

## Mini PreOM 2024 - Dzień 2

**Zadanie 1.** Pokaż, że każdą dodatnią liczbę wymierną można zapisać jako iloraz iloczynów silni (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych. Na przykład,

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

**Zadanie 2.** Dodatnie liczby rzeczywiste  $a, b, c, d$  spełniają warunek

$$a + b + c + d = 4.$$

Wykazać, że

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4.$$

**Zadanie 3.** Niech  $P$  będzie dowolnym punktem na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ . Niech  $K, L, M$  to środki boków  $BC, CA, AB$  odpowiednio. Niech  $k$  to prosta przechodząca przez  $K$  prostopadła do  $AP$ . Niech  $l$  to prosta przechodząca przez  $L$  prostopadła do  $BP$ . Niech  $m$  to prosta przechodząca przez  $M$  prostopadła do  $CP$ . Udowodnij, że proste  $k, l, m$  oraz okrąg opisany na trójkącie  $KLM$  mają punkt wspólny.

**Zadanie 4.** Znaleźć wszystkie wymierne wartości, jakie może przyjąć wyrażenie

$$\sqrt{(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4}$$

dla liczb wymiernych  $a, b, c$ .