Warszawa, 03.02.2025

Kontest 1 – mini PreOM 2025

Zadanie 1. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że każda z liczb ab, bc, ca kończy się cyframi 20?

Zadanie 2. Dany jest wielokąt wypukły w oraz okrąg o. Wszystkie boki wielokąta w są równej długości, a okrąg o dzieli każdy bok na 3 odcinki. Malujemy wszystkie otrzymane odcinki kolejno na czerwono, zielono i biało, zaczynając od wierzchołka wielokąta i poruszając się po jego obwodzie w ustalonym kierunku.

Wykazać, że suma długości odcinków czerwonych jest równa sumie długości odcinków białych.

Zadanie 3. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, przy czym

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{AF}{FB} = 4.$$

Punkt K leży na odcinku AF. Proste KD i CF przecinają się w punkcie P, a proste BP i CK przecinają się w punkcie Q. Wykazać, że punkty E, F i Q są współliniowe.

Zadanie 4. Na nieskończonej szachownicy znajduje się skończona liczba pionków, przy czym na jednym polu może znajdować się więcej niż jeden pionek.
Możemy wykonywać następujące ruchy (zob. rysunek): jeżeli na polu P szachownicy znajdują się co najmniej 3 pionki oraz na jednym z pól $R_i (i = 1, 2, 3, 4)$ znajduje się co najmniej jeden pionek, to 3 pionki z pola P przenosimy na pole Q_i, a jeden pionek z pola R_i przesuwamy na pole S_i.
Dowieść, że można wykonać tylko skończenie wiele ruchów.

R_1		R_2		R_3	
	Q_1	Q_2	Q_3		
	S_4	P	Q_4	R_4	
	S_3	S_2	S_1		