Kombinatoryka zespolona

Łukasz Skiba

28.09.2022r. - Wieczorek Matematyczny

1 Wstęp

Tytuł wykładu może być intrygujący, ale celem jest po prostu pokazanie pięknego użycia liczb zespolonych w zadaniach kombinatorycznych. Sama idea wydaje się być zaskakująca, ale zespo przyda się w zadaniach na kolorowanie oraz przy pewnym zliczaniu.

Uwaga: Wszędzie poniżej, jeśli jest mowa o jakimś prostokącie a x b to mam na myśli, że jest on podzielony na ab kwadratów jednostkowych 1 x 1, a uzupełnić oznacza bez przecięć i wychodzenia poza daną figurę.

1.1 Lemat

Zachodzi wzór Eulera, z którego będziemy korzystać $\cos x + i \sin x = e^{ix}$.

Dla danej liczby $p \in \mathbb{P}$ oraz liczb $a_0, a_1, ..., a_{p-1} \in \mathbb{Q}$ oraz $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ zachodzi równoważność:

$$a_0 + a_1 \cdot \varepsilon + a_2 \cdot \varepsilon^2 + ... + a_{p-1} \cdot \varepsilon^{p-1} = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = ... = a_{p-1}$$

Dowód:
($\Rightarrow$)Rozważmy wielomiany $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{p-1}x^{p-1}$ oraz $1 + x + x^2 + ... + x^{p-1}$. Mają one wspólny pierwiastek, więc nie są względnie pierwsze. Ponadto ten drugi wielomian nie jest rozkładalny w $\mathbb{Q}$, więc musi dzielić ten pierwszy. No ale dzieje się tak tylko gdy współczynniki są równe, zatem mamt to co chcieliśmy.
($\Leftarrow$) triv, triv

1.2 Przykłady

1. Dany prostokąt możemy wypełnić skończoną liczbą prostokątów 1xm oraz nx1, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ (tych prostokątów nie możemy obracać!). Udowodnij, że da się wypełnić ten prostokąt tylko jednym rodzajem z tych mniejszych.

2. Ile jest liczb n-cyfrowych (w systemie dziesiętnym), których wszystkie cyfry należą do zbioru $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$ oraz suma cyfr jest podzielna przez 7.

3. Zbadaj sumę
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$$

2 Zadania

1. (BMO 2021) Igor ma dużą kolekcję kwadratów a x a i b x b, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$. Z tych kwadratów jest w stanie ułożyć, większy kwadrat o boku n. Udowodnij, że może ułożyć kwadrat o boku n za pomocą tylko jednego z rodzajów kwadratów (o boku a lub o boku b).

2. Czy możemy uzupełnić kwadrat 13 x 13 z wyciętym środkowym kwadratem prostokątami 1 x 4 i 4 x 1.

3. Kwadrat o boku 7 wypełniony jest szesnastoma prostokątami 1 x 3 (możemy obracać). Jakie są możliwe pozycje niewypełnionego pola w tym kwadracie.

4. Niech $k \geq 2$ będzie daną liczbą całkowitą. Dla jakich liczb nieparzystych n możemy uzupełnić kwadrat n x n prostokątami 1 x k i k x 1, tak że środkowy kwadrat pozostaje niezakryty.

5. Tablicę 8 x 9 uzupełniamy prostokątami 3 x 1 oraz dziwnymi prostokątami 1 x 3 z wyciętymi środkowymi polami. Udowodnij, że istnieje zbiór 18 jednostkowych kwadratów na tablicy, w taki sposób że jeśli 70 jest zakrytych to 2 pozostałe należą do tego zbioru.

6. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ i zbiór $A = \{1, 2, ..., 2p\}$. Znajdź liczbę takich podzbiorów A, że zawierają one p elementów oraz ich suma jest podzielna przez p.

7. Rzucamy standardową kością do gry n razy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 5.

8. Trzy osoby [A,B i C] grają w następującą grę: wybieramy losowo podzbiór k-elementowy zbioru $\{1, 2, 3, ..., 2022\}$. Zwycięża [A,B i C] w zależności od tego czy suma elementów podzbioru daje resztę $0, 1$ lub 2 w wyniku dzielenia przez 3. Znajdź wszystkie wartości k, dla których [A,B i C] mają równe szanse na wygraną.

9. Ile jest podzbiorów 100-elementowych zbioru $\{1, 2, ..., 2000\}$, że ich suma jest podzielna przez 5.

10. Mamy dane liczby całkowite dodatnie $n > 1$,m oraz $a_1, a_2, ..., a_m$. Oznaczmy przez $f(k)$ liczbę takich ciągów $(c_1, c_2, ..., c_m)$, że dla dowolnego i $1 \leq c_i \leq a_i$ oraz $c_1 + c_2 + ... + c_m \equiv_n k$. Udowodnij, że $f(0) = f(1) = ... = f(n-1) \Leftrightarrow$ istnieje indeks i, że $n|a_i$.

11. Dane są liczby całkowite $m, n > 1$ oraz $a_1, a_2, ..., a_n$ - żadna niepodzielna przez m^{n-1}. Udowodnij, że możemy znaleźć liczby całkowite $e_1, e_2, ..., e_n$ niewszystkie równe 0, $|e_i| < m$ oraz $m^n | a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$.

12. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Udowdonij, że wsród $2^{\frac{p-1}{2}}$ liczb postaci $\pm 1 \pm 2 \pm ... \pm \frac{p-1}{2}$ każda reszta modulo p występuje dokładnie tyle samo razy.