Autor: Stefan Świerczewski
Prowadzący: Stefan Świerczewski

Inwersja

Teoria

Inwersją nazywamy przekształcenie płaszczyzny względem okręgu ω przy zachowaniu następujących zasad:

- Punkt Y jest obrazem punktu X wtedy, gdy punkty X i Y leżą na tej samej półprostej o początku w punkcie O oraz zachodzi równość:
$$OX \cdot OY = R^2.$$
Piszemy wtedy: $I_O^R(X) = Y$ lub prościej $I_\omega(X) = Y$.
- Przybliżając punkt X do punktu O obraz tego punktu coraz bardziej przybliża się do *nieskończoności*, zatem wprowadzamy nowy pojedynczy punkt który znajduje się w nieskończoności. Oznaczamy go jako P_∞ przy czym:
$$I_\omega(P_\infty) = O \quad \text{oraz} \quad I_\omega(O) = P_\infty.$$

Parę własności:

***Lemat* 1** Inwersja jest *inwolucją*, czyli: $I_\omega(I_\omega(X)) = X$ dla dowolnego punktu (razem z O i P_∞).

***Lemat* 2** Obrazy punktów należących do okręgu inwersyjnego są sobą samym.

***Lemat* 3** Obraz inwersyjny punktu X, leżącego na zewnątrz okręgu ω leży na prostej łączącej punkty styczności stycznych poprowadzonych z punktu X do okręgu ω i vice versa.

***Lemat* 4** Punkty A,B,A',B' leżą na jednym okręgu gdzie: $I_\omega(A) = A'$ i $I_\omega(B) = B'$

***Lemat* 5** $A'B' = \frac{R^2}{OA \cdot OB} AB$

***Lemat* 6** Prosta przechodząca przez środek okręgu O w inwersji względem tego okręgu przechodzi na samą siebie.

***Lemat* 7** Prosta w przestrzeni (nie przechodząca przez O) przechodzi na okrąg przechodzący przez O środek okręgu inwersyjnego.

***Lemat* 8** Obrazami okręgów które przechodzą przez O są proste.

***Lemat* 9** Dla trójkąta ABC inwersja względem punktu A o promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$, a następnie odbicie względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle A$, zamienia miejscami punkty B i C.

***Przykład* 1** Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , zaś ω jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg styczny do odcinków AB, AC jest styczny do okręgu ω w punkcie P, a S jest środkiem tego łuku BC okręgu ω, na którym leży punkt A. Wykazać, że punkty P, I, S są współliniowe.

Autor: Stefan Świerczewski Prowadzący: Stefan Świerczewski

Zadanka

Zad. 1 Dane są okręgi ω_1,ω_1,ω_1 oraz ω_1, takie że pary okręgów: ω_1 i ω_2,ω_2 i ω_3, ω_3 i ω_4, ω_4 i ω_1 oraz styczne. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów leżą na jednym okręgu.

Zad. 2 Niech $ABCD$ będzie czworokątem, którego przekątne AC oraz BD są prostopadłe i przecinają się w punkcie E. Udowodnij, że odbicia punktu E względem boków AB, BC, CD i DA leżą na jednym okręgu.

Zad. 3 Danych jest $n \geq 4$ punktów, przy czym żadne trzy nie leżą na na jednej prostej. Dowieść, że jeżeli okrąg przechodzący przez dowolne trzy z tych punktów przechodzi również przez czwarty, to wszystkie te punkty leżą na jednym okręgu.

Zad. 4 Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ takim, że

$$\sphericalangle APB - \sphericalangle ACB = \sphericalangle APC - \sphericalangle ABC$$

Niech I_B, I_C będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty $\triangle ABP$ oraz $\triangle APC$. Pokaż, że proste BI_B, CI_C oraz AP przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 5 W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D oraz okrąg opisany Ω na trójkącie ABC w punkcie E. Okrąg ω o średnicy DE przecina Ω ponownie w punkcie F. Pokazać, że AF jest symedianą trójkąta ABC.

Zad. 6 Trapez $ABCD$ o podstawach AD i BC jest wpisany w okrąg ω_1. Okrąg ω_2 jest stycz- ny do odcinków AB i AC oraz jest styczny we- wnętrznie do okręgu ω_1 w punkcie F . Okrąg wpi- sany w trójkąt ABC jest styczny do odcinka BC w punkcie E. Dowieść, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej.

Zad. 7 Niech $A_1A_2A_3$ będzie nierównoramiennym trójkątem, a I środkiem okręgu do niego wpisanego. Niech C_i, gdzie $i = 1, 2, 3$, będzie mniejszym okręgiem przechodzącym przez I oraz stycznym do A_iA_{i+1} i A_iA_{i+2}. Niech B_i, gdzie $i = 1, 2, 3$, będzie drugim punktem przecięcia C_{i+1} i C_{i+2}. Udowodnić, że środki okręgów opisanych na trójkątach A_1B_1I, A_2B_2I i A_3B_3I są współliniowe.

Zad. 8 Trójkąt różnoboczny ABC jest wpisany w okrąg o. Punkty D, E, F są środkami łuków BC, CA, AB niezawierających pozostałych wierzchołków trójkąta. Punkty D', E', F' są symetryczne do punktów D, E, F odpowiednio względem boków BC, CA, AB. Wykazać, że punkty D', E', F' oraz ortocentrum trójkąta ABC leżą na jednym okręgu.