Równania Diofantyczne

Hubert Wach

09.11.2022

1 Wstęp

Równaniami diofantycznymi nazywamy równania, w których mamy zazwyczaj więcej niż jedną niewiadomą oraz mamy za zadanie znaleźć wszystkie rozwiązania całkowite lub udowodnić, że takie nie istnieją albo, że jest ich nieskończenie wiele. Przykładowo, równanie: $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -1$, ma 4 rozwiązania dla $x, y \in \mathbb{Z}$, a mianowicie $(1, 2), (-1, 4), (-3, 2), (-1, 0)$. Umawiamy się, że będziemy operować wyłącznie na zmiennych całkowitoliczbowych. Do rozwiązywania równań diofantycznych używa się wielu technik i sztuczek, z których kilka opisanych jest poniżej.

2 Teoria

1. **Zwijanie do iloczynu.**
2. **Kongruencje.** (Rozpatrywanie równania modulo m)
3. **Nierówności.**
4. **Desant nieskończony.**
5. **Indukcja.**
6. **Metoda parametryzacji.** (mniej lub bardziej dziwne podstawienia)

3 Przykłady do teorii

1. Sprowadzając równanie diofantyczne do postaci iloczynowej, otrzymujemy iloczyn dwóch lub więcej "nawiasów" $\in \mathbb{Z}$, a z kolei iloczyn ten będzie równy jakieś małej liczbie całkowitej, przez co możemy rozważyć wszystkie możliwe przypadki odpowiadające rozkładowi tej liczby na czynniki pierwsze (oraz pierwsze ujemne!)

   Zadanie: Rozwiąż równanie w liczbach całkowitych
   $$x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2.$$

2. Znalezienie odpowiedniego modułu, w którym będziemy rozpatrywali nasze równanie diofantyczne, może być bardzo pomocne w ograniczeniu możliwych rozwiązań do kilku lub też do zera (wtedy równanie diofantyczne nie ma rozwiązań). Warto wspomnieć, że moduły jakich się używa w zadaniach prawie zawsze znajdują się w zbiorze 2,3,...,13.

   Zadanie: Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych (p,q) spełniające
   $$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

3. Nierówności są bardzo przydatne podczas ograniczania wielkości rozwiązań z góry, dzięki czemu możliwych rozwiązań będzie zaledwie kilka. Przydatne są nierówności pomiędzy średnimi oraz fakt, że $x^2 \geqslant 0$.

   Zadanie: Znajdź wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych, spełniających
   $$x^3 + y^3 = (x + y)^2.$$

4. Desant nieskończony to technika pozwalająca na wykazanie, że jakieś równanie diofantyczne nie ma rozwiązań dla niezerowych zmiennych.

   Zadanie: Znajdź wszystkie nieujemne rozwiązania równania
   $$x^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

5. Indukcja matematyczna często pozwala wykazać, że istnieją pewne rozwiązania dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

   Zadanie: Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 3$, poniższe równanie ma rozwiązania dla parami różnych $x_1, x_2, ..., x_n$
   $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 1$$

6. Metoda "parametryzacji", inaczej "podstawień", umożliwia nam udowodnienie, że pewne równanie diofantyczne ma nieskończenie wiele rozwiązań, poprzez "pokazanie palcem" (czyli dawanie jawnych formuł na zmienne, które spełniają warunki zadania). Często jednak znalezienie podstawień polega na zgadnięciu nieoczywistej formuły. Na marginesie, autor tego pliku nie lubi zgadywać dziwnych podstawień.

   Zananie: Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek (x,y,z), takich że spełniają równanie

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2.$$

4 Zadania

1. Znajdź wszystkie pary (x,y), spełniające równanie

$$3^x - 2^y = 7.$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $4^n + 2^n + 17$ jest kwadratem liczby naturalnej.
3. Udowodnić, że dla $n \geqslant 3$, równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. (Powodzenia XD).
4. Udowodnij, że równanie

$$2a^2 + 7b^2 + 11c^2$$

   nie ma rozwiązań dla niezerowych $a, b, c \in \mathbb{Z}$
5. Znajdź wszystkie dodatnie liczba całkowite $n, k_1, ..., k_n$ takie, że

$$k_1 + ... + k_n = 5n - 4$$

   oraz

$$\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} = 1.$$

6. Liczby naturalne x, y, z, gdzie $NWD(x, y, z) = 1$, spełniają równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

   Dowieść, że $x + y$ jest kwadratem liczby całkowitej.
7. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n, poniższe równanie ma rozwiązania całkowite.

$$x^2 + xy + y^2 = 7^n$$

8. Rozwiąż równanie $x^5 - y^2 = 4$ oraz $x^2 - y! = 2022$.
9. Wykazać, że równanie $x^x = y^3 + z^3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla trójek liczb całkowitych (z, y, z).
10. Rozwiąż równanie $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2xyzw$ w liczbach całkowitych.
11. Znajdź największą wartość $m^2 + n^2$ dla m, n będącymi liczbami od 1 do 1981, które spełniają $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.
12. Znajdź wszystkie trójki (x, y, z) liczb całkowitych dodatnich takie, że

$$3(xy + yz + zx) = 4xyz$$

13. Dowieść, że równanie $x^3 + y^4 = 7$, nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.