

Mini PreOM 2024 - Dzień 3

Zadanie 1. Dla dodatnich liczb całkowitych n , niech zadane są liczby $c(n)$ przez warunki $c(1) = 1$, $c(2n) = c(n)$ i $c(2n + 1) = (-1)^n c(n)$. Znajdź wartość

$$\sum_{n=1}^{2023} c(n)c(n+2).$$

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC , punkty R i S są rzutami prostokątnymi odpowiednio A i B na prostą PQ . Wykaż, że $PR = QS$.

Zadanie 3. Bilet do kina kosztuje 10 zł, w kasie jest dużo biletów i nie ma pieniędzy. W kolejce stoi, w przypadkowej kolejności, n osób z banknotami 10 zł oraz k osób posiadających jedynie banknot 20 zł, przy czym $n \geq k$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kasjerowi w trakcie obsługi nie zabraknie reszty do wydawania?

Zadanie 4. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Wykazać:

$$\frac{a^5}{c^3 + 1} + \frac{b^5}{a^3 + 1} + \frac{c^5}{b^3 + 1} \geq \frac{3}{2}$$