Średnie, ciagi monotoniczne, Cauchy-Schwarz

Igor Staszkiewicz, Hubert Wach

16 listopada 2022

1 Teoria

1.1 Średnie

Dla dowolnych dodatnich liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ zachodzi nierówność

$$A \geq G \geq H$$

Dla:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \qquad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}, \qquad H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Ciekawostka 1: Istnieje uogólniona wersja nierówności miedzy średnimi która wynika z pojecia średniej potegowej. Średnia potegowa stopnia x ciagu dodatnich liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest zdefiniowana jako

$$P_x(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + a_3^x + ... + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Dla $x < y$ zachodzi $P_x(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \leq P_y(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$. Przypadek który został wspomniany powyżej zachodzi dla x równego odpowiednio 1, 0, -1. Warto wspomnieć, że dla $x = 0$ musimy policzyć granice całego wyrażenia. Jak sie okazuje wynosi ona dokładnie G!

Ciekawostka 2: Istnieje inne uogólnienie nierówności $A \geq G$. Jest to tzw. średnia ważona. Dla dowolnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ spełniajacych

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$$

zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1} a_i^{\lambda_i}.$$

Warto zwrócić uwage na to, że gdy $\lambda_i = \frac{1}{n}$ dla wszystkich i, dostajemy $A \geq G$.

1.2 Cauchy-Schwarz

Jeżeli mamy dane dwa ciagi liczb rzeczywistych A i B, to Cauchy-Schwarz nam gwarantuje że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$$

Oprócz tej postaci, można sie jeszcze spotkać z nierównościa CS w postaci Engela.
I postać Engela nierówności CS dla $(a_1, a_2, .., a_n)$ rzeczywistych oraz $(b_1, b_2, ..., b_n)$ dodatnich:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + ... \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}$$

II postać Engela nierówności CS dla $(a_1, a_2, ..., a_n)$ i $(b_1, b_2, ..., b_n)$ dodatnich:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}$$

I postać Engela otrzymujemy po podstawieniu do CS: $a_k = \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}$ i $b_k = \sqrt{y_k}$, a postać II poprzez podstawienie do CS: $a_k = \sqrt{\frac{x_k}{y_k}}$ i $b_k = \sqrt{x_k y_k}$.

1.3 Ciagi monotoniczne

Mamy dane dwa ciagi rzeczywiste $A = (a_1, ..., a_n)$ i $B = (b_1, ..., b_n)$. Wartość wyrażenia

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

1. Przyjmuje swoje maksimum wtedy gdy $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ oraz $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$.
2. Przyjmuje swoje minimum wtedy gdy $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ oraz $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$

2 Zadania

O ile nie jest napisane inaczej, wszystkie liczby sa dodatnie i rzeczywiste, a n to liczba elementów, badź dowolna liczba dodatnia i całkowita.

1. $$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$
2. $$(1+a^2)(1+b^2) \geq 4ab$$
3. $$a^3 + b^3 + c^3 \geq \sqrt{8}abc$$
4. (Nierówność Nesbitta) $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$
5. $$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$
6. $abc = 1$ $$a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2$$
7. $$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i + b_i}\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}\right)^2$$
8. (OM 2022) $$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leq \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}$$
9. $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$
10. Udowodnij, że jeżeli $a + b + c = 1$, to $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$
11. Udowodnij $A \geq H$ używajac znanej już ci nierówności.
12. $$(a+b)^4 \geq 8ab(a^2+b^2)$$
13. $$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$
14. Dla $(a_1, a_2, ..., a_n)$ zachodzi $a_1 a_2 ... a_n = 1$, udowodnij: $$(a_1+1)(a_2+2)...(a_n+1) \geq 2^n$$
15. Niech a, b, c beda długościami boków trójkata, p polowa obwodu, a α, β, γ odpowiednimi katami naprzeciwko wiadomych boków. Udowodnij, że $$a\cos(\alpha) + b\cos(\beta) + c\cos(\gamma) \leq p$$
16. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi: $$(a+b+c+d)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2) + 6ab$$
17. Udowodnij, że: $$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+y)(z+x)} \geq \frac{3}{4}$$
18. (Nierówność Minkowskiego) Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzi: $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

3 Hinty (zajrzeć w ostateczności)

1. Użyj AG, 2. Przemnóż i dalej AG, 3. AG, 4. Użyj AG, a później znowu użyj AG ale potrójnie. 5. Ciagi monotoniczne, 6. Patrz zad nr 5, 7. Pogrupuj i wykonaj wielokrotne AG, 8. Przekształć odpowiednio lewa (myśl prosto), przekształć prawa do iloczynu, zastosuj nierówność CS, 9. Pogrupuj odpowiednio lewa strone i użyj AH, 10. Zastosuj AH, 11. Zastosuj CS, 12. Spierwiastkuj stronami, lewa strone zamień na ułamek o mianowniku 2, a dalej sie domyśl, 13. Przemnóż stronami przez $\frac{abc}{2}$, a dale użyj AH, 14. Użyj AG, 15. Jeżeli $a \geq b$, to $\cos(\alpha) \leq \cos(\beta)$ oraz zauważ, że $a = b\cos(\gamma) + c\cos(\beta)$, na koniec użyj nierówności o ciagach monotonicznych, 16. Użyj CS, ale przedtem znajdź kreatywne podstawienie do nierówności, 17. Użyj CS w pewnej tajemniczej postaci, 18. Zastosuj najstarszy trik z OMJ, a nastepnie użyj CS.