Kontest 5 – mini PreOM 2025

Zadanie 1. Dane są ciągi $(a_k)_{k=1}^n$, $(b_k)_{k=1}^n$ liczb całkowitych spełniajace:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant n \text{ oraz } 1 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant n.$$

Udowodnij, że istnieją takie niepuste zbiory indeksów $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, że:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j.$$

Zadanie 2. Niech $F(k)$ będzie iloczynem wszystkich dodatnich dzielników liczby całkowitej dodatniej k. Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie m, n, dla których $F(m) = F(n)$.

Zadanie 3. Dany jest równoległobok $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu A odpowiednio na proste BC i CD, a prosta prostopadła do prostej AC i przechodząca przez punkt A przecina prostą BD w punkcie G.

Dowieść, że punkty E, F i G leżą na jednej prostej.

Zadanie 4. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniają nierówności:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \text{ oraz } \prod_{j=1}^{k} b_j \geqslant \prod_{j=1}^{k} a_j \text{ dla każdego } k = 1, 2, \ldots n.$$

Dowieść, że: $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.