

Kontest 2 - 29.09.2022

Pierwszaki

Zadanie 1. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Okręgi o średnicach BC i DA przecinają się w punktach P i Q . Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że punkty P, Q i S leżą na jednej prostej.

Zadanie 2. Dany jest nieskończony ciąg liczb całkowitych $0 < a_1 < a_2 < \dots$. Liczby pierwsze p_1, p_2, \dots spełniają podzielność $p_n \mid a_n$ dla wszystkich $n \geq 1$. Ponadto zachodzi $a_n - a_k = p_n - p_k$ dla wszystkich $n, k \geq 1$. Wykaż, że każdy element ciągu (a_n) jest liczbą pierwszą.

Zadanie 3. Niech w trójkącie ABC liczby h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości a, b, c odpowiednio. Uzasadnij, że

$$(a + b + c)(h_a + h_b + h_c) \geq 18P_{ABC}$$

Zadanie 4. Skończony zbiór liczb rzeczywistych M ma przynajmniej 4 elementy. Istnieje funkcja $f : M \mapsto M$ o następujących własnościach.

- Istnieje przynajmniej jedno $a \in M$ takie, że $f(a) \neq a$.
- Dla każdego $b \in M$ istnieje dokładnie jedno $a \in M$ takie, że $f(a) = b$.
- Dla wszystkich $a \neq b \in M$ zachodzi nierówność $ab \leq f(a)f(b)$.

Wykaż, że suma elementów w tym zbiorze wynosi 0.