KUŹNIA OLIMPIJSKA

Kontest 5 – II etap

Zadanie 1. 120 piratów dzieli między sobą 119 złotych monet. Następnie kapitan sprawdza, czy którykolwiek z piratów ma 15 lub więcej złotych monet. Jeśli znajdzie pierwszego takiego pirata, ten musi oddać wszystkie swoje monety innym piratom, przy czym nie może dać żadnemu z nich więcej niż jednej monety. Ta kontrola jest powtarzana, dopóki nie ma żadnego pirata z 15 lub więcej złotymi monetami. Czy ten proces zawsze kończy się po skończonej liczbie kontroli?

Zadanie 2. Udowodnij, że dla $n \geqslant 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Zadanie 3. Dany jest wielomian $W(x) = x^2 + ax + b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:

Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p.

Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której:

$$W(m) = W(m+1) = 0.$$

Zadanie 4. Niech P będzie dowolnym punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Niech K, L, M to środki boków BC, CA, AB odpowiednio. Niech k to prosta przechodząca przez K prostopadła do AP. Niech l to prosta przechodząca przez L prostopadła do BP. Niech m to prosta przechodząca przez M prostopadła do CP. Udowodnij, że proste k, l, m oraz okrąg opisany na trójkącie KLM mają punkt wspólny.