Kontest 5 – Finaliści

Zadanie 1. Rozwiąż równanie w liczbach całkowitych dodatnich:

$$(3x+4y)(4x+5y)=7^z.$$

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC i leżący w jego wnętrzu punkt P. Niech A', B', C' to odbicia symetryczne punktu P odpowiednio względem boków BC, CA, AB. Niech A'', B'', C'' to środki odcinków AA', BB', CC' odpowiednio. Udowodnij, że trójkąty ABC i $A''B''C''$ są podobne.

Zadanie 3. Dana jest liczba całkowita $n>2$ oraz zbiór S składający się z $2n$ punktów płaszczyzny o obu współrzędnych ze zbioru $1, 2, \ldots, n$. Udowodnij, że w zbiorze S istnieją 4 punkty będące wierzchołkami niezdegenerowanego równoległoboku.

Zadanie 4. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n>1$ o całkowitych współczynnikach, a k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Rozważmy wielomian

$$Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

gdzie P występuje k razy. Udowodnij, że istnieje co najwyżej n liczb całkowitych t, takich że $Q(t)=t$.