# INDUKCJA MATEMATYCZNA

## 1 Teoria

Indukcji używamy, żeby dowieść, że jakieś stwierdzenie $T$ jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych $n >= n_0$. Żeby to uczynić, wykonujemy dwa kroki:

- Pokazujemy, że stwierdzenie jest prawdziwe dla jakiegoś $n_0$, czyli że $T(n_0)$ jest prawdziwe.
- Pokazujemy, że jeżeli $T(k)$ jest prawdziwe, to również $T(k+1)$ jest prawdziwe.

$$T(k) => T(k+1))$$

Wtedy dzięki kolejnym implikacjom udowadniamy dane stwierdzenie dla wszystkich $n >= n_0$. Innym narzędziem jest tzw. silna indukcja, w której używamy implikacji

$$T(1) \wedge T(2) \wedge ... \wedge T(k) => T(k+1)$$

## 2 Przykłady

1. $2^n > 2n, n >= 3$
2. $1^2 + 2^2 + ...n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1), n >= 1$

## 3 Zadania

1. $6|n^3 - n, n >= 1$
2. $3|2^{2n} - 1, n >= 1$
3. $\sum_{i=1}^{n} i * i! = (n+1)! - 1, n >= 1$
4. Adam chce kupić słodycze warte $n$ złotych. Ma nieogarniczoną ilość 2- i 5-złotówek. Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej $n >= 4$, jest w stanie zapłacić równą kwotę swoimi monetami.
5. Udowodnij, że jeżeli $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, to $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ dla każdego $n >= 1$.
6. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Dane jest $nk + 1$ elementów pewnego zbioru. Udowodnij, że jeżeli podzielimy ten zbiór na $n$ podzbiorów, któryś z nich musi zawierać co najmniej $k + 1$ elementów.
7. $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n} < 2, n >= 1$
8. Dane jest n aut na zapętlonej drodze. Każde z aut ma w sobie pewną ilość benzyny, w sumie benzyny wystarcza na pełne okrążenie drogi. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ można wybrać takie auto początkowe, że zabierając z każdego auta, do którego dojeżdżamy całą benzynę, przejedziemy całe okrążenie.
9. $(1 - \frac{1}{n^2})(1 - \frac{1}{(n+1)^2})...(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}) = 1 - \frac{1}{2n-1}, n >= 1$
10. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $k >= 1$ istnieją takie liczby całkowite $x$ i $y$, niepodzielne przez 3, że $x^2 + 2y^2 = 3^k$.

11. $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 <= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}, n >= 2$

12. Załóżmy, że $0 < a_1 <= a_2 <= ... <= a_n, n >= 2$.
Wykaż, że: $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} >= \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + ... + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_1}{a_n}$