Autor: Jakub Piotrowicz
Prowadzący: Jakub Piotrowicz

Teoria Gier – Finaliści

Teoria

Znane strategie

Rozwiązując zadania o grach warto zwrócać uwagę na kilka znanych trików oraz strategii:

1. Strategia kopiowanie symetrycznego ruchów przeciwnika.
2. Strategia grania wedle niezmiennika, np. dopełniania stanu gry do jakiejś wartości (liczby na tablicy do 0 modulo 7, wracania pionkiem na przekątną itp.).
3. Gdy pytanie jest o to, kto wygrywa dla danych plansz bądź liczb początkowych, warto zastanowić się nad resztami z dzielenia tych wartości przez małe liczby (zazwyczaj modulo 2, 4 albo liczba z treści zadania).
4. Analiza pozycji końcowej, na jej podstawie można na przykład stwierdzić, że liczba wszystkich ruchów wykonanych w rozgrywce musi być parzysta.
5. Rozpisywanie małych przypadków, aby zauważyć jakieś wzorce.

Tw Sprague-Grundy'ego

Rozważamy gry, w których:

- Grają dokładnie 2 osoby wykonujące ruchy na przemian.
- Gra musi się skończyć wygraną jednego z graczy. (Nie jest to gra kooperacyjna ani maksymalizacja punktów. Nie ma remisów.)
- Gra musi się skończyć (nie da się grać w nieskończoność).

Dla gier, w których nie ma możliwości doprowadzenia gry do stanu remisu możemy zdefiniować następujące pojęcia:

Definicja 1. Pozycją wygrywającą nazwiemy stan w grze, w którym gracz, który właśnie wykonuje ruch może wygrać, jeżeli będzie grał optymalnie (ma strategię wygrywającą).

Definicja 2. Pozycją przegrywającą nazwiemy stan w grze, w którym gracz, który właśnie wykonuje ruch nie ma możliwości wygrania, jakiejkolwiek strategii nie zastosuje przy optymalnej grze przeciwnika.

Stwierdzenie 1. Gdy gracz jest w pozycji wygrywającej to zawsze może wykonać ruch po którym przeciwnik jest w pozycji przegrywającej. Z drugiej strony, jeśli gracz jest w pozycji przegrywającej, to po zagraniu dowolnego ruchu jego przeciwnik otrzyma pozycję wygrywającą.

Lemat 1. Ustalmy liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ takie, że $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n > 0$ (xor). Możemy jedną z liczb zmniejszyć tak, by dalej była większa równa 0, a żeby $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$.

Dowód. Niech $y = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$. Spójrzmy na pierwszy zapalony bit y (odpowiadający za najwyższą potęgę dwójki). Wiemy, że pewna z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ musi mieć też zapalony bit przy tej samej potędze dwójki. Załóżmy, że x_i ma. Wtedy $x_i \oplus y < x_i$. Teraz jak zmniejszymy x_i do $x_i \oplus y$, wtedy $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_i \oplus y \oplus \cdots \oplus x_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus y = y \oplus y = 0$ (własność xor'a). ■

Lemat 2. Jeśli $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$ to jeśli zmienimy wartość dowolnej zmiennej na inną całkowitą nieujemną, wtedy $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{i-zmienione} \oplus \ldots \oplus x_n > 0$.

Definicja 3. Funkcja *Mex*, jest funkcją przyjmująca zbiór A i zwracająca najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną, która nie należy do A (jest to skrót od Minimal EXcluded).

Definicja 4. W danej grze możemy zdefiniować **nimliczby** (ang. nimber). Każdej pozycji przypisujemy liczbę, z czego przegrywające pozycje mają wartość 0, pozycje wygrywające mają wartość Mex wszystkich pozycji do których można dojść w jednym ruchu.

Twierdzenie 1 (Sprague-Grundy'ego)**.** Dla gry stworzonej ze zbioru gier w następujący sposób:

- Gracze mogą wykonywać dokładnie te same ruchy w danym momencie w każdej grze.
- Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu (w żadnej grze).
- Gracz może zrobić ruch w dowolnej grze podczas swojej kolejki.

Można skonstruować strategię wygrywającą, tak jak w grze *nim*. Wartość nimliczby ją określającej jest równa xorowi nimliczb gier składowych.

Podsumowując powyższe twierdzenie widzimy, że w wyżej wymienionych grach jeżeli jesteśmy na pozycji o liczbie różnej od zera, to możemy sprowadzić przeciwnika na pozycję zerową, a on nie będzie mógł sprowadzić nas na pozycję zerową, co oznacza, że ZAWSZE możemy wykonać ruch, czyli jeśli gra się skończy to wtedy przeciwnik nie może się ruszyć (Bo gdy nie ma ruchu do wykonania nimliczba jest równa zero - więc wygrywamy).

Autor: Jakub Piotrowicz

Prowadzący: Jakub Piotrowicz

Zadania

Zadanie 1. (nim na 1 stosie z ograniczeniem) Mamy stosik n żetonów, ten kto nie ma ruchu przegrywa. W danym ruchu możemy zdjąć $1, 2, 3, 4, 5$ lub 6 żetonów ze stosu. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Zadanie 2 (♡). Antoni i Bożydar grają w antynima. Zasady są takie same jak w oryginalnej grze, tylko, że osoba, która zdejmie ostatni żeton przegrywa (gramy na wielu stosach). Jak wygląda strategia w tej grze?

Zadanie 3. Mamy stosik n żetonów. W danym ruchu możemy zdjąć k żetonów ze stosu. Kto ma strategię wygrywającą w następujących wariantach?

1. k musi być potęgą dwójki $(1, 2, 4, 8, \ldots)$
2. k musi być równe 1 lub pierwsze
3. k musi być potęgą liczby pierwszej (k może być 1)
4. k musi być równe 1, 3 lub 8

Zadanie 4. Zaczynamy z $n = 2$. W danym ruchu powiększamy n o dowolny dzielnik n różny od n. Wygrywa gracz, który przekroczy 2017. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Zadanie 5. Zaczynamy z $n = 1$. W jednym ruchu powiększamy aktualną liczbę 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9 krotnie. Wygrywa gracz, który przekroczy 1000000. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Zadanie 6. Martyna i Oliwia grają w grę. Ruch polega na zamianie liczby całkowitej n na dowolną liczbę całkowitą dodatnią z przedziału $[\frac{n}{4}, \frac{n}{2}]$. Przegrywa ta, która nie może wykonać ruchu. Martyna zaczyna. Która z dziewczyn ma strategię wygrywającą?

Zadanie 7 (♡). Zapisano na tablicy liczby od 1 do 9. Antoni i Bożydar skreślają w swoim ruchu po jednej nieskreślonej liczbie. Ten, kto skreśli trzy liczby sumujące się do 15 wygrywa. Jeżeli Antoni zacznie grę, to który z graczy powinien ją wygrać?

Zadanie 8 (♡). Antoni i Bożydar ruszają się na przemian pionkiem po szachownicy. Dozwolony ruch figurą polega na przesunięciu jej o dowolną liczbę pól w dół, bądź w lewo, o ile nie wyjdziemy wtedy poza obręb planszy. Osoba, która nie może wykonać ruchu (bo choć jest jej kolej, to figura stoi w narożniku) przegrywa. Dla danych współrzędnych początkowych x, y stwierdź, który gracz wygra, jeśli obaj gracze zagrają optymalnie.

Zadanie 9. Monety leżą na n schodkach. W każdym ruchu możemy przenieść jedną monetę na dowolny niższy schodek. Na schodku i leży a_i monet. Przegrywa gracz bez ruchu. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Zadanie 10. Marek i Artur na zmianę rysują przekątne 120 kąta foremnego. Przekątne nie mogą się przecinać. Gdy gracz nie może wykonać ruchu przegrywa. Marek zaczyna, który z graczy ma strategię wygrywającą?

Zadanie 11 (♡). Dane jest równanie $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Gracze na zmianę ustalają po jednym, jeszcze nieustalonym, całkowitym, niezerowym współczynniku a, b lub c. Czy pierwszy gracz może grać tak, aby uzyskać wielomian o pierwiastkach całkowitych?

Zadanie 12 (♡)**.** Antoni i Bożydar wyróżniają liczby całkowite dodatnie mniejsze od n na zmianę. Nie można wyróżnić liczby będącej dzielnikiem wyróżnionej liczby. Gracz, który nie może wykonać ruchu przegrywa. Antoni zaczyna, czy ma strategię wygrywającą?

Zadanie 13 (♡)**.** Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Bartek i Staś grają w grę na mapie kraju składającego się z n wysp. Na dokładnie 2 wyspach znajdują się fabryki. Początkowo w całym kraju nie ma żadnego mostu. Bartek i Staś na zmianę wybierają 2 wyspy I, J takie, że:

- nie ma mostu łączącego I i J,
- do co najmniej jednej z wysp I, J da się dojść pieszo z wyspy z fabryką.

Między wybranymi wyspami zostaje natychmiast zbudowany most. Gracz przegrywa, jeśli po jego ruchu istnieje ścieżka pomiędzy fabrykami. Bartek zaczyna, czy ma strategię wygrywającą?

Zadanie 14. Leży na stole w rzędzie n monet. k monet o numerach $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ma widoczną stronę z orłem. Gracze na zmianę odwracają jednego orła i jeśli chcą dodatkowo dowolną monetę po lewej. Gracz bez ruchu przegrywa. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Zadanie 15. Ślimak Turbo gra w grę na planszy o 2024 wierszach i 2023 kolumnach. Na 2022 polach znajdują się ukryte potwory. Na początku Turbo nie wie, gdzie znajdują się potwory, ale wie, że w każdym rzędzie poza pierwszym i ostatnim jest dokładnie jeden potwór oraz w każdej kolumnie znajduje się co najwyżej jeden potwór.

Turbo próbuje przejść z pierwszego rzędu do ostatniego rzędu. W każdej próbie wybiera pole w pierwszym rzędzie, z którego zaczyna wędrówkę, a następnie porusza się po planszy, za każdym razem przechodząc do sąsiedniego pola mającego wspólny bok z polem, na którym się znajduje. (Turbo może odwiedzać wcześniej odwiedzone pola.) Jeśli Turbo wejdzie na pole z potworem, jego próba kończy się i Turbo zostaje przeniesiony do pierwszego rzędu, skąd rozpoczyna kolejną próbę. Potwory nie poruszają się, a Turbo pamięta, na których dotychczas odwiedzonych polach znajdują się potwory. Gdy Turbo dotrze do któregokolwiek pola w ostatnim rzędzie, jego próba kończy się i gra jest zakończona.

Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą n, dla której Turbo ma strategię gwarantującą dotarcie do ostatniego rzędu w n-tej próbie lub wcześniej, niezależnie od pól zajmowanych przez potwory.

Zadanie 16. Zapisano na tablicy liczby od 1 do 1000. Antoni i Bożydar wykonują ruch, który polega na skreśleniu wybranej liczby i wszystkich innych nie względnie pierwszych z nią. Nie można skreślać raz skreślonej liczby i gdy gracz nie ma możliwości ruchu przegrywa. Antoni zaczyna, czy ma strategię wygrywającą?

Zadanie 17. Antoni i Bożydar siedzą na klatce schodowej i na niektórych stopniach położyli żetony. Wykonują ruchy, którymi jest wybranie kilku żetonów stojących na jednym stopniu i zepchnięcie ich o stopień niżej. Żetony które spadną z ostatniego schodka nie biorą udziału w dalszej grze. Ten kto nie może wykonać ruchu przegrywa. Jak dla dowolnego układu żetonów na początku stwierdzić, który gracz ma strategię wygrywającą.

Zadanie 18. Dany jest stosik żetonów. Antoni i Bożydar na przemian wykonują ruchy, które polegają na tym, że w danej turze, jeśli na stosie jest m żetonów, zdejmują ze stosu 1 żeton, 4 żetony, lub p żetonów, gdzie $p \in \mathbb{P}$ oraz $p|m$. Osoba która zdejmie ostatni żeton wygrywa. Czy gracz, który rozpoczyna grę ze stosem o n żetonach ma pozycję wygrywającą?

Zadanie 19. Dany są dwa stosiki żetonów. Antoni i Bożydar na przemian wykonują ruchy, które polegają na tym, że w danej turze mogą zdjąć ze stosu większego dowolną krotność liczby żetonów na mniejszym stosie. Gracz który zdejmie wszystkie żetony z jednego ze stosów wygrywa. Stwierdź, dla danych rozmiarów początkowych stosów a, b, który gracz, rozpoczynający, czy drugi ma strategię wygrywającą.

Zadanie 20. Antoni i Bożydar ruszają się hetmanem po szachownicy. W danym ruchu mogą się ruszyć o dowolną liczbę pól w dół, w prawo, bądź po skosie w prawo dół. Ten kto wejdzie hetmanem do narożnika ten wygrywa. Który gracz ma strategię wygrywającą dla początkowych współrzędnych a, b?

Zadanie 21. Dany jest pasek podstawowy złożony z n segmentów jednostkowych i dowolnie wiele pasków lilaróżowych długości l, pasków fuksjowych długości f i pasków koloru khaki długości k segmentów, z czego $f, k, l \in \mathbb{Z}_+$. Ruch polega na położeniu jednego z pasków kolorowych na pasek podstawowy, tak by każdy segment podstawowego był pokryty całkowicie, lub w ogóle. Oczywiście, gracz, który nie może wykonać ruchu przegrywa. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Zadanie 22. Rozważamy grę na prostokątnej planszy $m \times 1$ złożonej z m jednostkowych kwadratów ponumerowanych od 1 do m. Na planszy ustawionych jest n pionków, żaden nie znajduje się na polu m. Ruch polega na przestawieniu dowolnie wybranego pionka na pierwsze wolne pole o większym numerze. Dwaj gracze wykonują na zmianę po ruchu. Wygrywa ten, który postawi pionek na ostatnim polu, tzn. na polu o numerze m.

Zadanie 23. Mamy dużą tabliczkę czekolady. Pojedynczy ruch w grze, w którą gra Antoni i Bożydar, polega na wykonaniu poziomego lub pionowego cięcia i zjedzeniu kawałka o mniejszym polu powierzchni. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Czy będzie to gracz rozpoczynający grę, dla danej tabliczki $n \times m$?

Zadanie 24. Mamy dane kostki domina o rozmiarze 2×1. Gra polega na kładzeniu kostek na prostokątnym stole $n \times m$ tak, by żadne dwie się nie dotykały, gracze kładą je na przemian. Gdy gracz nie może wykonać ruchu przegrywa. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Autor: Jakub Piotrowicz Prowadzący: Jakub Piotrowicz

Rozwiązania

Rozwiązanie (1)**.** Jeśli n daje resztę 0 z dzielenia przez 7 to pozycja startowa jest przegrywająca, w przeciwnym wypadku jest wygrywająca poprzez przechodzenie do 0 mod 7.

Rozwiązanie (2)**.** Gramy jak w nim'a, dopóki liczba stosików większych od 1 nie spadnie do 1, gdy nasz przeciwnik gra ruch sprawiający, że jest tylko 1 wyższy stosik to zdejmujemy go całego lub zostawiamy jeden kamyk - co pozwala nam wybrać który z graczy wygrywa.

Rozwiązanie (3)**.** Taktyki:

1. Patrzymy modulo 3.
2. Gramy modulo 4 (można brać $1, 2, 3$).
3. Modulo 6 rozważamy przypadki.
4. Patern modulo 11: PWPWPWPWWWW.

Rozwiązanie (4)**.** Gramy kolejno: $2, 3, 4$ następnie 5 lub 6, z 5 można przejść tylko do 6 więc gracz pierwszy wygrywa dla $n \geqslant 5$.

Rozwiązanie (5)**.** Liczymy które pozycje są wygrywające, zaczynamy „od góry".

Rozwiązanie (6)**.** Liczymy „od dołu w górę", które pozycje są wygrywające.

Rozwiązanie (7)**.** Układamy kwadrat magiczny:

$$\begin{matrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{matrix}$$

zawierający wszystkie osiem możliwych sum, co zamienia grę na remisowe kółko i krzyżyk.

Rozwiązanie (8)**.** Strategia wygrywająca: gramy na przekątną, czyli pola (x, x).

Rozwiązanie (9)**.** Interpretujemy monety jako stosy w nim'ie, przy czym rozmiar stosu to numer schodka.

Rozwiązanie (10)**.** Triangulacje zawsze dają tyle samo przekątnych - tutaj 120-kąt będzie miał 117 nieprzecinajacych się przekątnych.

Rozwiązanie (11)**.** Może, gra $b = -1$, następnie gra liczbę przeciwną do wybranej jako druga.

Rozwiązanie (12)**.** Patrzymy na grę dla sytuacji $2, 3, 4, \dots, n$, jeśli jest przegrywająca, to wyróżniamy 1, jeśli nie, to gramy wygrywający ruch, który wyróżni też 1.

Rozwiązanie (13)**.** Dla n parzystego drugi gracz może kopiować ruchy pierwszego, a więc w końcu ten pierwszy będzie musiał połączyć dwie fabryki.

Dla n postaci $4k+1$ drugi gracz może utrzymywać po swoim ruchu różnicę max 1 w liczbie wysp podłączonych do obu fabryk. Wtedy sumaryczna liczba krawędzi wyniesie $2k$ i $2k+1$, czyli suma krawędzi w tych podklikach wyniesie $\frac{2k(2k-1)}{2} + \frac{(2k+1)2k}{2} = k(2k-1+2k-1) = 2k(2k-1)$, a więc sumaryczna liczba krawędzi w grze będzie parzysta, czyli wygra drugi gracz.

Dla n postaci $4k+3$ pierwszy gracz może utrzymywać po swoim ruchu różnicę max 1 w liczbie wysp podłączonych do obu fabryk. Wtedy sumaryczna liczba krawędzi w oby podłączeniach przed przegraną wyniesie $2k+2$ i $2k+1$, czyli suma krawędzi w tych podklikach wyniesie $\frac{(2k+2)(2k+1)}{2} + \frac{(2k+1)2k}{2} = \frac{2k+1}{2}(2k+2+2k) = (2k-1)(2k+1)$, a więc sumaryczna liczba krawędzi w grze będzie nieparzysta.

Rozwiązanie (14)**.** Analogiczne do zwykłego nima, gdzie monety orłem do góry reprezentują stos o wysokości indeksu monety, jedyna różnica jest taka że nasz stan gry trzyma jedynie parzystość liczby stosów danej wysokości (czyli jeśli mamy 3 stosy to tak jak byśmy mieli 1 stos) ale to w zasadzie nic nie zmienia (to wynika np. z tego że xor takich samych liczb to 0)

Rozwiązanie (15)**.** Odpowiedź to $n = 3$. Strategia wygląda tak: Zaczynamy od znalezienia potwora w drugim wierszu, dokonujemy tego poświęcając pierwszą próbę.

Jeśli potwór w drugim wierszu nie znajduje się na skraju, tylko w kolumnie $1 < j < 2023$, to obchodzimy go zaczynając drugą próbę w wierszu $j-1$, idąc 2 razy w dół, raz w prawo, a następnie do końca w dół. Jeśli ta próba się nie powiedzie, to stanie się to za sprawą potwora w wierszu trzecim i kolumnie $j-1$. Idziemy wtedy podobną drogą w $j+1$ kolumnie, 2 razy w dół, raz w lewo, a następnie do końca w dół.

Jeśli potwór w drugim wierszu znajduje się na skraju, to idziemy zygzakiem $(1,1) \to (2,1) \to (2,2) \to (3,2) \to (3,3) \to (4,3) \to \dots$. Jeżeli idąc tą ścieżką natrafimy na potwora, to w ostatniej (trzeciej) próbie możemy iść tą samą ścieżką i w zaleności od tego, czy na potwora trafiliśmy idąc w prawo – wtedy przerywamy tuż przed potworem i idziemy do końca w lewo, a potem w dół, czy idąc w dół – wtedy przerywamy na 2 ruchy przed natrafieniem na potwora i idziemy raz w dół, do końca w lewo, a następnie do końca w dół.