Autor: Jerzy Szempliński
Prowadzący: Jerzy Szempliński

Arytmetyka modularna

Teoria

- **Reszty z dzielenia**
  Jeśli a jest dzielnikiem b, to piszemy $a \mid b$. Zatem:
  $$a \mid b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba } c \text{ taka, że } \quad b = ac.$$
  Jeśli a nie jest dzielnikiem b, to piszemy $a \nmid b$.
  Załóżmy, ze dane są liczby całkowite a i b, przy czym $b > 0$. Mówimy, że liczba a daje iloraz q i resztę r przy dzieleniu przez b, jeśli
  $$a = b \cdot q + r \text{ oraz } 0 \leq r < b.$$

- **Kongruencje**
  Załóżmy, że dana jest liczba całkowita dodatnia m. Mówimy, że dwie liczby całkowite a i b przystają modulo m wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b dają takie same reszty przy dzieleniu przez m. Piszemy wówczas $a \equiv b \pmod{n}$. Inaczej mówiąc
  $$a \equiv b \pmod{n} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } m \mid a - b.$$

- **Małe twierdzenie Fermata**
  Dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby pierwszej p zachodzi
  $$p \mid n^p - n,$$
  czyli w języku kongruencji
  $$n^p \equiv n \pmod{p}.$$

- **Sztuczka z przedstawianiem liczb w innej formie**
  Jak przedstawić inaczej liczbę o n takich samych cyfrach? Zauważmy, że $10^n - 1$ to liczba składająca się z n dziewiątek, więc zachodzi
  $$\underbrace{kkk\ldots k}_{n \text{ cyfr } k} = \frac{10^n - 1}{9} \cdot k.$$

Na rozgrzewkę

1. Wykaż poniższe własności kongruencji.
   - Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$, to $b \equiv a \pmod{m}$.
   - Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $b \equiv c \pmod{m}$, to $b \equiv a \pmod{m}$.
   - $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac \equiv bc \pmod{mc}$.
   - Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $c \equiv d \pmod{m}$, to $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$, $ac \equiv bd \pmod{m}$.
2. Pokaż, że jeśli $p \nmid n$, to $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
3. Przedstaw $\underbrace{222\ldots2}_{2024}\underbrace{444\ldots4}_{2024}$ jako sumę dwóch wyrażeń (jak w sztuczce).

Autor: Jerzy Szempliński

Prowadzący: Jerzy Szempliński

Zadania

1. *II OM* Dowieść, że jeśli n jest liczbą naturalną parzystą, to liczba $13^n + 6$ jest podzielna przez 7.
2. *IV OM* Dowieść, że liczba $2^{55} + 1$ jest podzielna przez 11.
3. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $3^{81} + 7^{72}$ przez 11.
4. Udowodnij, że ostatnią cyfrą liczby 7^{256} jest 1.
5. Udowodnij, że $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.
6. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby 2^{999}.
7. Udowodnij, że $29 \mid 2^{5n+1} + 3^{n+3}$ dla dowolnej liczby naturalnej n.
8. *VI OM* Znajdź ostatnią cyfrę liczby $53^{53} - 33^{33}$.
9. Pokaż, że liczba $1\underbrace{000\ldots0}_{2013}1$ jest złożona.
10. Znaleźć ostatnią cyfrę liczby $2023^{2024^{2025}}$.
11. *VII OM* Dowieść, że równanie $2x^2 - 215y^2 = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.