Autor: Jeremi Hyska

Prowadzący: Jeremi Hyska

Tw. Halla – Finaliści

Teoria

Definicja 1. Graf dwudzielny to taki, którego wierzchołki można podzielić na 2 zbiory A i B tak, że wszystkie krawędzie w grafie idą ze zbioru A do zbioru B.

Stwierdzenie 1. Równoważnie, graf jest dwudzielny gdy nie zawiera cykli nieparzystej długości.

Definicja 2. Matching (skojarzenie) w grafie to podzbiór krawędzi tego grafu taki, że że żaden dwie krawędzie w tym podzbiorze nie są incydentalne (nie wychodzą z jednego wierzchołka).

Definicja 3. Maksymalny matching to po prostu matching który ma najwięcej krawędzi, w skończonym grafie zawsze istnieje, ma własność taką że każdy wierzchołek grafu jest w tym matchingu lub wszyscy jego sąsiedzi są w tym matchingu.

Stwierdzenie 2. Jeśli w grafie G weźmiemy maksymalny matching M, to nie istnieje ścieżka w tym grafie która zaczyna się i kończy w różnych niezmatchowanych wierzchołkach i na zmianę idzie krawędziami z M i krawędziami spoza M.

Definicja 4. Perfect matching to matching o mocy $\frac{n}{2}$, gdzie n to liczba wierzchołków w grafie.

Zadania

Zadanie 1. Tosia ma dwie kwadratowe kartki o boku 45. Każdą z nich pocięła na 2025 wielokątnych kawałków, każdy o polu 1. Następnie jednak każdą z kartek złożyła z powrotem i jedną położyła dokładnie na drugiej. Jaka jest najmniejsza liczba szpilek potrzebna aby powiesić to, co powstało na tablicy korkowej?

Zadanie 2. Na szachownicy 8×8 na pewnych polach poustawiano wieże tak, że w każdym rzędzie i w każdej kolumnie jest ich ta sama, dodatnia liczba. Udowodnij, że da się wybrać 8 z tych wież tak, żeby żadne dwie się nie biły.

Zadanie 3. Maciuś ma kwadratową tablicę $n \times n$. Chce wpisać w każde pole liczbę z $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak żeby w żadnym rzędzie ani w żadnej kolumnie liczby się nie powtarzały. Na razie wpisał liczby tylko w kolumnach $1, 2, ..., k$ dla pewnego $k < n$. Na razie w żadnej kolumnie ani rzędzie nic się nie powtarza. Czy zawsze da się dokończyć wpisywanie liczb w tablicę tak aby w żadnej kolumnie ani w żadnym rzędzie żadna liczba się nie powtórzyła?

Zadanie 4. $2m$ graczy gra turniej w ping-ponga. Każdego z $2m - 1$ dni turnieju, każdy gracz gra dokładnie jeden mecz, żadne mecze się nie powtarzają, nie ma remisów. Udowodnij, że da się każdego dnia wybrać zwycięzcę tak, żeby żadni dwaj wybrani zwycięzcy się nie powtarzali.

Zadanie 5. Na planszy $n \times n$ położone zostały żetony tak, że na liczba żetonów w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest równa. (Na jednym polu może byś dużo żetonów). W jednym ruchu możemy zdjąć z planszy n żetonów jeśli żadne 2 z nich nie są w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Udowodnij, że za pomocą takich ruchów możemy wyczyścić całą planszę.

Zadanie 6. W każde pole tablicy $n \times n$ wpisane została liczba z $\{0, 1\}$. Okazało się że jeśli weźmiemy dowolny zbiór n pól na planszy, w którym żadne 2 nie są w tym samym wierszu ani w tej samej kolumnie, to jest tam przynajmniej jedna jedynka. Udowodnij że da się wybrać takie i wierszy oraz j kolumn, na których przecięciach leżą tylko jedynki oraz $i + j > n$.

Zadanie 7. (Mszana '24) Aleksander i Barbara grają w grę na grafie o nieparzystej liczbie wierzchołków. Aleksander zaczyna i ustawia pionka na wybranym przez siebie polu. następnie na zmianę, zaczynając od Barbary, gracze mogą ruszyć pionka na dowolne sąsiednie pole. Gracz który nie może wykonać ruchu lub postawi pionka na polu w którym pionek już wcześniej stał, przegrywa. Udowodnij że Aleksander ma strategię wygrywającą.

Zadanie 8. (Mszana '24) Na finale Olimpiady Matematycznej okazało się, że k sal nie wystarczyło do rozmieszczenia uczestników tak, aby w każdej sali uczestnicy się parami nie znali. Po usadzeniu w większej liczbie sal, uczestnicy wymyślili sposób, aby rozprzestrzeniać pomiędzy sobą pdf-a "Dwustosunek i biegunowe". Mogą się oni komunikować na dwa sposoby: wysyłając gołębia lub sowę, przy czym każda para znajomych może używać dokładnie jednego rodzaju komunikacji (nieznajomi nie mogą się ze sobą komunikować). Udowodnić, że przy użyciu jednego rodzaju komunikacji pewien uczestnik może rozdystrybuować ten cenny pdf pomiędzy k innych uczestników (niekoniecznie bezpośrednio).

Zadanie 9. (Mszana '23) Dany jest skończony zbiór A oraz jego podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Załóżmy, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$, suma dowolnych k z nich zawiera co najmniej $k + 1$ elementów. Udowodnić, że elementy zbioru A można pomalować na biało i czerwono w taki sposób, że każdy ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_m$ zawiera elementy obu kolorów.

Zadanie 10. Pewni kosmici mają 3 płcie: A, B, C. Na wyprawę w celu skolonizowania planety leci właśnie po n kosmitów każdej płci. Okazuje się, że każdy z kosmitów lubi co najmniej $\frac{3n}{4}$ kosmitów z każdej z pozostałych płci. Małżeństwo u tych kosmitów to trójka kosmitów, po jednym z każdej płci, takich że wszyscy się lubią. Udowodnij że wszystkich kosmitów z wyprawy da się złączyć w n rozłącznych małżeństw.

Zadanie 11. Na pewnej planecie żyje 2^n kosmitów i wszyscy mają różne imiona które są słowami długości n składającymi się tylko z liter z $\{a, b\}$. Mówimy że zbiór n kosmitów to wesoła gromadka jeśli da się ich ustawić w rządek tak, że dla każdego i od 1 do n, i-ta litera imienia i-tego kosmity w rządku jest taka sama. Znajdź najmniejszą liczbę m taką, że wśród m kosmitów na pewno istnieje wesoła gromadka.

Zadanie 12. Dziurawy trójkąt to trójkąt równoboczny skierowany wierzchołkiem w górę o boku długości n z n wyciętymi jednostkowymi trójkątami skierowanymi w górę. Diament to jednostkowy romb o kątach 60°, 120°. Udowodnij, że dziurawy trójkąt T można pokryć diamentami wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek: każdy skierowany w górę równoboczny trójkąt o boku długości k w T zawiera co najwyżej k dziur, dla $1 \leqslant k \leqslant n$.