Kontest 1 - 27.09.2022

Rozwiązania Pierwszaki

Zadanie 1. Udowodnij, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2...A_{12}$ przekątne A_1A_5, A_3A_8 i A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie 1:

Zauważmy, że proste te są dwusiecznymi trójkąta $A_3A_5A_{11}$. Jest tak, ponieważ każda z tych prostych dzieli odpowiedni kąt tego trójkąta na 2 kąty oparte na łukach o tej samej długości, czyli dwa równe kąty. Wiadomo, że w trójkącie dwusieczne przecinają się w jednym punkcie (wynika to z definicji dwusiecznej), więc dane trzy proste przecinają się w jednym punkcie.

■

Rozwiązanie 2:

Zauważmy, że proste te są wysokościami trójkąta $A_1A_4A_8$. Można tego dowieść licząc kąty, przykładowo: $\sphericalangle A_5A_1A_4 = \frac{360°}{12} : 2 = 15°$ (z zależności między kątem środkowym i wpisanym). Podobnie $\sphericalangle A_1A_5A_8 = 75°$. Niech $S = A_1A_5 \cap A_4A_8$. Zauważmy, że $\sphericalangle A_1SA_4 = 180° - 15° - 75° = 90°$. Stąd A_1A_5 jest wysokością w tym trójkącie i analogicznie wszystkie dane dane proste są wysokościami trójkąta $A_1A_4A_8$. Wiadomo, że w trójkącie wysokości przecinają się w jednym punkcie, więc dane trzy proste przecinają się w jednym punkcie.

■

Zadanie 2. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ oraz $a + b + c \leqslant 4$ i $ab + bc + ca \geqslant 4$.
Udowodnij, że co najmniej dwie z poniższych nierówności są prawdziwe:

$$|a - b| \leqslant 2,\ |b - c| \leqslant 2,\ |c - a| \leqslant 2$$

Rozwiązanie:

$(a + b + c)^2 \leqslant 16$,
$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leqslant 16$,
$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 8$,
$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \leqslant 8$,
$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leqslant 8$, z czego w oczywisty sposób wynika teza - załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Wtedy oczywiście:
$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 > 8$, sprzeczność.

■

Zadanie 3. Niech a i b będą różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $ab(a+b)$ jest podzielne przez a^2+ab+b^2. Udowodnij, że $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

Rozwiązanie:

Niech $d = nwd(a,b)$. Wtedy $a = dk, b = dl, k, l \in \mathbb{N}$, $nwd(k,l) = 1$. $a^2+ab+b^2 | ab(a+b) => k^2+kl+l^2 | dkl(k+l)$. $nwd(k^2+kl+l^2, k) = 1$, $nwd(k^2+kl+l^2, l) = 1$, $nwd(k^2+kl+l^2, k+l) = nwd(kl, k+l) = 1$. W takim razie $k^2+kl+l^2|d$, z czego wynika, że $d \geqslant k^2+kl+l^2$.

W takim razie $|a-b|^3 = d^3|k-l|^3 >= d^2(k^2+kl+l^2)1^3 = a^2+ab+b^2 > ab$, stąd zaś $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$

■

Zadanie 4. Dany jest duży stosik kart. Na każdej karcie napisana jest jedna liczba ze zbioru $\{1, 2, ..., n\}$. Wiemy, że suma wszystkich liczb na kartach jest równa $k \cdot n!$ dla pewnego k.

Udowodnij, że możemy podzielić nasze karty na k stosów tak, że suma każdego z nich jest równa $n!$.

Rozwiązanie:

Najpierw udowodnimy lemat:

Z każdego zbioru $a_1, a_2, ..., a_n$ składającego się z n liczb całkowitych można wybrać niezerową liczbę elementów tak, że ich suma jest podzielna przez n.

Załóżmy, że żaden z elementów nie jest podzielny przez n. Teraz rozważmy liczby $b_1 = a_1, b_2 = a_1+a_2, ..., b_n = a_1+a_2+...+a_n$. Jeżeli żadna z nich nie jest podzielna przez n, to jakieś dwie liczby b_k i b_l, $(k < l)$ mają tę samą resztę z dzielenia przez n. W takim razie ich różnica $a_{j+1}+...+a_l$ jest podzielna przez n, co kończy dowód lematu.

Następnie dowodzimy naszą tezę za pomocą indukcji po n. Kiedy $n = 1$, wtedy na każdej karcie napisane jest 1, stąd każda karta tworzy wymaganą grupę o sumie 1!

Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla jakiejś liczby $n >= 1$, to znaczy, że jeżeli suma liczb na wszystkich kartach jest $k \cdot n!$, to karty te można podzielić na k stosów, każdy o sumie liczb równej $n!$.

Nazwijmy *superkartą* każdą grupę kart o sumie $l \cdot (n+1)$, $l = 1, ..., n$. l nazywamy zaś *wartością superkarty*. Każda karta z numerem $n+1$ jest superkartą o wartości 1. Z reszty kart, o numerach $1, ..., n$ tworzymy superkarty w następujący sposób: wybieramy dowolne $n+1$ kart, później używając powyższego lematu, możemy wybrać kilka z nich o sumie podzielnej przez $n+1$, te karty utworzą superkartę (z definicji). Ten algorytm zatrzyma się, kiedy będziemy

mieć mniej niż $n+1$ kart. Ale teraz, suma pozostałych kart musi również być podzielna przez $n+1$, skoro suma wszystkich kart jest podzielna przez $n+1$. To oznacza, że wszystkie pozostałe karty tworzą superkartę, której suma nie przekracza $n(n+1)$.
Po takim podziale mamy superkarty z wartościami 1,...,n, a suma ich wartości wynosi $\frac{k\cdot(n+1)!}{n+1} = k \cdot n!$. Teraz używając hipotezy indukcyjnej, możemy podzielić te superkarty na k stosów o sumie wartości równej $n!$ każdy. W takim razie suma kart w każdym stosie wynosi $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$, co dowodzi tezę.

■