Geometria I

1 Teoria

0. Suma kątów w trójkącie wynosi $180°$.

1. Kąt wpisany w okrąg ma miarę dwa razy mniejszą niż kąt środkowy oparty na tym samym łuku.

   1a. Kąty oparte na tym samym łuku mają tę samą miarę.

2. **Najmocniejsze twierdzenie geometrii** ("Czapeczki") Dany jest okrąg i punkt P leżący poza nim. Przez punkt P poprowadźmy styczne do okręgu w A i B. Wówczas $PA = PB$.

3. **Twierdzenie o stycznej i siecznej** Rozważmy okrąg ω i punkt A na zewnątrz tego okręgu. Poprowadźmy z A styczną do ω w punkcie B, oraz prostą przecinającą ω w punktach C, D (w tej kolejności). Wówczas $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$.

4. Środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia symetralnych jego boków (symetralna to prosta prostopadła do odcinka, przecinająca go w jego środku)

5. Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych jego kątów (wewnętrzych).

6. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest cykliczny (wpisywalny w okrąg) wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180°$.

7. Punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB. Wówczas czworokąt $ABCD$ jest cykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

8. W dany czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$

9. Przystawanie trójkątów. Trójkąty są przystające, jeżeli mają takie wszystkie boki tej samej długości. Udowodnić przystawanie można za pomocą cech bbb, kbk i bkb (trzy sąsiednie boki bądź kąty są takie same).

10. Podobieństwo trójkątów. Trójkąty są podobne, kiedy mają takie same miary odpowiadających kątów. Jest to równoważne z tym, że stosunek długości wszystkich ich odpowiadających boków jest stały. Podobieństwo można udowodnić za pomocą cech kk (kkk), bbb lub bkb, gdzie zamiast równości długości boków sprawdzamy, czy stosunek długości par boków jest taki sam.

2 Prostsze zadania

1. Na okręgu odmierzono łuki AB, BC i CD, czy kąty środkowe oparte na nich mają miary $120°$, $40°$ i $80°$. Znajdź kąty czworokąta $ABCD$, kąt pomiędzy jego przekątnymi oraz kąty utworzone przez proste zawierające jego boki.

2. Pokaż, że odbicia ortocentrum (punktu przecięcia wszystkich wysokości) względem boków trójkąta leżą na okręgu opisanym na tym trójkącie.

3. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC, a O - środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykaż, że $\sphericalangle ACH = \sphericalangle OCB$.

4. Punkt S jest środkiem okęgu opisanego na trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E. Udowodnij, że $\sphericalangle CEB = \sphericalangle CSB$.

5. (1.) Punkt P wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ ma tę własność, że $\sphericalangle ADP + \sphericalangle BCP = \sphericalangle APB$. Niech O_1, O_2 będą środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ADP i BCP. Pokaż, że punkty P, O_1, O_2 są współliniowe.

6. Dany jest trójkąt prostokątny $\triangle ABC$. Z dowolnego punktu M przyprostokątnej AC (który nie jest wierzchołkiem trójkąta) opuszczono prostopadłą prostą MN na przeciwprostokątną BC. Wykaż, że $\sphericalangle MAN = \sphericalangle MBN$.

7. (2.) Dany jest trójkąt równoboczny ABC i punkt P leżący na (krótszym) łuku AC. Pokaż, że $PA + PC = PB$.

8. W ABC punkt D jest spodkiem dwusiecznej $\sphericalangle ACB$. Oznaczmy przez P punkt przecięcia okręgu opisanego na trójkącie BDC z odcinkiem AC, a przez Q - punkt przecięcia okęgu opisanego na trójkącie ADC z odcinkiem BC. Wykaż, że $AP = BQ$.

3 Średnie zadania

1. Roztrzygnąć, czy istnieje takie 100 punktów, że każde trzy są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego.

2. (3.) **Lemat o trójliściu** Dany jest trójkąt ABC. Dwusieczna kąta ACB przecina po raz drugi okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie P. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w ABC. Pokaż, że $PA = PI = PB$.

3. (4.) **Prosta Simsona** Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Pokaż, że rzuty P na proste AB, BC, CA leżą na jednej prostej.

4. (5.) Niech $PQRS$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg, przy czym $\sphericalangle PSR = 90°$ oraz niech H, K będą rzutami punktu Q odpowiednio na proste PS i PR. Udowodnij, że prosta HK przecina odcinek SQ w połowie.

5. Przez środek okręgu przechodzi prosta l. Na okręgu, po jednej stronie tej prostej, obrano punkty C i D. Styczne do okręgu w punktach C i D przecinają się w punkcie P, a prostą l w A i B odpowiednio. Niech H będzie rzutem P na l. Wykaż, że $\sphericalangle CHP = \sphericalangle PHD$.

6. (6.) Punkty C, D leżą na okręgu o średnicy AB. Niech P będzie punktem przecięcia prostych AC i BD, a Q - prostych AD i BC. Pokaż, że $PQ \perp AB$.

7. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg Ω. Styczne do Ω w B i C przecinają się w punkcie P. Punkty D i E znajdują się na prostych AB i AC tak, że PD i PE są prostopadłe do AB i AC odpowiednio. Udowodnij, że ortocentrum trójkąta ADE jest środkiem boku BC.

8. Na bokach BC i AC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $BCFE$ i $ACGH$. Udowodnij, że proste AF, BG i EH przecinają się w jednym punkcie.

9. Udowodnij, że w czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w ABC i ADC są styczne.

4 Trudne zadania/ Praca domowa

1. (7.) Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, przy czym $AB > AC$. Niech M będzie środkiem BC, D – spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A, zaś E – punktem na prostej AO takim, że $BE \perp AO$. Wykaż, że $MD = ME$.

2. (8.) (48 OM, II.2) Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunek $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PBA = \frac{1}{3}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB)$. Udowodnij, że
$$\frac{AC}{AB+PC} = \frac{AB}{AC+PB}$$

3. (9.) (56 OM, II.5) Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD > 60°$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD, przy czym $\sphericalangle ECF = \sphericalangle ABD$. Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że
$$\frac{PQ}{EF} = \frac{AB}{BD}$$

4. (10.) **Okrąg dziewięciu punktów (Feuerbacha)** Pokaż, że w dowolnym trójkącie środki boków, spodki wysokości i środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami leżą na jednym okręgu.

5. (11.) (Brazylia 2008) Niech $ABCD$ będzie czworokątem cyklicznym. Proste r oraz s powstają przez odbicie symetryczne AB względem dwusiecznych ką- tów CAD oraz CBD. Niech P będzie punktem przecięcia prostych r oraz s, zaś O środkiem okręgu opisanego na $ABCD$. Udowodnij, że $OP \perp CD$.

5 Podpowiedzi

1. Poprowadź styczną do któregoś z okręgów w punkcie P.
2. Niech K będzie takim punktem na odcinku PB, że $PK{=}PC$.
3. Wystarczy policzyć kąty. Lemat wart zapamiętania.
4. Pokaż, że $\sphericalangle PFE = \sphericalangle PFD$ (lub podobnie, wybór zależy od konfiguracji).
5. Prosta Simsona.
6. Szukaj okręgów. Pamiętaj o rozpatrzeniu różnych konfiguracji!
7. Zauważ, że czworokąty $ABED$ i $BEMO$ są cykliczne.
8. Niech K będzie przecięciem prostych BP i AC. Wówczas $KP{=}KC$.
9. Pokaż, że punkty A, E, P, Q i F leżą na jednym okręgu.
10. Kąty i tw. odwrotne do tw. Talesa. *Uwaga:* istnienie tego okręgu można udowodnić dużo prościej posługując się jednokładnością o środku w ortocentrum danego trójkąta.
11. Pokaż, że czworokąt $APBO$ jest cykliczny. Następnie udowodnij, że $\triangle POC \equiv \triangle POD$. *Uwaga:* Rozwiązawszy zadanie warto zauważyć, że dwusieczne kątów przyległych do $\sphericalangle PBA$ i $\sphericalangle PAB$ (kątów zewnętrznych w trójkącie PBA) oraz dwusieczna $\sphericalangle APB$ przecinają się w jednym punkcie (środku okręgu dopisanego). To konfiguracja warta zapamiętania.