Rozwiązania Kontestu 2 – II etap

Zadanie 1. Punkty D i E to odpowiednio spodki wysokości opuszczonych z wierzchołków A i B w trójkącie ABC. Okrąg o średnicy AD przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że pola trójkątów DPQ i EPQ są równe.

Źródło: Romantics of Geometry

Rozwiązanie 1. Niech X to rzut D na BE. Wówczas $DXEQ$ jest prostokątem, więc odległości D i E od XQ są równe. Z prostej Simsona punktu D dla trójkąta ABE mamy współliniowość P, X, Q. (Lub bez twierdzenia o prostej Simsona: przez kąty proste, można opisać okręgi na $BDXP, DQEX$ oraz $BDEA$; stąd (w jednej z konfiguracji) mamy równości kątów $DXQ = DEQ = DBA = 180 - DXP$, czyli P, X, Q są współliniowe). Ostatecznie więc odległości D i E od PQ są równe, co daje tezę.

Źródło: Romantics of Geometry

Zadanie 2. „Delfin” to pionek, który porusza się o jedno pole w górę, w prawo lub ukośnie w dół w lewo. Czy „delfin”, zaczynając od lewego dolnego rogu kwadratowej planszy o boku 8, może przespacerować całą planszę, odwiedzając każde pole dokładnie raz?

Źródło: Zadanie 10 z link

Rozwiązanie 2. Oznaczymy rzędy planszy numerami $0, 1, 2, \ldots, 7$ od dołu do góry, a kolumny planszy numerami tych samych liczb od lewej do prawej (zobacz rysunek poniżej). Każdej komórce planszy przypiszemy sumę numerów rzędu i kolumny, w których ta komórka się znajduje.

„Delfin” zaczyna swoją drogę w komórce, dla której $s = 0$. Przy każdym ruchu „delfin” przemieszcza się do komórki, której liczba s jest albo większa o 1, albo mniejsza o 2 w porównaniu do poprzedniej. Oznacza to, że reszta z dzielenia liczby s przez 3 zmienia się w następującej kolejności: $0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots$

Załóżmy, że „delfin” obeszedł całą planszę, odwiedzając każdą komórkę dokładnie raz. To oznacza, że musiał odwiedzić 21 komórek o sumie rzędów i kolumn równej 0. Jednak na planszy jest ich tylko 20 – sprzeczność.

Źródło: Zadanie 10 z link

Zadanie 3. Dany jest wielomian

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

posiadający n parami różnych pierwiastków. Udowodnij, że $\frac{n-1}{n} > \frac{2a_0a_2}{a_1^2}$ dla $a_1 \neq 0$.

Źródło: link

Rozwiązanie 3. Przed dowodem dla uproszczenia wprowadźmy oznaczenia:

$$S_1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

$$S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n,$$

$$P = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Ze wzorów Viete'a mamy:

$$-\frac{a_1}{a_0} = S_1,\ \frac{a_2}{a_0} = S_2,$$

zatem:

$$\frac{a_0a_2}{a_1^2} = -\frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{S_2}{S_1^2}.$$

Teza zadania jest równoważna nierówności:

$$\frac{n-1}{n} > \frac{2S_2}{S_1^2} = \frac{S_1^2 - P}{S_1^2}.$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$1 - \frac{1}{n} > 1 - \frac{P}{S_1^2},$$

$$\frac{P}{S_1^2} > \frac{1}{n},$$

$$n \cdot P > S_1^2,$$

$$\frac{P}{n} > \left(\frac{S_1}{n}\right).$$

Uzyskaliśmy nierówność pomiędzy średnią kwadratową a arytmetyczną.

Źródło: link

Zadanie 4. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, które spełniają:

- $f(p) > 0$ dla każdej liczby pierwszej p,
- $p \mid (f(x) + f(p))^{f(p)} - x$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ i każdej liczby pierwszej p.

Źródło: link

Rozwiązanie 4. Jedynym rozwiązaniem jest $f(x) = x$.

Rozważmy $x = p$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas $p \mid 2^{f(p)} f(p)^{f(p)} \implies p \mid f(p)$ dla każdej nieparzystej liczby pierwszej.

Załóżmy, że $2 \nmid f(2)$. Jeśli $f(2) \neq 1$, to niech q będzie nieparzystym dzielnikiem pierwszym $f(2)$. Z drugiego warunku mamy $q \mid (f(2)+f(q))^{f(q)} - 2 \implies q \mid 2$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem w tym przypadku musimy mieć $f(2) = 1$. Jednak podstawiając $x = 2$ do drugiego warunku, otrzymujemy $p \mid -1$ dla każdej nieparzystej liczby pierwszej, co również jest sprzeczne. W związku z tym pozostaje $2 \mid f(2)$.

Teraz nietrudno wykazać przez sprowadzenie do sprzeczności, że dla dowolnych dwóch liczb pierwszych p i q mamy $p \nmid f(q)$ oraz $q \nmid f(p)$. Zatem $f(p) = p^{\alpha_p}$, gdzie α_p jest liczbą naturalną zależną od p.

Ustalmy dowolną niezerową liczbę całkowitą x. Stosując Małe Twierdzenie Fermata oraz fakt, że $\gcd(x,p) = 1 \implies \gcd(f(x), f(p)) = 1$, otrzymujemy $p \mid f(x) - x$ dla każdej liczby pierwszej p takiej, że $\gcd(p,x) = 1$. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy $f(x) = x$. Podobne rozumowanie dla $x = 0$ daje $f(0) = 0$, co kończy dowód.

Źródło: link