Vieta Jumping

Miron Hunia

23.09.2022

1 Nieskończone zstępowanie

Twierdzenie 1 (Nieskończone zstępowanie) *W liczbach naturalnych, każdy ciąg ściśle malejący jest skończony. Alternatywnie: (w liczbach naturalnych) każdy nieskończony ciąg nieostro malejący jest od pewnego momentu stały.*

W nieskończonym zstępowaniu można użyć innej relacji porządku niż standardowy porządek. Użyta relacja porządku musi być dobrze ufundowana. Przykładami takich relacji są:

- $a \preceq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \mid b$
- $a \preceq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy najmniejszy dzielnik pierwszy a jest mniejszy bądź równy niż najmniejszy dzielnik pierwszy b
- $a \preceq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy największy dzielnik pierwszy a jest mniejszy bądź równy niż największy dzielnik pierwszy b.

Ćwiczenia. Udowodnij, że zadane ciągi są od pewnego momentu stałe.

1. $a_0 = n, a_{i+1} = I(n)$, gdzie $I(n)$ oznacza iloczyn cyfr liczby n.
2. $a_0 = 1, a_1 = n > 0, a_{i+2} = rad(\phi(a_{i+1})\phi(a_i))$ (rad to część bezkwadratowa, a ϕ to tocjent Eulera)

W zadaniach, metody nieskończonego zstępowania często używa się, gdy z jednego rozwiązania równania można łatwo generować więcej rozwiązań.
Nieskończone zstępowanie jest równoważne zasadzie minimum.

2 Niezmienniki i półniezmienniki

Niezmiennikiem nazywamy dowolną własność, która nie ulega zmianie w trakcie wykonywania procesu. Niezmienniki przydają się w nieskończonym zstępowaniu. Zwykle aby wygenerować nowe rozwiązanie na podstawie rozwiązania wejściowego, rozwiązanie wejściowe musi spełniać pewne warunki. Jeśli pokażemy, że owe warunki są niezmiennikiem procesu generującego nowe rozwiązania, to można rozwiązania generować w nieskończoność.

Półniezmiennikiem nazywamy dowolną własność, która w trakcie wykonywania procesu zmienia się w ściśle określony sposób, na przykład stale rośnie albo stale maleje.
Wniosek: jeśli półniezmiennnik stale maleje i przyjmuje tylko wartości naturalne, to na mocy nieskończonego zstępowania procesu nie można wykonywać w nieskończoność.

3 Vieta Jumping

Twierdzenie 2 (Wzory Vieta, przypadek kwadratowy) *Gdy dane jest równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx + c$, to pierwiastki równania (x_1, x_2) spełniają zależności:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Wniosek 1. Jeśli równanie kwadratowe ma współczynniki całkowite, $a = 1$ i jeden z pierwiastków jest całkowity, to drugi pierwiastek też jest całkowity (suma pierwiastków).
Wniosek 2. Jeśli $c > 0$, $a > 0$ i jeden z pierwiastków jest dodatni, to drugi pierwiastek też jest dodatni (iloczyn pierwiastków).

Na powyższych obserwacjach opiera się technika *Vieta jumpingu*, stosowana w równaniach Diofantycznych. Schemat zastosowania tej techniki wygląda następująco:

1. Sprowadzamy zadanie do postaci symetrycznego wyrażenia kwadratowego ze względu na (a, b). Równanie zwykle będzie zawierać również inne parametry.

2. Formułujemy lemat pozwalający na podstawie działającego rozwiązania wyrażenia generować kolejne: jeśli (a, b) jest rozwiązaniem, to (b, a') również nim jest. a' wyznaczamy traktując wyrażenie jako równanie kwadratowe ze względu na a i używając wzorów Vieta.

3. Zakładamy bez straty ogólności, że dane jest rozwiązanie w którym $b \leq a$. Pokazujemy, że ta nierówność jest niezmiennikiem procesu, którego używamy do generowania rozwiązań, dzięki czemu rozwiązania możemy generować w nieskończoność.

4. Wyciągamy wnioski, które mogą być różne w zależności od zadania. W dowodach niewprost na tym etapie otrzymujemy sprzeczność. W dowodach wprost patrzymy, co uzyskane informacje o zmiennych a, b mówią nam o pozostałych parametrach wyrażenia.

Vieta jumping często można stosować "wstecz", jeśli w kroku 2. wyprowadzimy dodatkowo wzór pozwalający odtworzyć parę (a, b) z pary (b, a'). Wtedy możemy, cofając się, wygenerować wszystkie rozwiązania.

- **Przykład.** (#6 z IMO 1988): Niech a, b to dodatnie liczby naturalne takie, że $ab + 1 \mid a^2 + b^2$. Udowodnij, że $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowód przeprowadzimy niewprost, zakładając, że iloraz nie jest kwadratem liczby całkowitej. Postępujemy według powyższego schematu:

1. Oznaczamy $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$. Wymnażamy, aby sprowadzić do postaci wyrażenia kwadratowego ze względu na a, b: $a^2 + b^2 - abk - k = 0$. Widzimy, że wyrażenie jest symetryczne.

2. Jeśli b, k potraktujemy jako parametry, to a jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 - xbk + b^2 - k$. Drugi pierwiastek wynosi $a' = \frac{b^2-k}{a}$ i jest liczbą naturalną na mocy **Wniosku 1** wzorów Vieta. Do szczęścia potrzebujemy jeszcze $a' > 0$.
   Ponieważ $a' = \frac{b^2-k}{a}$ i k nie jest kwadratem, to $a' \neq 0$. Załóżmy niewprost, że $a' < 0$. Wtedy
   $$0 = (a')^2 - a'bk + b^2 - k > -a'bk - k = k(-a'b - 1) \geq k(b - 1) \geq 0$$
   Zatem gdy (a, b) jest dodatnim naturalnym rozwiązaniem dla pewnego k, to (b, a') też jest dodatnim naturalnym rozwiążaniem dla tego samego k.

3. Bez straty ogólności $a > b$. Wtedy $a' = \frac{b^2-k}{a} < \frac{b^2}{a} < b$, zatem $b > a'$, czyli nierówność jest niezmiennikiem naszego procesu.

4. Generujemy nieskończony ciąg ściśle malejących, naturalnych rozwiązań. Na mocy nieskończonego zstępowania, otrzymujemy sprzeczność

4 Zadania

Zadania z gwiazdką to przykłady zadań na nieskończone zstępowanie, które **nie są** na Vieta jumping.

1. * Znajdź wszystkie rozwiązania równania $x^2 + y^2 = 3z^2$ w liczbach całkowitych.
2. Znajdź wszystkie całkowite wartości, jakie może przyjmować wyrażenie $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$ w liczbach całkowitych dodatnich.
3. Niech a, b to dodatnie liczby całkowite spełniające podzielność $ab \mid a^2+b^2+1$. Pokaż, że $a^2+b^2+1 = 3ab$.
4. (Crux Mathematicorum) Niech a, b, c to dodatnie liczby całkowite spełniające nierówność $0 < a^2 + b^2 - abc < c$. Pokaż, że $a^2 + b^2 - abc$ jest kwadratem.
5. Znajdź wszystkie wartości, jakie może przyjmować wyrażenie $\frac{a^2+b^2}{ab-1}$ w liczbach naturalnych.
6. (#5 z IMO 2007) a, b to liczby całkowite dodatnie spełniające $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$. Pokaż, że $a = b$. (Hint: przekształć warunek zadania, aby był symetryczny)
7. Zlicz, ile jest par (n, m) spełniajacych $1 \leq n < m \leq 100, n \mid m^2 - 1, m \mid n^2 - 1$
8. * Pokaż, że $x^4 + y^4 = z^2$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich. (Hint: postać ogólna trójek pitagorejskich)
9. Liczby całkowite dodatnie spełniają $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$. Pokaż, że przynajmniej jedna z liczb $\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}$ jest kwadratem.
10. (Sam Vandervelde) Liczby całkowite dodatnie spełniają $abc + 1 \mid a^2 + b^2 + c^2$. Wykaż, że $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc+1}$ może zostać zapisane jako suma dwóch dodatnich kwadratów.
11. (Wietnam 2002) Znajdź wszystkie naturalne n, że równanie $(a+b+c+d)^2 = n^2abcd$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich.
12. (Putnam 1933) Udowodnij, że dla dowolnie dużego N istnieją $a, b, c, d > N$ takie, że $a^2+b^2+c^2+d^2 = abc + abd + acd + bcd$.
13. Znajdź wszystkie całkowite dodatnie pary (a, b) takie, że $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ jest całkowite.
14. * Znajdź wszystkie liczby pierwsze p dla których istnieją całkowite dodatnie x, y oraz pewne naturalne n, że $p^n = x^3 + y^3$.
15. (Calvin Lin) Znajdź wszystkie dodatnie rozwiązania układu podzielności $a \mid b^2 - b + 1$ i $b \mid a^2 - a + 1$.