

Mini PreOM 2024 - Dzień 5

Zadanie 1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA i AB odpowiednio w punktach D , E , F . Prosta równoległa do AB , przechodząca przez punkt C , przecina proste FE i FD odpowiednio w punktach K i L . Wykaż, że na czworokącie $KEDL$ można opisać okrąg.

Zadanie 2. Niech n będzie nieujemną liczbą całkowitą. Oblicz

$$\sum_{k=0}^n 2^{n-k} \binom{n+k}{k}.$$

Zadanie 3. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω . Z punktu C , leżącego poza okręgiem ω , poprowadzono proste styczne do okręgu ω w punktach B i D . Prosta BD przecina po raz drugi okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie E . Dowieść, że $BD = 2DE$.

Zadanie 4. Dane są liczby całkowite dodatnie $n_1 < n_2 < \dots < n_{2000} < 10^{100}$. Dowieść, że ze zbioru $\{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$ można wybrać niepuste rozłączne podzbiory A i B mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.