Prosimy wypełnić poniższe pola DRUKOWANYMI literami:

Imię i nazwisko

E-mail

Nr telefonu

+	4	8									

Klasa

Rozmiar koszulki

Test kwalifikacyjny na Warsztaty Matematyczne 2023

Klasy trzecie i czwarte

Test składa się z uporządkowanych w kolejności **losowej** 30 zestawów po 3 pytania. Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić. Test trwa 180 minut.

Zasady punktacji

- Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
- Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.
- Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
- Za zadanie zrobione w całości dobrze dodatkowe **2** punkty.
- Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
- Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** pkt.

Powodzenia!

Uwaga! Przez zbiór liczb naturalnych w zadaniach rozumiemy zbiór liczb całkowitych większych lub równych 0.

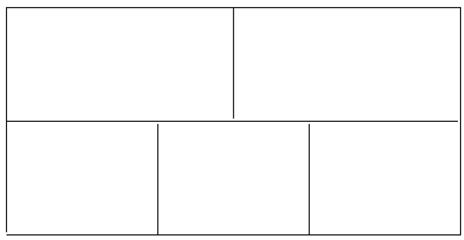
1. Liczba $\sqrt{48 - 24\sqrt{3}} - \sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$ jest:

- ☐ ujemna
- ☐ całkowita
- ☐ niewymierna

2. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono na przeciwprostokątną BC wysokość o spodku D. promienie okręgów opisanych na ABD i ACD to odpowiednio 5 i 12. Długość promienia okręgu opisanego na ABC:

- ☐ nie jest jednoznacznie wyznaczona
- ☐ jest równa 13
- ☐ jest większa niż 15

3*. Minimalna liczba pociągnięć (pociągnięcie kończy się, kiedy oderwiesz ołówek od papieru) niezbędnych do narysowania poniższej figury, jeśli żadnej linii nie wolno przechodzić dwukrotnie jest:



- ☐ równa 3
- ☐ równa 4
- ☐ równa 5

4. Dane są takie liczby dodatnie, wymierne a, b, c, d, że $ad - bc \neq 0$. Wówczas funkcja $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ jest:

- ☐ różnowartościowa
- ☐ na ($\mathbb{R}$)
- ☐ monotoniczna

5*. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 17 cm. Na bokach BC i CD obrano odpowiednio punkty E i F, że $BE = 7$ cm oraz $\angle EAF = 45°$. Wówczas:

- ☐ $BE + FD = EF$
- ☐ $BE < FD$
- ☐ jeśli pole trójkąta ECF to x cm^2 to x jest liczbą niewymierną

6. Liczby $a \leqslant b \leqslant c$ są długościami boków trójkąta ostrokątnego ABC. Wynika stąd, że:

- ☐ $a^2 + b^2 \leqslant c^2$
- ☐ równanie $\sin(x) = \frac{a+b}{c}$ ma rozwiązanie
- ☐ pole trójkąta ABC jest nie większe od $\frac{1}{2}bc$

7. Każdej literze przypisano inną cyfrę od 0 do 9:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & S & E & A & L \\
 & & S & N & A & I & L \\
+ & M & O & N & K & E & Y \\
\hline
A & N & I & M & A & L & S
\end{array}$$

- ☐ $N = 0$
- ☐ $A > 6$
- ☐ $Y < 3$

8*. Dwoje graczy gra w grę wykonując ruchy na przemian. Każdy ruch polega na zamianie dodatniej liczby całkowitej n w inną dodatnią liczbę całkowitą znajdującą się w przedziale $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$. Gracz, który nie może wykonać ruchu przegrywa. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynający gracz ma strategię wygrywającą dla liczby początkowej n wynoszącej:

☐ 44

☐ 123

☐ 789

9. Po podzieleniu wielomianu $x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2023} + x^{2024}$ przez $x^2 - 1$ otrzymujemy resztę. Czy dla x całkowitego może ona być równa

☐ 256?

☐ 369?

☐ 1111?

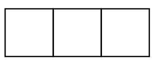
10. Funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ jest okresowa z okresem n, spełnia równania $f(a)f(b) = f(ab)$ i $f(0) = 0$. Ponadto istnieje x taki, że $f(x) = -1$. Prawdą jest, że:

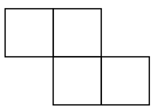
☐ dla dowolnego całkowitego $n > 2$ istnieje co najmniej jedna taka funkcja

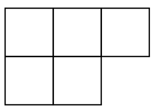
☐ jeśli n jest ustaloną nieparzystą liczbą pierwszą, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja

☐ jeśli dla danego n istnieje taka funkcja, to spełnia ona $f(-1) = -1$

11. Czy szachownicę 11x11 z usuniętym prawym dolnym rogiem da się pokryć klockami o podanym kształcie? Klocki można obracać, ale nie można odbijać symetrycznie.

☐ 40 sztukami klocków: 

☐ 30 sztukami klocków: 

☐ 24 sztukami klocków: 

12*. Liczbę nazywamy *elegancką*, jeśli da się ją jednoznacznie przedstawić w postaci $53x + 101y$ dla całkowitych nieujemnych x, y. Prawdą jest że:

- ☐ suma liczb eleganckich jest elegancka
- ☐ liczb eleganckich jest nieskończenie wiele
- ☐ 5353 jest najmniejszą liczbą postaci $53x + 101y$, która nie jest elegancka

13. Dana jest ciągła funkcja $f : [0,1] \to [0,1]$. Istnieje $a \in [0,1]$, takie że $f(a) \neq a, f(f(a)) \neq a$ ale $f(f(f(a))) = a$. Czy istnieje:

- ☐ takie $b \in [0,1]$, że $f(b) = b$?
- ☐ takie $c \in [0,1]$, że $f(c) \neq c$ ale $f(f(c)) = c$?
- ☐ takie $d \in [0,1]$, że $f(d) \neq d, f(f(d)) \neq d, f(f(f(d))) \neq d, f(f(f(f(d)))) \neq d$ ale $f(f(f(f(f(d))))) = d$?

14. Czy:

- ☐ dla każdych całkowitych $m \geqslant n \geqslant 1$ zachodzi $\frac{n^2m+11m}{nm+1} \geqslant 6$?
- ☐ dla każdych rzeczywistych a, b, c, d zachodzi $abcd - \frac{a^2}{2} - \frac{b^4}{4} - \frac{c^8}{8} - \frac{d^{16}}{16} \leqslant \frac{1}{15}$?
- ☐ dla każdych całkowitych $m > n \geqslant 1$ zachodzi $\frac{m^2-n}{m^2+n^2} \leqslant \frac{35}{36}$?

15. Dane jest radio przyjmujące dwie baterie. Aby radio zadziałało obie włożone baterie muszą być sprawne. Wkładając parę baterii do radia dokonujemy sprawdzenia. Wiemy, że:

- ☐ mamy 8 baterii, z czego 4 sprawne. Czy wystarczy 7 sprawdzeń aby na pewno uruchomić radio?
- ☐ mamy 10 baterii, z czego 4 sprawne. Czy wystarczy 10 sprawdzeń aby na pewno uruchomić radio?
- ☐ mamy 9 baterii, z czego 5 sprawnych. Czy wystarczy 6 sprawdzeń aby na pewno uruchomić radio?

16*. Liczby rzeczywiste x i y spełniają równanie $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$. Minimalna wartość wyrażenia x^2+y^2 wynosi:

- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ $\sqrt{3}$

17. Dane są trójkąty przeciwnie zorientowane ABC oraz XYZ takie, że $AB \parallel XY$, $BC \parallel YZ$ oraz $CA \parallel ZX$. Oznaczmy środki AX, BY i CZ jako K, L, M. Wiedząc że obwód trójkąta ABC wynosi 17, a obwód XYZ wynosi 15 rozstrzygnij:

- ☐ czy trójkąty ABC i KLM są podobne?
- ☐ czy obwód KLM wynosi 1?
- ☐ czy obwód KLM wynosi 2?

18. W czworościanie $ABCD$ kąty ABC i BCD są proste. Wynika z tego, że:

- ☐ $AD \geqslant BC$
- ☐ kąt ADC jest prosty
- ☐ $AB^2+BD^2=AC^2+CD^2$

19. Jeśli x ,y ,z są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi $x+y+z=1$ to prawdziwe są nierówności:

- ☐ $\frac{1}{3}(xy+yz+zx) \geqslant xy+yz+zx-\frac{2}{9}$
- ☐ $xy^2+yz^2+zx^2 \geqslant xy+yz+zx-\frac{2}{9}$
- ☐ $xy^2+yz^2+zx^2 \geqslant \frac{1}{3}(xy+yz+zx)$

20. Dana jest klika o n wierzchołkach oraz krawędziach pokolorowanych na k kolorów. Prawdą jest, że:

- ☐ dla $n=6$, $k=2$ istnieje trójkąt o jednokolorowych krawędziach
- ☐ dla $n=16$, $k=3$ istnieje trójkąt o jednokolorowych krawędziach
- ☐ dla $n=5$, $k=2$ istnieje cykl o jednokolorowych krawędziach

21. Liczby rzeczywiste a i b są różne od zera, a liczba $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ jest wymierna. Wynika z tego, że:

- ☐ obie liczby a i b są niewymierne
- ☐ co najmniej jedna z liczb a i b jest wymierna
- ☐ co najmniej jedna z liczb a i b jest niewymierna

22*. Pierwiastki wielomianu $4x^7 - 4x^6 - 25x^5 + 23x^4 + 49x^3 - 39x^2 - 30x + 18$ posiadają własność:

- ☐ suma wynosi 1
- ☐ przynajmniej jeden z nich jest niewymierny
- ☐ iloczyn jest równy $\frac{9}{2}$

23. Na pewnym n-osobowym przyjęciu nie ma takiej trójki osób, że wszyscy się znają. Czy prawdą jest że:

- ☐ istnieje $n \geqslant 7$ takie, że nie ma również żadnej trójki osób w której wszyscy się nie znają.
- ☐ jeśli $n = 11$ to na przyjęciu może być 31 znajomości
- ☐ jeśli $n = 21$ to na przyjęciu może być 111 znajomości

24*. Dany jest duży trójkąt równoboczny o boku 9. Chcemy umieścić w nim k trójkątów równobocznych o boku 1, takich że ich boki są równoległe do boków dużego trójkąta, ale trójkąty są obrócone o 180 stopni (są do góry nogami). Małe trójkąty nie mogą nachodzić na siebie (mogą za to stykać się brzegami) ani wystawać poza duży trójkąt. Czy jest to możliwe:

- ☐ dla $k = 36$
- ☐ dla $k = 63$
- ☐ dla $k = 55$

25. Liczba uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniających układ równań

$$\begin{cases} x + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z = a \end{cases}$$

wynosi:

- ☐ 3 gdy $a = 1$
- ☐ 2 gdy $a = -0,09$
- ☐ 8 gdy $a = 8$

26. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x$. Liczba par różnych liczb całkowitych a, b spełniających równanie

$$W(a) = W(b)$$

wynosi dokładnie:

- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 5

27. Liczby całkowite dodatnie $x_1, x_2, x_3.x_4, x_5, x_6, x_7$ spełniają warunki:

$$x_6 = 144 \text{ oraz } x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n) \text{ dla } n = 1, 2, 3, 4.$$

x_7 jest równe:

- ☐ 3456
- ☐ dowolnej wielokrotności 288
- ☐ nie da się jednoznacznie wyznaczyć wartości x_7

28. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Ile wynosi liczba możliwych wartości iloczynu $k \cdot m$, gdzie k, m są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności

$$n^2 \leqslant k \leqslant m(n+1)^2?$$

- ☐ $2n^2 + 4n$
- ☐ $2n^2 + 5n + 2$
- ☐ $2n^2 + 5n + 3$

29. Liczba pierwsza $p > 3$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Niech

$$a_k = k^2 + k + 1 \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots, p-1.$$

Reszta z dzielenia przez p iloczynu $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{p-1}$ wynosi

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3

30. Dane są pary funkcji f, g określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x.$$

Wynika z tego, że:

- ☐ funkcje f i g są liniowe
- ☐ istnieje dokładnie jedna para takich funkcji
- ☐ istnieje nieskończenie wiele takich par funkcji