PreOM 2024 - Dzień 1

Zadanie 1. Punkt płaszczyzny nazywamy kratowym jeśli obie jego współrzędne są całkowite. Rozstrzygnij, czy istnieje koło zawierające dokładnie *2014* punktów kratowych.

Zadanie 2. Dany jest wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są trójkątami. Wierzchołki tego wielościanu kolorujemy trzema kolorami. Udowodnić, że liczba ścian mających wierzchołki wszystkich trzech kolorów jest parzysta.

Zadanie 3. Niech $ABCD$ będzie trapezem o podstawach AB i CD, takich, że $AB > CD$. Punkty K, L leżą na odcinkach AB i CD odpowiednio oraz spełniają:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}.$$

Załóżmy, że istnieją takie punkty P, Q leżące na odcinku KL, że spełnione są następujące własności:

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle BCD, \quad \sphericalangle CQD = \sphericalangle ABC.$$

Udowodnij, że punkty P, Q, B, C leżą na jednym okręgu.

Zadanie 4. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z, spełniające zależność $x^2+y^2+z^2+9 = 4(x+y+z)$. Dowieść, że:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27$$

oraz rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.