Teoria liczb 26.09.2023

1. Udowodnij, że jeżeli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P}$, to:

$$p \mid a_1^p + a_2^p + \cdots + a_k^p \Leftrightarrow p \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

2. Rozwiązać w liczbach dodatnich całkowitych m, n równanie

$$1! + 2! + 3! + \cdots + n! = m^2$$

3. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p \mid 2^p + 1$.

4. Udowodnij, że dla dowolnego $p \in \mathbb{P}$ postaci $5k + 2$, jeśli $a^5 \equiv b^5 \pmod{p}$, to $a \equiv b \pmod{p}$

5. Mamy dane ciągi $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ i $b_1, b_2, ..., b_{p-1}$, które są permutacjami ciągu $1, 2, ..., p-1$ dla $p \in \mathbb{P}$. Czy ciąg $a_1b_1, a_2b_2, ..., a_{p-1}b_{p-1}$ też może być taką permutacją?

6. Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej całkowitej n liczba

$$\left(4 - \frac{2}{1}\right)\left(4 - \frac{2}{2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(4 - \frac{2}{n}\right)$$

jest liczbą parzystą

7. Wiemy, że:

$$34! = 295\,232\,799\,cd9\,604\,140\,847\,618\,609\,643\,5ab\,000\,000$$

w zapisie dziesiętnym, przy czym a, b, c, d są cyframi. Wyznaczyć je bez pomocy kalkulatora.

8. Udowodnij, że jeśli liczba pierwsza p jest postaci $4k + 3$, to co najmniej jedna z liczb $(2k + 1)! + 1$, $(2k + 1)! - 1$ jest podzielna przez p.

9. Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$ oraz $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$ Wówczas istnieją takie $c, d \in \mathbb{N}$, że dla każdego $i = 1, 2, ..., n$, reszta z dzielenia c przez $di + 1$ wynosi k_i

10. Udowodnij, że dla każdego dodatniego całkowitego n zachodzi

$$547 \mid n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$