Kontest 3 - 28.09.2023

Rozwiązania Starsi

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n \geqslant 2$, że wszystkie liczby naturalne mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny.

Dowód. Wszystkie liczby n spełniające zadane warunki to liczby pierwsze, potęgi dwójki oraz liczba 6. Istotnie, załóżmy, że wszystkie liczby naturalne mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy r.

Jeśli $r = 1$ to n nie ma żadnych dzielników większych od 1, a zatem n jest liczbą pierwszą.

Jeśli $r = 2$, to n nie ma dzielników pierwszych nieparzystych, a ma parzyste, czyli jest potęgą dwójki.

Przyjmijmy więc, że $r \geqslant 3$. Jeśli n nie jest parzyste, to wśród liczb względnie pierwszych z n są 1 i 2, więc $r = 1$, wbrew założeniu, zatem n jest liczbą parzystą. Jeśli n jest potęgą dwójki, to wśród liczb względnie pierwszych z n są 1 i 3, a wobec tego $r = 2$. Niech $n = 2^a b$, gdzie $b > 1$ jest nieparzyste i $a \geqslant 1$. Nietrudno zauważyć, że liczby $b - 2$, $b + 2$ są mniejsze od n oraz względnie pierwsze z n, czyli należą do ciągu arytmetycznego. Ponieważ $r > 2$, więc $r = 4$. Pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego jest liczba 1, więc następny to 5. Wobec tego $3|n$. Jeśli $n > 6$, to $n \geqslant 12$. Wypisując jednak trzy pierwsze wyrazy naszego ciągu: 1, 5, 9 otrzymujemy sprzeczność. Bez trudu sprawdzamy, że $n = 6$ również spełnia warunki zadania. ■

Zadanie 2. Dany jest zbiór X składający się z 2003 liczb rzeczywistych. Dla każdych różnych $x, y \in X$ zachodzi $x^2 + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Udowodnij, że $x\sqrt{2}$ jest wymierne dla każdego $x \in X$.

Dowód. Ustalmy dowolny $x \in X$ i niech y, $z \in X$, takie że x, y, z są parami różne. Wtedy

$$x^2+y\sqrt{2}-(y^2+x\sqrt{2}) = (x-y)(x+y-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(x\sqrt{2}-y\sqrt{2})(x\sqrt{2}+y\sqrt{2}-2) \in \mathbb{Q}$$

oraz

$$z^2 + x\sqrt{2} - (z^2 + y\sqrt{2}) = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} \in \mathbb{Q},$$

ale $x \neq y$, więc $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, czyli

$$x\sqrt{2} = \frac{1}{2}((x\sqrt{2} + y\sqrt{2}) + (x\sqrt{2} - y\sqrt{2})) \in \mathbb{Q}.$$

$\blacksquare$

Zadanie 3. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC, zaś odcinki AH_A, BH_B i CH_C są jego wysokościami. Punkty O_A, O_B i O_C są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach BOC, COA i AOB. Wykazać, że proste O_AH_A, O_BH_B i O_CH_C mają punkt wspólny.

Dowód. Z równości $AO_C = OO_C$ i $AO_B = OO_B$ wnosimy, że punkty OB i OC leżą na symetralnej odcinka AO, więc $O_BO_C \perp AO$. Skoro

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle H_AAC = 90^\circ - \sphericalangle BCA = 90^\circ - \sphericalangle H_BH_CA,$$

to $AO \perp H_BH_C$, skąd wniosek, że proste O_BO_C i H_BH_C są równoległe. Analogicznie dowodzimy, że proste O_AO_C i H_AH_C są równoległe oraz proste O_AO_B i H_AH_B są równoległe. Trójkąty $O_AO_BO_C$ i $H_AH_BH_C$ nie są przystające, gdyż okrąg ω o środku O i promieniu $R/2$ (gdzie R to promień okręgu opisanego na trójkącie ABC) jest okręgiem wpisanym w trójkąt $O_AO_BO_C$, zaś okrąg opisany na trójkącie $H_AH_BH_C$ to okrąg dziewięciu punktów i ma promień także równy $R/2$, a więc taki sam jak okrąg ω. Stąd i z wcześniejszych równoległości wynika, że trójkąty $O_AO_BO_C$ i $H_AH_BH_C$ są jednokładne — środek tej jednokładności (o skali dodatniej) to szukany punkt wspólny prostych O_AH_A, O_BH_B i O_CH_C. $\blacksquare$

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele kwadratów postaci $k \cdot 2^n - 7$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią.

Dowód. Warunek z treści można przepisać jako kongruencję $x^2 \equiv -7 \mod 2^n$, bo jeśli x spełnia tą kongruencję, to $x^2 + 7 = k \cdot 2^n$. Oczywiście jeśli x spełnia tą kongruencję, to $x + 2^n$ również ją spełnia, więc wystarczy pokazać, że dla każdego n istnieje rozwiązanie tej kongruencji.
Oznaczmy tą kongruencję przez T_n. Pokażemy krok indukcyjny, że jeśli T_n ma rozwiązanie, to T_{n+1} również. Indukcję przeprowadzimy dla $n \geqslant 3$.
Niech x jest rozwiązaniem kongruencji $x^2 \equiv -7 \mod 2^n$. Wówczas $x^2 \equiv -7 \mod 2^{n+1}$ lub $x^2 \equiv -7 + 2^n \mod 2^{n+1}$. Pierwszy przypadek rozwiązuje T_{n+1},

więc wystarczy rozpatrzyć drugi przypadek.
$x^2 \equiv -7 \mod 2^n$ oznacza, że x musi być nieparzysty. Wtedy

$$\left(x + 2^{n-1}\right)^2 \equiv x^2 + x \cdot 2^n + 2^{2n-2} \equiv (-7 + 2^n) + x \cdot 2^n \equiv -7 \mod 2^{n+1}$$

Druga kongruencja jest spełniona, bo $n \geqslant 3$, czyli $2^{n+1} \mid 2^{2n-2}$. Ostatnia kongruencja jest spełniona, bo skoro x jest nieparzysty, to $x \cdot 2^n \equiv 2^n \mod 2^{n+1}$. Dla $n = 3$ mamy rozwiązanie $x = 1$, więc baza indukcyjna jest spełniona. Przez indukcję T_n ma rozwiązanie dla wszystkich $n \geqslant 3$. Przypadki $n = 1, 2$ są spełnione, bo rozwiązanie T_n spełnia również kongruencję T_{n-1}. ■