

Kontest 4 – PreOM 2025

Zadanie 1. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite a takie, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n \geq 5$ zachodzi $2^n - n^2 \mid a^n - n^a$.

Zadanie 2. Wewnątrz kuli o promieniu 10 umieszczono 3803 odcinki o łącznej długości 3803.

Udowodnij, że istnieje kula o promieniu 1, której wnętrzu ma punkty wspólne z co najmniej sześcioma z tych odcinków.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie funkcje f z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste takie, że:

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y, z, t .

Zadanie 4. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne z tą samą orientacją. AD, BE, CF i $A'D', B'E', C'F'$ są odpowiednio wysokościami trójkąta ABC i $A'B'C'$. $P = AA' \cap DD', Q = BB' \cap EE', R = CC' \cap FF'$.

Udowodnij, że P, Q, R są współliniowe.