Autor: Mikołaj Znamierowski
Prowadzący: Mikołaj Znamierowski

Geometria II – II etap

Teoria

Twierdzenie 1 (Talesa)**.** Punkty A, B, C leżą na prostej k, zaś A, B', C' na prostej l. Wówczas

$$BB'||CC' \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC'}}$$

Definicja 1 (Jednokładność)**.** Przekształcenie f płaszczyzny w siebie nazywamy jednokładnością o środku w punkcie S i skali $k \notin \{0, 1\}$, gdy dla każdego punktu A mamy $\overrightarrow{Sf(A)} = k \cdot \overrightarrow{SA}$.

Uwaga 1 (Własności jednokładności)**.** Jeśli f jest jednokładnością, to prawdziwe są następujące:

1. f jest bijekcją ($k \neq 0$), nie będącą identycznością ($k \neq 1$), jej jedynym punktem stałym jest S.
2. Dla $k \neq -1$, f NIE JEST inwolucją, tzn. jeśli A przechodzi na A', to A' niekoniecznie przechodzi na A.
3. Jeśli $A' = f(A)$ oraz $B' = f(B)$, to $A'B'||AB$ oraz $A'B' = k \cdot AB$.
4. Punkty współliniowe przechodzą na punkty współliniowe, zachowany jest podział odcinka.
5. Prosta przechodzi na doń równoległą.
6. Okrąg przechodzi na okrąg, styczna przechodzi na styczną.

Uwaga 2 (Jednokładności i okręgi)**.** Dla dowolnych dwóch nieprzystających okręgów o_1 i o_2 istnieją dokładnie dwie jednokładności przenoszące o_1 na o_2 - jedna ma skalę dodatnią, druga ujemną.

Twierdzenie 2 (Trójkąty jednokładne)**.** Jeśli trójkąty ABC i $A'B'C'$ spełniają $AB||A'B'$, $BC||B'C'$, $CA||C'A'$, to AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.

Przykłady

Przykład 1. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Proste AD i BC tną się w P, zaś przekątne AC i BD tną się w Q. Udowodnij, że prosta PQ przechodzi przez środki podstaw AB i CD.

Przykład 2. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie T. Prosta k jest styczna zewnętrznie do o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B. Punkt C jest taki, że odcinek AC jest średnicą o_1. Udowodnij, że punkty B, T, C są współliniowe.

Twierdzenie 3 (Okrąg dziewięciu punktów / okrąg Feuerbacha)**.** Punkty O i H to odpowiednio środek okręgu opisanego i ortocentrum trójkąta ABC. Wówczas spodki wysokości z A, B, C, środki boków AB, BC, CA i środki odcinków AH, BH, CH leżą na jednym okręgu o środku w śrdoku odcinka OH i promieniu będącym połową promienia okręgu opisanego na ABC.

Autor: Mikołaj Znamierowski Prowadzący: Mikołaj Znamierowski

Twierdzenie 4 (IM lemma)**.** Niech okrąg dopisany do trójkąta ABC naprzeciwko A styka się z bokiem BC w punkcie D. Niech ponadto M to środek BC oraz I to środek okręgu wpisanego w ABC. Wówczas $IM||AD$.

Twierdzenie 5 (Punkt i prosta Nagela)**.** Dany jest trójkąt ABC, w którym D, E, F to punkty styku okręgów dopisanych naprzeciwko A, B, C do odpowiednich boków. Wówczas, proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie N. Ponadto, jeśli I oraz S to odpowiednio środek okręgu wpisanego i środek ciężkości w ABC, to S leży na odcinku NI oraz $SN = 2 \cdot IS$.

Zadania

1. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach P i Q. Wspólna styczna zewnętrzna okręgów o_1 i o_2 jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach A i B. Wykazać, że proste PA i QB przecinają się w punkcie leżącym na okręgu o.
2. Niech $ABCD$ będzie kwadratem. Punkty E oraz F leżą na prostej AB. Niech $EFGH$ będzie kwadratem leżącym po tej samej stronie prostej AB, co punkt C. Dowieść, że proste AG, BH, DF są współpękowe.
3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie D. Dowieść, że środek okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz środki odcinków AB i CD leżą na jednej prostej.
4. Okręgi o_1 oraz o_2 są wpisane w kąt o wierzchołku P. Prosta przechodząca przez punkt P przecina okręgi o_1, o_2 w punktach A, B, C, D, które leżą na prostej w tej właśnie kolejności. Styczne do tych okręgów w punktach A i D przecinają się w punkcie X. Dowieść, że $XA = XD$.
5. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Niech D, E, F będą środkami ciężkości odpowiednio trójkątów BCP, CAP, ABP. Dowieść, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
6. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Niech X oznacza środek wysokości poprowadzonej z A. Niech D będzie punktem styku BC do okręgu dopisanego do trójkąta ABC naprzeciw A. Udowodnij, że X, I, D są współliniowe.
7. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC. Niech D, E, F to środki okręgów opisanych na trójkątach BCH, ACH, ABH odpowiednio. Udowodnij, że proste AD, BE, CF są współpękowe.
8. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie w punkcie P. Pewna prosta przecina okrąg o_1 w punktach A, B, a okrąg o_2 w punktach C, D. Wykazać, że $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$.
9. (Prosta Eulera) Wykazać, że w dowolnym trójkącie otrocentrum H, środek okręgu opisanego O oraz środek ciężkości S leżą na jednej prostej. Wykazać ponadto, że punkt S leży na odcinku OH oraz $OS : SH = 1 : 2$.
10. Trójkąt $A'B'C'$ leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $AB||A'B'$, $BC||B'C'$ oraz $CA||C'A'$. Proste $B'C$ i BC' przecinają się w punkcie X, proste $C'A$ i CA' przecinają się w punkcie Y, proste $A'B$ i AB' przecinają się w punkcie Z. Wykazać, że proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie.

Autor: Mikołaj Znamierowski

Prowadzący: Mikołaj Znamierowski

11. Okręgi o_1 i o_2, odpowiednio o promieniach r_1 i r_2, są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu r odpowiednio w punktach A i B. Wykazać, że jeden z punktów przecięcia okręgów o_1 i o_2 leży na odcinku AB wtedy i tylko wtedy, gdy $r_1 + r_2 = r$.

12. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie D. Punkt E leży na boku AB i spełnia warunek $AD = BE$. Odcinek CE przecina okrąg ω w punkcie X, leżącym bliżej punktu C. Punkt N jest punktem Nagela trójkąta ABC. Udowodnić, że $CX = NE$.

13. Przez punkt S przechodzą trzy okręgi ω_1, ω_2, ω_3 o promieniach r. Oznaczmy drugie punkty przecięć: $A = \omega_2 \cap \omega_3$, $B = \omega_1 \cap \omega_3$, $C = \omega_1 \cap \omega_2$. Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie ABC ma promień r.

14. W konfiguracji z poprzedniego zadania, rozpatrujemy trzy styczne zewnętrzne do par okręgów ω_i, ω_j, które nie przecinają trzeciego okręgu. Styczne te wyznaczają trójkąt o wierzchołkach D, E, F, gdzie punkty te leżą naprzeciwko A, B, C odpowiednio. Udowodnij, że proste AD, BE, CF są współpękowe.

15. W konfiguracji z poprzednich dwóch zadań udowodnić, że punkt S, środek okręgu opisanego na DEF i środek okręgu wpisanego w DEF są współliniowe.

16. Punt S jest środkiem ciężkości trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na BC. Półprosta DS przecina okrąg opisany na ABC w X. Udowodnij, że $AX || BC$.

17. Dane są okręgi o_1, o_2, o_3 o różnych promieniach. Wspólne styczne zewnętrzne do o_i oraz o_j przecinają się w punkcie A_k, gdzie $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3 są współliniowe.