Rozwiązania Kontestu 3 – II etap

Zadanie 1. Znajdź wszystkie całkowite k i n spełniające równanie:

$$1! + 2! + \ldots + k! = 1 + 2 + \ldots + n.$$

Rozwiązanie 1. Zwińmy i przekształćmy:

$$2\sum_{j=1}^{k} j! = n(n+1).$$

Zauważmy, że:

$$2(1!+2!+3!+4!+5!+6!) = 2(1+2+6+24+120+720) \equiv_7 2(1+2-1+3+1-1) = 2\cdot 5 \equiv_7 3.$$

Jednak $n(n+1)$ nie daje reszty 3 z dzielenia przez 7 dla żadnego n naturalnego. Zatem dla $k \geqslant 7$ nie ma rozwiązań. Analiza pierwszych 6 przypadków pozwala stwierdzić, że jedyne rozwiązania to $(k,n) = (1,1)$ lub $(k,n) = (2,2)$ lub $(k,n) = (5,17)$.

Źródło: autorskie – Jakub Piotrowicz

Zadanie 2. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, którego przekątne AC i BD przecinają się pod kątem prostym. M, N to środki odpowiednio boków BC i AD. Znajdź długość odcinka MN, jeżeli AC oraz BD mają odpowiednio długości a i b.

Źródło: kolokwium z Geometrii I – MIM UW

Rozwiązanie 2. Niech X będzie środkiem AB. Odcinki XN oraz XM mają długości $\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}$ oraz są równoległe do BD, AC odpowiednio, jest to wniosek z linii środkowych trójkątów ABD i ABC. Wiemy więc, że $\sphericalangle NXM = 90°$, czyli:

$$|MN| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Źródło: autorskie – Jakub Piotrowicz

Zadanie 3. W szkole jest 2021 dzieci, z których każde zna co najmniej 45 innych dzieci w tej szkole. Udowodnij, że w tej szkole istnieją cztery dzieci, które mogą usiąść wokół okrągłego stołu w taki sposób, że każde dziecko zna swoich dwóch sąsiadów.

Rozwiązanie 3. Nie każde dziecko może znać dokładnie 45 innych dzieci, ponieważ wówczas całkowita liczba znajomości $\frac{1}{2}\cdot(2021\cdot 45)$ nie byłaby liczbą całkowitą. Zatem przynajmniej jedno dziecko - nazwijmy je Antek - zna co najmniej 46 innych dzieci. Spośród tych 46 dzieci, każde zna Antka i, zgodnie z założeniem, zna jeszcze co najmniej 44 inne dzieci, z których żadne nie jest Antkiem. Zgodnie z zasadą szufladkową, te dzieci nie mogą być wszystkie różne, ponieważ $46 \cdot 44 = 2024 > 2021 - 1$. Zatem dwoje różnych dzieci z tych 46 - nazwijmy je Basia i Karolina - zna jeszcze jedno dziecko, które nazwijmy Piotr. Teraz ustawiamy Antka, Basię, Piotra i Karolinę w tej kolejności wokół stołu, a wtedy każde dziecko zna swoich dwóch sąsiadów.

Zadanie 4. Dowieść, że gdy n jest liczbą całkowitą większą od 3 oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_2, a_3, \ldots, a_n$ spełniają równość $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ to zachodzi nierówność

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

Źródło: IMO P2 2012

Rozwiązanie 4. Wykorzystując AM-GM uzyskujemy:

$$(a_k+1) = \left(a_k + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1}\right) \geqslant k\sqrt[k]{\frac{a_k}{(k-1)^{k-1}}},$$

zatem

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \ldots m(1+a_n)^n \geqslant n^n a_2 a_3 \ldots a_n = n^n.$$

Równość zachodzi tylko wtedy gdy dla każdego k mamy $a_k = \frac{1}{k-1}$, lecz wtedy $a_2 a_3 \ldots a_n \neq 1$.

Źródło: Evan Chen: link