Autor: Jeremi Hyska

Prowadzący: Jeremi Hyska

Indukcja

Teoria

Indukcja matematyczna to potężne narzędzie do zamieniania trudnych zadań w łatwe. Działa tak, że gdy mamy udowodnić jakąś tezę w której pojawia się pewna zmienna n, która jest liczbą naturalną, to możemy udowodnić tezę dla $n = 1$, a następnie udowodnić, że jeśli teza jest prawdziwa dla $n = k$, to jest też prawdziwa dla $n = k+1$.

Formalniej, jeśli powiemy że T_k to teza z $n = k$, to jeśli zachodzą następujące warunki:

- T_1 jest prawdziwe. (Baza indkucji)
- Dla każdego $k > 0$, $T_k \implies T_{k+1}$. (Krok indukcyjny)

To T_n jest prawdziwe dla każdego n naturalnego.

Rozgrzewka

Udowodnij za pomocą indukcji następujące równości:

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
3. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Zadanka

1. Niech F_i oznacza i-tą liczbę Fibonacciego. Udowodnij następujące wzory:
   - $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_(n+2) - 1$
   - $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
   - $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$
2. Na płaszczyźnie narysowano n okręgów, które podzieliły tą płaszczyznę na jakieś obszary. Udowodnij, że można tak pokolorować te obszary na biało i czarno, że żadne 2 obszary które sąsiadują ze sobą brzegiem, nie będą w tym samym kolorze.
3. Na ile części dzieli płaszczyznę n okręgów, jeśli każde 2 przecinają się dokładnie w 2 punktach i żadne 3 nie mają punktu wspólnego?
4. Dla każdego $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$
5. Z kwadratowej tablicy o wymiarach 2^nx2^n złożonej z kwadracików 1x1 wycięto jeden kwadracik. Udowodnić że resztę planszy można pokryć płytkami w kształcie litery L, złożonymi z 3 kwadracików, tak żeby żadne 2 płytki nie pokrywały się i żadna płytka nie wychodziła za granice planszy.
6. Dla każdego n naturalnego i x rzeczywistego, udowodnij $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
7. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną da się zapisać jako sumę pewnej liczby wyrazów ciągu Fibonacciego, tak żeby żadne 2 z nich nie były równe ani nie były sąsiednimi wyrazami w ciągu Fibonacciego.

Autor: Jeremi Hyska Prowadzący: Jeremi Hyska

8. N zawodników rozegrało turniej badmintona każdy z każdym, w którym każdy mecz zakończył się wygraną jednej ze stron. Udowodnić, że można ustawić wszystkich zawodników w rządku, tak że każdy zawodnik wygrał z zawodnikiem, który stoi za nim w tym rządku.

9. Ryszard chce przejechać trasę w kształcie okręgu na swoim motorze. Niestety jego bak nie pozwala na pokonanie całej trasy, więc wyznaczył on sobie n stacji benzynowych po drodze. W każdej stacji jest ilość paliwa potrzebna na pokonanie pewnej liczby kilometrów, tak że sumarycznie we wszystkich stacjach jest dokładnie tyle paliwa, żeby przejechać całą trasę. Ryszard zaczyna z dowolnie wybranego przez siebie punktu z pustym bakiem i jedzie, za każdym razem gdy napotyka stację, to tankuje całe paliwo które na niej znajdzie. Udowodnij, że Ryszard może przejechać całą trasę.

10. Skoczek szachowy stoi na pewnym polu nieskończonej szachownicy. Wyznacz liczbę pól do których może on dojść wykonując dokładnie n ruchów.