

Kontest 1 - 26.09.2023

Starsi

Zadanie 1. Niech dany będzie trójkąt ABC i niech proste t_a, t_b, t_c będą prostymi st stycznymi do okręgu opisanego na tym trójkącie w punktach odpowiednio A, B, C . Dowieść, że wówczas punkty $P = t_a \cap BC$, $R = t_b \cap CA$, $Q = t_c \cap AB$ leżą na jednej prostej.

Zadanie 2. Dany jest wielomian $P(x)$, stopnia n , spełniający:

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Określ wartość $P(n+1)$.

Zadanie 3. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 28 można pociąć na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×10 lub 1×11 .

Zadanie 4. Liczby nieujemne $a_1, a_2, \dots, a_7, b_1, b_2, \dots, b_7$ spełniają warunek

$$a_i + b_i \leq 2 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, 7.$$

Wykazać, że dla pewnych dwóch różnych liczb $k, m \in \{1, 2, \dots, 7\}$ zachodzi nierówność:

$$|a_k - a_m| + |b_k - b_m| \leq 1.$$