Autor: Krzysztof Zdon

Prowadzący: Krzysztof Zdon

Metoda probabilistyczna

Wstęp Teoretyczny

Def. 1 Na potrzeby naszych rozważań definiujemy **zmienną losową** jako funkcję przyporządkowującą każdemu zdarzeniu z przestrzeni zdarzeń pewną liczbę rzeczywistą.
Przykład 1. Rozważmy rzut jedną kostką. Wtedy przestrzeń zdarzeń Ω składa się ze wszystkich 6 możliwych rzutów i naturalną zmienną losową jest przyporządkowanie każdemu rzutowi liczby oczek na kostce. Możemy ją oznaczyć np. D_6. Wprowadzamy teraz wygodne oznaczenie - za $\mathbb{P}[\bullet]$ oznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $\bullet$. W naszym przypadku oznacza to, że

$$\mathbb{P}[D_6 = 1] = ... = \mathbb{P}[D_6 = 6] = \frac{1}{6}$$

oraz $\mathbb{P}[D_6 = 0] = 0$ i $\mathbb{P}[D_6 \geq 4] = \frac{1}{2}$. Teraz zdefiniujemy najważniejsze narzędzie na naszym wykładzie.
Def. 2 Wartością oczekiwaną danej zmiennej losowej X nazywamy sumę:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x \mathbb{P}[X = x] \cdot x$$

Przykład 1. cd. W naszym przypadku widzimy, że

$$\mathbb{P}[D_6] = \frac{1}{6} \cdot 1 + ... + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5.$$

Zadanie 1. Na WM-ach jest n uczestników. Kadra, która posiada n spersonalizowanych plakietek (po jednej dla każdego uczestnika), postanowiła pewnego wieczoru rozlosować je wśród uczestników. Niech S oznacza liczbę uczestników, która otrzymała swoją plakietkę. Udowodnij, że wartość oczekiwana S wynosi 1.
Twierdzenie 1. Mając dane dowolne zmienne losowe $X_1, ..., X_n$ mamy

$$\mathbb{E}[X_1 + ... + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + ... + \mathbb{E}[X_n]$$

Zadanie 2. Zrobić zadanie 1., używając tw. 1.
Zadanie 3. Wokół ogniska siedzi 2024 dzieci. Nagle każdego dziecko szturcha jednego swojego sąsiada, po lewej lub po prawej stronie. Jaka jest wartość oczekiwana niesszturchniętych dzieci?
Zadanie 4 Załóżmy, że 7 chłopców i 13 dziewcząt ustawia się w rządku. Niech S będzie liczbą miejsc, gdzie dziewczynka stoi obok chłopca. Na przykład dla szeregu $DCCDDCDDDCDCDDCDCDDD$ mamy $S = 12$. Znajdź wartość oczekiwaną S.

Zastosowania poważne

Możemy potraktować wartość oczekiwaną jako swoistą średnią. Jeśli średnia punktów na finale OM-a dwa lata temu wynosiła 13,420 pkt, to znaczy, że istnieje uczestnik, który zdobył co najmniej 14 pkt, tak samo jak istnieje zawodnik, który zdobył tych punktów co najwyżej 13. Okazuje się to kluczową obserwacją w naszych rozważaniach.
Przykład 2. Rozważmy graf dwudzielny $K_{n,n}$. Udowodnij, że jeśli podsiada on co najmniej $n^2 - n + 1$ krawędzi, to istnieje skojarzenie doskonałe w grafie.
Przykład 3. Graf G ma n wierzchołków i średni stopień d. Udowodnij, że można z niego wybrać niezależny zbiór wierzchołków o wielkości co najmniej $\frac{n}{2d}$.

Autor: Krzysztof Zdon

Prowadzący: Krzysztof Zdon

Zadania

Zadanie 1. W turnieju uczestniczy 8 zawodników. Po zakończonych rozgrywkach, w czasie kolacji, organizatorzy starają się posadzić ich wokół okrągłego stołu, by każdy z nich miał z prawej strony gracza, którego pokonał. Każde takie posadzenie nazywają kręgiem mocy. Udowodnij, że istnieje taki wynik turnieju, dla którego da się ułożyć 158 różnych kręgów mocy.

Zadanie 2. Niech A będzie zbiorem N reszt mod N^2. Udowodnij, że istnieje taki zbiór B, również składający się z N reszt mod N^2, że zbiór $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$ składa się z conajmniej $\frac{N^2}{2}$ reszt.

Zadanie 3. W rosyjskiej Dumie działa 1600 posłów, którzy zformowali 16000 komisji po 80 członków każda. Udowodnij, że istnieje para komisji, która nie mniej niż czterech członków wspólnych.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnych takich liczb zespolonych $z_1, ..., z_n$, że $|z_1|^2 + ... + |z_n|^2 = 1$ istnieje taki wybór liczb $\epsilon_1, ..., \epsilon_n \in \{-1, 1\}$, że zachodzi nierówność:

$$|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_i z_i| \leq 1$$

Zadanie 5. W tablicy $n \times n$ każdy z numerów $\{1, ..., n\}$ powtarza się n razy. Udowodnij, że istnieje wiersz lub kolumna, gdzie znajduje się conajmniej $\sqrt{n}$ różnych liczb.

Zadanie 6. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Wokół ogniska na okręgu stoi $3n$ groźnych słowiańskich wojów. Na początku każdy woj groźnie patrzy na innego. W pojedynczym ruchu jeden woj zaczyna obracać swój wzrok zgodnie z ruchem wskazówek zegara dopóki nie zobaczy innego woja. Groźnym trójkątem nazywamy układ w którym woj A patrzy na woja B, woj B na woja C oraz woj C na woja A. Jaka jest najmniejsza taka liczba N, że niezależnie od początkowego ustawienia można uzyskać n groźnych trójkątów w co najwyżej N ruchach?