Równania diofantyczne

Łukasz Skiba

29 września 2022

1 Wstęp

Równaniami diofantycznymi nazywamy równania, w których zazwyczaj mamy więcej niż jedną niewiadomą i chcemy znaleźć wszystkie rozwiązania całkowite. Przykładowo równanie $x^2 + y^2 = 2$ posiada dwa rozwiązania całkowite i są to $(1, 1)$ oraz $(-1, -1)$. Łatwo jest pokazać, że sa to jedyne roziązania, jednak w praktyce spotykamy zadania dużo bardziej skomplikowane i do ich rozwiązania stosujemy pewne sztuczki.

2 Teoria

2.1 Faktoryzacja

Jedną z najbardziej oczywistych metod jest sprowadzenie równania do postaci iloczynowej, co zdecydowanie upraszcza rozwiązanie. Przykładowo dla równania $(3x + y)(3y + x) = 11$ mamy 4 możliwości zapisania 11 jako iloczynu dwóch liczb całkowitych - $(1, 11), (11, 1), (-1, -11), (-11, -1)$, więc pozostaje nam rozwiązać 4 układy równań.

Ćwiczenie 1 *Rozwiąż następujące równiania:*

$$x^2 + y^2 = x + y + 2$$

$$xy = x + y + 3$$

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$$

2.2 Nierówności

Nierówności pozwalają nam ograniczyć niewiadome z góry i z dołu, dzięki czemu zostaje nam do rozważenia skończenie wiele przypadków.

Przykład 1 *Znajdź wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich (x, y, z), że*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2$$

2.3 Kongruencje

W tym triku wybieramy jakieś sprytne modulo i pokazujemy że LHS nigdy nie przystaje do RHS.

Przydatnymi relacjami są:

- $a^2 \equiv_3 0, 1$
- $a^2 \equiv_8 0, 1, 4$
- $a^2 \equiv_5 0, \pm 1$
- $a^2 \equiv_7 0, 1, 2, 4$
- $a^3 \equiv_7 0, \pm 1$
- $a^3 \equiv_9 0, \pm 1$

Przykład 2 *Rozwiąż równania:* $x^5 - y^2 = 4$ *i* $x^2 - y! = 2022$

3 Zadania

1. Niech k będzie całkowitą parzystą liczbą całkowitą. Czy jest możliwe zapisać liczbę 1 jako sumę k odwrotności liczb całkowitych nieparzystych.

2. Niech $x, y \in \mathbb{Z}_+$ i $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Udowodnij, że $x - y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

3. (OM) Rozwiąż równanie w liczbach całkowitych:
$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$$

4. Znajdź wszytskie pary liczb całkowitych (x, y), że
$$x^3 + y^3 = (x+y)^2$$

5. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie $n, k_1, k_2, ..., k_n$, że
$$k_1 + ... + k_n = 5n - 4$$
$$\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} = 1$$

6. Udowodnij, że liczba $3^m + 3^n + 1$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

7. Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) spełniających równanie $p^3 - q^5 = (p+q)^2$

8. Rozwiąż równanie $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$ w liczbach całkowitych dodatnich.

9. Udowodnij, że równanie
$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + ... + \frac{1}{x_n^2} = \frac{n+1}{x_{n+1}^2}$$
ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $n \geq 3$.

10. Dana jest liczba całkowita k. Udowodnij, że istnieją takie liczby całkowite x i y, że żadna z nich nie jest podzielna przez 3 oraz $x^2 + 2y^2 = 3^k$.