Drgania rezonansowe w obwodzie RLC

Drgania określane są jako procesy, w których pewne wielkości na przemian maleją i rosną w czasie. Można podzielić je na swobodne, tłumione i wymuszone. Dla drgań wymuszonych zaobserwować można zjawisko **rezonansu**. Polega ono na wzmocnieniu amplitudy drgań, co jest spowodowane działaniem na drgający układ zewnętrznej zmiennej w czasie siły wymuszającej, charakteryzującej się częstotliwością rezonansowa (bądź jej bliską). Symulacja działać będzie dla szeregowego oraz równoległego obwodu RLC, tj. takiego, w którym opornik, cewka indukcyjna oraz kondensator połączone są szeregowo, bądź równolegle. Każdy z tych elementów charakteryzuje się własną impedancją:

- impedancja opornika $Z_R = R$; R - opór wyrażany w omach [Ω]
- impedancja cewki indukcyjnej $Z_L = i\omega L$; L - indukcyjność cewki wyrażana w henrach [H]
- impedancja kondensatora $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$; C - pojemność kondensatora wyrażona w faradach [F]

W ogólności każda impedancja ma dwie składowe: rzeczywistą, czyli rezystancję R oraz urojoną, czyli reaktancję X.

$$Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

Dla obu przypadków $\varepsilon(t) = Asin(\omega t)$

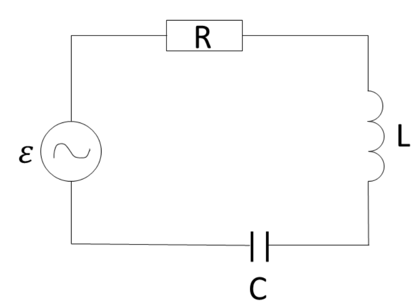
1 Obwód szeregowy

W tym przypadku elementy połączone są szeregowo, zatem impedancja zastępcza jest sumą impedancji poszczególnych elementów.

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Reaktancja dla tego układu wynosi $X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.
Rezonans zachodzi, gdy reaktancja jest równa 0.
Rezonans zajdzie gdy $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Zatem częstość rezonansowa wynosi $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, a więc częstotliwość rezonansowa, z uwagi na fakt, iż $\omega = 2\pi f$ wyniesie $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
Zapisując dla tego obwodu prawo Kirchhoffa otrzymuje się



$$\omega Acos(\omega t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{di(t)}{R} + L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{i(t)}{C}$$

Wiadomo, iż impedancja w ogólności jest wielkością zespoloną, a natężenie prądu rzeczywistą. Moduł impedancji wyraża się wzorem

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego względem i(t) daje rozwiązanie:

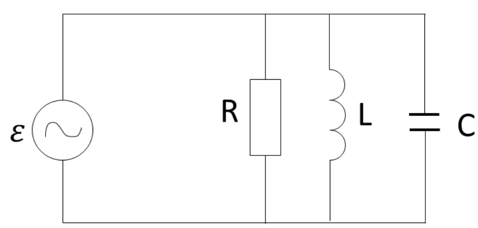
$$i(\omega) = \frac{A}{|Z|} sin(\omega t - \varphi_s)$$

$$\varphi_s = -arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

φ_s jest to przesunięcie fazowe między prądem i(t) oraz $\varepsilon(t)$, stanowiącym siłę wymuszającą obwodu.
Amplituda prądu płynącego w obwodzie wyraża się wzorem

$$\mathbf{I_{max}}(\omega) = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\mathbf{R^2} + \left(\omega \mathbf{L} - \frac{\mathbf{1}}{\omega \mathbf{C}}\right)^{\mathbf{2}}}}$$

2 Obwód równoległy



W obwodzie równoległym odwrotność impedancji jest sumą odwrotności impedancji poszczególnych elementów obwodu. Wielkość tę nazywa się admitancją Y.

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C - i\frac{1}{\omega L}$$

Moduł admitancji równy jest $|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$
Zależność amplitudy prądu płynącego w obwodzie od częstości wynosi

$$I_{max}(\omega) = A\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\mathbf{I_{max}}(\mathbf{f}) = \mathbf{A}\sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\mathbf{2}\pi \mathbf{fC} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\pi \mathbf{fL}}\right)^{\mathbf{2}}}$$

Przy czym dla tego obwodu rezonans zajdzie wówczas, gdy prąd płynący w obwodzie osiągnie wartość minimalną. Zatem częstość rezonansową wyznacza się ze wzoru $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\mathbf{f_0} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\pi\sqrt{\mathbf{LC}}}$$

Przesunięcie fazowe między prądem a napięciem wynosi

$$\varphi_d = -arctg\left(R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right)$$