Języki automaty i obliczenia

Definicje

1. Przez **alfabet** rozumiemy dowolny zbiór, którego elementy nazywane są **literami** bądź **symbolami**, podczas tego wykładu dodatkowo zakładamy, że zbiór ten musi być *skończony*.
2. **Słowo** nad alfabetem $\mathcal{A}$ jest to skończony ciąg liter z alfabetu $\mathcal{A}$.
   Przykładowo: 0101011 jest słowem nad alfabetem $\{0, 1\}$, *ababa* jest słowem nad alfabetem $\{a, b, c\}$.
3. Jeśli słowo w ma długość n, to piszemy $|w| = n$, mówimy też, że słowo w ma n pozycji, liczonych od 1. Jeśli $1 \leqslant i \leqslant |w|$, to przez $w[i]$ oznaczamy i-tą literę słowa w. Jest tylko jedno słowo długości 0, nazywane słowem pustym i oznaczone symbolem ε.
4. Konkatenacja słów $u = a_1 \dots a_k$ oraz $v = b_1 \dots b_l$ to słowo $a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l$, oznaczane $u \cdot v$ lub uv.
   Przez $\mathcal{A}^*$ oznaczamy zbiór wszystkich słów (skończonych) nad alfabetem $\mathcal{A}$.
5. **Językiem** nad alfabetem $\mathcal{A}$ nazywamy dowolny podzbiór $L \subseteq \mathcal{A}^*$.
6. Dla języków L i K definiujemy następujące operacje:
   (a) $L + K \coloneqq L \cup K$
   (b) $LK \coloneqq \{v \cdot w \mid v \in K, w \in L\}$
   (c) $L^* \coloneqq \bigcup_{n \geqslant 0} L^n$, gdzie $L^n = L \dots L$ oraz $L^0 = \varepsilon$
7. Język **regularny** to język który możemy uzyskać za pomocą skończonego napisu składającego się z elementów: $\varnothing$ (język pusty), języków singletonowych (jedno słowo będące jedną literą) oraz wyżej wymienionych operacji.

   Od tego momentu trochę na szybko ..., wleci potem dokładniejszy skrypt.
8. **Automat** to taki graf skierowany, z literkami nad krawędziami, jego wierzchołki nazywamy stanami. Ma Stany początkowe, stany akceptujące i reprezentuje język wszystkich słów które możemy utworzyć w tzw. biegu akceptującym tj. przechodząc jakąś ścieżką od jakiegoś stanu początkowego do jakiegoś stanu akceptującego.

Twierdzenia

1. Automaty deterministyczne, automaty niedeterministyczne i wyrażenia regularne rozpoznają / opisują tę samą klasę języków - są to właśnie języki regularne.

   Szkic dowodu: z wyrażenia regularnego dosyć łatwo budujemy automat postępując zgodnie z drzewem wyrażenia (drzewo parsowania).
   Z automatów aby uzyskać wyrażenie "skracamy" krawędzi dając wyrażenia regularne nad krawędziami.
2. Lemat o pompowaniu: jeśli L jest regularny, to istanieje stała N taka, że dla każdego słowa $w \in L$ dłuższego niż N, istnieje podział $w = w_1 w_2 w_3$ taki, że $w_2 \neq \varepsilon$, $|w_1 w_2| \leqslant N$ oraz $w_1 w_2^k w_3 \in L$ dla każdego $k \geqslant 0$.
3. Relacja Myhill-Nerode'go: możemy połączyć stany z których dojść możemy tylko po tych samych słowach do stanów akceptujących - stworzymy tak automat minimalny - deterministyczny danego języka, jeśli klas abstrakcji jest nieskonczenie wiele to język nie jest regularny.