Inwersja

Adam Naskręcki

25 września 2023

1 Teoria

Def. 1. *Inwersją względem okręgu ω o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny bez punktu O w płaszczyznę bez punktu O, które punkt $P \neq O$ przekształca na punkt P^* leżący na półprostej $\overrightarrow{OP}$ taki, że $OP \cdot OP^* = r^2$. Punkt O nazywamy środkiem inwersji, a r promieniem inwersji.*

Def. 2. *Dla funkcji $f : X \to Y$ i podzbioru $A \subseteq X$, obrazem A w funkcji f nazywamy zbiór $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$.*

Obserwacja 1. *Inwersja jest bijekcją i inwolucją (złożona sama ze sobą daje identyczność). Oznacza to, że rozwiązanie problemu po przekształceniu go inwersją jest równoważne rozwiązaniu go w oryginalnym sformułowaniu, bo używając tej samej inwersji, wracamy do wyjściowej konfiguracji.*

Obserwacja 2. *Jeżeli $f : X \to Y$ jest bijekcją i $A, B \subseteq X$, to $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$. Oznacza to w szczególności, że inwersja zachowuje przecięcia zbiorów.*

Obserwacja 3. *Jeżeli O jest środkiem inwersji f, $X, Y \neq O$ punktami na płaszczyźnie, a $X^* := f(X)$, $Y^* := f(Y)$, to $\triangle OXY \sim \triangle OY^*X^*$.*

Obserwacja 4. *Aby skonstruować obraz punktu P, znajdującego się poza okręgiem ω, w inwersji względem tego okręgu, wystarczy narysować styczne do ω z P. Wtedy środek odcinka łączącego punkty styczności jest poszukiwanym obrazem.*

Twierdzenie 1. *Niech ω będzie okręgiem o środku w O a f inwersją względem ω. Wówczas poniższe stwierdzenia są prawdziwe.*

(1) Obrazem prostej przechodzącej przez O, w f, jest ta sama prosta.

(2) Obrazem prostej nieprzechodzącej przez O, w f, jest okrąg przechodzący przez O a styczna do tego okręgu w O jest równoległa do wyjściowej prostej.

(3) Obrazem okręgu przechodzącego przez O, w f, jest nieprzechodząca przez O prosta.

(4) Obrazem okręgu nieprzechodzącego przez O, w f, jest okrąg nieprzechodzący przez O [1].

Uwaga. *W powyższym twierdzeniu i dalszej części wykładu pisząc lub mówiąc o okręgach i prostych przechodzących przez O mamy na myśli zbiory, które uzupełnione o punkt O tworzą odpowiednio okręgi i proste.*

Def. 3. *Kątem między prostą ℓ i okręgiem ω takimi, że $A \in \omega, \ell$, nazywamy kąt nierozwarty pomiędzy ℓ a styczną do ω w A.*

Def. 4. *Kątem między okręgami ω_1, ω_2 takimi, że $A \in \omega_1, \omega_2$, nazywamy kąt nierozwarty pomiędzy stycznymi do ω_1, ω_2 w punkcie A.*

Twierdzenie 2. *Inwersja zachowuje kąty pomiędzy prostymi i okręgami.*

[1] Środek okręgu NIE przechodzi na środek okręgu będącego obrazem, ale środki te są współliniowe ze środkiem inwersji.

2 Zadania

1. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Niech A_1, B_1, C_1 będą drugimi punktami przęcięcia prostych AD, BD i CD z okręgami opisanymi na trójkątach BDC, CDA, ADB, odpowiednio. Udowodnić, że
$$\frac{AD}{AA_1} + \frac{BD}{BB_1} + \frac{CD}{CC_1} = 1.$$

2. Niech Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 będą różnymi okręgami tak, że Γ_1, Γ_3 są styczne zewnętrznie w P i Γ_2, Γ_4 są styczne zewnętrznie w tym samym punkcie P. Załóżmy, że Γ_1 i Γ_2, Γ_2 i Γ_3, Γ_3 i Γ_4 oraz Γ_4 i Γ_1 przecinają się po raz drugi odpowiednio w punktach A, B, C, D. Wykazać, że
$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

3. Okrąg Ω jest okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Dwusieczna kąta BAC przecina BC w punkcie D, a Ω w punkcie $E \neq A$. Okrąg o średnicy DE przecina Ω po raz drugi w punkcie F. Udowodnić, że AF jest symedianą [2] w trójkącie ABC.

4. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Okrąg ω jest styczny do boków AC i BC oraz wewnętrznie styczny do Ω w punkcie P. Prosta równoległa do AB przecina wnętrze trójkąta ABC i jest styczna do ω w Q. Udowodnić, że $\angle ACP = \angle QCB$.

5. Niech KL i KN będą stycznymi z punktu K do okręgu k. Punkt M został wybrany dowolnie na półprostej $\overrightarrow{KN}$ za punkt N a punkt P jest drugim punktem przecięcia k z okręgiem opisanym na trójkącie KLM. Punkt Q jest rzutem prostokątnym N na ML. Wykazać, że $\angle MPQ = 2\angle KML$

6. Niech ABC będzie trójkątem i niech Q będzie takim punktem, że $AB \perp QB$ i $AC \perp QC$. Okrąg o środku w I jest wpisany w $\triangle ABC$ i jest styczny do AB, BC, CA w punktach D, E, F, odpowiednio. Wykazać, że jeśli półprosta $\overrightarrow{QI}$ przecina EF w punkcie P, to $DP \perp EF$.

7. Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC takim, że
$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$
Niech D, E będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty APB, APC, odpowiednio. Pokazać, że proste AP, BD, CE przecinają się w jednym punkcie.

8. Niech $A_1A_2A_3$ będzie nierównoramiennym trójkątem, a I środkiem okręgu do niego wpisanego. Niech C_i, $i = 1, 2, 3$ będzie mniejszym okręgiem przechodzącym przez I oraz stycznym do A_iA_{i+1} i A_iA_{i+2}. Niech B_i, $i = 1, 2, 3$, będzie drugim punktem przecięcia C_{i+1} i C_{i+2}. Udowodnić, że środki okręgów opisanych na trójkątach A_1B_1I, A_2B_2I, A_3B_3I są współliniowe.

9. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym spełniającym $AB > AC$. Niech Γ będzie okręgiem na nim opisanym, H jego ortocentrum i F spodkiem wysokości z A. Niech M będzie środkiem BC, Q punktem na Γ takim, że $\angle HQA = 90°$ i niech K będzie punktem na Γ takim, że $\angle HKQ = 90°$. Załóżmy, że A, B, C, K i Q są parami różne i leżą na Γ w tej kolejności. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach KQH i FKM są styczne.

[2] Symediana to prosta symetryczna do środkowej względem dwusiecznej.