Jakub Baranowski

Kółeczko 30.11.2023r.

1. Ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ liczb naturalnych spełnia $a_i | a_{i-1} + a_{i+1}$ dla $i = 2, 3, \ldots n-1 \quad (n \geqslant 3)$. Udowodnij proszę, że liczba
$$a_1 a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i a_{i+1}}$$
jest naturalna.

2. W turnieju szachoboksu wzięło udział n zawodników. Każdy rozegrał mecz z każdym i nie było remisów. Mistrz to taka osoba M, że dla każdego gracza G, M wygrał z G, **lub** istnieje taki gracz T, że M wygrał z T oraz T wygrał z G. Pokaż, że:
   (a) Istnieje przynajmniej jeden mistrz.
   (b) Nie możliwe jest, aby istniało dokładnie dwóch mistrzów.
   (c) Dla każdego $n \geqslant 3$ możliwe jest, aby istniało dokładnie trzech mistrzów.
   (d) Jeżeli $n > 4$, to możliwe jest, aby każdy był mistrzem.

3. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi
$$2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant 3\left(a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b)\right).$$

4. Rozłączne okręgi o_1, o_2 o środkach odpowiednio I_1, I_2, są styczne do prostej k odpowiednio w punktach A_1, A_2 oraz leżą po tej samej jej stronie. Punkt C leży na odcinku $I_1 I_2$, przy czym $\angle A_1 C A_2$ jest prosty. Dla $i = 1, 2$ niech $B_i \neq A_i$ będzie punktem, w którym prosta $A_i C$ przecina okrąg o_i. Dowieść, że prosta $B_1 B_2$ jest styczna do okręgów o_1 i o_2.

5. Znajdź wszystkie takie trójki (a, b, p) liczb całkowitych dodatnich, że p jest liczbą pierwszą oraz
$$a^p = b! + p$$

6. Łamigłówka jeżeli ktoś nie ma ochoty na zadania olimpijskie: Na (płaskiej) ziemi zbudowane są dwie drogi (krzywe). Jedna zaczyna się w punkcie A i kończy w punkcie B, natomiast druga prowadzi z punktu A' do punktu B'. Wiadomo, że możliwe jest, aby dwa samochody wyjechały z punktów A i A' związane sznurkiem o długości 1km i dojechały do punktów B i B' bez rozrywania sznurka. Xavery wyrusza z A i jedzie do B, a Yeti wyrusza z B' i jedzie do A'. Czy możliwe jest, aby Xavery i Yeti dokonali swych podróży pozostając zawsze w odległości większej niż 1km?

Szkic rozwiązania zadania pierwszego: Zadanie rozwiążemy indukcyjnie. Łatwo sprawdzamy prawdziwość tezy dla $n = 3, 4$. Przypuśćmy teraz, że teza jest prawdziwa dla n-1 oraz n i rozważmy ciąg $n + 1$ liczb a_i. Z założenia indukcyjnego wiemy, że
$$s_n = a_1 a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i a_{i+1}}$$
jest liczbą całkowitą. Natomiast $s_{n+1} = a_{n+1}(s_n/a_n + a_1/a_n a_{n+1}) = (a_{n+1} s_n + a_1)/a_n$, a $a_n | a_{n-1} + a_{n+1}$, więc wystarczy udowodnić, że $a_n | a_1 - a_{n-1} s_n$. Ale $a_1 - a_{n-1} s_n = a_n s_{n-1}$, co kończy dowód kroku indukcyjnego QED.