Autor: Jerzy Szempliński

Prowadzący: Jerzy Szempliński

# Podstawy nierówności

## Teoria

- **Nierówności na średnich**
  Dla dodatnich liczb rzeczywistych $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ zachodzą następujące nierówności:

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}}_{\text{Średnia harmoniczna}} \le \underbrace{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}_{\text{Średnia geometryczna}} \le \underbrace{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}_{\text{Średnia arytmetyczna}} \le \underbrace{\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n}{n}}}_{\text{Średnia kwadratowa}}.$$

  Równości zachodzą jedynie, gdy $a_1 = a_2 = \ldots a_n$.

- **Przekształcenia równoważne**
  Dwie nierówności nazywamy równoważnymi, jeżeli jednocześnie obie są prawdziwe lub jednocześnie obie są fałszywe. Jeśli obie strony nierówności są nieujemne, to możemy podnieść ją do dowolnej dodatniej naturalnej potęgi, czyli jeśli $L \ge 0$ i $P \ge 0$ oraz $n$ jest dodatnią liczbą naturalną, to

$$L \ge P \quad \text{jest równoważne} \quad L^n \ge P^n.$$

  *Jakie jeszcze działania są (lub nie są) równoważne?*

## Na rozgrzewkę

1. Wykazać, że dla nieujemnych liczb $a, b, c$ prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{c^2a} \le a+b+c.$$

2. Wykazać, że dla nieujemnych liczb $a, b$ zachodzi nierówność
$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \ge \sqrt{2(a+b)}.$$

3. Wykazać, że dla dodatnich liczb $a, b$ i $c$ zachodzi nierówność
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{3(a+b+c)}.$$

4. Wykazać, że dla dodatnich liczb $a, b, c, d$ prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

## Zadania

1. Wykazać, że jeżeli $a, b, c, x$ są liczbami dodatnimi i $a+b+c=3$, to
$$(x+a)(x+b)(x+c) \le (x+1)^3.$$

2. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi nierówność
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9.$$

3. Wykazać, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych $x$ prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3} \le 2\sqrt{x+2}.$$

Autor: Jerzy Szempliński Prowadzący: Jerzy Szempliński

4. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$ zachodzi nierówność
$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

5. Udowodnić dla dodatnich liczb $a, b, c, d$ nierówność
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

6. Liczby $a, b, c$ są długościami boków trójkąta. Wykazać, że zachodzi nierówność
$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{3(a+b+c)}.$$

7. Wykazać, że jeżeli liczby $a, b, c$ są długościami boków trójkąta, to
$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

8. Wykazać, że dla dodatnich liczb $a, b$ i $c$ zachodzi nierówność
$$\frac{2a+1}{b+c+1} + \frac{2b+1}{c+a+1} + \frac{2c+1}{a+b+1} \geq 3.$$

9. Wykazać, że jeżeli $m, n \geq 2$ są liczbami całkowitymi, to
$$\sqrt[n]{m+1} + \sqrt[m]{n+1} > 1.$$

10. Wykazać, że dla dodatnich liczb $a, b, c$ takich, że $a + b + c = 1$ prawdziwa jest nierówność
$$\frac{1}{1+6a} + \frac{1}{1+6b} + \frac{1}{1+6c} \geq 1.$$

Źródło zadań: Aleksander Kubica i Tomasz Szymczyk, Nierówności dla początkujących olimpijczyków