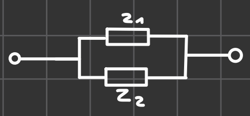
Ad 1. Fragment sieci elektrycznej składa się z dwóch żarówek połączonych:

a) szeregowo

b) równolegle



Jakie jest prawdopodobieństwo przepalenia się w pewnej chwili czasu z przedziału [0, T] jest dla obu żarówek jednakowe, równe p. $p \in (0,1)$. Zakładając, że żarówki przepalają się niezależnie od siebie, oblicz prawd. ciągłego przepływu prądu przez zakładany fragment sieci z przedziału 0,T].

A_1 – zd, że pierwsza żarówka przepali się w pewnej chwili $t \in [0,T]$
A_2 – -//- drugiej -//-

$P(A_1) = p$, $P(A_2) = p$

A_1, A_2 – zd niezależne
C – zd, że w czasie $[0,T]$ cały czas prąd będzie płynął przez podany fragment sieci

$C = A_1' \cap A_2'$

$P(C) = P(A_1')\,P(A_2') = [1-P(A_1)][1-P(A_2)] = (1-p)^2$

$C = A_1' \cup A_2'$ $\quad P(C) = P(A_1') + P(A_2') - P(A_1')P(A_2') = (1-p$

Tw o prawd całkowitym

$A_1, A_2, \quad, A_n \subset \Omega$ – ciąg zdarzeń

takie, że

$A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $(\neq)$ zd wykluczają się parami
$A_1 \cup A_2 \cup \quad A_n \subset \Omega$ zd wyczerpują wszystkie możliwości
$P(A_i) > 0$

Wtedy
$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \quad + P(B|A_n)P(A_n)$

$P(A_i|B) = \frac{P(A_i|B)}{P(B)} = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$

Ad. 2 Na przenośnik taśmowy trafiają jednakowe wyroby wytwarzane przez trzy automaty. Stosunek ilości produkcji automatów kształtuje się jak: 2:2:1. Poza tym zakładano, że 1. automat produkuje 85% wyrobów I. gatunku, 2. – 80% I. gatunku, a 3. – 90% I. gatunku.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany wyrób z tego przenośnika będzie wyrobem I. gatunku.

b) Losowo wybrany produkt z przenośnika okazał się wyrobem I. gatunku. Jakie jest przwd., że został on wyprodukowany przez drugi automat?

A_1 – losowo wybrany wyrób pochodzący z 1 automatu
A_2 – –//– drugiego –//–
A_3 – –//– trzeciego –//–

zd. wyczerpują wszystkie możliwości i wykluczają się prawami

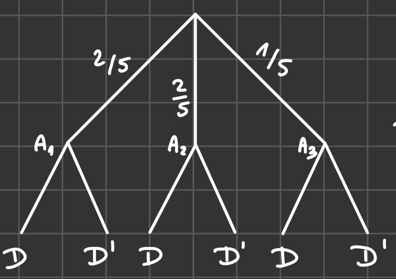
D – losowo wybrany wyrób jest I gatunku
(D' – –//– II gatunku)

$P(A_1) = 2/5$, $P(A_2) = 2/5$, $P(A_3) = 1/5$

$P(D|A_1) = 0\;85$, $P(D|A_2) = 0\;8$, $P(D|A_3) = 0\;9$

$P(D) = P(D|A_1)P(A_1) + P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3) = 0\;85 \; 2/5 + 0\;8 \; 2/5 + 0\;9 \; 1/5 = 0\;84$

b) $P(A_2|D) = \frac{P(A_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A_2)P(A_2)}{P(D)} = \frac{0\;85 \; 2/5}{0\;84} \approx 0{,}38$



$P(D) = 2/5 \; 0\;85 + 2/5 \cdot 0\;8 + 1/5 \; 0\;9$

Ad. 3 Pewna choroba występuje u 0.2% ludzkości. Przygotowano test do jej wykrycia.
Test daje wynik pozytywny u 97% chorych i 1% zdrowych

a) oblicz prawd., że test losowo wybranej osoby da wynik pozytywny

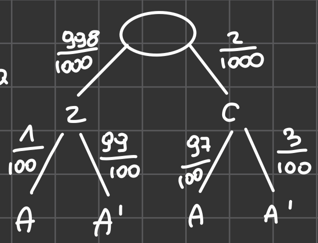
b) test losowo wybranej osoby dał wynik pozytywny. Jakie jest prawd., że ta osoba jest chora?

a) D - zd, że test wybrany osoby jest pozytywny

A - test pozytywny

$P(A) = ?$

C - zd, że losowa osoba jest chora
Z - zd, -//- jest zdrowo



$P(Z) = \frac{998}{1000}$

$P(C) = \frac{2}{1000}$

$P(A|C) = 0\ 97$

$P(A/Z) = 0{,}01$

$P(A) = \frac{1}{100} \cdot \frac{999}{1000} + \frac{2}{1000} \cdot \frac{99}{100} \approx 0{,}01192$

$P(C|A) = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A)} = \frac{0\ 97\ 0\ 002}{0{,}1192} = 0\ 163$

Ad. 4 Na loterii jest 1001 losów, z czego 1 jest wygrywający, a 999 przegrywających oraz 1 pozwalający na ponowne losowanie. Jakie jest prawd. wygrania w tej grze przy kupnie jednego losu

W - zd polegające na wygranej w tej grze

W_1 - wygrywający los za 1 razem

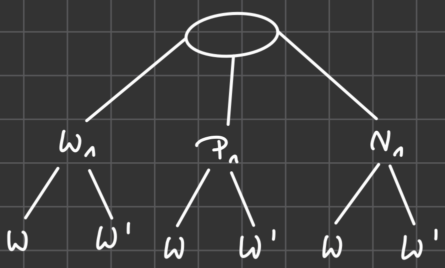
P_1 - przegrywający -//-

N_1 - wyciągnięcie losu na powtórzenie

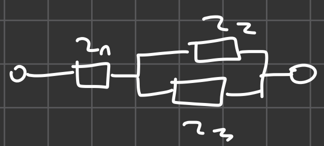
$P(W_1) = 1/1001$, $P(P_1) = \frac{999}{1001}$, $P(N_1) = 1/1001$

$P(W|W_1)=1$, $P(W|P_1)=0$, $P(W|N_1) = 1/1000$

$P(W) = P(W|W_1)P(W_1) + P(W|P_1)P(P_1) + P(W|N_1)P(N_1) = 1/1000$



Ad 1
c)



A_i - i-ta żarówka przepali się w pewnej chwili $t \in [0,T]$

$(i=1,2,3)$

$P(A_i) = p$, A_1, A_2, A_3 - zd niezal $\Rightarrow A_1^{\varepsilon_1}, A_2^{\varepsilon_2}, A_3^{\varepsilon_3}$, gdzie $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ - zd niez

C - zd, że w każdej chwili $t \in [0,T]$ prąd będzie płynął przez fragmenty sieci

$P(C) = A_1' \cap (A_2' \cup A_3') = A_1' \cap A_2' \cup A_1' \cap A_3'$

$P(C) = P(A_1' \cap A_2') + P(A_1' \cap A_3') - P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') = (1-p)^2 + (1-p)^2 - (1-p)^3 = 2(1-p)^2 - (1-p)^3$