):



Rozważany problem zakłada, że temperatura w czasie zmienia się pod wpływem przewodzenia ciepła wewnątrz analizowanego modelu oraz wymiany ciepła z otoczeniem za pomocą konwekcji na brzegach. Tego rodzaju zadanie wymaga zastosowania niestacjonarnego równania przewodzenia ciepła w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y(t) \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \left(Q - c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = 0$$

Które po dyskretyzacji ma postać:

$$[H]\{t\} + [C] \frac{\partial}{\partial \tau} \{t\} + \{P\} = 0$$

W projekcie zaimplementowano algorytmy obliczeniowe, które pozwalają na wyznaczenie rozkładu temperatur w kolejnych krokach czasowych na podstawie danych początkowych, właściwości materiałowych oraz warunków brzegowych. Program został wzbogacony o moduły umożliwiające wizualizację wyników w czasie, co pozwala na dokładną analizę dynamiki rozkładu temperatury w modelu.

Sprawozdanie dokumentuje realizację projektu, opisując działanie programu oraz analizę uzyskanych wyników.

2. Charakterystyka oprogramowania

Oprogramowanie zostało napisane w języku C++ w wersji 17, z zastosowaniem podejścia obiektowego. Poniżej przedstawiono główne klasy w kontekście rozwiązania niestacjonarnego problemu przewodzenia ciepła metodą elementów skończonych:

- **GlobalData** – zawiera wszystkie dane wejściowe potrzebne do przeprowadzenia symulacji. Przechowuje ona zarówno parametry opisujące właściwości materiałowe modelu takie jak gęstość materiału, ciepło właściwe czy współczynnik przewodzenia ciepła jak również informacje o temperaturze otoczenia i współczynniku konwekcji. Klasa ta odpowiada również za przechowywanie parametrów symulacji, takich jak czas całkowity i krok czasowy.
- **Node** – opisuje współrzędne punktu w przestrzeni oraz zawiera informację o tym, czy uczestniczy w wymianie ciepła z otoczeniem.
- **Element** – reprezentuje pojedynczy element siatki MES. Każdy element zawiera odniesienia do identyfikatorów węzłów które go tworzą, oraz obiekty odpowiadające macierzom sztywności, pojemności cieplnej i wektorowi obciążeń. Klasa ta zawiera metody które umożliwiają wyliczanie lokalnych macierzy i wektorów.
- **Grid** – jest kontenerem przechowującym wszystkie węzły i elementy siatki. Stanowi model geometryczny i zapewnia dostęp do węzłów oraz elementów.
- **Jacobian** – przechowuje macierz Jacobiego, jej odwrotność oraz wyznacznik. Dzięki temu możliwe jest przekształcanie współrzędnych lokalnych na globalne oraz obliczanie pochodnych funkcji kształtu.
- **ElementUniv** – reprezentuje element jednostkowy w układzie lokalnym. Jest uniwersalna, ponieważ na jej podstawie przeprowadzane są obliczenia dla wszystkich rzeczywistych elementów modelu. Klasa ta przechowuje funkcje kształtu, ich pochodne.
- **Surface** – zawiera dane o wymianie ciepła na granicach elementu jednostkowego takie jak wektory obciążeń i macierze wymiany ciepła z otoczeniem dla każdej ze ścian elementu.
- **EquationSolver** – przechowuje globalne macierze sztywności i pojemności cieplnej oraz wektor obciążeń. Na ich podstawie rozwiązywany jest układ równań różniczkowych, który pozwala na iteracyjne wyznaczanie rozkładu temperatur w czasie.

Dodatkowo oprogramowanie posiada klasy takie jak:

- **Gauss** – zwracająca odpowiednie współczynniki Gaussa dla wybranej liczby punktów całkowania.
- **Matrix** – reprezentującą dane w postaci macierzy lub wektora. Posiada podstawowe metody matematyczne typowe dla macierzy i wektorów.
- **Simulation** – zawierającą wszystkie dane i wyniki naszej symulacji, oraz kontrolującą przepływ wykonywania programu.
- **DataParser** – odpowiadająca za wczytywanie danych z pliku i konwersję do danych zrozumiałych przez oprogramowanie MES.
- **VTKParser** – posiadająca metody umożliwiające wpisanie danych do plików z rozszerzeniem .vtk, dla ParaView.

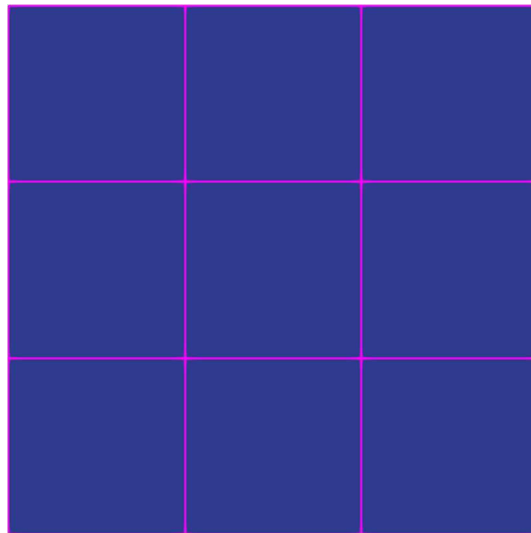


Uproszczony schemat działania oprogramowania.

3. Testy oprogramowania

a) Siatka 4x4

Model geometryczny:



Porównanie wyliczonych temperatur dla **2 punktowego** schematu całkowania:

Wyniki z oprogramowania				Wyniki testowe	
Min. Temp.	Błąd dla Min.	Maks. Temp.	Błąd dla Maks.	Min. Temp.	Maks. Temp.
110,037972	4,10E-06	365,815475	3,94E-06	110,037977	365,815471
168,837010	7,10E-06	502,591718	5,82E-06	168,837017	502,591712
242,800847	8,53E-06	587,372671	4,50E-06	242,800855	587,372667
318,614589	4,47E-06	649,387487	3,49E-06	318,614594	649,387483
391,255792	8,10E-07	700,068423	2,63E-06	391,255792	700,068420
459,036910	6,44E-06	744,063346	1,76E-06	459,036903	744,063344
521,586286	1,20E-05	783,382851	8,30E-07	521,586274	783,382850
579,034462	1,73E-05	818,992188	1,48E-07	579,034445	818,992188
631,689259	2,23E-05	851,431041	1,15E-06	631,689237	851,431043
679,907620	2,69E-05	881,057633	2,16E-06	679,907593	881,057635

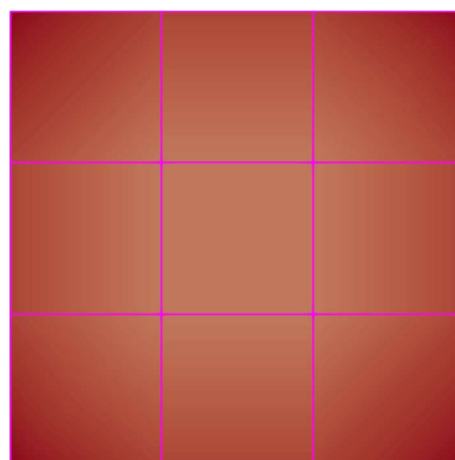
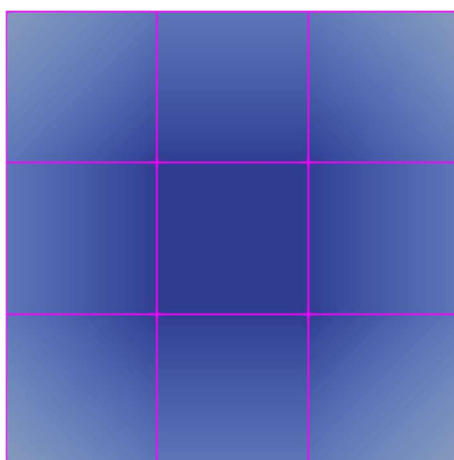
Porównanie wyliczonych temperatur dla **3 punktowego** schematu całkowania:

Wyniki z oprogramowania				Wyniki testowe	
Min. Temp.	Błąd dla Min.	Maks. Temp.	Błąd dla Maks.	Min. Temp.	Maks. Temp.
110,037972	4,10E-06	365,815475	3,94E-06	110,037977	365,815471
168,837010	7,10E-06	502,591718	5,82E-06	168,837017	502,591712
242,800847	8,53E-06	587,372671	4,50E-06	242,800855	587,372667
318,614589	4,47E-06	649,387487	3,49E-06	318,614594	649,387483
391,255792	8,10E-07	700,068423	2,63E-06	391,255792	700,068420
459,036910	6,44E-06	744,063346	1,76E-06	459,036903	744,063344
521,586286	1,20E-05	783,382851	8,30E-07	521,586274	783,382850
579,034462	1,73E-05	818,992188	1,48E-07	579,034445	818,992188
631,689259	2,23E-05	851,431041	1,15E-06	631,689237	851,431043
679,907620	2,69E-05	881,057633	2,16E-06	679,907593	881,057635

Porównanie wyliczonych temperatur dla **4 punktowego** schematu całkowania:

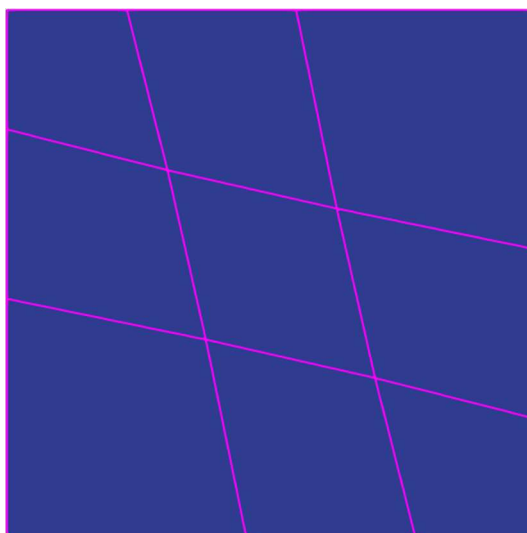
Wyniki z oprogramowania				Wyniki testowe	
Min. Temp.	Błąd dla Min.	Maks. Temp.	Błąd dla Maks.	Min. Temp.	Maks. Temp.
110,037972	4,10E-06	365,815475	3,94E-06	110,037977	365,815471
168,837010	7,10E-06	502,591718	5,82E-06	168,837017	502,591712
242,800855	6,52E-07	587,372671	4,50E-06	242,800855	587,372667
318,614589	4,47E-06	649,387487	3,49E-06	318,614594	649,387483
391,255792	8,10E-07	700,068423	2,63E-06	391,255792	700,068420
459,036910	6,44E-06	744,063346	1,76E-06	459,036903	744,063344
521,586286	1,20E-05	783,382851	8,30E-07	521,586274	783,382850
579,034462	1,73E-05	818,992188	1,48E-07	579,034445	818,992188
631,689259	2,23E-05	851,431041	1,15E-06	631,689237	851,431043
679,907620	2,69E-05	881,057633	2,16E-06	679,907593	881,057635

Rozkład temperatur po **pierwszej iteracji** i na **koniec symulacji**:



b) Siatka 4x4 mix

Model geometryczny:



Porównanie wyliczonych temperatur dla **2 punktowego** schematu całkowania:

Wyniki z oprogramowania				Wyniki testowe	
Min. Temp.	Błąd dla Min.	Maks. Temp.	Błąd dla Maks.	Min. Temp.	Maks. Temp.
95,151849	2,25E-06	374,686330	2,54E-06	95,151847	374,686333
147,644419	1,94E-06	505,968107	3,52E-06	147,644417	505,968111
220,164455	2,17E-07	586,997845	5,29E-06	220,164455	586,997850
296,736437	3,00E-06	647,285578	6,18E-06	296,736440	647,285584
370,968271	5,20E-06	697,333980	6,60E-06	370,968276	697,333986
440,560142	2,51E-06	741,219105	6,78E-06	440,560144	741,219112
504,891200	1,39E-07	781,209563	6,60E-06	504,891200	781,209570
564,001514	2,66E-06	817,391499	7,13E-06	564,001511	817,391507
618,173861	5,02E-06	850,237312	7,67E-06	618,173856	850,237319
667,765554	7,23E-06	880,167597	8,20E-06	667,765547	880,167605

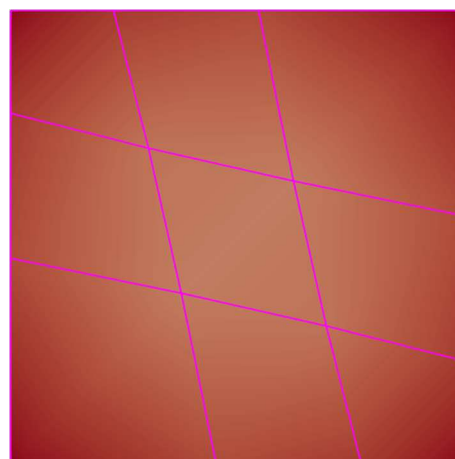
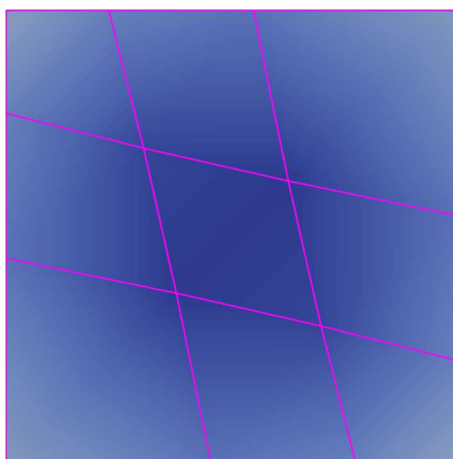
Porównanie wyliczonych temperatur dla **3 punktowego** schematu całkowania:

Wyniki z oprogramowania				Wyniki testowe	
Min. Temp.	Błąd dla Min.	Maks. Temp.	Błąd dla Maks.	Min. Temp.	Maks. Temp.
95,159050	7,20E-03	374,668341	1,80E-02	95,151847	374,686333
147,655865	1,14E-02	505,954310	1,38E-02	147,644417	505,968111
220,178075	1,36E-02	586,989448	8,40E-03	220,164455	586,997850
296,750827	1,44E-02	647,280127	5,46E-03	296,736440	647,285584
370,982595	1,43E-02	697,329874	4,11E-03	370,968276	697,333986
440,573966	1,38E-02	741,215653	3,46E-03	440,560144	741,219112
504,904331	1,31E-02	781,240763	3,12E-02	504,891200	781,209570
564,013882	1,24E-02	817,420424	2,89E-02	564,001511	817,391507
618,185458	1,16E-02	850,264030	2,67E-02	618,173856	850,237319
667,776401	1,09E-02	880,192229	2,46E-02	667,765547	880,167605

Porównanie wyliczonych temperatur dla **4 punktowego** schematu całkowania:

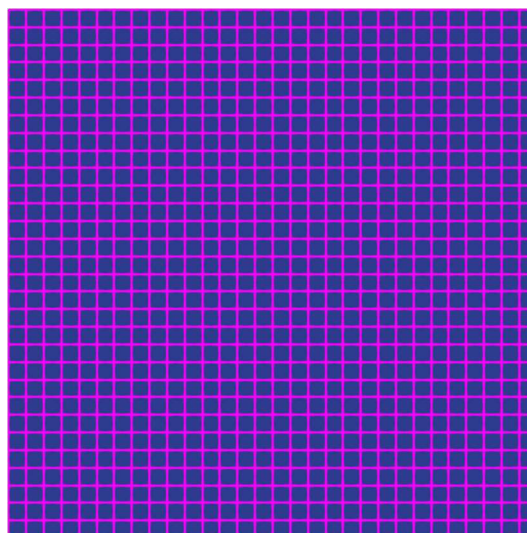
Wyniki z oprogramowania				Wyniki testowe	
Min. Temp.	Błąd dla Min.	Maks. Temp.	Błąd dla Maks.	Min. Temp.	Maks. Temp.
95,159070	7,22E-03	374,668262	1,81E-02	95,151847	374,686333
147,655896	1,15E-02	505,954252	1,39E-02	147,644417	505,968111
220,178112	1,37E-02	586,989415	8,44E-03	220,164455	586,997850
296,750866	1,44E-02	647,280107	5,48E-03	296,736440	647,285584
370,982633	1,44E-02	697,329861	4,13E-03	370,968276	697,333986
440,574004	1,39E-02	741,215643	3,47E-03	440,560144	741,219112
504,904367	1,32E-02	781,240850	3,13E-02	504,891200	781,209570
564,013916	1,24E-02	817,420505	2,90E-02	564,001511	817,391507
618,185489	1,16E-02	850,264105	2,68E-02	618,173856	850,237319
667,776431	1,09E-02	880,192298	2,47E-02	667,765547	880,167605

Rozkład temperatur po **pierwszej iteracji** i na **koniec symulacji**:



c) Siatka 31x31

Model geometryczny:



Porównanie wyliczonych temperatur dla **2 punktowego** schematu całkowania:

Wyniki z oprogramowania				Wyniki testowe	
Min. Temp.	Błąd dla Min.	Maks. Temp.	Błąd dla Maks.	Min. Temp.	Maks. Temp.
100,000000	3,02E-04	149,556953	3,25E-04	99,999698	149,556628
100,000000	5,35E-04	177,444929	1,03E-04	100,000535	177,444826
100,000000	8,47E-04	197,266964	2,65E-04	100,000847	197,267229
100,000000	1,17E-03	213,152788	6,95E-04	100,001167	213,153483
100,000002	1,50E-03	226,682585	1,15E-03	100,001502	226,683740
100,000006	1,85E-03	238,607066	1,63E-03	100,001853	238,608699
100,000022	2,20E-03	249,346693	2,12E-03	100,002224	249,348810
100,000062	2,57E-03	259,165080	2,60E-03	100,002630	259,167680
100,000160	2,94E-03	268,240690	3,08E-03	100,003102	268,243765
100,000371	3,32E-03	276,701099	3,54E-03	100,003696	276,704640
100,000792	3,71E-03	284,641284	3,99E-03	100,004506	284,645277
100,001570	4,11E-03	292,134220	4,43E-03	100,005679	292,138649
100,002917	4,51E-03	299,237411	4,85E-03	100,007430	299,242261
100,005127	4,92E-03	305,997123	5,25E-03	100,010049	306,002377
100,008577	5,34E-03	312,451231	5,64E-03	100,013916	312,456874
100,013743	5,76E-03	318,631207	6,01E-03	100,019505	318,637221
100,021194	6,19E-03	324,563533	6,37E-03	100,027385	324,569903
100,031593	6,63E-03	330,270741	6,71E-03	100,038221	330,277451
100,045691	7,07E-03	335,772190	7,04E-03	100,052763	335,779227
100,064320	7,52E-03	341,084660	7,35E-03	100,071842	341,092009

Porównanie wyliczonych temperatur dla **3 punktowego** schematu całkowania:

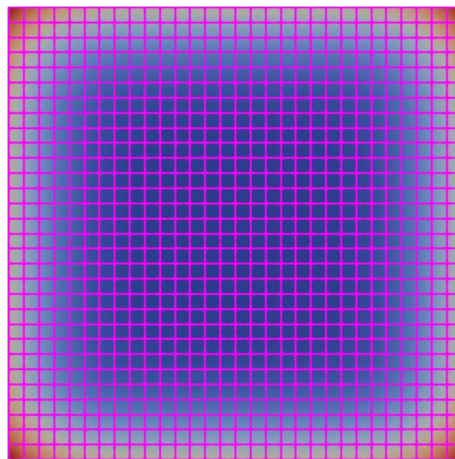
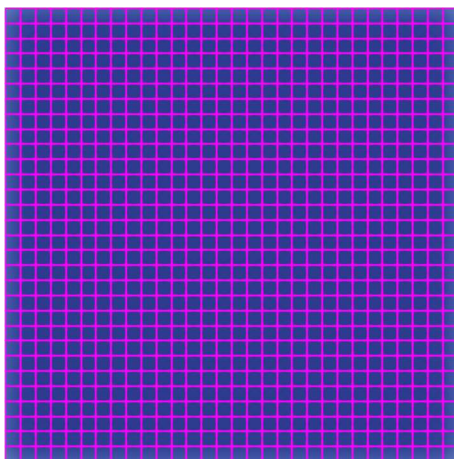
Wyniki z oprogramowania				Wyniki testowe	
Min. Temp.	Błąd dla Min.	Maks. Temp.	Błąd dla Maks.	Min. Temp.	Maks. Temp.
100,000000	3,02E-04	149,556953	3,25E-04	99,999698	149,556628
100,000000	5,35E-04	177,444929	1,02E-04	100,000535	177,444826
100,000000	8,47E-04	197,266964	2,65E-04	100,000847	197,267229
100,000000	1,17E-03	213,152788	6,94E-04	100,001167	213,153483
100,000002	1,50E-03	226,682585	1,16E-03	100,001502	226,683740
100,000006	1,85E-03	238,607066	1,63E-03	100,001853	238,608699
100,000022	2,20E-03	249,346693	2,12E-03	100,002224	249,348810
100,000062	2,57E-03	259,165080	2,60E-03	100,002630	259,167680
100,000160	2,94E-03	268,240690	3,08E-03	100,003102	268,243765
100,000371	3,32E-03	276,701099	3,54E-03	100,003696	276,704640
100,000792	3,71E-03	284,641284	3,99E-03	100,004506	284,645277
100,001570	4,11E-03	292,134220	4,43E-03	100,005679	292,138649
100,002917	4,51E-03	299,237411	4,85E-03	100,007430	299,242261
100,005127	4,92E-03	305,997123	5,25E-03	100,010049	306,002377
100,008577	5,34E-03	312,451231	5,64E-03	100,013916	312,456874
100,013743	5,76E-03	318,631207	6,01E-03	100,019505	318,637221

100,021194	6,19E-03	324,563533	6,37E-03	100,027385	324,569903
100,031593	6,63E-03	330,270741	6,71E-03	100,038221	330,277451
100,045691	7,07E-03	335,772190	7,04E-03	100,052763	335,779227
100,064320	7,52E-03	341,084660	7,35E-03	100,071842	341,092009

Porównanie wyliczonych temperatur dla **4 punktowego** schematu całkowania:

Wyniki z oprogramowania				Wyniki testowe	
Min. Temp.	Błąd dla Min.	Maks. Temp.	Błąd dla Maks.	Min. Temp.	Maks. Temp.
100,000000	3,02E-04	149,556953	3,25E-04	99,999698	149,556628
100,000000	5,35E-04	177,444929	1,02E-04	100,000535	177,444826
100,000000	8,47E-04	197,266964	2,65E-04	100,000847	197,267229
100,000000	1,17E-03	213,152788	6,94E-04	100,001167	213,153483
100,000002	1,50E-03	226,682585	1,16E-03	100,001502	226,683740
100,000006	1,85E-03	238,607066	1,63E-03	100,001853	238,608699
100,000022	2,20E-03	249,346693	2,12E-03	100,002224	249,348810
100,000062	2,57E-03	259,165080	2,60E-03	100,002630	259,167680
100,000160	2,94E-03	268,240690	3,08E-03	100,003102	268,243765
100,000371	3,32E-03	276,701099	3,54E-03	100,003696	276,704640
100,000792	3,71E-03	284,641284	3,99E-03	100,004506	284,645277
100,001570	4,11E-03	292,134220	4,43E-03	100,005679	292,138649
100,002917	4,51E-03	299,237411	4,85E-03	100,007430	299,242261
100,005127	4,92E-03	305,997123	5,25E-03	100,010049	306,002377
100,008577	5,34E-03	312,451231	5,64E-03	100,013916	312,456874
100,013743	5,76E-03	318,631207	6,01E-03	100,019505	318,637221
100,021194	6,19E-03	324,563533	6,37E-03	100,027385	324,569903
100,031593	6,63E-03	330,270741	6,71E-03	100,038221	330,277451
100,045691	7,07E-03	335,772190	7,04E-03	100,052763	335,779227
100,064320	7,52E-03	341,084660	7,35E-03	100,071842	341,092009

Rozkład temperatur po **pierwszej iteracji** i na **koniec symulacji**:



4. Wnioski