Wybrane twierdzenia płaszczyzny rzutowej

Tymoteusz Kucharek

27 września 2023

1 Przypomnienie

Def. 1 (Stosunek podziału) *Dany jest odcinek AB niezerowej długości i punkt X leżący na prostej AB. Liczbę:*

$$[AXB] = \begin{cases} \frac{|AX|}{|XB|} & \text{gdy } X \text{ leży na odcinku } AB \\ -\frac{|AX|}{|XB|} & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

nazywamy stosunkiem podziału odcinka skierowanego $\vec{AB}$

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Menealosa) *Rozważmy punkty K, L, M, leżące odpowiednio na prostych BC, CA i AB trójkąta ABC. Wówczas punkty K, L, M są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$[AMB] \cdot [BKC] \cdot [CLA] = -1. \tag{1}$$

2 Twierdzenia Desargues'a i Pappusa

Twierdzenie 2 (Desargues) *Rozważmy dwa trójkąty — ABC i DEF. Niech pary prostych AB i DE, BC i EF oraz CA i FD przecinają się odpowiednio w punktach K, L, M. Wtedy punkty K, L, M leżą na jednej prostej, wtedy i tylko wtedy, gdy proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.*

Twierdzenie 3 (Pappus) *Niech na prostych k i l leżą odpowiednio punkty $1, 3, 5$ i $2, 4, 6$, różne od przecięcia k z l. Wtedy przecięcia par prostych 12 i 45, 23 i 56 oraz 34 i 61 leżą na jednej prostej.*

3 Twierdzenie Pascala i Brianchtona

Twierdzenie 4 (Pascal) *Na okręgu leżą punkty $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Wtedy przecięcia par prostych 12 i 45, 23 i 56 oraz 34 i 61 leżą na jednej prostej.*

Twierdzenie 5 (Brianchon) *Mamy sześć prostych $1, 2, 3, 4, 5, 6$, stycznych do okręgu. Wtedy trzy proste łączące punkty przęcięcia par prostych 12 i 45, 23 i 56 oraz 34 i 61 przecinają się w jednym punkcie.*

4 Zadania

1. W czworokącie $ABCD$, opisanym na okręgu, S, T, U i V to punkty styczności boków odpowiednio AB, BC, CD i DA do okręgu. Udowodnij, że proste AC, SU, BD i TV przecinają się w jednym punkcie.

2. W trójkącie ABC punkt H to ortocentrum, zaś D i E to spodki wysokości, odpowiednio z C i B. Niech M będzie środkiem BC. DE i AH przecinają się w P, zaś DM i prosta równoległa do BC, przechodząca przez H, w Q. Udowodnij, że B, P i Q są współliniowe.

3. W trójkącie ABC punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego (o środku w I) z bokiem AB. Prosta TI przecina AC w E. Proste BI i CI przecinają okrąg opisany na ABC w M i L odpowiednio. Niech P będzie drugim przecięciem prostej ME z okręgiem opisanym na ABC. Pokaż, że P, T i L leżą na jednej prostej.

4. W trójkącie ABC mamy okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, styczne do siebie nawzajem i odpowiednio do AB i AC, AB i BC oraz AC i BC. Punkty D, E, F to wspólne punkty par okręgów, odpowiednio ω_2 i ω_3, ω_1 i ω_3 oraz ω_1 i ω_2. Udowodnij, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

5. W trójkącie ABC punkty O i I to środki okręgów odpowiednio opisanego i wpisanego. Niech O_1 będzie środkiem okręgu stycznego do okręgu opisanego na ABC oraz do AB i AC odpowiednio w P i Q. Styczna do tego okręgu, równoległa do BC przecina AB i AC odpowiednio w D i E. BE i CD przecinają się K, BQ i CP przecinają się w J. Wykaż, że punkty K, I, J są współliniowe.

6. W trójkącie ABC punkty $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leżą na bokach trójkąta w taki sposób, że $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ jest cykliczny. Udowodnij, że w sześciokącie wyznaczonym przez proste $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$ przekątne główne przecinają się w jednym punkcie.