Metody Sumowania

Miron Hunia

26 września 2023

1 Oznaczenia

W tym skrypcie używam poniższych oznaczeń. Nie wszystkie z nich są przyjętym standardem.

$$[p(k)] := \begin{cases} 1 & \text{jeśli wyrażenie logiczne } p(x) \text{ jest spełnione} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$x^{\overline{n}} := x(x+1)\dots(x+n-1)$$
$$x^{\underline{n}} := x(x-1)\dots(x-n+1)$$

Powyższe definicje uogólniam na wszystkie $n \in \mathbb{Z}$ poprzez

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

Spełnione są poniższe własności.

$$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$$
$$x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\underline{n}}$$
$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}$$
$$x^{\underline{n}} = (x-n+1)^{\overline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$$

Uogólniam symbol dwumianowy na wszystkie $k \in \mathbb{N}$ i dowolne $z \in \mathbb{C}$.

$$\binom{z}{k} = \frac{z^{\underline{k}}}{k!}$$

Dla ciągu (a_n) definiuję operatory

$$\mathrm{E}a_n := a_{n+1}$$
$$\Delta a_n := a_{n+1} - a_n$$
$$\Sigma a_n := \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \Delta^{-1} a_n$$
$$\mathbf{id}a_n := a_n$$

W analogiczny sposób definiuję działanie powyższych operatorów na funkcji f o dziedzinie $\mathbb{N}$.

2 Podstawy sum

Poniżej cztery sposoby na zapisanie sumy kwadratów liczb od 1 do n, używając różnych notacji.

$$1 + 4 + \dots + n^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \sum_{\substack{x=k^2 \\ 1 \le x \le n^2}} x \qquad \sum \left[x = k^2\right] \left[1 \le x \le n^2\right]$$

2.1 Przekształcenia algebraiczne sum

Twierdzenie 1 (Zmiana kolejności sumowania (!!!))

$$\sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{b\in\mathcal{B}} f(a,b) = \sum_{b\in\mathcal{B}}\sum_{a\in\mathcal{A}} f(a,b)$$

Twierdzenie 2 (Rozdzielność sumowania względem mnożenia)

$$\left(\sum_{a\in\mathcal{A}} f(a)\right)\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} g(b)\right) = \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ b\in\mathcal{B}}} f(a)g(b)$$

Twierdzenie 3 (Podstawienie) *Jeśli funkcja g jest różnowartościowa, to*

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} f(g(a)) = \sum_{b\in g(\mathcal{A})} f(b)$$

Nawet gdy g nie jest różnowartościowa, można zapisać

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} f(g(a)) = \sum_{b\in g(\mathcal{A})} f(b)\cdot|\{a\in\mathcal{A} : g(a)=b\}|$$

Mimo, że te własności zdają się oczywiste, to ich zastosowanie (szczególnie zmiana kolejności sumowania) to bardzo często kluczowy krok w obliczeniu sumy. Często opłaca się zamienić pojedynczą sumą na dwie zagnieżdżone sumy tylko po to, aby zastosować zmianę kolejności sumowania.

2.2 Ważne sumy

- (Suma ciągu geometrycznego) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, dla $|x|<1$.
- (Uogólniony wzór dwumianowy) $\sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k} z^k = (1+z)^\alpha$
- $\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \Sigma n^{\underline{m}} = \frac{1}{m+1} n^{\underline{m+1}}$ (Zauważ podobieństwo do $\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$)

Nawet te pozornie proste sumy kryją w sobie zaskakujące szczególne przypadki. Poniżej kilka z nich. Weźmy pochodną sumy ciągu geometrycznego. Dostajemy

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{d}{dx}\left((1+\sum_{k=1}^{n} x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

Pomysł z pochodną sprawdza się również przy obliczaniu bardziej skomplikowanych sum.
Wstawmy $x := e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ do sumy ciągu geometrycznego. Dostajemy

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha) + i\sum_{k=0}^{n}\sin(k\alpha) = \frac{e^{i\alpha(n+1)}-1}{e^{i\alpha}-1}$$

Przekształcając nieco prawą stronę i separując częsci rzeczywistą i urojoną dostajemy zgrabny wzór na sumę cosinusów i sinusów wielokrotności ustalonego kąta.
Wstawiając $\alpha = -\frac{1}{2}$ do uogólnionego wzoru dwumianowego i odpowiednio upraszczając dostajemy

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = \sum_{k\geq 0}\left(\frac{-1}{4}\right)^k\binom{2k}{k} z^k$$

Bardziej skomplikowane sumy będziemy chcieli upraszczać, sprowadzając je do wariantów znanych sum.

Indukcja jest jedną z najbardziej elementarnych metod dowodzenia sum. Ma jednak dużą wadę, ponieważ indukcja nie pozwala nam znaleźć wzoru na sumę, a jedynie go udowodnić. Poniżej przedstawię kilka elementarnych metod sumowania, które nie mają tej wady.

2.3 Metoda zaburzania

Niech $A_n = \Sigma a_n$. Metoda zaburzania polega na wyodrębnieniu pierwszego i ostatniego wyrazu sumy A_{n+1} i przyrównaniu rezultatów:

$$A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n = A_n + a_n$$

Chcemy uzależnić $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$ od $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$, najpewniej poprzez uzależnienie a_{k+1} od a_k. Metoda zaburzania działa więc najlepiej w przypadku, gdy w ciągu (a_n) są oczywiste zależności pomiędzy a_n i a_{n+1}.
Przykład. Policzmy Σa_n dla $a_n = x^n$ z metody zaburzania.

$$A_n + a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k = 1 + x\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + xA_n$$

Stąd $A_n + x^n = 1 + xA_n \Rightarrow A_n = \frac{1-x^n}{1-x}$.
Przykład. Policzmy Σa_n dla $a_n = x^2$ z metody zaburzania.

$$A_n + n^2 = a_0 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} 2k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = A_n + 2\sum_{k=0}^{n-1} k + n$$

Oj! A_n skraca się po obu stronach, więc nie możemy go wyliczyć. Nie kończymy jednak z pustymi rękami, dostaliśmy bowiem

$$2\sum_{k=0}^{n-1} k = n^2 - n \Rightarrow \Sigma n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Zaburzając sumę drugich potęg dostaliśmy wzór na sumę pierwszych potęg, więc może aby dostać wzór na sumę kwadratów powinniśmy zaburzyć sumę sześcianów?
Tak właśnie jest. Jeśli weźmiemy $a_n = n^3$, to dostaniemy

$$A_n + n^3 = A_n + 3\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = A_n + 3\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{3n(n-1)}{2} + n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3}(n^3 - \frac{3n(n-1)}{2} - n)$$

2.4 Sumy teleskopowe

Spróbujmy obliczyć $A_n = \Sigma a_n$. Powiedzmy, że udało nam się zapisać a_n w postaci $b_{n+1} - b_n$ dla pewnego ciągu (b_n). Wówczas

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (b_{n+1} - b_n) = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_0$$

Zwięźlej:
jeśli $a_n = \Delta b_n$, to $A_n = \Sigma a_n = \Sigma \Delta b_n = b_n + C$.
Przykład. Weźmy $a_n = n^{\underline{m}}$. Wówczas

$$(n+1)^{\underline{m+1}} - n^{\underline{m+1}} = (n+1)n^{\underline{m}} - n^{\underline{m}}(n-m) = ((n+1) - (n-m))\, n^{\underline{m}} = (m+1)n^{\underline{m}}$$

Zatem dla $b_n = \frac{1}{m+1} n^{\underline{m+1}}$ mamy $\Delta b_n = a_n$. Stąd

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \frac{1}{m+1}\left(n^{\underline{m+1}} - 0^{\underline{m+1}}\right)$$

W szczególności, dla $m = -2$ otrzymujemy $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $b_n = -\frac{1}{n+1}$ i słynną sumę teleskopową

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

W powyższym przykładzie do teleskopowania doprowadzić można poprzez rozkład funkcji wymiernej $\frac{1}{x(x+1)}$ na ułamki proste. W ogólności przy sumach, rozkład na ułamki proste to często dobry pomysł.

2.5 Filtr pierwiastkiem z jedynki

Twierdzenie 4 *Niech ω jest pierwiastkiem równania $z^n - 1$. Wówczas*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \begin{cases} n & \text{gdy } \omega = 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Korzystając z powyższego faktu możemy "wyfiltrować" z wielomianu współczynniki o indeksach tworzących ciąg arytmetyczny.
Przykład. Niech $W(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{1000}x^{1000}$. Niech $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Wówczas

$$a_0 + a_5 + \cdots + a_{1000} = W(1) + W(\omega) + W(\omega^2) + W(\omega^3) + W(\omega^4)$$

Przykład. Spróbujmy obliczyć $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \ldots$. Oznaczam $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Używając wzoru dwumianowego dostajemy

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \binom{n}{6} + \ldots \\ (1+\omega)^n &= \binom{n}{0} + \omega\binom{n}{1} + \omega^2\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \omega\binom{n}{4} + \omega^2\binom{n}{5} + \binom{n}{6} + \ldots \\ \left(1+\omega^2\right)^n &= \binom{n}{0} + \omega^2\binom{n}{1} + \omega\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \omega^2\binom{n}{4} + \omega\binom{n}{5} + \binom{n}{6} + \ldots\end{aligned}$$

Sumując te trzy równania i dzieląc przez 3 otrzymujemy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3}$$

, gdzie $(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n$ przyjmuje wartości ze zbioru $\{-2, -1, 1, 2\}$ w zależności od reszty z dzielenia $n \mod 6$.

3 Rachunek sumowy

Wprowadzam oznaczenia

$$\Sigma f(n)\delta n := \Sigma f + C$$

$$\Sigma_a^b f(n)\delta n := \sum_{n=a}^{b-1} f(n)$$

Zachodzą wzory

$$\Sigma\left(f(n)+g(n)\right)\delta n = \Sigma f(n)\delta n + \Sigma g(n)\delta n$$

$$\Sigma c f(n)\delta n = c\Sigma f(n)\delta n$$

$$\Sigma_a^b f(n)\delta n + \Sigma_b^c f(n)\delta n = \Sigma_a^c f(n)\delta n$$

$$\Delta F = f \Leftrightarrow F = \Sigma f + C$$

$$\Sigma(f\Delta g) = fg - \Sigma(\mathrm{E}fg) \text{ (Sumowanie przez części)}$$

$$\Sigma n^{\underline{m}}\delta n = \frac{1}{m+1}n^{\underline{m+1}}$$

To nie przypadek, że każda z powyższych własności do złudzenia przypomina pewną własność w rachunku całkowym. Rachunek sumowy pozwala nam zabierać się do sum tak, jakbyśmy podchodzili do całek. Funkcje $x^{\underline{n}}$ pełnią w rachunku sumowym rolę analogiczną do tej, którą funkcje x^n pełnią w rachunku całkowym. Podobnie, funkcja 2^x to odpowiednik w rachunku sumowym funkcji e^x, a H_x (x-ta liczba harmoniczna) to dyskretny odpowiednik funkcji $\ln x$.
Przykład. Wyznaczmy wzór na sumę trzecich potęg.

$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^2 - 2x = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$

Zatem

$$\Sigma x^3\delta x = \Sigma(x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}\delta x) = \Sigma x^{\underline{3}}\delta x + \Sigma 3x^{\underline{2}}\delta x + \Sigma x^{\underline{1}}\delta x = \frac{1}{4}x^{\underline{4}} + x^{\underline{3}} + x^{\underline{2}}$$

Przykład. Wyznaczmy wzór na $\Sigma H_n\delta n$, gdzie $H_n = \Sigma\frac{1}{n+1}\delta n$.

$$\Sigma H_n\delta n = \Sigma(H_n\Delta n)\delta n = nH_n - \Sigma\Delta H_n\mathrm{E}n\delta n = nH_n - \Sigma\frac{n+1}{n+1} = nH_n - n$$

Twierdzenie 5 (Szereg Newtona) *Dla funkcji f o dziedzinie $\mathbb{N}$ zachodzi*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\underline{n}}}{n!}(\Delta^n f)(0)$$

Przykład. $\Delta 2^x = 2^x$, więc $(\Delta^n 2^x)(0) = 1$. Stąd

$$2^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\underline{n}}}{n!}$$

Z definicji $\frac{x^{\underline{n}}}{n!} = \binom{x}{n}$, więc uzyskany przez nas rezultat to wzór dwumianowy na $(1+1)^x$.
Ćwiczenie. Znajdź rozwinięcie w szereg Newtona na $H_x = \sum_{k=1}^{x}\frac{1}{k}$

4 Sumy teorioliczbowe

Przez podstawienie uzyskujemy poniższą tożsamość

Twierdzenie 6 *Niech* $f(n) = \sum_{ab=n} g(a)h(b) = \sum_{d|n} g(d)h(\frac{n}{d})$. *Niech* $G(n) = \sum_{k\leq n} g(k)$. *Wówczas*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} h(k)G(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor)$$

Gdy $f(n) = \sum_{ab=n} g(a)h(b)$, to mówimy, że $f(n)$ jest *splotem Dirichleta* funkcji g i h. Sploty Dirichleta mają wiele innych ciekawych własności, ale nie zawieram ich w tym skrypcie.

W sumach teorioliczbowych często pojawiają się funkcje $\lfloor x \rfloor$ i $x \mod n$. Są one powiązane ze sobą wzorem

$$\lfloor \frac{x}{n} \rfloor = \frac{x - x \mod n}{n} \Leftrightarrow x \mod n = x - n\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$$

Dzięki tej zależności możemy zamieniać te symbole między sobą w zależności od tego, z którym łatwiej nam się obecnie pracuje.

Twierdzenie 7 (Lemat o generowaniu reszt) *Dane są względnie pierwsze liczby* a, m. *Wówczas w ciągu* $0, a, 2a, \ldots, (m-1)a$ *każda reszta* $\mod m$ *występuje dokładnie raz.*

Powyższe twierdzenie pozwala nam, między innymi, upraszczać sumy modulo przy użyciu podstawienia.

Twierdzenie 8 (Generator) *Niech* $n \in \{p^\alpha, 2p^\alpha, 2, 4\}$, *gdzie* p *jest nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas istnieje liczba* g *(zwana generatorem) taka, że liczby* $g^0, g^1, \ldots, g^{\phi(n)-1} \mod n$ *są pewną permutacją reszt* $\mod n$ *względnie pierwszych z* n.

Powyższe twierdzenie również stosuje się w podstawieniach.
Przykład. Oblicz sumę reszt względnie pierwszych z $n \mod n$ (n jak w treści twierdzenia).

$$\sum_{k\perp n} k \equiv \sum_{i=0}^{\phi(n)-1} g^i \equiv \frac{g^{\phi(n)} - 1}{g - 1} \equiv 0 \mod n$$

Twierdzenie 9 (Trik z odwrotnością modulo p) *Dla* $k = 1, \ldots, p-1$ *zachodzi*

$$\frac{1}{k} \equiv (-1)^{k-1} \frac{1}{p} \binom{p}{k} \mod p$$

Powyższy trik zamienia kalkulację z odwrotnościami modulo p na kalkulację z współczynnikami dwumianowymi modulo p^2.

5 Zadania

1. Oblicz sumę $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k}{4k^2-1}$

2. Udowodnij tożsamość Lagrange'a

$$\sum_{1\le j<k\le n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

3. Wyraź, z użyciem H_n, sumę $\sum_{0\le k<n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$

4. Znajdź postać zwartą sumy $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$

5. (Twierdzenie Wolstenholma) Dana jest liczba pierwsza $p > 3$. Udowodnij, że

$$p^2 \mid (p-1)! \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right)$$

6. Oblicz sumę nieskończoną

$$\sum_{n\ge 1} \frac{7n+32}{n(n+2)} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

7. (Putnam 2015) Niech T oznacza zbiór wszystkich trójek liczb naturalnych, z których można zbudować trójkąt. Oblicz

$$\sum_{(a,b,c)\in T} \frac{2^a}{3^b 5^c}$$

8. Permutacją zbioru $S_n = \{1, \ldots, n\}$ nazywamy funkcję różnowartościową $\pi : S \to S$. Dla danej permutacji $\pi(n)$, oznaczmy przez p_π jej liczbę punktów stałych. Udowodnij, że dla losowej permutacji zbioru S_n, oczekiwana wartość p_π wynosi 1.

9. Niech $\phi(n)$ oznacza liczbę liczb naturalnych mniejszych niż n względnie pierwszych z n. Znajdź postać zwartą sumy

$$\sum_{k\ge 1} \phi(k) \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$$

10. (ELMO 2009) Niech p to nieparzysta liczba pierwsza i x to liczba naturalna taka, że $p \mid x^3 - 1$, ale $p \not| x - 1$. Udowodnij, że p dzieli

$$(p-1)! \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{p-1}}{p-1}\right)$$

11. Oblicz, ile niepustych podzbiorów $\{1, 2, \ldots, 2023\}$ ma sumę podzielną przez 3?

12. Oblicz sumę

$$\sum_{n\ge 0} n^2 \binom{n}{1000}$$

13. Niech $p > 5$ to liczba pierwsza. Udowodnij, że p^2 dzieli liczbę

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^3}$$

14. Niech $\Omega(n)$ oznacza sumę wykładników liczb pierwszych w rozkładzie n na czynniki. Oblicz

$$\sum_{n=1}^{2023} (-1)^{\Omega(n)} \lfloor \frac{2023}{n} \rfloor$$

6 SPOJLERY DO ZADAŃ

1. Teleskop.
2. Rutynowe ćwiczenie w przekształcaniu sum z użyciem własności z 2.1
3. Sumowanie przez części: $-\frac{1}{3}H_k \Delta k^{\underline{-3}}$
4. Podziel na dwie sumy ze względu na parzystość k.
5. Trik z odwrotnością + wzór dwumianowy.
6. Teleskop.
7. Wstaw $a = p + q, b = p + r, c = q + r$ (okrąg wpisany, $2p, 2q, 2r$ to dowolne liczby naturalne). Następnie rozdziel na iloczyn trzech szeregów geometrycznych.
8. Zmiana kolejności sumowania.
9. Twierdzenie 6, $\sum_{d|n} \phi(d) = n$.
10. Trik z odwrotnością modulo.
11. Filtr pierwiastkiem z jedynki na $-1 + (1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{2023})$.
12. Pochodna wzoru dwumianowego.
13. Trik z odwrotnością modulo.
14. Twierdzenie 6. Funkcja $\sum_{d|n} (-1)^{\Omega(d)}$ to funkcja charakterystyczna zbioru kwadratów.