Mecz Młodszych

Rozwiązania

Zadanie 1. Znajdź wszystkie różnowartościowe funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające da dowolnego $n \in \mathbb{N}$ warunek $f(f(n)) \leqslant \frac{n+f(n)}{2}$

Rozwiązanie W poniższym rozwiązaniu oznaczmy $f^k(x) = f(\overset{k \text{ razy}}{\dots} (f(x)) \dots)$.

Przyjmijmy że istnieje x taki, że $f(x) < x$. Udowodnimy indukcyjnie, że wtedy dla każdego $k \geqslant 1$ również $f^k(x) < x$: dla $k = 1$ jest to oczywiście prawda, a jeśli dla $1 \leqslant i \leqslant k$ zachodzi $f^i(x) < x$, to $f^{k+1}(x) \leqslant \frac{f^{k-1}(x)+f^k(x)}{2} < \frac{x+x}{2} = x$. Wynika z tego, że istnieją a, b spełniające $f^a(x) = f^b(x)$ oraz $a < b$. Korzystając z różnowartościowości otrzymujemy $f^{a-1}(x) = f^{b-1}(x)$ i dalej analogicznie, aż otrzymamy $x = f^{b-a}(x)$, co jest oczywiście sprzeczne, gdyż $f^{b-a}(x) < x$.

Jeśli istnieje x taki, że $f(x) > x$, to $f(f(x)) \leqslant \frac{x+f(x)}{2} < \frac{f(x)+f(x)}{2} = f(x)$. Przyjmując $a = f(x)$ otrzymujemy $f(a) < a$, co udowodniliśmy, że nie może zachodzić.

Jeśli istnieje więc taka funkcja, to spełnia $f(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{N}$. Sprawdzamy, że taka funkcja faktycznie spełnia założenia zadania.

■

Zadanie 2. Niech $P_k(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$. Udowodnij, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

Rozwiązanie Zamiast udowodaniać równość dla każdej liczby rzeczywistej, udowodnimy równość wielomianów przyjmując x za zmienną. Wtedy wymnożenie obu stron równania przez $x - 1$ jest przekształceniem równoważnym, co pozwala nam nie rozważać oddzielnie przypadku $x = 1$.

Będziemy też korzystać ze wzoru skróconego mnożenia: $(x - 1)P_k(x) = x^k - 1$ oraz wzoru dwumianowego:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_k(x) = 2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right) \iff$$
$$(x-1)\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_k(x) = (x-1)2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right) \iff$$
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-1)P_k(x) = 2^n\left(\frac{x+1}{2}-1\right)P_n\left(\frac{1+x}{2}\right) \iff$$
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x^k-1) = 2^n\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^n-1\right) \iff$$
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = (1+x)^n - 2^n \iff$$
$$\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k - 1\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - 1\right) = (1+x)^n - 2^n \iff$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+x)^n - 2^n \iff$$
$$(x+1)^n - (1+1)^n = (1+x)^n - 2^n \iff$$
$$0 = 0$$

■

Zadanie 3. Niech n będzie daną liczbą całkowitą dodatnią. Przypuśćmy, że wybieramy n liczb z poniższej tabelki:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{matrix}$$

w taki sposób, że żadne dwie nie mogą leżeć w tym samym wierszu lub kolumnie. Wyznacz największy możliwy iloczyn tych wybranych liczb.
Rozwiązanie W poniższym rozwiązaniu wiersze i kolumny będziemy numerować od 0 dla ułatwienia obliczeń. Wartość w i-tej kolumnie i j-tym wierszu będziemy oznaczać $w_{i,j}$ i wynosi ona $i + jn$.

Opisem układu wyborów nazwiemy n liczb takich, że i-ta liczba to numer wiersza, w którym znajduje się liczba wybrana w i-tej kolumnie. Z założeń wiemy, że liczby te są parami różne, oraz dla każdych n parami różnych liczb, o wartościach z $0, 1, \ldots, n-1$ istnieje układ wyborów, którego to *opis*.

Weźmy dowolny układ o największym iloczynie. Niech $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ będzie jego *opisem*. Jeśli istnieją $i < j$ takie, że $a_i < a_j$, to rozważmy układ o *opisie*

$$b_k = \begin{cases} a_i : k = j \\ a_j : k = i \\ a_k : \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Korzystając z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych dla $i < j$, $a_i < a_j$:

$$\begin{aligned} & w_{i,a_i} \cdot w_{j,a_j} = (i + a_i n)(j + a_j n) = ij + a_i a_j n^2 + n(a_i j + a_j i) \\ & w_{i,b_i} \cdot w_{j,b_j} = (i + a_j n)(j + a_i n) = ij + a_i a_j n^2 + n(a_j j + a_i i) \\ & a_i j + a_j i < a_j j + a_i i \implies w_{i,a_i} \cdot w_{j,a_j} < w_{i,b_i} \cdot w_{j,b_j} \end{aligned}$$

czyli jeśli iloczyn był dodatni, to otrzymaliśmy układ wyborów o większym iloczynie. Dla $n > 1$ (inaczej nie wybralibyśmy $i < j$) łatwo jednak wskazać układ wyborów o niezerowym iloczynie, przez co największy iloczyn na pewno jest dodatni, czyli nie mogą istnieć takie i, j.

Dowodzi to, że jeśli układ osiąga największy iloczyn, to z $i < j$ wynika $a_i > a_j$, co w połączeniu z parami różnością liczb a_k, daje nam $a_k = n - 1 - k$.

Pozostaje wyznaczyć iloczyn $w_{0,n-1} \cdot w_{1,n-2} \cdot \ldots \cdot w_{n-1,0}$:

$$\prod_{i=0}^{n-1} (i + n(n-1-i)) = \prod_{i=0}^{n-1} ((n-1)(n-i)) = (n-1)^n n!$$

■

Zadanie 4. Dwóch piratów Arrrrr i Barrrrr obrabowało wielką łódź East India Company. Łup składa się z jednego wielkiego diamentu i monet w dwóch w workach. W jednym worku jest x a w drugim y monet. Piraci postanowili że podzielą się łupem w następujący sposób. Zagrają w grę, w której ruch polega na wybraniu liczby m i zabraniu $2m$ monet z jednego z worków, wzięciu m z nich dla siebie i odłożeniu m monet do drugiego worka. Pirat który nie będzie mógł zrobić ruchu przegrywa, a drugi bierze wielki diament. Dla jakich liczb x, y Arrrrr ma strategię wygrywającą, jeśli wykonuje on pierwszy ruch?

Rozwiązanie Udowodnimy, że przegrywające są dokładnie te pozycje, dla których $|x-y| \leqslant 1$. Ruch zmniejsza ilość monet w jednym worku o $2m$, a w drugim zwiększa o m, więc różnica ilości monet zmienia się o pewną wielokrotność 3. Ponieważ wartości $x - y$ spełniające $|x - y| \leqslant 1$, to $-1, 0, 1$: trzy kolejne liczby całkowite, to zmieniając o wielokrotność 3 zawsze otrzymamy $|x' - y'| > 1$.

Wystarczy więc udowodnić, że dla $|x - y| > 1$ zawsze istnieje ruch taki, że $|x' - y'| \leqslant 1$. Bez straty ogólności załóżmy, że $x > y$, niech $t = x - y \geqslant 2$, będziemy usuwać ze stosu x. Dla $m = 1$, $x' - y' \geqslant -1$, a dla $m = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$, $x' - y' = t - 3\lfloor \frac{t}{2} \rfloor \leqslant t - 3\frac{t-1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{t}{2} \leqslant 1$. Obie te wartości m oczywiście można wybrać według naszych założeń. Możemy też wybrać każde $1 \leqslant m \leqslant \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ czyli możemy otrzymać każde $x' - y' \equiv x - y \mod 3$, pomiędzy wynikami dla tych skrajnych m. Ponieważ dla $m = 1$ otrzymaliśmy $x' - y'$ większe bądź równe najmniejszej liczbie spośród $-1, 0, 1$, a dla $m = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ otrzymaliśmy $x' - y'$ mniejsze bądź równe największej spośród nich, a są to trzy kolejne liczby całkowite, to zawsze można którąś z nich otrzymać.

Arrrrrrrrrr ma więc strategię wygrywającą, dla x, y takich, że $|x - y| > 1$. ■

Zadanie 5. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wykaż nierówność

$$\sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)} \geqslant \sqrt{3(a+b)^2 + 3(b+c)^2 + 3(c+a)^2}$$

Rozwiązanie Aby równania mieściły się w linijkach wprowadźmy notację

$$\sum_{cykl.} f(x,y,z) = f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b)$$

Teza zadania wygląda wtedy tak:

$$\sum_{cykl.} \sqrt{2(x^2+y^2)} \geqslant \sqrt{\sum_{cykl.} 3(x+y)^2}$$

Bądźmy odważni i podnieśmy nierówność do kwadratu. Otrzymujemy rownoważnie tezie:

$$4\sum_{cykl.} \sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)} \geqslant 2\sum_{cykl.} x^2 + 6\sum_{cykl.} xy$$

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną, a kwadratową:

$$4\sum_{cykl.} \sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)} = 8\sum_{cykl.} K(x,y)K(y,z) \geqslant$$
$$\geqslant 8\sum_{cykl.} A(x,y)A(y,z) = 2\sum_{cykl.} (xy + xz + y^2 + yz) = 2\sum_{cykl.} x^2 + 6\sum_{cykl.} xy$$

■

Zadanie 6. Udowodnij, że

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\dots\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$$

Rozwiązanie Udowodnimy to indukcyjnie. Bez wzmocnienia tezy jednak się nie uda, dlatego udowodnimy:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\dots\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right)$$

Dla $n = 1$ sprowadza się to do $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. Przyjmijmy więc, że pewnego n nasza teza zachodzi, wtedy mnożąc obustronnie przez $\frac{2n+1}{2n+2}$ otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\dots\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right)\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) \overset{?}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Przekształcamy równoważnie równość oznaczoną '?':

$$\cdots \iff (2n+1)\sqrt{3n+4} \leqslant (2n+2)\sqrt{3n+1} \iff$$
$$(2n+1)^2(3n+4) \leqslant (2n+2)^2(3n+1) \iff$$
$$12n^3+28n^2+19n+4 \leqslant 12n^3+28n^2+20n+4 \iff$$
$$0 \leqslant n$$

Co na mocy twierdzenia o indukcji matematycznej kończy dowód naszej tezy. Oczywiście $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n}}$, czyli teza zadania również jest prawdziwa.

■

Zadanie 7. Liczby względnie pierwsze p i q spełniają zależność:

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

Udowodnij, że p jest podzielne przez 1979.

Rozwiązanie

$$\sum_{i=0}^{659}\frac{1}{2i+1} - \sum_{i=1}^{659}\frac{1}{2i} = \sum_{i=0}^{659}\frac{1}{2i+1} - \sum_{i=1}^{659}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{2i}\right) = \sum_{i=1}^{1319}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{659}\frac{1}{i} = \sum_{i=660}^{1319}\frac{1}{i} =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=660}^{1319}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{1979-i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=660}^{1319}\frac{1979}{i(1979-i)}$$

Jako że liczba 1979 jest pierwsza, a wszystkie liczby występujące w mianownikach są mniejsze od 1979, to po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i zredukowaniu wspólnych dzielników, licznik wciąż będzie podzielny przez 1979.

■

Zadanie 8. Znajdź wszystkie liczby naturalne $n < 10^{100}$, dla których jednocześnie $n \mid 2^n$, $n-1 \mid 2^n - 1$ oraz $n-2 \mid 2^n - 2$.

Rozwiązanie Będziemy korzystać z następującego lematu:

Lemat $NWD(a^n - 1, a^m - 1) = a^{NWD(n,m)} - 1$

Dowód: Jeśli $n < m$, to

$$\begin{aligned} NWD(a^n-1, a^m-1) &= NWD(a^n-1, (a^m-1) - a^{m-n}(a^n-1)) \\ &= NWD(a^n-1, a^{m-n}-1) \end{aligned}$$

Stosując algorytm Euklidesa "na wykładnikach", otrzymamy $a^{NWD(n,m)} - 1$.

$n \mid 2^n \iff \exists n_1 \in \mathbb{N} : n = 2^{n_1}$.
$n-1 \mid 2^n - 1 \iff 2^{n_1} - 1 \mid 2^{2^{n_1}} - 1 \overset{lemat}{\iff} n_1 \mid 2^{n_1} \iff \exists n_2 \in \mathbb{N} : n_1 = 2^{n_2}$.
$n-2 \mid 2^n - 2 \iff 2^{2^{n_2}} - 2 \mid 2^{2^{2^{n_2}}} - 2 \iff 2^{2^{n_2}-1} - 1 \mid 2^{2^{2^{n_2}}-1} - 1 \overset{lemat}{\iff}$
$2^{n_2} - 1 \mid 2^{2^{n_2}} - 1 \overset{lemat}{\iff} n_2 \mid 2^{n_2} \iff \exists n_3 \in \mathbb{N} : n_2 = 2^{n_3}$.

Otrzymujemy więc $n = 2^{2^{2^{n_3}}}$. Dla $n_3 = 0, 1, 2, 3$, przyjmuje wartość odpowiednio $4, 16, 65536, 2^{256}$ ($2^{256} < 2^{270} = 8^{90} < 10^{100}$). Dla $n_3 \geqslant 4$, $n \geqslant 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}} = 16^{4096} > 10^{100}$.

■

Zadanie 9. Dane są trzy współliniowe punkty A, B, C oraz dowolny punkt P nieleżący na tej prostej. Udowodnij, że środki okręgów opisanych na trójkątach PAB, PBC, PCA oraz punkt P leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie Oznaczmy środku tych trójkątów odpowiednio D, E, F. Przyjmijmy bez straty ogólności, że punkty A, B, C leżą na prostej w tej kolejności oraz $\sphericalangle PBA \geqslant \sphericalangle PBC$.

Udowodnimy najpierw, że $\sphericalangle APC = \sphericalangle DPE$. Jeśli $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PBC$, jest to oczywiście prawda ponieważ D leży na AP, a E leży na CP. Przyjmijmy więc, że $\sphericalangle PBA > \sphericalangle PBC$. Wtedy kąt $\sphericalangle PBA$ jest rozwarty, czyli D leży po przeciwnej stronie prostej AP niż punkt B, a kąt $\sphericalangle PBC$ jest ostrokątny, czyli E leży po tej samej stronie prostej BP, co punkt B. Otrzymujemy:

$$\sphericalangle PDA = 360^\circ - 2\sphericalangle PBA = 2\sphericalangle PBC = \sphericalangle PEC$$
$$\sphericalangle DPA = 90^\circ - \sphericalangle PDA = \sphericalangle EPC$$
$$\sphericalangle DPE = \sphericalangle APC + \sphericalangle DPA - \sphericalangle EPC = \sphericalangle APC$$

W pierwszym równaniu korzystamy z zależności między kątem wpisanym a środkowym, a w drugim z tego, że trójkąty APD, CPE są równoramienne.

Zauważmy, że symetralna AP przechodzi przez D i F, a symetralna CP przez E i F, jako że są to symetralne cięciw okręgów. Z sumy kątów czworokąta mamy więc:

$$\sphericalangle APC + 90^\circ + 90^\circ + \sphericalangle DFE = 360^\circ \implies \sphericalangle DFE = 180^\circ - \sphericalangle DPE$$

Czyli na czworokącie $DFEP$ można opisać okrąg.

■

Zadanie 10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty E i F leżą na bokach AC i AB opowiednio, że zachodzi równość $BC^2 = BA \cdot BF + CE \cdot CA$. Udowodnij, że dla różnych położeń pumktów E i F okrąg opisany na trójkącie AEF przechodzi przez pewien punkt stały inny niż A.

Rozwiązanie Niech $D = BE \cap CF$ oraz G przecięciem BC i okręgu opisanego na CFA. Z potęgi punktu wiemy, że $BG \cdot BC = BF \cdot BA$. Łącząc to z założeniami dostajemy $BC^2 = BA \cdot BF + CE \cdot CA = BG \cdot BC + CE \cdot CA$, więc $CE \cdot CA = BC(BC - BG) = BC \cdot CG$, stąd $BGEA$ jest cykliczny. Z kątów dostajemy $\angle DFA + \angle DEA = \angle CGA + \angle BGA = 180°$, więc $AEDF$ również jest cykliczny. Niech X będzie przecięciem okręgów opisanych na BDC oraz $AFDE$. Zauważmy, że $\angle XBC = 180° - \angle XDC = \angle XDF = \angle XAF = \angle XAB$. Analogicznie $\angle XCB = \angle XAC$. Stąd prosta BC jest styczna do okręgów opisanych na trójkątach XAB i XAC, więc punkt X jest jednoznacznie wyznaczony przez punkty A, B, C i jest punktem spełniającym tezę zadania.

■