

## Kontest 2 - 27.09.2023

### Starsi

**Zadanie 1.** Dane są 3 okręgi  $\omega_1, \omega_2$  oraz  $\Omega$  o promieniach kolejno  $r_1, r_2$  oraz  $r_1 + r_2$  wpisane w ten sam kąt o wierzchołku w  $A$ .  $I$  jest środkiem  $\omega_1$ ,  $J$  jest środkiem  $\omega_2$  oraz  $O$  jest środkiem  $\Omega$ .  $r_1 < r_2$  oraz  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są styczne.  $\Omega$  przecina prostą  $IJ$  w punkcie  $B$ . Wykaż, że  $IB = IA$ .

**Zadanie 2.** Wykaż, że istnieje taka liczba  $n > 1$ , że trzy ostatnie cyfry liczby  $7^n$  to 007.

**Zadanie 3.** Udowodnij, że wśród dowolnych 10 punktów wybranych z koła o średnicy 5 bez brzegu istnieją co najmniej dwa punkty, których odległość jest mniejsza niż 2.

**Zadanie 4.** Znajdź wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające nierówność

$$f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y))$$

dla wszystkich rzeczywistych  $x$  i  $y$ .