Kontakt: sligamat012@gmail.com

Staszicowa Liga Matematyczna - Seria I

Zadanie 1:
Rozważamy funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Zdefiniujmy zbiory: $W_{k,m} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid f(k) < m\}$.
Rozstrzygnąć, czy:

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_{k,m} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W_{k,m}$$

Zadanie 2:
Losujemy niezależnie z rozkładem równomiernym X_n, Y_n ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Oblicz:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\# \text{ bezkwadratowych dzielników } nwd(X_n, Y_n)]$$

Zadanie 3:
Dla danego języka $L \subseteq A^*$ zdefiniujmy mix(L) jako:

$$\{w \in A^* \mid w = uv^R \text{ lub } w = u^R v \text{ dla pewnych } u \text{ i } v \text{ gdzie } uv \in L \text{ oraz } |u| = |v|\}$$

Wykaż, że języki regularne nie są zamknięte na operację mix.
Przypominamy, że u^R to odwrócenie słowa u.

Zadanie 4:
Niech $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będą ciągłe i dla pewnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ spełniają $\forall_{z\in\mathbb{C}} f(z)^n = g(z)^n$.
Pokaż, że $f(z) = e^{2\pi i \frac{k}{n}} g(z)$ dla pewnego całkowitego k. Czy teza zachodzi dla $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$?

Rozwiązania należy wysłać na adres **sligamat012@gmail.com**, *najpóźniej dnia:* **16.11.2022**.
Rozwiązania powinny być opatrzone imieniem, nazwiskiem, klasą oraz numerem zadania.