Kontest 2 - 29.09.2022

Rozwiązania Starsi

Zadanie 1. Dana jest taka funkcja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x)$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.
Rozwiązanie:

$$f(x) = f(2x) = f(1-2x) = f(\frac{1}{2}(1-2x)) = f(\frac{1}{2}-x) = f(1-(\frac{1}{2}-x)) = f(x+\frac{1}{2})$$

Co dowodzi, że funkcja f jest okresowa o okresie $\frac{1}{2}$.

■

Zadanie 2. Na boku BC równoległoboku $ABCD$ wybrano punkty E i F (E leży pomiędzy B i F) oraz punkt przecięcia przekątnych AC i BD oznaczamy przez O.
Wykaż, że jeśli proste AE i DF są styczne do okręgu opisanego na $\triangle AOD$, to są również styczne do okręgu opisanego na $\triangle EOF$
Rozwiązanie: Z twierdzenia o kącie dopisanym do okręgu i z równoległości AD i BC zachodzi równość

$$\measuredangle ODF = \measuredangle OAD = \measuredangle OCF$$

więc czworokąt $[ODCF]$ jest cykliczny. Analogicznie czworokąt $[OABE]$ jest cykliczny. Wówczas

$$\measuredangle AEO = \measuredangle ABO = \measuredangle ODC = 180^\circ - \measuredangle CFO = \measuredangle EFO$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie dopisanym otrzymujemy, że AE jest styczne do (EOF). Analogicznie DF jest styczne do (EOF).

■

Zadanie 3. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $abc = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leqslant 1$$

Rozwiązanie: Oszacujmy pojedyńczy z wyrazów sumy:

$$\frac{1}{a+b+1} = \frac{1}{a+b+\sqrt[3]{abc}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{abc}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})} = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$$

przy czym nierówność $a + b \geqslant \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}$ wynika z ciągów jednomonotonicznych $(\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[3]{b^2}), (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b})$. Sumując trzy nierówności stronami dostajemy tezę.

$\blacksquare$

Zadanie 4. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi równość

$$\left[\frac{n-2^0}{2^1}\right] + \left[\frac{n-2^1}{2^2}\right] + \left[\frac{n-2^2}{2^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n-2^{n-1}}{2^n}\right] = 0$$

Rozwiązanie: Oznaczmy sumę z lewej strony równania w tezie przez S_n. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n = 2$ mamy $0 + 0 = 0$. Przypuśćmy teraz, że $S_n = 0$ i obliczmy S_{n+1}. Na pewno $n + 1$-szy składnik S_{n+1} wynosi -1. Porównajmy teraz k-te składniki sum S_n oraz S_{n+1} dla $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\left[\frac{n-2^{k-1}}{2^k}\right], \left[\frac{n+1-2^{k-1}}{2^k}\right]$$

Dają one wartość różniącą się o 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $2^k \mid n + 1 - 2^{k-1}$, w przeciwnym wypadku są równe.

$$2^k \mid n+1-2^{k-1} \Leftrightarrow n \equiv 2^{k-1} - 1 \mod 2^k$$

Zapisując to w systemie binarnym zauważamy, że $n \mod 2^k$ to ostatnie k bitów liczby n. Liczba $2^{k-1} - 1$ w systemie binarnym to 0 po którym następuje $k - 1$ jedynek: $011\dots1$.
Zatem:

$$\left[\frac{n-2^{k-1}}{2^k}\right] + 1 = \left[\frac{n+1-2^{k-1}}{2^k}\right]$$

wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsze wystąpienie cyfry 0 w binarnym zapisie n występuje na k-tej pozycji. Dla każdej liczby n jest dokładnie jedno takie k, zatem $S_{n+1} - S_n = -1 + 1 = 0$.

$\blacksquare$