

Rozwiązania Kontestu 3 – II etap

Zadanie 1. Znajdź wszystkie całkowite k i n spełniające równanie:

$$1! + 2! + \dots + k! = 1 + 2 + \dots + n.$$

Rozwiązanie 1. Zwińmy i przekształćmy:

$$2 \sum_{j=1}^k j! = n(n+1).$$

Zauważmy, że:

$$2(1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6!) = 2(1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720) \equiv_7 2(1 + 2 - 1 + 3 + 1 - 1) = 2 \cdot 5 \equiv_7 3.$$

Jednak $n(n+1)$ nie daje reszty 3 z dzielenia przez 7 dla żadnego n naturalnego. Zatem dla $k \geq 7$ nie ma rozwiązań. Analiza pierwszych 6 przypadków pozwala stwierdzić, że jedyne rozwiązania to $(k, n) = (1, 1)$ lub $(k, n) = (2, 2)$ lub $(k, n) = (5, 17)$.

Źródło: autorskie – Jakub Piotrowicz

Zadanie 2. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, którego przekątne AC i BD przecinają się pod kątem prostym. M, N to środki odpowiednio boków BC i AD . Znajdź długość odcinka MN , jeżeli AC oraz BD mają odpowiednio długości a i b .

Źródło: kolokwium z Geometrii I – MIM UW

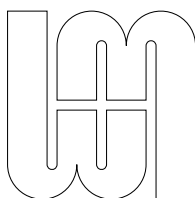
Rozwiązanie 2. Niech X będzie środkiem AB . Odcinki XN oraz XM mają długości $\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}$ oraz są równoległe do BD , AC odpowiednio, jest to wniosek z linii środkowych trójkątów ABD i ABC . Wiemy więc, że $\angle NXM = 90^\circ$, czyli:

$$|MN| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Źródło: autorskie – Jakub Piotrowicz

Zadanie 3. W szkole jest 2021 dzieci, z których każde zna co najmniej 45 innych dzieci w tej szkole. Udowodnij, że w tej szkole istnieją cztery dzieci, które mogą usiąść wokół okrągłego stołu w taki sposób, że każde dziecko zna swoich dwóch sąsiadów.

Rozwiązanie 3. Nie każde dziecko może znać dokładnie 45 innych dzieci, ponieważ wówczas całkowita liczba znajomości $\frac{1}{2} \cdot (2021 \cdot 45)$ nie byłaby liczbą całkowitą. Zatem przynajmniej



jedno dziecko - nazwijmy je Antek - zna co najmniej 46 innych dzieci. Spośród tych 46 dzieci, każde zna Antka i, zgodnie z założeniem, zna jeszcze co najmniej 44 inne dzieci, z których żadne nie jest Antkiem. Zgodnie z zasadą szufladkową, te dzieci nie mogą być wszystkie różne, ponieważ $46 \cdot 44 = 2024 > 2021 - 1$. Zatem dwoje różnych dzieci z tych 46 - nazwijmy je Basia i Karolina - zna jeszcze jedno dziecko, które nazwijmy Piotr. Teraz ustawiamy Antka, Basię, Piotra i Karolinę w tej kolejności wokół stołu, a wtedy każde dziecko zna swoich dwóch sąsiadów.

Zadanie 4. Dowieść, że gdy n jest liczbą całkowitą większą od 3 oraz dodatnie liczby rzeczywiste a_2, a_3, \dots, a_n spełniają równość $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ to zachodzi nierówność

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Źródło: IMO P2 2012

Rozwiązanie 4. Wykorzystując AM-GM uzyskujemy:

$$(a_k + 1) = \left(a_k + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1} \right) \geq k \sqrt[k]{\frac{a_k}{(k-1)^{k-1}}},$$

zatem

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \geq n^n a_2 a_3 \cdots a_n = n^n.$$

Równość zachodzi tylko wtedy gdy dla każdego k mamy $a_k = \frac{1}{k-1}$, lecz wtedy $a_2 a_3 \cdots a_n \neq 1$.

Źródło: Evan Chen: [link](#)