Równania i nierówności

Jerzy Szempliński

27 września 2023

Powtórka z teorii

- Dla liczb **dodatnich** a_1, a_2, $\ldots$, a_n zachodzą **nierówności między średnią kwadratową, arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną**:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

- Dla dowolnych liczb **rzeczywistych** a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n zachodzi **nierówność Cauchy'ego-Schwarza**:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$$

Inne jej sformułowania prawdziwe dla liczb **dodatnich**:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) \geqslant \left(\sqrt{a_1b_1}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}\right)^2$$

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

- Jeżeli **ciągi** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ liczb **rzeczywistych** są **zgodnie uporządkowane** (jednomonotoniczne) (np. oba są rosnące), to zachodzi:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geqslant a_1b_1'+a_2b_2'+\ldots+a_nb_n' \geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$$

gdzie ciąg $(b_1', b_2', \ldots, b_n')$ to **dowolna** permutacja ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Zadania z równań

1. Rozwiąż liczbach całkowitych x, y, z równanie
$$x^3 = 2y^3 + 4z^3.$$

2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite m, n, które spełniają równanie
$$3^m - 2^n = 1.$$

3. Funkcja f określona na zbiorze wszystkich liczb całkowitych przyjmuje tylko wartości dodatnie i spełnia warunek:
$$f(n) \geqslant \frac{1}{2}(f(n-1)+f(n+1)) \quad \text{dla } n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$$
Dowieść, że funkcja f jest stała.

4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2).$$

5. Dana jest funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki:

$$f(1000)=999, \quad f(x)\cdot f(f(x))=1 \quad \text{dla } x\in\mathbb{R}.$$

Obliczyć $f(500)$.

Zadania z nierówności

1. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^a+b^b>ab.$$

2. Udowodnić, że dla dowolnej dodatniej liczby a zachodzi nierówność

$$a^{a^2}+a^{2a}>1.$$

3. Wykazać, że dla $a, b, c > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{\frac{a}{a+2b+2c}}+\sqrt{\frac{b}{2a+b+2c}}+\sqrt{\frac{c}{2a+2b+c}}\geqslant 1$$

.

4. Udowodnij, że dla dodatnich liczb a, b, c oraz liczby całkowitej $n > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}.$$

5. Dowieść, że dla liczby dodatnich a, b, c oraz liczby całkowitej $n > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{c^{n+1}}{a+b}\geqslant\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}$$

6. Jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi, udowodnij, że

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

7. Pokaż, że dla dodatnich i rzeczywistych liczb a, b, c zachodzi

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

8. Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

9. Niech a,b,c będą dodatnimi liczbami, które spełniają $abc = 1$. Wykaż, że

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

10. Niech a_1, a_2,. . . ,a_n będą liczbami dodatnimi spełniającymi $a_1 + a_2 + \ldots a_n < 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1a_2\ldots a_n[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}\leqslant\frac{1}{n^{n+1}}.$$

Linki do rozwiązań zadań z równań

1. Problem 3 z Practice problems for the Math Olympiad
2. Problem 4 z Practice problems for the Math Olympiad
3. XXVIII OM - I etap - Zadanie 9
4. XLI OM - III etap - Zadanie 1
5. XLIV OM - II etap - Zadanie 6

Linki do rozwiązań zadań z nierówności

1. Zadanie 4 z obozu OM Zwardoń 2004
2. Zadanie 23 z obozu OM Zwardoń 2004
3. Zadanie 5 z Artykułu Delty "U(nie)jednorodnianie nierówności"
4. Zadanie 6 Artykułu Delty "U(nie)jednorodnianie nierówności"
5. Zadanie 7 Artykułu Delty "U(nie)jednorodnianie nierówności"
6. Problem 9 IMOmath
7. Problem 10 IMOmath
8. Problem 11 IMOmath
9. ?
10. Problem A1 Shortlista IMO 1998