Kontest 3 - 30.09.2022

Finaliści

Zadanie 1. Liczby całkowite dodatnie pokolorowano dwoma kolorami: czerwonym i niebieskim.
Udowodnij, że istnieje ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, taki, że: $a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, a_2, \frac{a_2+a_3}{2}, a_3, \ldots$ są jednokolorowe.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC, gdzie H jest jego ortocentrum, a M środkiem boku BC. Przypuśćmy, że punkty P, Q leżą na okręgu o średnicy AH, są różne od A. M leży na prostej PQ. Udowodnij, że ortocentrum trójkąta APQ leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające dla wszystkich x, y rzeczywistych:

$$f(f(x)+y) = f(x^2-y) + 4f(x)y.$$

Zadanie 4. Niech $P(x)$ będzie niestałym wielomianem o współczynnikach całkowitych.
Udowodnij, że nie istnieje funkcja $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, taka, że liczba rozwiązań: $T^n(x) = x$ jest równa $P(n)$ dla każdego $n \geqslant 1$.