

## Kontest 1 - 27.09.2022

### Pierwszaki

**Zadanie 1.** Udowodnij, że w dwunastokącie foremnym  $A_1A_2\dots A_{12}$  przekątne  $A_1A_5$ ,  $A_3A_8$  i  $A_4A_{11}$  przecinają się w jednym punkcie.

**Zadanie 2.** Niech  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$  oraz  $a + b + c \leq 4$  i  $ab + bc + ca \geq 4$ . Udowodnij, że conajmniej dwie z poniższych nierówności są prawdziwe:

$$|a - b| \leq 2, |b - c| \leq 2, |c - a| \leq 2$$

**Zadanie 3.** Niech  $a$  i  $b$  będą różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że  $ab(a + b)$  jest podzielne przez  $a^2 + ab + b^2$ . Udowodnij, że  $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$ .

**Zadanie 4.** Dany jest duży stosik kart. Na każdej karcie napisana jest jedna liczba ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Wiemy, że suma wszystkich liczb na kartach jest równa  $k \cdot n!$  dla pewnego  $k$ .

Udowodnij, że możemy podzielić nasze karty na  $k$  stosów tak, że suma każdego z nich jest równa  $n!$ .