Kontest 2 - 29.09.2022

Finaliści

Zadanie 1. Na zewnątrz trójkąta ABC dorysowujemy trójkąty równoramienne BCD, CAE, ABF o podstawach odpowiednio BC, CA, AB. Wykaż, że proste prostopadłe do EF, FD, DE przechodzące odpowiednio przez A, B, C są współpękowe.

Rozwiązanie: Rozpatrzmy okręgi $\Omega_D, \Omega_E, \Omega_F$ o środkach D, E, F i promieniach odpowiednio DB, EC, FA. Wówczas oś potęgowa okręgów Ω_D, Ω_E to wysokość w trójkącie DCE opuszczoną z wierzchołka B i analogicznie dla dwóch pozostałych trójkątów. Zatem wysokości trójkątów EAF, FBD, DCE opuszczone z wierzchołków odpowiednio A, B, C przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem potęgowym okręgów $\Omega_D, \Omega_E, \Omega_F$.

■

Zadanie 2. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{b-a}{d+a} + \frac{c-b}{a+b} + \frac{d-c}{b+c} + \frac{a-d}{c+d} \geqslant 0$$

Rozwiązanie: Można zauważyć, że

$$\frac{b-a}{d+a} + 1 = \frac{b+d}{d+a}$$

Zatem dodając stronami 4 dostajemy

$$\frac{b+d}{d+a} + \frac{c+a}{a+b} + \frac{d+b}{b+c} + \frac{a+c}{c+d} \geqslant 4$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną, a harmoniczną otrzymujemy

$$\frac{b+d}{d+a} + \frac{d+b}{b+c} \geqslant \frac{4}{\frac{d+a}{b+d} + \frac{b+c}{b+d}} = \frac{4(b+d)}{a+b+c+d}$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{c+a}{a+b} + \frac{a+c}{c+d} \geqslant \frac{4(a+c)}{a+b+c+d}$$

Dodając stronami te nierówności otrzymujemy tezę.

■

Zadanie 3. Andrzej i Basia grają grają w grę. Na początku, Andrzej pisze na tablicy dodatnią liczbę całkowitą. Następnie gracze wykonują ruchy na przemian, zaczynając od Basii. W trakcie swojego ruchu Basia zastępuje liczbę n na tablicy liczbą $n - a^2$, gdzie a jest dodatnią liczbą całkowitą. W trakcie swojego ruchu Andrzej zamienia liczbę na tablicy liczbą postaci n^k, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Basia wygrywa gdy liczba na tablicy stanie się zerem. Czy istnieje strategia Andrzeja, która uniemożliwia Basii zwycięstwo?

Rozwiązanie: Niech $n = k^2 b(n)$, gdzie $b(n)$ jest częścią bezkwadratową liczby n, tj. najmniejszą liczbą a taką, że $\frac{n}{a}$ jest kwadratem liczby całkowitej. Część bezkwadratowa $S(n)$ jest równa iloczynowi liczb pierwszych, które dzielą n w nieparzystej potędze. Wówczas po ruchu Andrzeja, część bezkwadratowa liczby n nie urośnie. Natomiast Basia w swoim ruchu może zastąpić liczbę $n = k^2 b(n)$ liczbą $n' = k^2 b(n) - k^2 = k^2(b(n) - 1)$ i wtedy $b(n') < b(n)$. Taka strategia gwarantuje Basii zwycięstwo po co najwyżej $b(n)$ ruchach.

■

Zadanie 4. W turnieju piłki nożnej startuje n drużyn i każda rozegrała z każdą inną drużyną dokładnie jeden mecz, który zakończył się wygraną jednej ze stron. Nie jest dostępna pełna rozpiska rezultatów meczów, wiadomo natomiast, że drużyna o numerze $1 \leqslant k \leqslant n$ wygrała dokładnie $0 \leqslant s_k \leqslant n-1$ meczy, przy czym $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n$. Podejrzewasz, że wyniki mogły zostać sfabrykowane. Wykaż, że ciąg (s_n) jest możliwy do uzyskania jako ciąg wygranych kolejnych drużyn wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $1 \leqslant k \leqslant n-1$ zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geqslant \binom{k}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}$$

Rozwiązanie:
Dowód konieczności: W turnieju wszystkich krawędzi jest $\frac{n(n-1)}{2}$, więc suma wszystkich elementów (s_n) musi być tyle równa. Załóżmy teraz, że dla jakiegoś i nie jest spełniony warunek:

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant i} s_i \geqslant \frac{i(i+1)}{2},$$

ale mimo to istnieje graf G o n wierzchołkach i stopniach wychodzących wierzchołków równych $s_0, s_1, ..., s_{n-1}$. Rozpatrzmy obcięcie G do wierzchołków o stopniach $s_0, ..., s_i$. W tym obcięciu jest dokładnie $\frac{i(i+1}{2}$ krawędzi, zaś po obcięciu stopnie wychodzące mogły co najwyżej zmaleć. Stąd:

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant i} s_i \geqslant \frac{i(i+1)}{2},$$

co stoi w sprzeczności z poczynionym przez nas założeniem i oznacza, że taki graf G nie istnieje.

Dowód wystarczalności, rozwiązanie 1 (twierdzenie Halla): Skonstruujmy graf dwudzielny, składający się z rozłącznych zbiorów wierzchołków A i B. Wierzchołki w grafie B reprezentują mecze ($|B| = \binom{n}{2}$), zaś wierzchołki w grafie A są przyporządkowane drużynom, przy czym i-tej drużynie jest przyporządkowanych dokładnie s_i wierzchołków ($|A| = \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}$). Dla każdego meczu rysujemy krawędź pomiędzy odpowiadającym mu wierzchołkowi w B i każdym wierzchołku w A przyporządkowanemu drużynie, która bierze udział w tym meczu. Wówczas dla każdego $1 \leqslant b \leqslant \binom{n}{2}$ rozpatrzmy dowolny podzbiór b wierzchołków w B. Oznaczmy przez X zbiór numerów drużyn, które biorą udział w przynajmniej jednym z meczy odpowiadających wybranym wierzchołkom i oznaczmy $|X| = x$. Wtedy $b \leqslant \binom{x}{2}$. Zauważmy, że wybrany podzbiór wierzchołków w B zna dokładnie

$$\sum_{i \in X} s_i \geqslant \sum_{i=1}^{x} s_i \geqslant \binom{x}{2} \geqslant b$$

Zachodzi warunek twierdzenia Halla, więc istnieje w tym grafie pełne skojarzenie. Wówczas dla każdego meczu mówimy, że wygrywa drużyna, której przyporządkowany jest sparowany z nim wierzchołek. Łatwo zobaczyć, że $i - ta$ drużyna ma wówczas dokładnie s_i wygranych.

Dowód wystarczalności, rozwiązanie 2 (konstrukcyjne): Wyniki turnieju będziemy reprezentować jako skierowany graf o n wierzchołkach, w którym każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną, skierowaną krawędzią. Dla wygody myślenia, przenumerujmy drużyny, tak aby miały numery od 0 do $n-1$. Ciąg (s_n) również będziemy indeksowali od 0.

Załóżmy najpierw że mamy dany ciąg (s_{n-1}), który spełnia warunek z zadania tj. majoryzuje ciąg liczb naturalnych od 0 do $n-1$. Będziemy chcieli zbudować graf odpowiadający naszemu turniejowi. Na początek, weźmy n wierzchołków i ponumerujmy je od 0 do $n-1$. Rozważmy teraz ciąg (d_{n-1}), taki że $d_i = s_i - i$. Możemy zauważyć, że:

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} s_i - \frac{n(n-1)}{2} = 0.$$

Dodatkowo ciąg (d_{n-1}) może maleć o co najwyżej 1, bo gdyby $d_i - d_{i+1} \geqslant 2$, to $s_i - s_{i+1} \geqslant 1$, a ciąg (s_{n-1}) jest niemalejący. Będziemy teraz rozpatrywać wierzchołki po kolei, od 0 do $n-1$. Naszym niezmiennikiem będzie to, że bezpośrednio przed rozpatrzeniem i-tego wierzchołka zachodzi $d_i \geqslant 0$ (zauważmy, że $d_0 = s_0 - 0 \geqslant 0$), zaś po rozpatrzeniu wychodzi z niego dokładnie s_i krawędzi i $d_i = 0$.

Załóżmy teraz, że rozpatrzyliśmy wierzchołki od 0 do $i-1$ i ropoczynamy rozpatrywanie i-tego. Najpierw prowadzimy krawędź z wierzchołka i do wszystkich wierzchołków o numerze mniejszym od i, z których nie wychodzi krawędź do i. Następnie, znajdujemy najmniejsze d_i indeksów $j > i$, takich że $d_j < 0$. Teraz prowadzimy krawędzie z wierzchołka i do wierzchołków j, zmniejszamy d_i o 1 i zwiększamy wszystkie d_j o 1 (w ten sposób suma wszystkich d nadal pozostaje równa 0). Pozostaje odpowiedzieć na pytanie, czemu istnieje co najmniej d_i indeksów o ujemnej wartości. Wszystkie d_j dla $j < i$ są równe 0. Wiemy, że ciąg (d_{n-1}) maleje o co najwyżej 1. Zatem w całkowitej sumie wszystkich d "na plusie" mamy co najmniej $\frac{d_i(d_i+1)}{2}$. Załóżmy teraz, że indeksów z ujemnymi d jest $k < d_i$. Niech $-l$ będzie minimalną wartością w ciągu (d_{n-1}). Wtedy, ponieważ (d_{n-1}) zmniejsza się o co najwyżej 1, to w tym ciągu muszą również wystąpić $-1, -2, ..., -l+1$. Widzimy, że mamy już l ujemnych wartości, więc musi zachodzić $l \leqslant k$. Stąd sumę S ujemnych wartości d możemy ograniczyć jako $S \geqslant -\frac{l(l+1)}{2} - (k-l)l \geqslant -\frac{k(k+1)}{2} \geqslant -\frac{d_i(d_i+1)}{2}$. Oznacza to, że suma wartości dodatnich jest większa od wartości bezwzględnej sumy wartości ujemnych. Jednak całkowita suma wynosi 0, więc mamy sprzeczność, która oznacza, że istotnie zawsze możemy znaleźć co najmniej d_i ujemnych wartości.

Zastanówmy się nasz algorytm działa (tj. po rozpatrzeniu i-tego wierzchołka wychodzi z niego dokładnie s_i krawędzi). Mamy dwa przypadki. Jeśli pierwotnie zachodziło $d_i \geqslant 0$, to połączyliśmy wierzchołek i ze wszystkimi i wierzchołkami o mniejszych numerach i dodatkowo z d_i wierzchołkami o wyższych numerach, co daje $i + d_i = s_i$ wychodzących krawędzi. Jeśli zaś pierwotnie $d_i < 0$, to do wierzchołka i poprowadziliśmy $|d_i|$ krawędzi od wierzchołków o niższych numerach, czyli z i wychodzi $i - |d_i|$ krawędzi, co daje s_i wychodzących krawędzi. Widzimy, że nasza konstrukcja jest istotnie poprawna i po rozpatrzeniu wszystkich n wierzchołków tworzy graf reprezentujący nasz turniej.