Kontest 1 – Finaliści

Zadanie 1. Wielomian $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, gdzie $a_{2n} \neq 0$ nie ma żadnych pierwiastków rzeczywistych. Udowodnij, że $Q(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_0$ również nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie takie pary liczb pierwszych p, q, że spełniona jest podzielność:

$$pq \mid 5^q + 5^p$$

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC i jego ortocentrum H. Niech M i N będą środkami BC i AC odpowiednio. Załóżmy że okręgi opisane na BHM i AHN są styczne, a H leży wewnątrz czworokąta $ABMN$, Prosta przechodząca przez H równoległa do AB przecina okręgi opisane na BHM i NHA w K i L odpowiednio. Proste KM i NL przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że $CF = FJ$, gdzie J to środek okręgu wpisanego w trójkąt MHN.

Zadanie 4. Na stole leży 2025 zapałek i standardowa kostka do gry, na której górna ścianka pokazuje liczbę oczek a. Igor i Stefan grają w następującą grę: na zmianę zabierają zapałki zgodnie z następującą zasadą, przy czym Igor zaczyna: Gracz, który jest przy ruchu, przechyla kostkę po wybranej krawędzi i zabiera dokładnie tyle zapałek, ile wynosi liczba oczek na górnej ściance kostki. Gracz, który nie może wykonać prawidłowego ruchu, przegrywa. Dla jakich wartości a Stefan może wymusić, że Igor przegra?