

Mini PreOM 2023 - Dzień 2

Zadanie 1. Dane są liczby całkowite a, b, c, d takie że liczby $ab - 1$, $bc - 1$ oraz $ca - 1$ są podzielne przez d . Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 - 3$ jest również podzielna przez d .

Zadanie 2. Niech $n \geq 2$ naturalne oraz x, y rzeczywiste takie, że $x < y$. Udowodnij, że zachodzą nierówności:

$$\frac{(y-x)\sqrt[n]{y}}{ny} < \sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x} < \frac{(y-x)\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

Zadanie 3. Dana jest liczba nieparzysta $n - 3$ i plansza $n \times n$. W każde pole planszy wpisana jest liczba rzeczywista o module mniejszym niż 1. Suma liczb w każdym kwadracie 2×2 jest równa 0. Wykazać, że suma liczb na planszy jest mniejsza niż n .

Zadanie 4. Dany jest okrąg ω o średnicy AB oraz punkt $C \in \omega$ różny od punktów A, B . Przy pomocy linijki i ołówka wyznacz prostą prostopadłą do AB przechodzącą przez C .