DWUSTOSUNEK

Tymoteusz Kucharek

26.09.22

1 Dwustosunek na prostej i okręgu

Def. 1 (Stosunek podziału) *Dany jest odcinek AB niezerowej długości i punkt X leżący na prostej AB. Liczbę:*

$$[AXB] = \begin{cases} \frac{|AX|}{|XB|} & \text{gdy } X \text{ leży na odcinku } AB \\ -\frac{|AX|}{|XB|} & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

nazywamy stosunkiem podziału odcinka skierowanego $\vec{AB}$

Def. 2 (Dwustosunek) *Dla danych czterech współliniowych punktów A, B, E, F liczbę:*

$$[AB; EF] = \frac{[AEB]}{[AFB]}$$

nazywamy dwustosunkiem czwórki (dwóch par) punktów współliniowych A, B; E, F.

Ćwiczenie 1 *Udowodnij, że: $[AB; CD] = \frac{1}{[AB;DC]}$, $[AB; CD] = [CD; AB]$ i $[AB; CD] = [A'B; CD] \Rightarrow A = A'$.*

Def. 3 (Czwórka harmoniczna) *Dwie pary punktów $(A, B; C, D)$ nazwiemy czwórką harmoniczną, jeśli $[AB; CD] = -1$.*

Ćwiczenie 2 *Na prostej leżą kolejno punkty A, C, B, D, zaś M jest środkiem odcinka AB. Udowodnij, że:*

1. $$[AB; CD] = -1 \iff |AB| = \frac{2}{\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}}$$

2. $$[AB; CD] = -1 \iff |MB| = \sqrt{|MC||MD|}$$

Twierdzenie 1 (Papppusa o dwustosunku) *Dane są cztery proste a, b, c, d, przecinające się w punkcie X. Dla dowolnej prostej k, nieprzechodzącej przez X oznaczmy przez A, B, C, D punkty przecięcia k z prostymi a, b, c, d. Wtedy wartość $[AB; CD]$ jest stała, niezależnie od wyboru prostej k.*

Def. 4 (Dwustosunek prostych) *Dla danych czterech współpękowych prostych a, b, c, d weźmy dowolną niewspółpękową z nimi prostą k, której punkty przecięcia to A, B, C, D. Wtedy wartość $[ab; cd] = [AB; CD]$ nazywać będziemy dwustosunkiem czwórki prostych współpękowych.*

Twierdzenie 2 (Twierdzenie o motylku) *Dany jest okrąg ω i jego cięciwa EF o środku M. Przez M przechodzą jeszcze dwie cięciwy ω — AB i CD. Przez X i Y oznaczmy punkty przecięcia odpowiednio AC z EF i BD z EF. Wtedy $|XM| = |YM|$.*

Def. 5 (Dwustosunek punktów na okręgu) *Dany jest okrąg ω i cztery leżące na nim punkty A, B, C, D. Weźmy dowolny punkt X na ω. Oznaczmy proste łączące X z A, B, C, D przez kolejno a, b, c, d. Wtedy wartość $[AB; CD]_\omega = [ab; cd]$ nazywamy dwustosunkiem czwórki punktów współokręgowych.*

Lemat 2.1 *Dany jest okrąg ω i leżące na nim punkty X, A, B, C, D. Przez A' oznaczmy przecięcie prostej stycznej w X ze styczną w A. Analogicznie definiujemy B', C' i D'. Wtedy $[AB; CD]_\omega = [A'B'; C'D']$.*

Def. 6 (Czworokąt harmoniczny) *Czworokąt cykliczny $ABCD$, wpisany w okrąg ω nazywamy harmonicznym, jeśli $[AB; CD]_\omega = -1$.*

Twierdzenie 3 (Twierdzenie o czworokącie harmonicznym) *Czworokąt cykliczny $ABCD$ jest harmoniczny wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi jeden z poniższych warunków:*

1. $|AB||CD| = |AD||BC|$,
2. *proste styczne do ω w A i w C oraz prosta BD są współpękowe,*
3. *proste styczne do ω w B i w D oraz prosta AC są współpękowe,*
4. *prosta AC jest dwusieczną kąta $\measuredangle BMD$, gdzie M jest środkiem odcinka AC,*
5. *prosta BD jest dwusieczną kąta $\measuredangle ANC$, gdzie N jest środkiem odcinka BD.*

Twierdzenie 4 (Twierdzenie Ponceleta) *Trójkąty $A_0A_1A_2$ i $B_0B_1B_2$ wpisane w okrąg Ω. Odcinki B_0B_1 i B_1B_2 są styczne do okręgu ω wpisanego w trójkąt $A_0A_1A_2$. Wtedy odcinek B_2B_0 również jest styczny do ω.*

2 Zadania

1. W trójkącie ABC punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na bokach BC, AC i AB. Prosta YZ przecina prostą BC w punkcie X'. Wykaż, że $[B, C; X, X']$ jest czwórką harmoniczną wtedy i tylko wtedy, gdy proste AX, BY i CZ są współpękowe.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P, Q, R są punktami przecięcia par prostych odpowiednio: AD i BC, AB i CD oraz AC i BD. Przechodząca przez R prosta równoległa do PQ przecina prostą AB w S i prostą CD w T. Udowodnij, że $|SR| = |TR|$.

3. W trójkącie ABC poprowadzono wysokość CD. Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio punkty E i F, takie że proste AF, BE i CD są współpękowe. Udowodnij, że $\measuredangle CDE = \measuredangle CDF$.

4. Punkt M leży na przekątnej BD równoległoboku $ABCD$. Prosta AM przecina proste CD i BC w punktach odpowiednio K i N. Niech ω_1 będzie okręgiem o środku w punkcie M i promieniu AM. Niech ω_2 będzie okręgiem opisanym na trójkącie KCN. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach P i Q. Udowodnij, że MP i MQ są styczne do ω_2.

5. W trójkącie ABC M jest środkiem boku AC, a K punktem półprostej BA, leżącym poza odcinkiem BA. Prosta KM przecina bok BC w punkcie L, a P jest takim punktem odcinka BM, że półprosta PM jest dwusieczną kąta LPK. Prosta l jest równoległa do BM i przechodzi przez punkt A. Wykaż, że rzut prostopadły punktu M na prostą l leży na prostej PK.

6. W trójkącie ABC okrąg wpisany o środku I jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Punkt M to rzut prostokątny punktu D na prostą EF. Niech P będzie środkiem odcinka DM. Niech H będzie ortocentrum trójkąta BIC. Udowodnij, że prosta PH połowi odcinek EF.