Rozwiązania Kontestu 5 – PreOM 2025

Zadanie 1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt E jest przecięciem przekątnych AC i BD, a M jest środkiem łuku BC. N jest punktem przecięcia prostej ME z okręgiem na łuku AD.

Udowodnij, że dwusieczne kątów $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle AND$ przecinają się na boku AD czworokąta.

Źródło: Użytkownik Michael Metaxas, grupa Romantics of Geometry link

Rozwiązanie 1. DNE jest podobny do MBE, więc $\frac{DN}{NE} = \frac{MB}{BE}$. ANE jest podobny do MCE, więc $\frac{AN}{NE} = \frac{MC}{CE}$.

Dzieląc obie strony otrzymujemy:

$$\frac{DN}{AN} = \frac{CE}{BE} = \frac{DE}{AE},$$

gdzie ostatnia równość wynika z podobieństwa ADE i BEC, lub po prostu z mocy punktu E względem okręgu.

Stąd, przez twierdzenie o dwusiecznych, wynika teza.

Źródło: Rozwiązanie użytkownika Mikołaj Znamierowski link

Zadanie 2. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1.$$

Udowodnij, że:

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2\left|1 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right|$$

oraz wyznacz wszystkie przypadki równości.

Źródło: Korea 2001, zadanie P3 link

Rozwiązanie 2. Z tożsamości Lagrange'a mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (x_iy_j - x_jy_i)^2 \geqslant (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

$$\iff \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right) \geqslant (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Ale z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy:

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant -1,$$

zatem:

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2\left|1 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|$$

Równość mamy dla $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}, i \neq j$.

Źródło: AoPS, rozwiązanie użytkownika dm_ edogawasonichi link

Zadanie 3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Zbiór n różnych prostych dzieli płaszczyznę na różne (być może nieograniczone) obszary. Zbiór prostych nazywamy *„ładnym”*, jeśli żadne trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie.

„Kolorowaniem” nazywamy przypisanie dwóch kolorów do każdego regionu w taki sposób, że:

- pierwszy kolor pochodzi ze zbioru $\{A_1, A_2\}$,
- drugi kolor pochodzi ze zbioru $\{B_1, B_2, B_3\}$.

Dany „ładny” zbiór prostych nazywamy *„kolorowalnym”*, jeśli istnieje takie kolorowanie, że:

1. żadne dwa regiony, które dzielą wspólną krawędź, nie mają przypisanego tego samego koloru,
2. dla każdego $i \in \{1, 2\}$ i $j \in \{1, 2, 3\}$ istnieje przynajmniej jeden region pokolorowany jednocześnie kolorem A_i i B_j.

Wyznacz wszystkie wartości n, dla których każda „ładna” konfiguracja n prostych jest kolorowalna.

Źródło: CMO 2022, zadanie P4 link

Rozwiązanie 3. Odpowiedź to $n \geqslant 5$.

Jeśli $n \leqslant 4$, rozważmy n prostych równoległych. Wymagane jest łącznie 6 kombinacji kolorów, a tylko $n + 1 \leqslant 5$ regionów, stąd kolorowanie nie jest możliwe.

Teraz, załóżmy, że $n \geqslant 5$. Obróćmy obrazek tak, aby żadna linia nie była pozioma, a każdą linię zorientujmy tak, aby „przód” zwiększał wartość y. W ten sposób każda linia dzieli płaszczyznę na prawą i lewą stronę (względem tego kierunku „przodu”).

Każdy region płaszczyzny znajduje się po prawej stronie k linii i po lewej stronie $n-k$ linii dla pewnego $0 \leqslant k \leqslant n$. Ponadto, istnieje region dla każdego k: niech w będzie na tyle duże, aby w był większe niż wartość y każdego punktu przecięcia dwóch linii. Rozważmy linię poziomą $y = w$: punkt bardzo daleko na lewo od tej linii jest po lewej stronie każdej linii, a przekraczając wszystkie linie w problemie, trafiamy na wszystkie wartości k.

Wreszcie, weźmy region, który znajduje się po prawej stronie k linii. Pokolorujmy go na kolor A_1, jeśli k jest nieparzyste, a na kolor A_2, jeśli jest parzyste. Podobnie, pokolorujmy go na kolor B_i, jeśli $k \equiv i \pmod 3$. Z poprzedniego akapitu wynika, że istnieją regiony dla co najmniej $k = 0, 1, \ldots, 5$, stąd istnieje region pokolorowany na kolor A_i i B_j dla wszystkich i, j.

Ponadto, dwa regiony, które mają wspólną krawędź, będą po prawej stronie linii k i $k+1$ dla pewnego k. Z konstrukcji wynika, że kolory A_i i B_i regionów muszą się różnić, stąd udowodniliśmy, że zbiór linii jest kolorowalny.

Źródło: CMO 2022, zadanie P4 link

Zadanie 4. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych n takich, że największy dzielnik pierwszy liczby $n^4 + n^2 + 1$ jest równy największemu dzielnikowi pierwszemu liczby $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

Źródło: IMO Shortlist 2013, Number Theory 3 link

Rozwiązanie 4. Zdefiniujmy $f(n) = n^2 + n + 1$. Wtedy:

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = f(n)f(n-1).$$

Stąd wystarczy pokazać, że $\max_p f(n)$ jest co najmniej większe od większego z $\max_p f(n-1)$ i $\max_p f(n+1)$ nieskończenie często, gdzie $\max_p(n)$ to największa liczba pierwsza dzieląca n.

Jeśli nie, to albo $\max_p f(1), \max_p f(2), \ldots$ jest ostatecznie ściśle rosnący, albo malejący. Ponieważ to drugie jest niemożliwe dla ciągów liczb całkowitych, musimy pokazać, że ten ciąg nie może maleć monotonicznie. Ale $f(n^2) = f(n)f(n-1)$, więc $\max_p f(n)^2$ jest co najwyżej $\max\left(\max_p f(n), \max_p f(n-1)\right)$, więc ciąg nie może być ściśle rosnący w żadnym momencie.

Źródło: AoPS, rozwiązanie użytkownika link