

## Kontest 1 - 27.09.2022

### Starsi

**Zadanie 1.** Niech  $AA'$  będzie środkową w trójkącie  $ABC$ . Niech  $D$  będzie punktem na  $AA'$  oraz  $E$  przecięciem  $BD$  i  $AC$ . Okrąg opisany na trójkącie  $BCE$  przecina  $AB$  ponownie w punkcie  $F$ .

Udowodnij, że jeśli punkty  $C$ ,  $D$  i  $F$  są współliniowe to trójkąt  $ABC$  jest równoramienny.

**Zadanie 2.** Dany jest graf dwudzielny o częściach  $A$  i  $B$ , w którym  $|A| = 2n$ ,  $|B| = 2n + 1$  oraz wszystkie wierzchołki w części  $A$  mają ten sam stopień.

Wykaż, że pewne dwa wierzchołki w części  $B$  mają ten sam stopień.

**Zadanie 3.** Niech  $AD, BE, CF$  będą wysokościami w trójkącie ostrokątnym  $ABC$ . Prosta równoległa do  $EF$  przechodząca przez  $D$  przecina prostą  $AB$  w punkcie  $R$  i  $AC$  w  $Q$ . Niech  $P$  będzie przecięciem prostych  $EF$  i  $CB$ .

Udowodnij, że okrąg opisany na  $PQR$  przechodzi przez środek odcinka  $BC$ .

**Zadanie 4.** Wyznacz liczbę par dodatnich liczb całkowitych  $m, n$  spełniających równanie:

$$m(m+1) = (n-17)(n+17)$$

.