Okrąg Wpisany i Środki Łuków

Antoni Łuczak

Grudzień 2023

Teoria

Twierdzenie o Trójliściu (Twierdzenie Kleinera): Dany jest trójkąt ABC. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, a J środek okręgu $A-$dopisanego do tego trójkąta. Wtedy punkty B, C, I, J leżą na jednym okręgu, którego środkiem jest środek łuku BC okregu opisanego na ABC, który nie zawiera punktu A.

Twierdzenie 2: Na bokach AB, AC trójkąta ABC leżą odpowiednio punkty P, Q. Wtedy okrąg opisany na trójkącie APQ przechodzi przez środek łuku $BAC \iff BP = CQ$.

Twierdzenie 3: Na bokach AB, AC trójkąta ABC leżą odpowiednio punkty P, Q. Wtedy P, Q, A, I leżą na jednym okręgu $\iff BP + CQ = BC$.

Zadania Proste/Średnie

* 1. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt M jest środkiem boku AB, natomiast N to drugie przecięcie prostej AI z okręgiem opisanym na ABC. Załóżmy, że $\sphericalangle BIM = 90°$. Wyznaczyć stosunek $AI : IN$.

* 2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste BI, CI przecinają okrąg opisany na ABC odpowiednio w punktach P, Q. Wykazać, że prosta PQ jest symetralną odcinka AI.

* 3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

* 4. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I. Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q, różnych od A i B. Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to $\sphericalangle CIF = 90°$.

* 5. (IMO 2006-1) Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC punkt P leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Wykazać, że $AP \geqslant AI$ oraz że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy $P = I$.

* 6. (Mszana 2023) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = 3AB$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ABC. Niech D będzie rzutem na AC środka łuku BAC okręgu opisanego na ABC. Dowieść, że D leży na okręgu opisanym na trójkącie BIC.

* 7. (69 OM-3-1) Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD.

* 8. (68 OM-3-1) Punkty P i Q leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i AC trójkąta ABC, przy czym spełniona jest równość $BP = CQ$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie R. Okręgi opisane na trójkątach BPR i CQR przecinają się ponownie w punkcie S różnym od R. Udowodnić, że punkt S leży na dwusiecznej kąta BAC.

** 9. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia $PB = PC$. Niech I, J będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABP i APC. Punkt M jest środkiem łuku BAC okręgu opisanego na trójkącie

ABC. Udowodnić, że punkty A, M, I, J leżą na jednym okręgu.

** 10. Trójkąt ABC jest wpisany w trójkąt o środku O i promieniu R oraz jest opisany na okręgu o środku w I i promieniu r. Wykazać, że

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

** 11. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Niech J_a, J_b i J_c będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, CDE. Prosta l_a jest symetryczna do prostej BC względem prostej J_bJ_c, analogicznie określamy proste l_b i l_c. Dowieść, że proste l_a, l_b, l_c przecinają się w jednym punkcie.

*** 12. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, punkt M jest środkiem boku BC, a punkt N jest środkiem łuku BAC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $\sphericalangle ANI = \sphericalangle IMB$.

*** 13. Proste AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC. Oznaczmy przez G rzut B na DF oraz przez H rzut C na DE. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie DGH przechodzi przez środek odcinka BC.

*** 14. (ISL 2005) Okrąg wpisany w trójkąt ABC spełniający $AB + AC = 3BC$ ma środek I oraz jest styczny do prostych AB, AC odpowiednio w punktach D, E. Niech K, L będą odbiciami symetrycznymi D, E względem I. Udowodnić, że punkty B, C, K, L leżą na jednym okręgu.

Zadania Trudne

**** 15. (70 OM-2-6) Punkt X leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $\sphericalangle BAX = 2\sphericalangle XBA$ oraz $\sphericalangle XAC = 2\sphericalangle ACX$. Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, który zawiera punkt A. Dowieść, że $XM = XA$.

**** 16. Niech I, O oznaczają środki okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie ABC. Punkty P, Q leżą odpowiednio na odcinkach AB, AC, przy czym $BP = CQ = BC$. Dowieść, że promień okręgu opisanego na trójkącie APQ jest równy OI.

**** 17. (IMO 2010-2) Dany jest trójkąt ABC ze środkiem okręgu wpisanego I oraz z okręgiem opisanym Γ. Prosta AI przecina Γ ponownie w D. Niech E będzie punktem na łuku BDC, a F punktem na odcinku BC tak, że $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Jeżeli G to środek IF, udowodnij, że przecięcie EI oraz DG leży na Γ.

***** 18. (65 OM-3-6) W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Proste MN oraz AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q oraz A, R. Dowieść, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR.

***** 19. (74 OM-3-2) Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC. Punkt X leży na odcinku BC po tej samej stronie prostej AI, co punkt B. Punkt Y leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC. Spełnione są przy tym równości kątów $\sphericalangle AIX = \sphericalangle XYA = 120°$. Dowieść, że prosta YI jest dwusieczną kąta XYA.

***** 20. (Rosja 2014) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > BC$. Punkty M, N leżą na bokach AB, BC odpowiednio, przy czym $AM = CN$. Proste MN, AC przecinają się w punkcie K. Niech P będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt AMK, a punkt Q środkiem okręgu $K-$dopisanego trójkąta CNK. Udowodnij, że jeśli R to środek łuku ABC okręgu opisanego na ABC, to $RP = RQ$.

****** 21. (67 OM-3-6) Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DSB, a punkt L — w trójkąt DSC. Punkt P jest odbiciem symetrycznym punktu I względem prostej KL. Wykazać, że kąt BPC jest prosty.

****** 22. W trójkącie ABC ze środkiem okręgu wpisanego I prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Niech J to odbicie I względem BC oraz niech SJ przecina okrąg opisany na ABC w punkcie $P \neq S$ Wykazać, że $AI = IP$.