PreOM 2023 - Dzień 1

Rozwiązania

Zadanie 1. Niech CH będzie wysokością w trójkącie ABC, gdzie $\sphericalangle ACB = 90°$. Dwusieczna $\sphericalangle BAC$ przecina CH i CB w P i M odpowiednio. Dwusieczna $\sphericalangle ABC$ przecina CH i CA w Q i N odpowiednio. Udowodnij, że prosta przechodząca przez środki PM i QN jest równoległa do AB.

Rozwiązanie:
Niech E, F będą środkami odpowiednio QN i PM. Niech X, Y będą przecięciami odpowiednio CE i CF z AB. Zauważmy, że:

$$\measuredangle CMP = \frac{\pi}{2} - \measuredangle CAM = \frac{\pi}{2} - \measuredangle BAM = \measuredangle APH = \measuredangle CPM.$$

Zatem $CM = CP$, dodatkowo $CF \perp CP$. Wiemy, że AF jest dwusieczną $\measuredangle CAY$, więc dostajemy $\triangle CAF \equiv \triangle YAF$. Zatem $CF = FY$. Analogicznie $CE = EX$. Stąd $EF \parallel AB$.

■

Zadanie 2. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające:

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad xf(x + xy) = xf(x) + f(y)f(x^2)$$

Rozwiązanie:
Podstawmy $x = y = 0$:

$$0 = 0 + f(0)^2$$
$$0 = f(0)$$

Podstawmy $x = 1, y = -1$:

$$f(0) = f(1) + f(1) \cdot f(-1)$$
$$0 = f(1)(1 - f(-1))$$
$$f(1) = 0 \vee f(-1) = -1$$

Załóżmy $f(1) = 0$. Podstawmy $x = 1$. Mamy:

$$f(1 + y) = f(1) + f(1) \cdot f(y)$$
$$f(1 + y) = 0$$
$$f \equiv 0$$

Jest to poprawne rozwiązanie.
Teraz załóżmy $f(-1) = -1$. Podstawmy $y = -1$:

$$xf(0) = xf(x) - f(x^2)$$

- $f(x^2) = xf(x)$

Podstawiając $x = -1$:

$$f(1) = -f(-1) = 1$$

Podstawiając $x = 1$ do oryginalnego równania dostajemy:

$$f(1 + y) = f(1) + f(1)f(y)$$

$$\bigstar \quad f(y + 1) = 1 + f(y)$$

Wróćmy do głównego równania:

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(y)f(x^2)$$

Używając $\bullet$ pozbądźmy się $f(x^2)$:

$$xf(x + xy) = xf(x) + xf(y)f(x)$$

Załóżmy $x \neq 0$:

$$f(x(y + 1)) = f(x) + f(y)f(x)$$

Podstawmy $y' = y + 1$:

$$f(xy') = f(x) + f(y' - 1)f(x)$$

Użyjmy $\bigstar$:

$$f(xy') = f(x) + (f(y') - 1)f(x)$$

$$\blacktriangle \quad f(xy') = f(y')f(x)$$

Podstawiając $y' = x$:

$$f(x^2) = f(x)^2$$

I używając $\bullet$:

$$xf(x) = f(x)^2$$

Znaczy to, że dla każdego x mamy $f(x) = 0$ lub $f(x) = x$ (założyliśmy wcześniej $x \neq 0$, ale wiemy że $f(0) = 0$).
Jeżeli dla jakiegoś $a \neq 0$ zachodzi $f(a) = 0$, możemy do $\blacktriangle$ podstawić $x = a$ i mamy:

$$f(ay') = f(a)f(y') = 0$$

$$f \equiv 0$$

Co jak już ustaliliśmy jest rozwiązaniem.
Jeśli dla żadnego $a \neq 0$ nie zachodzi $f(a) = 0$ dostajemy, że dla każdego a $f(a) = a$, drugie rozwiązanie.

$\blacksquare$

Zadanie 3. Niech $x, y \in \mathbb{Z}^+$. Pokaż, że jeśli $\frac{x^2+y^2+x+y-1}{xy-1}$ jest liczbą całkowitą, to jest równe 7.

Rozwiązanie:

$$\frac{x^2 + y^2 + x + y - 1}{xy - 1} = k$$

$$x^2 + y^2 + x + y - 1 - kxy + k = 0$$

Zauważmy, że jeśli (x, y) jest rozwiązaniem to (y, x) także.
Jeżeli $y = 1$ mamy:

$$x^2 + 1 + x + 1 - 1 - kx + k = 0$$

$$x^2 + (1-k)x + 1 + k = 0$$
$$\Delta = k^2 - 2k + 1 - 4 - 4k = k^2 - 6k - 3 = (k-3)^2 - 12$$

Potrzebujemy aby $(k-3)^2 - 12$ było kwadratem. Aby tak było, 12 musi być różnicą 2 kwadratów. Różnice 2 kwadratów to sumy kolejnych liczby nieparzystych, jedyny sposób aby przedstawić 12 jako sumę kolejnych liczb nieparzystych to $5+7$, więc jedyny sposób aby 12 było różnicą kwadratów to $12 = 4^2 - 2^2$. Daje nam to $k - 3 = 4$, czyli $k = 7$.
Możemy dalej założyć $x, y > 1$.
Dla $k = 1$ mamy:

$$x^2 + y^2 + x + y - 1 - xy + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + x + y - xy = 0$$
$$\Delta = (1-y)^2 - 4(y^2 + y) = 1 - 2y + y^2 - 4y^2 - 4y = -3y^2 - 6y + 1 < 0$$

Dla $k = 2$ mamy:

$$x^2 + y^2 + x + y - 1 - 2xy + 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + x + y + 1 - 2xy = 0$$
$$\Delta = (1-2y)^2 - 4(y^2 + y + 1) = 1 + 4y^2 - 4y - 4y^2 - 4y - 4 = -8y - 3 < 0$$

Możemy dalej założyć $k \geqslant 3$.
Dla $x = y$ mamy:

$$x^2 + x^2 + x + x - 1 - kx^2 + k = 0$$
$$(2-k)x^2 + 2x + k - 1 = 0$$

Dla $k \geqslant 3$ mamy równanie kwadratowe:

$$\Delta = 4 - 4(2-k)(k-1) = 4 - 8k + 8 + 4k^2 - 4k = 4k^2 - 12k + 12 = 2^2(k^2 - 3k + 3)$$

Potrzebujemy aby $k^2 - 3k + 3$ było kwadratem. Potencjalnymi kandydatami są $(k-1)^2$ oraz $(k-2)^2$. Jednak:

$$(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1 > k^2 - 3k + 3$$
$$(k-2)^2 = k^2 - 4k + 4 < k^2 - 3k + 3$$

Wszystkie mniejsze kwadraty oczywiście także będą mniejsze, więc $k^2 - 3k + 3$ nie może być kwadratem.
Załóżmy teraz, że istnieją rozwiązania z $k \neq 7$. Ponieważ $x, y \in \mathbb{Z}^+$ możemy wziąć rozwiązanie z minimalnym $x + y$. Mamy, z powyższych obserwacji, $x, y > 1$, $x \neq y$, $k \geqslant 3$. Załóżmy bez straty ogólności $x > y$. Mamy:

$$x_+ = \frac{ky - 1 + \sqrt{(ky-1)^2 - 4(y^2 + y - 1 + k)}}{2}$$
$$x_- = \frac{ky - 1 - \sqrt{(ky-1)^2 - 4(y^2 + y - 1 + k)}}{2}$$
$$x = x_+ \vee x = x_-$$

Z wzorów Viette'a, oraz faktu, że $x_+, x_- > 0$ widzimy, że nie tylko jedno rozwiązanie jest naturalne. Z minimalności wybranego rozwiązania wynika więc, że $x = x_-$, ponieważ $x_- + y \leqslant$

$x_+ + y$. Jednak czy możliwe jest $x = x_-$?
Otóż nie! Weźmy nierówność $x > y$ i podstawmy $x = x_-$:

$$\frac{ky - 1 - \sqrt{(ky-1)^2 - 4(y^2 + y - 1 + k)}}{2} > y$$

$$ky - 1 - \sqrt{(ky-1)^2 - 4(y^2 + y - 1 + k)} > 2y$$

$$-\sqrt{(ky-1)^2 - 4(y^2 + y - 1 + k)} > 2y - ky + 1$$

$$\sqrt{(ky-1)^2 - 4(y^2 + y - 1 + k)} < ky - 1 - 2y$$

$$(ky-1)^2 - 4(y^2 + y - 1 + k) < k^2y^2 + 1 + 4y^2 - 2ky + 4y - 4ky^2$$

$$k^2y^2 + 1 - 2ky - 4y^2 - 4y + 4 - 4k < k^2y^2 + 1 + 4y^2 - 2ky + 4y - 4ky^2$$

$$4 - 4k < 8y^2 + 8y - 4ky^2$$

$$4ky^2 + 4 < 8y^2 + 8y + 4k$$

$$ky^2 + 1 < 2y^2 + 2y + k$$

Im większe y tym trudniej o tą nierówność – $k \geqslant 3, y > 1$, gdy zwiększamy y o 1 lewa strona rośnie o $2ky + k$ a prawa o $4y + 4$, lewa rośnie o więcej.
Rozważmy $y = 3$:

$$9k + 1 < 18 + 6 + k$$

$$8k < 23$$

Ponieważ $k \geqslant 3$ jest to niemożliwe.
Rozważmy $y = 2$:

$$4k + 1 < 8 + 4 + k$$

$$3k < 11$$

Jest to możliwe tylko dla $k = 3$. Rozważmy oddzielnie $k = 3, y = 2$:

$$x_- = \frac{6 - 1 - \sqrt{(6-1)^2 - 4(4 + 2 - 1 + 3)}}{2} = \frac{5 - \sqrt{25 - 4(8)}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Oznacza to, że nasza nierówność nie może zachodzić, sprzeczność.

■

Zadanie 4. W planszę 2013×2013 wpisujemy kolejno liczby $1, 2, 3, \ldots 2013^2$ (kolejne wiersze wypełniamy od lewej do prawej), następnie usuwamy jednocześnie wszystkie wiersze i kolumny posiadające co najmniej jeden kwadrat $(1, 4, 9, \ldots)$ Ile komórek planszy nie zostało usuniętych?

Rozwiązanie:
Zastanówmy się co to znaczy, że kolumna i została usunięta. Znaczy to, że istnieje taki x, że $x^2 \equiv_{2013} i$. Zostanie usunięte więc tyle kolumn, ile jest reszt kwadratowych modulo 2013.

$$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$$

Oznaczmy przez $f(n)$ liczbę reszt kwadratowych modulo n.
Dla $a \perp b$ mamy $f(ab) = f(a)f(b)$. Pokażmy to tworząc injekcje z par reszt modulo a i b do reszt modulo ab oraz na odwrót:

$$i \equiv_a x^2$$

$$j \equiv_b y^2$$

$$\exists_{k<ab} k \equiv_a i \wedge k \equiv_b j$$

$$\exists_{z<ab} z \equiv_a x \wedge z \equiv_b y$$

$$k \equiv_a z^2 \wedge k \equiv_b z^2 \Rightarrow k \equiv_{ab} z^2$$

Oczywiście k generowane w ten sposób są różne dla różnych i, j.
Do tego:

$$k \equiv_{ab} z^2 \Rightarrow k \equiv_a z^2 \wedge k \equiv_b z^2$$

Tutaj oczywiście te pary reszt także będą różne:

$$k \equiv_a k' \wedge k \equiv_b k' \Rightarrow k \equiv_{ab} k'$$

Reszty modulo liczba pierwsza łatwo zliczyć:

$$i^2 \equiv_p j^2 \Rightarrow (i-j)(i+j) \equiv_p 0 \Rightarrow i \equiv_p j \vee i \equiv_p -j$$

Znaczy to, że liczby od 1 do $p-1$ parują się tworząc te same reszty, a 0 zostaje samo, dając nam $\frac{p+1}{2}$ reszt kwadratowych.
Łącząc te 2 fakty mamy, że reszt kwadratowych modulo 2013 jest:

$$\frac{3+1}{2} \cdot \frac{11+1}{2} \cdot \frac{61+1}{2} = 372$$

Teraz policzmy ile wierszy zostanie usuniętych.
Jeśli $(i+1)^2 - i^2 \geqslant 2013$ mamy gwarancję, że te kwadraty są w różnych wierszach. Przekształcając ten warunek mamy:

$$2i + 1 \geqslant 2013$$

$$i \geqslant 1006$$

Z kolei dla $i < 1006$ wiemy, że skok był mniejszy od wielkości wiersza, więc żaden wiersz nie mógł być w całości przeskoczony.
Popatrzmy w którym wierszu jest 1006^2:

$$\frac{1006^2}{2013} = 502\frac{1510}{2013}$$

Więc pierwsze 503 wiersze są zaznaczone w ten sposób, i każdy z następnych $2013 - 1006 = 1007$ skoków ląduje w innym wierszu. Łącznie kwadraty są więc w 1510 wierszach.
Zostanie więc nam:

$$2013 \cdot 2013 - 2013 \cdot 1510 - 2013 \cdot 372 + 1510 \cdot 372 = 4052169 - 3039630 - 748836 + 561720 = 825423$$

Pierwszy składnik sumy to wszystkie pola, drugi to te w których wierszach jest kwadrat, trzeci to te w których kolumnach jest kwadrat, a czwarty to te gdzie i w kolumnie i w wierszu jest kwadrat (one były odjęte 2 razy).

■