Autor: Stefan Świerczewski Prowadzący: Stefan Świerczewski

Plansze – Finaliści

Teoria

Zadanka wykorzystujące plansze i szachownicę są zadaniami pojawiającymi się często. Wykorzystują one narzędzia spośród całej Kombinatoryki: grafy, zasadę szufladkową, zasadę ekstremum, kolorowanie i wiele więcej. W poniższych przykładach znajdują się motywy które powtarzają się w wielu problemach.

Przykład 1. Czy można pokryć płytkami domino figurę powstałą przez usunięcie dwóch przeciwległych rogów z szachownicy o wymiarach 8×8?

Przykład 2. W siatce $n \times n$, co najmniej $2n$ kwadratów jest oznaczonych. Udowodnij, że istnieje ciąg $P_1, P_2, \ldots, P_k$ środków oznaczonych kwadratów, taki że odcinki P_iP_{i+1} na przemian są poziome i pionowe dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant k$, gdzie $P_{k+1} = P_1$.

Przykład 3. Dla wystarczająco dużej siatki $n \times n$, każde kolorowanie jednostkowych kwadratów za pomocą k kolorów zawiera prostokąt (z narożnikami w węzłach siatki), którego wszystkie narożniki mają ten sam kolor.

Przykład 4. Rozważmy szachownicę o wymiarach $n \times n$, przy czym $n \geqslant 4$ i $p = n + 1$ jest liczbą pierwszą. Zbiór n pól nazwiemy taktycznym, jeśli po ustawieniu hetmana na każdym polu z tego zbioru żadne dwa z tych hetmanów nie będą się atakować. Dowieść, że istnieje $n - 2$ taktycznych zbiorów, których suma zawiera wszystkie pola szachownicy leżące poza jej przekątnymi.

Zadanka

Zadanie 1. Firma chce zbudować budynek o wymiarach 2025×2025 z drzwiami łączącymi pary sąsiadujących pomieszczeń. Dwa pomieszczenia są sąsiadujące, jeśli dzielą wspólną krawędź. Czy jest możliwe, aby każde pomieszczenie miało dokładnie 2 drzwi?

Zadanie 2. Na środkowym polu szachownicy $2n+1 \times 2n+1$ stoi Igor. Przez klatkę rozumiemy prostokąt złożony z pól szachownicy, który zawiera Igora. Znajdź sumaryczną liczbę pól klatek które zawierają Igora.

Zadanie 3. Na nieskończonej szachownicy kładziemy 2025 kawałków tektury o wymiarach $n \times n$, przy czym każdy kawałek pokrywa dokładnie n^2 pól. Udowodnij, że liczba pól szachownicy pokrytych nieparzystą liczbą kawałków tektury jest co najmniej n^2.

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Po polach planszy $n \times n$ porusza się ołowiany żołnierzyk, rozpoczynając swój spacer od narożnego pola. Przed wykonaniem kroku na kolejne (sąsiednie) pole, ołowiany żołnierzyk może (ale nie musi) wykonać zwrot w prawo lub w lewo. Wyznaczyć najmniejszą liczbę zwrotów, jakie żołnierzyk musi wykonać, aby odwiedzić każde pole szachownicy co najmniej raz.

Zadanie 5. Szachownica o wymiarach 98×98 ma pola naprzemiennie kolorowane na czarno i biało w standardowy sposób. Ruch polega na wybraniu prostokątnego podzbioru pól i zmianie ich koloru. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów potrzebna, aby wszystkie pola stały się czarne?

Autor: Stefan Świerczewski

Prowadzący: Stefan Świerczewski

Zadanie 6. Na nieskończonej szachownicy umieszczono 2025 niezachodzących na siebie narożników, czyli figur w kształcie litery L, złożonych z 3 jednostkowych pól. Wiadomo, że dla każdego narożnika kwadrat 2×2, który go zawiera, jest całkowicie pokryty przez narożniki. Udowodnij, że można usunąć pewną liczbę narożników od 1 do 2025, włącznie, tak aby ta własność została zachowana.

Zadanie 7. Udowodnić, że planszy 5×7 nie można pokryć pewną dodatnią liczbą warstw klocków w kształcie litery L (które można obracać) w taki sposób, aby każde pole było pokryte przez tę samą liczbę klocków.

Zadanie 8. Myszka Maja gra w grę na planszy o wymiarach 2024×2023. Na planszy ukryte są potwory w 2022 polach. Początkowo Myszka Maja nie wie, gdzie znajdują się potwory, ale wie, że w każdym wierszu (z wyjątkiem pierwszego i ostatniego) znajduje się dokładnie jeden potwór, a każda kolumna zawiera co najwyżej jednego potwora.

Myszka Maja podejmuje serię prób, aby przejść z pierwszego wiersza do ostatniego. Podczas każdej próby wybiera dowolne pole w pierwszym wierszu jako punkt startowy, a następnie porusza się do sąsiedniego pola dzielącego wspólny bok. (Może wracać na wcześniej odwiedzone pola.) Jeśli dotrze do pola z potworem, jej próba kończy się i zostaje przeniesiona z powrotem do pierwszego wiersza, aby rozpocząć nową próbę. Potwory nie zmieniają swoich pozycji, a Myszka Maja pamięta, czy dane pole zawierało potwora, czy nie. Jeśli dotrze do dowolnego pola w ostatnim wierszu, jej próba kończy się, a gra zostaje zakończona.

Wyznacz minimalną wartość n, dla której Myszka Maja ma strategię gwarantującą dotarcie do ostatniego wiersza najpóźniej przy n-tej próbie, niezależnie od rozmieszczenia potworów.

Zadania nieco trudniejsze

Zadanie 9. Każde pole planszy o wymiarach 2023×2023 zostało pomalowane na jeden z dwóch kolorów w taki sposób, że pola każdego z kolorów tworzą ścieżkę (tj. dla każdego z kolorów graf, w którym wierzchołkami są pola tego koloru, a krawędzie między nimi występują wtedy i tylko wtedy, gdy pola mają wspólny bok, jest ścieżką).

Wykazać, że środkowe pole planszy jest jednym z końców jednej z dwóch jednokolorowych ścieżek, na które podzielona została plansza.

Zadanie 10. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ liczba pokryć dominami prostokąta $n \times (n+1)$ jest nieparzysta.

Zadanie 11. Dana jest nieskończona plansza, na której każdy kwadrat jest zajęty przez żołnierza w wierszach dla $y \leqslant 0$, a wszystkie kwadraty powyżej tej linii ($y > 0$) są puste.

Żołnierze mogą poruszać się zgodnie z następującymi regułami:

- Żołnierz może skakać nad sąsiadującym żołnierzem w poziomie, pionie lub na skos, pod warunkiem że ląduje na pustym polu dokładnie po drugiej stronie.
- Żołnierz, nad którym się skacze, jest usuwany z planszy.

Udowodnij, że niemożliwe jest osiągnięcie wysokości większej niż $y = 4$, niezależnie od strategii wykonywania ruchów. Gdzie, wysokość oznacza współrzędną y danego, żołnierza.