Liga Młodszych

Zadanie 1. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wykaż, że:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2}$$

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach całkowitych, które spełniają warunek: dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ liczba $P(n)$ jest pierwsza.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y spełniające równanie

$$2x^6 + y^7 = 11$$

Zadanie 4. 2021-kąt foremny jest podzielony przekątnymi na trójkąty (żadne dwie przekątne się nie przecinają).
Udowodnij, że co najmniej jeden z tych trójkątów jest ostrokątny.

Zadanie 5. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, c nieprzekraczających $3n^2 + 4n$ istnieją liczby całkowite x, y, z, takie że ich wartość bezwzględna nie przekracza $2n$, nie wszystkie są równe 0 oraz $ax + by + cz = 0$.

Zadanie 6. Na nieskończonej szachownicy jest n^2 kamyczków ułożonych w kwadrat $n \times n$. Kamyczek zajmuje jedno pole tej szachownicy. Andrzej i Bajorek grają w następującą grę: Ruch polega na wybraniu jednego z kamyczków i przeskoczeniu nim nad jednym z jego sąsiednich kamyczków. Kamyczek przeskoczony znika. Skakać można tylko równolegle do osi x i y. Dla jakich n możliwe jest, że gra skończy się z tylko jednym kamyczkiem pozostałym na szachownicy?

Zadanie 7. Prosta przechodząca przez środek okręgu wpisanego I trójkąta ABC przecina boki AB i BC w punktach M i N odpowiednio. Punkty K i L wybrane są na boku AC w taki sposób, że $\sphericalangle ILA = \sphericalangle IMB$ oraz $\sphericalangle IKC = \sphericalangle INB$. Jeśli trójkąt BMN jest ostrokątny to udowodnij, że $AM + KL + CN = AC$.