# Liga Starszych - Rozwiązania

**Zadanie 1.** Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania:

$$2^x + 3^x + 6^x = x^2$$

**Rozwiązanie:** Dla $x < 0$ LHS jest funkcją rosnącą, a RHS malejącą. Zatem istnieje maksymalnie jedno rozwiązanie ujemne i jest nim $x = -1$. Rozważmy teraz $x \geqslant 0$. Udowodnijmy, że $2^x > x$. Dla $x = -0$ nierówność jest spełniona.
Sposób 1: Niech $f(x) = 2^x - x$. Wtedy $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) - 1$. Oczywiście zachodzi $1 \leqslant 2^x < 2^x \cdot \ln(2)$ więc pochodna jest dodatnia dla $x \geqslant 0$. Zatem $f(x)$ jest również dodatnia.
Sposób 2: Niech $s$ będzie rozwiązaniem nieujemnym. Wtedy $s^2 = 2^s + 3^s + 6^s \geqslant 3$, więc $s \geqslant \sqrt{3} > 1$. Stąd z nierówności Bernoulliego $2^s = (1+1)^s \leqslant 1 + s > s$. Skoro $2^x > x$ to $4^x > x^2$. Stąd mamy $x^2 < 4^x \leqslant 6^x < 2^x + 3^x + 6^x$, więc nie ma rozwiązania dodatniego.

■

**Zadanie 2.** W grafie o $n$ wierzchołkach istnieje $n-1$ wierzchołków o parami różnych stopniach. Jaki może być stopień pozostałego wierzchołka.
**Rozwiązanie:** Zauważmy, że jeśli graf G ma tę własność (że ma $n-1$ wierzchołków różnych stopni), to jego dopełnienie $G'$ również. Spośród możliwych stopni od 0 do $n-1$ dokładnie jeden występuje dwa razy (ten, którego szukamy) i dokładnie jeden nie występuje ani razu. Wiemy, że tym drugim jest 0 lub $n-1$ (takie dwa naraz nie mogą istnieć); przypuśćmy, że nie ma wierzchołka stopnia $n-1$, ale jest wierzchołek stopnia 0. Wykażemy, że stopniem, który pojawia się dwukrotnie jest $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Będzie to oznaczać, że odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie to $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ lub $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ (gdyż ten drugi stopień uzyskamy jako powtarzający się w dopełnieniu, czyli w takim grafie, w którym istnieje wierzchołek stopnia $n-1$). Dowód będzie indukcyjny.
Dla $n = 2$ oraz $n = 3$ teza zachodzi (dodatkowym stopniem jest odpowiednio 0 oraz 1). Gdy mamy graf $n$-wierzchołkowy z wierzchołkiem stopnia 0, to po usunięciu tego wierzchołka uzyskujemy graf $(n-1)$-wierzchołkowy, w którym nie ma stopnia 0 i dokładnie jeden stopień się powtarza - z założenia indukcyjnego jest to $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Pozostaje zauważyć, że $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ dla każdej liczby całkowitej $n$.

■

**Zadanie 3.** Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb $k \geqslant 1$, że

$$\left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor$$

jest nieparzysta.

**Rozwiązanie:** Dla $n$ nieparzystego wystarczy wziąć $k = n^t$, $t \in \mathbb{N}$, co łatwo pokazać, że działa. Dla $n$ parzystego weźmy $k = n^{2t}(n+1)$, $t \in \mathbb{N}$. Wiemy, że $n^{n^{2t}(n+1)} \equiv_{n+1} 1$, więc

$$\left\lfloor \frac{n^{n^{2t}(n+1)}}{n^{2t}(n+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^{n^{2t}(n+1)-2t}}{n+1} \right\rfloor = \frac{n^{n^{2t}(n+1)-2t} - 1}{n+1}$$

2 nie dzieli licznika i mianownika, więc liczba jest nieparzysta.

■

**Zadanie 4.** Niech $PQRS$ będzie czworokątem cyklicznym, gdzie $\sphericalangle PSR = 90^\circ$ oraz $H$ i $K$ są rzutami punktu $Q$ na proste $PR$ i $PS$. Udowodnij, że prosta $HK$ przecina odcinek $QS$ w połowie.

**Rozwiązanie** Niech $X$ będzie rzutem punktu $Q$ na $RS$. Punkty $K, X, H$ są współliniowe z twierdzenia o prostej Simsona. Czworokąt $KQXS$ jest prostokątem, bo wszystkie kąty są proste, więc odcinki $XK$ i $QS$ przecinają się w połowie, co daje tezę.

■

**Zadanie 5.** Niech $a, b, c$ będą bokami trójkąta. Udowodnij, że

$$\sqrt[3]{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)} > \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

**Rozwiązanie:**

Robimy podstawienie $a = y+z, b = x+z, c = x+y$. Wówczas $x, y, z$ są dodatnie, bo są długościami stycznych poprowadzących z wierzchołków do okręgu wpisanego.

$$a^2+bc = (y^2+2yz+z^2)+(x^2+zx+xy+yz) > x^2+y^2+z^2+zx+xy+yz = \frac{(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2}{2}$$

Analogicznie otrzymujemy

$$b^2+ac > \frac{(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2}{2}$$

$$c^2+bc > \frac{(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2}{2}$$

Każda z tych nierówności jest dodatnia, więc można je wymnożyć stronami.

$$\sqrt[3]{(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)} > \sqrt[3]{\left(\frac{(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2}{2}\right)^3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

■

**Zadanie 6.** Zygzak Michał i Zygzak Jan ścigają się ze sobą na nieskończonej płaszczyźnie podzielonej na kwadraty o równych bokach (w kratę).
Michał zaczyna. Ruch polega na zorientowaniu krawędzi o długości 1, z jednego punktu kratowego do innego. Jeśli w pewnym momencie skierowane segmenty utworzą cykl, to Jan ma tor, na którym może potrenować dojeżdżanie do mety i wygrywa. Czy Jan ma strategię, która zapewni trening dojeżdżania do mety?
**Rozwiązanie:** Odpowiedź negatywna: Michał ma strategię powstrzymującą Jana przed wygraną.

Powiemy, że dwie krawędzie tworzą *dolny-lewy róg (DL-róg)*, jeśli mają ten sam wierzchołek taki, że dla jednej krawędzi jest to punkt położony najniżej, a dla drugiej jest to punkt położony najbardziej z lewej strony.
Podobnie definiujemy *górny-prawy róg (GP-róg)*. Wspólny punkt dwóch krawędzi nazwiemy *łącznikiem*.
Ustalmy pionową linię na płaszczyźnie (złożoną z krawędzi kwadratów) i nazwijmy ją *linią środkową*.
Krawędzie jednostkowe zawarte w linii środkowej będziemy nazywać *krawędziami środkowymi*.
Na prawo (lewo) od linii środkowej leżą *prawe (lewe) krawędzie*.
Wśród wszystkich lewych krawędzi wprowadzamy podział na DL-rogi, wśród prawych na GP-rogi.
Opiszemy teraz strategię Michała. Jego pierwszy ruch będzie zorientowaniem pewnej środkowej krawędzi w dowolny sposób. Przyjmijmy, że w pewnym ruchu Jan zorientuje krawędź $s$.
Jeśli $s$ jest krawędzią środkową, Michał orientuje pewną niezorientowaną krawędź środkową w dowolny sposób. W przeciwnym wypadku, $s$ tworzy róg (w podziale) z pewną inną krawędzią $t$.
Wówczas Michał orientuje $t$ w taki sposób, że albo obie strzałki są skierowane do łącznika rogu albo przeciwnie do niego. Zauważmy, że po każdym ruchu Michała, każdy róg w podziale jest albo cały zorientowany albo cały niezorientowany; co oznacza, że Michał zawsze może wykonać żądany ruch.
Załóżmy, że po którymś ruchu Jan wygrał, to znaczy, że utworzył cykl $C$.
Niech $X$ będzie najniżej leżącym spośród punktów znajdujących się po lewej stronie $C$, a $Y$ najwyższym spośród punktów po prawej stronie $C$. Jeśli $X$ leży (ściśle) po lewej stronie linii środkowej, to $X$ jest łącznikiem pewnego rogu, którego obydwie krawędzie są zorientowane.
To daje sprzeczność: strategia Michała zapewnia, że krawędzie takie są zorientowane niezgodnie ze sobą, zatem nie mogą stworzyć cyklu.
Analogicznie dla $Y$, leżącego na prawo od linii środkowej. Wynika z tego, że Jan nigdy nie wygrywa.

■

**Zadanie 7.** Jeżeli graf planarny $G$ nie ma cyklu długości 4 oraz $j$-ściany (ściana o $j$ krawędziach) dla żadnego $5 \leqslant j \leqslant 9$, to można pokolorować wierzchołki tego grafu z użyciem 3 kolorów w taki sposób, że wierzchołki połączone krawędzią mają różny kolor.
**Rozwiązanie:** Udowodnimy najpierw następujący

**Lemat:**

Jeśli $\delta(G) \geqslant 3$, to pewne dwie 3-ściany mają wspólną krawędź, istnieje $j$-ściana dla $4 \geqslant j \geqslant 9$ lub istnieje 10-ściana, której wszystkie wierzchołki mają stopień 3.
Gdzie $\delta(G)$ to średni stopień wierzchołka w grafie $G$.

**Dowód lematu:**

Załóżmy przeciwnie, że nie istnieje żadna z opisanych konfiguracji oraz $\delta(G) \geqslant 3$.
Warunki początkowe: każdy wierzchołek $v$ otrzymuje ładunek $6 - 2deg(v)$, każda ściana $f$ otrzymuje ładunek $6 - len(f)$. Łączny ładunek, na mocy wzoru Eulera:

$$\sum_v (6 - 2deg(v)) - \sum_f (6 - len(f)) = 6n - 4m + 6k - 2m = 6(n - k + m) = 12$$

Reguły przejścia: Każda ściana daje $+1$ każdej sąsiedniej ścianie, Każda $10^+$-ściana $f$ przekazuje ładunek 1 każdemu $4^+$-wierzchołkowi incydentnemu z pewną krawędzią między ścianą $f$ i pewną 3-ścianą.

Analiza stanu końcowego:

- 3-wierzchołki pozostają z wyjściowym ładunkiem 0.
- Dla $j \geqslant 4$ $j$-wierzchołek przyjmuje ładunek co najwyżej $\lfloor \frac{2}{3} j \rfloor$, więc końcowy ładunek to co najwyżej $6 - \lceil \frac{4}{3} j \rceil$.
- Ściany trójkątne kończą z ładunkiem 0 (nie przyjmują dodatkowego od wierzchołków, bo żadne dwa trójkąty nie graniczą wierzchołkiem).
- Rozważmy ścianę $f$ dla $j \geqslant 11$. Zyskuje ona $+1$ dla każdej ścieżki wzdłuż jej brzegu składającej się z boków sąsiednich trójkątów i mającej końce stopnia 3 (jeśli koniec maksymalnej ścieżki ma stopień $4^+$ to nie ma zysku netto). Łączny zysk to co najwyżej $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$, więc końcowy ładunek to co najwyżej $6 - \lceil \frac{j}{2} \rceil \leqslant 0$.
- Rozważmy 10-ścianę. Aby skończyć zadanie z ładunkiem dodatnim, musi ona zyskać co najmniej $+5$, co oznacza co najmniej 5 ścieżek na obwodzie typu jak w poprzednim punkcie, co implikuje, że wszystkie wszystkie wierzchołki incydentne z tą ścianą są stopnia 3.

Przejdźmy do rozwiązania zadania, rozważmy najmniejszy kontrprzykład $G$. Musi być 2-spójny oraz $\delta(G) \geqslant 3$. Skoro nie ma 4-cyklu, to żadne dwie ściany trójkątne nie mają wspólnej krawędzi. Z lematu wynika zatem, że $G$ można zanurzyć w płaszczyźnie w taki sposób aby miał co najmniej jedną ścianę $C$ o wszystkich wierzchołkach stopnia 3.
Poprawne 3-kolorowanie $G - V(C)$ rozszerza się do $G$. Każdy wierzchołek na $C$ ma dokładnie jednego sąsiada poza $C$, więc dwa dostępne kolory, a parzyste cykle są 2-wybieralne, co daje sprzeczność.

■