

Mini PreOM 2023 - Dzień 5

Zadanie 1. Niech $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, będą takie, że $a^2 + b^2 = c^2$.
Udowodnij, że liczba $\frac{1}{2}ab$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2. Na zewnątrz trójkąta ABC zbudowano prostokąty $ACDE, BAFG, CBHI$.
Udowodnij, że symetralne odcinków EF, GH i ID są współpękowe.

Zadanie 3. Znajdź największe n naturalne takie, że n jest różnicą sześciątów dwóch kolejnych liczb całkowitych oraz $2n + 79$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 4. Danych jest zbiór S składający się z $n \geq 3$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie są współliniowe. Dla każdego wielokąta wypukłego o wierzchołkach w S niech $a(P)$ będzie liczbą jego wierzchołków, a $b(P)$ będzie liczbą punktów z S które leżą ściśle poza P .
Udowodnij, że:

$$\sum_P \pi^{a(P)} (1 - \pi)^{b(P)} = 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$$

Suma iteruje się po wielokątach wypukłych P o wierzchołkach w S o niezerowym polu.