Metoda Discharging'u i kolorowanie grafów planarnych

Przykład użycia metody

Przykład: W pewnym pięknym państwie Polsza niektóre miasta połączone są drogami. Cudowne władze tego państwa stwierdziły, że skrzyżowania są niebezpieczne, więc żadne drogi się nie przecinają. Udowodnij, że istnieje miasto z którego wychodzi co najwyżej 5 dróg.

1 Kilka zadań na rozgrzewkę

Zadanie 1.1. Dana jest szachownica złożona z m kolumn i n rzędów, gdzie $n \leqslant m$. Niektóre pola tej szachownicy kolorujemy na czerwono, tak żeby w każdej kolumnie było przynajmniej jedno czerwone pole. Udowodnij, że istnieje takie czerwone pole, że liczba czerwonych pól w jego rzędzie jest większa niż liczba czerwonych pól w jego kolumnie

Zadanie 1.2. Niech G będzie grafem planarnym oraz $mindeg(G) = 3$. Wtedy dla każdego planarnego rysunku G istnieje taki wierzchołek v i przyległa do niego ściana s takie, że:

$$len(s) + deg(v) \leqslant 8$$

Zadanie 1.3. Na pewnym przyjęciu było n osób. Niektóre osoby przywitały się całusem w policzek. Okazało się, że w sumie było mniej niż $\frac{3}{2}n$ całusów. Udowodnij, że istnieje osoba która przywitała się całusem co najwyżej z jedną inną osobą, albo osoba która przywitała się z dwiema osobami z których co najmniej jedna przywitała się z mniej niż pięcioma innymi osobami.

Zadanie 1.4. W Stumilowym Lesie między niektórymi domkami zwierząt istnieją ścieżki. Żadne ścieżki nie przecinają się. Każde zwierzątko ma co najmniej 5 przyjaciół i z jego domku prowadzi ścieżka do domku każdego z nich. Udowodnij, że istnieje taka leśna ścieżka, że suma liczby przyjaciół zwierzątek mieszkających na jej krańcach jest mniejsza niż 12.

2 Zadania trudniejsze - Praca domowa

Zadanie 2.1. Dla każdego grafu planarnego G $\chi(G) = 5$
Zadanie 2.2. Dany jest wypukły wielościan C. Nie ma on żadnej ściany będącej czworokątem ani żadnej ściany będącej pięciokątem. Udowodnij, że ma ścianę będącą trójkątem.
Zadanie 2.3. Kwadrat został podzielony na wiele trójkątów. Udowodnij, że dwa spośród tych trójkątów mają wspólny bok.
Zadanie 2.4 Jeśli G jest grafem planarnym bez trójkątów, to jest on 3-kolorowalny (*)
Zadanie 2.5 Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny. (***)

3 Podpowiedzi

1.2. Dobierz ładunki tak, żeby móc skorzystać z wzoru Eulera.
1.3. Przypiszmy każdemu wierzchołkowi ładunek równy jego stopniowi.
1.4. Czy moglibyśmy skorzystać z triangulacji?

1.2. Przypiszmy ładunki w następujący sposób: $v \to 3(4 - deg(v))$, $s \to 3(4 - len(v))$.
1.3. Niech każdy wierzchołek o stopniu 2 zabierze $\frac{1}{2}$ ładunku od sąsiadów.
1.4. Przypiszmy ładunki w następujący sposób: $v \to 6 - deg(v)$, $s \to 6 - len(v)$.