1. Pokazać, że dla funkcji $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ istnieją granice iterowane w $(0,0)$, natomiast nie istnieje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2. Pokazać, że dla funkcji $f(x,y) = \dfrac{(x-1)\,y^2}{(x-1)^2 + y^4}$ istnieją granice iterowane w $(1,0)$, natomiast nie istnieje $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.

3. Pokazać, że istnieje $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (x-2y)\sin\dfrac{1}{x-2}\sin\dfrac{1}{y-1}$, natomiast nie istnieją granice iterowane.

4. Zbadać istnienie granicy oraz granic iterowanych poniższych funkcji w zadanych punktach:

   (a) $f(x,y) = \frac{3(x-2)^4-2y^2}{(x-2)^4+y^2}$, w punkcie $(0,2)$,

   (b) $f(x,y) = \frac{x^2(y-2)}{x^4+(y-2)^2}$, w punkcie $(0,2)$,

   (c) $f(x,\ y) = \frac{(x-2)y^3}{(x-2)^2+2y^6}$, w punkcie $(2,0)$.

5. Wyznaczyć poniższe granice:

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-4y^2}{x^2+3y^2}$, b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2y}{(x-1)^2+y^2}$, c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x(y-2)^2}{x^2+(y-2)^4}$,

   d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2y}$, e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$, f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x^y+y)^{\frac{1}{y}}$,

   g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$, h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y|^y$, i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2-1}{(y-2)^2}$,

   j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x\sin y)}{xy+y^2}$, k) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\cos xy}{\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2}$, l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} \frac{2^{xy}-1}{xy^2}$.

6. Zbadać ciągłość poniższych funkcji (w ich dziedzinie):

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^4+y^2} & \text{dla} \quad x>0 \\ x\cos x + y & \text{dla} \quad x\le 0 \end{cases}$,

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$,

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$,

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} x(y+2) & \text{dla} \quad x<0 \\ e^{-x^2}-1 & \text{dla} \quad x\ge 0 \end{cases}$,

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad xy=0 \\ \frac{\sin(x\sin(y\sin(xy)))}{x^2y^2} & \text{dla} \quad xy\neq 0 \end{cases}$.

7. Wyznaczyć te wartości parametrów $a, b\in\mathbb{R}$, dla których poniższe funkcje są ciągłe:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} (ax+b)\frac{\sin y}{y} & \text{dla} \quad y \neq 0 \\ x & \text{dla} \quad y = 0 \end{cases}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{b \sin axy}{xy} & \text{dla} \quad xy \neq 0 \\ a & \text{dla} \quad y = 0 \end{cases}$,

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+ay)}{x-y} & \text{dla} \quad x \neq y \\ x^2 & \text{dla} \quad x = y \end{cases}$.

8. Korzystając z definicji wyznaczyć $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ dla funkcji danej wzorem

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Czy istnieją $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

9. Wyznaczyć pochodne cząstkowe podanych funkcji:

(a) $f(x,y) = \frac{x}{y} + x^{y^x}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla} \quad xy = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad xy \neq 0 \end{cases}$

10. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad xy = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad xy \neq 0 \end{cases}$ ma obie pochodne cząstkowe w punkcie $(0,0)$, ale nie jest ciągła w tym punkcie.

11. Obliczyć pochodną w kierunku wektora $v = (3,-1)$ funkcji $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2xy + 1$ w punkcie $(1,2)$.

12. Zbadać różniczkowalność podanych funkcji w punkcie $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3y^2}{x^6+y^4} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$,

(c) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$.

13. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} -9 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,-3) \\ 2x + 3y + \frac{xy+3x}{\sqrt{x^2+y^2+6y+9}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,-3) \end{cases}$$

(a) Wyznaczyć różniczkę zupełną funkcji f w punkcie $A = (0,0)$,

(b) zbadać różniczkowalność tej funkcji w punkcie $B = (0, -3)$.

14. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 & \text{dla} \quad (x,y) = (2,0) \\ 2x + y - \frac{(x-2)^3 y}{x^2 - 4x + 4 + |y|^3} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (2,0) \end{cases}$$

(a) Wyznaczyć różniczkę zupełną funkcji f w punkcie $A = (0, 2)$,

(b) zbadać różniczkowalność tej funkcji w punkcie $B = (2, 0)$.

15. Zbadać różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \\ 3x + 4 - \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(x^2 + y^2\right) & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

w zbiorze $\mathbb{R}^2$

16. Pokazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma pochodne w dowolnym kierunku ale nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

17. Sprawdzić, która z poniższych funkcji spełnia warunek $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

(d) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}$.

18. Podać wzory wszystkich pochodnych cząstkowych I-go i II-go rzędu dla funkcji danej wzorem:

(a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2-x}$,

(b) $f(x,y) = \ln\left(x^2 - y^2\right)$,

(d) $f(r,\varphi) = r\cos\varphi$,

(e) $f(s,t,u,v) = \frac{u}{v}\operatorname{arctg}\sqrt{3s+2t}$,

(c) $f(u,v,t) = t \arcsin\sqrt{uv}$,

(f) $f(x,y,z) = \frac{1}{x+2y} + \frac{1}{2y+3z}$.

19. Dla funkcji z zadania 18 podać macierze Jacobiego i macierze drugich pochodnych cząstkowych (Hessego)

20. Podać macierze Jacobiego dla funkcji danych wzorami:

   (a) $f(x,y,z) = [a_1x + b_1y + c_1z,\ a_2x + b_2y + c_2z,\ a_3x + b_3y + c_3z]$,
   (b) $f(x,y) = \left[xy,\ \frac{x}{y}\right]$,
   (c) $f(t) = \left[t,\ t^2, \sqrt{t}\right]$,
   (d) $f(x,y,z) = e^{xy - y\arccos z}$,
   (e) $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$.

21. Podać macierze Jacobiego i jakobiany dla funkcji danych wzorami:

   (a) $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$,
   (b) $f(r,\varphi,\psi) = (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)$,
   (c) $f(r,\varphi,t) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$,

22. Korzystając z faktu:
   J*eśli funkcja* g *jest różniczkowalna w punkcie* $(x_1, \dots, x_n)$*, zaś* f *jest różniczkowalna w punkcie* $g(x_1, \dots, x_n)$ *to funkcja* $f \circ g$ *jest różniczkowalna w punkcie* $(x_1, \dots, x_n)$ *a jej macierz Jacobiego wyraża wzór:*

$$(f \circ g)'(x_1, \dots, x_n) = f'[g(x_1, \dots, x_n)] \cdot g'(x_1, \dots, x_n)$$

   Wyznaczyć macierze Jacobiego dla odwzorowań złożonych:

   (a) $f \circ g(1,2)$ jeśli: $g(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $f(t) = \operatorname{arctg} t$,
   (b) $f \circ g(2,4)$ jeśli: $g(x,y) = 2x + y^2$, $f(u,v) = \left(uv, \dfrac{u}{v}\right)$.

23. Wyznaczyć różniczki:

   (a) $d_{(1,2)}f(h_1,h_2)$ oraz $d^2_{(1,2)}f(h_1,h_2)$ dla funkcji $f(x,y) = \ln(y-x)$,
   (b) $d_{(1,2,0)}f(h_1,h_2,h_3)$ oraz $d^2_{(1,2,0)}f(h_1,h_2,h_3)$ dla funkcji $f(x,y,z) = xy\,e^{y+2z}$.

24. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia:
   (a) $\sqrt{5,01^2 - 3,98^2}$, (b) $e^{1,99^2 - 2,02^2}$, (c) $\dfrac{(1,03)^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{1,05}}}$.

25. Podać równania płaszczyzny stycznej i prostej normalnej do powierzchni:

   (a) $z = xy$ w punkcie $P = (2,1,2)$,

(b) $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ w punkcie $(1,1)$,

(c) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 25$ w punkcie $P = (4,0,3)$.

26. Rozwiązać równanie $yz'_x - xz'_y = 0$, gdzie $z = z\,(x,y)$, przyjmując nowe zmienne $u = x$, $v = x^2 + y^2$.