Autorzy: Jan Piotrowicz

Prowadzący: Jan Piotrowicz

Wielomiany

W tym skrypcie skupimy się na wielomianach jednej zmiennej rzeczywistej, więc jeśli nie zaznaczono inaczej, to operujemy na liczbach rzeczywistych.

Definicje

Jak sama nazwa wskazuje, wielo-mian jest to suma wielu jednomianów. *Jednomianem* nazywamy wyrażenia będące iloczynem liczby i zmiennej. Przykładowe jednomiany:

- $4x$
- $123x^{1}23$
- 7
- $17 \cdot b \cdot x^3 \cdot a^2 \quad = \quad a^2bx^3, \quad$ gdzie a, b - stałe

To nie są jednomiany:

- $1 + x$
- $sinx$
- 2^x

Wielomianem nazywamy dowolną **skończoną sumę** jednomianów, którą w ogólności możemy zapisać jako:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0 \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

Warto zwrócić uwagę, że zazwyczaj nie pisze się jednomianów ze współczynnikiem 0, jednak nie można o nich zapominać np. we wzorach.

W powyższej sumie a_i nazywa się *współczynnikami* wielomianu, a liczbę n jego *stopniem* (dla *wielomianu zerowego* definiujemy stopień na $-\infty$), który oznaczamy $deg(w)$. *Wyrazem wolnym* nazywamy współczynnik a_0, *współczynnikiem wiodącym* a_n. Jeśli $a_n = 1$ mówimy o tak zwanym *wielomianie unormowanym.*

Wartością wielomianu w w punkcie r, oznaczaną $w(r)$ nazywamy wartość liczbową jaką otrzymamy po podstawieniu pod zmienną w wyrażeniu wielomianowym tej wartości:

$$w(r) = \sum_{i=0}^{n} a_ir^i$$

Funkcja wielomianowa jest to funkcja powstała poprzez przyporządkowanie każdej liczbie, odpowiadającej jej wartości danego wielomianu:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

Autorzy: Jan Piotrowicz

Prowadzący: Jan Piotrowicz

Operacje na wielomianach

Na wielomianach możemy wykonywać standardowe operacje matematyczne: można je dodawać, mnożyć przez liczbę, przez siebie nawzajem, składać, itp. Ważne jest jakiego stopnia wielomian możemy otrzymać z takich operacji:

- $deg(A + B) \leq max(deg(A), deg(B))$
- $deg(a \cdot A) = deg(A), \quad$ dla $a \neq 0$
- $deg(A \cdot B) = deg(A) + deg(B)$
- $deg(A(B)) = deg(A) \cdot deg(B)$

Pierwiastki wielomianów

Pierwiastkiem wielomianu nazywamy każdą taką wartość r, dla której $W(r) = 0$. Na przykład dla $w(x) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ pierwiastkami są $r_1 = -1, r_2 = 2$.

Wielomian zerowy, jako jedyny, ma nieskończoną liczbę (ilość?) pierwiastków.

Wyróżnikiem wielomianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ nazywamy wyrażenie: $\Delta = b^2 - 4ac$. Jeśli jest on:

- dodatni, to wielomian ma dwa pierwiastki:
$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- równy zero, to mamy jeden pierwiastek: $\frac{-b}{2a}$
- ujemny, to ten wielomian nie ma pierwiastków rzeczywistych

Dzielenie wielomianów

Wielomiany można dzielić z resztą. Jeśli mamy wielomian W i dzielimy go przez D to rezultatem dzielenia jest iloraz Q i reszta R:
$$W = D \cdot Q + R,$$
przy czym wielomian R jest stopnia **niższego** niż D.

Jeśli reszta R jest wielomianem zerowym, to mówimy, że wielomian D dzieli wielomian W.

Ważne fakty

Wzory skróconego mnożenia

Symbolem Newtona nazywamy $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(N-K)!}$. Mówi on na ile sposobów można wybrać k elementowy podzbiór z n elementowego zbioru, bez powtórzeń. Równoważnie: ile jest k elementowych podzbiorów zbioru n elementowego.

Wzór dwumianowy Newtona:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

Przykład:
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Mamy:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1})$$

Przykład:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

Wzory Viete'a

Dla wielomianu w stopnia n, o pierwiastkach $r_1, r_2, \ldots, r_n$ zachodzi:

$$\begin{cases} -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_i r_i \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{i \neq j} r_i \cdot r_j \\ \vdots \\ (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \end{cases}$$

Pierwiastki

- Reszta z dzielenia wielomianu w przez $(x-a)$ wynosi $w(a)$. Z powyższego stwierdzenia wynika, że a jest pierwiastkiem wielomianu wtedy i tylko wtedy, gdy $(x-a)$ dzieli w.
- Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych. Jeśli wielomian ma tyle pierwiastków, co jego stopień, to można go zapisać w postaci:

$$w(x) = (x - r_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - r_q)^{k_q}$$

Zadania

Zadanie 1

Liczby a, b spełniają warunek $2a + a^2 = 2b + b^2$. Wykaż, że jeżeli liczba a jest całkowita, to liczba b także jest całkowita.

Zadanie 2

Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych różnych od 0, dla których:

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (1+a)(1+b)(1+c)$$

Zadanie 3

Dany jest wielomian $P(x)$, stopnia n, spełniający $P(k) = \frac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Określ wartość $P(n+1)$.

Zadanie 4

Niech $f(t) = t^3 + t$. Czy istnieją $x, y \in \mathbb{Q}$, $\quad m, n \in \mathbb{Z}_+$, że $xy = 3$ oraz

$$f(f(\ldots f(f(x))\ldots)) = f(f(\ldots f(f(x))\ldots)),$$

gdzie z lewej mamy m złożeń, a z prawej n.