



## PreOM 2023 - Dzień 5

**Zadanie 1.** Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  będą różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Udowodnij, że:

$$a_1 + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

**Zadanie 2.** Wewnątrz 2022-kąta foremego znajduje się  $k$  punktów, gdzie  $2 \leq k \leq 1011$ . Udowodnij, że możemy wybrać tak  $2k$  punktów z wierzchołków 2022-kąta foremnego, że wewnątrz wielokąta, który tworzą dalej znajdują się wszystkie  $k$  punkty.

**Zadanie 3.** Niech  $L$  będzie spodkiem dwusiecznej kąta  $\sphericalangle B$  w ostrokątnym trójkącie  $ABC$ . Punkty  $D$  i  $E$  są środkami krótszych łuków  $AB$  i  $BC$  odpowiednio w okręgu  $\omega$  opisanym na trójkącie  $ABC$ . Punkty  $P$  i  $Q$  wybrano na przedłużeniach odcinków  $BD$  i  $BE$  poza  $D$  i  $E$  odpowiednio, tak że  $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQB = 90^\circ$ . Udowodnij, że środek  $BL$  leży na prostej  $PQ$ .

**Zadanie 4.** Niech  $p$  będzie ustaloną liczbą pierwszą. Wyznacz liczbę par  $(x, y)$  takich, że  $p \mid x^2 + y^2 - 1$  oraz  $0 \leq x, y \leq p - 1$ .

*Rozwiązania należy wysłać na adres [solve012@gmail.com](mailto:solve012@gmail.com), najpóźniej dnia:  
19.03.2023.*

*Prace powinny być opatrzone numerami zadania oraz kontestu w tytule maila.  
Przypominamy o wysyłaniu zadań w osobnych mailach (1 zadanie = 1 mail)*