



## PreOM 2023 - Dzień 3

**Zadanie 1.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  o podstawie  $BC$  znajduje się punkt  $D$  na krawędzi  $AC$ . Na krótszym łuku  $CD$  okręgu opisanego trójkąta  $BCD$  znajduje się punkt  $K$ . Półprosta  $CK$  przecina prostą równoległą do prostej  $BC$  przechodzącą przez  $A$  w punkcie  $T$ . Niech  $M$  będzie środkiem odcinka  $DT$ . Udowodnij, że  $\sphericalangle AKT = \sphericalangle CAM$ .

**Zadanie 2.** Niech  $a, b, c, d > 0$  oraz  $abcd = 1$ . Udowodnij, że:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \geq 2$$

**Zadanie 3.** Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie  $n$ , dla których istnieje liczba całkowita  $m$ , taka że  $2^n - 1$  dzieli  $m^2 + 9$ .

**Zadanie 4.** Niech  $x$  będzie dodatnią liczbą wymierną. Udowodnij, że istnieje całkowita dodatnia liczba  $n$  oraz parami różne dodatnie liczby całkowite  $a_1, a_2, \dots, a_n$  takie, że  $x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ .

*Rozwiązania należy wysłać na adres [solvyy012@gmail.com](mailto:solvyy012@gmail.com), najpóźniej dnia:  
19.03.2023.*

*Prace powinny być opatrzone numerami zadania oraz kontestu w tytule maila.  
Przypominamy o wysyłaniu zadań w osobnych mailach (1 zadanie = 1 mail)*