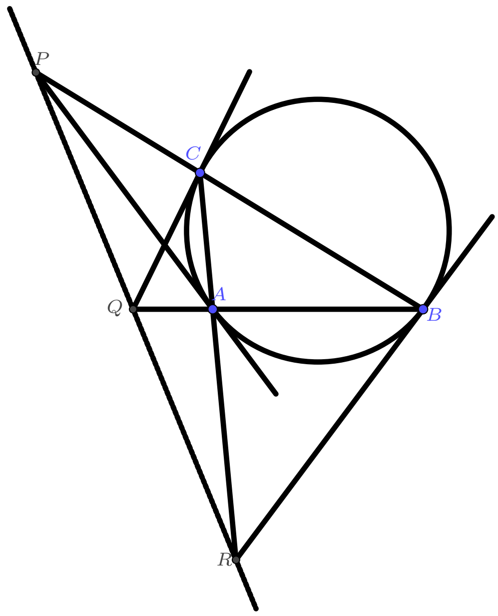
Kontest 1 - 26.09.2023

Rozwiązania Starsi

Zadanie 1. Niech dany będzie trójkąt ABC i niech proste t_a, t_b, t_c będą prostymi stycznymi do okręgu opisanego na tym trójkącie w punktach odpowiednio A, B, C. Dowieść, że wówczas punkty $P = t_a \cap BC$, $R = t_b \cap CA$, $Q = t_c \cap AB$ leżą na jednej prostej.

Dowód. Rysunek:



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Menelaosa wynika, że teza jest równoważna równości:

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

Warto zwrócić uwagę na to, że nie musimy korzystać z wektorowego zapisu ułamków, gdyż punkt P, Q oraz R leżą na przedłużeniach boków trójkąta. Z twierdzenia o kącie między styczną a sieczną wiemy, że $\sphericalangle QCA = \sphericalangle CBQ$. Pociąga to podobieństwo $\triangle QAC \sim \triangle QCB$ z którego wynikają

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{QC}{BC} \text{ oraz } \frac{QB}{BC} = \frac{QC}{AC}.$$

Mnożąc pierwszą równość przez odwrotność drugiej wyliczamy ułamek $\frac{AQ}{QB}$:

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{QC}{BC} \cdot \frac{AC}{QC} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

Analogicznie obliczamy ułamki $\frac{BP}{PC}$ i $\frac{CR}{RA}$:

$$\frac{BP}{PC} = \left(\frac{BA}{AC}\right)^2 \text{ oraz } \frac{CR}{RA} = \left(\frac{CB}{BA}\right)^2.$$

Podstawiając to do początkowego iloczynu otrzymujemy:

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CR}{RA} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BA}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{BA}\right)^2 = 1.$$

Co kończy dowód. ■

Zadanie 2. Dany jest wielomian $P(x)$, stopnia n, spełniający:

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Określ wartość $P(n+1)$.

Dowód. Niech $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Wtedy $Q(x)$ ma stopień $n+1$. Wtedy, dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $Q(k) = (k+1)P(k) - k = (k+1) \cdot \dfrac{k}{k+1} - k = 0$. Zatem $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ są pierwiastkami $Q(x)$. Skoro są to wszystkie $n+1$ pierwiastki wielomianu stopnia $n+1$, możemy zapisać $Q(x)$ jako

$$Q(x) = c(x)(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

gdzie c jest stałą.

Wynika z tego, że

$$(x+1)P(x) - x = c(x)(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

Podstawiamy $x = -1$ aby wyeliminować $(x+1)P(x)$ i znaleźć c:

$$\begin{aligned} -(-1) &= c(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-n) \\ 1 &= c(-1)^{n+1}(1)(2)\cdots(n+1) \\ c &= (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

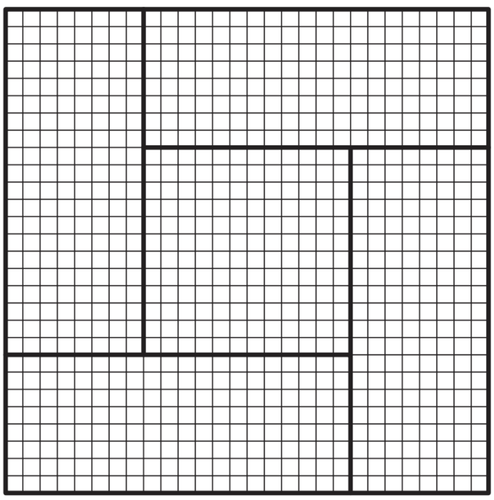
Następnie podstawmy $x = n+1$ aby znaleźć $P(n+1)$:

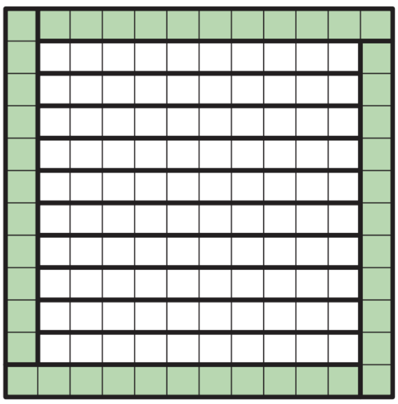
$$\begin{aligned} Q(n+1) &= (n+2)P(n+1) - (n+1) \\ (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!} \cdot (n+1)! &= (n+2)P(n+1) - (n+1) \\ (-1)^{n+1} &= (n+2)P(n+1) - (n+1) \\ (-1)^{n+1} + (n+1) &= (n+2)P(n+1) \\ P(n+1) &= \frac{(-1)^{n+1} + (n+1)}{n+2} \end{aligned}$$

Jeśli n jest parzyste, upraszcza się to do $P(n+1) = \dfrac{n}{n+2}$. Gdy n jest nieparzyste, sprowadza się to do $P(n+1) = 1$. ■

Zadanie 3. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 28 można pociąć na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×10 lub 1×11.

Dowód. Wykażemy, że taki podział jest możliwy. Zauważmy, że kwadrat o boku 28 można rozciąć na cztery prostokąty 8×20 i jeden kwadrat 12×12 (rysunek po lewej). Z kolei prostokąt 8×20 w oczywisty sposób daje się złożyć z 16 prostokątów 1×10. Pozostaje zauważyć, że kwadrat o boku 12 można podzielić na prostokąty 1×11 (kolorowe) oraz 1×10 (białe) jak na rysunku po prawej.





■

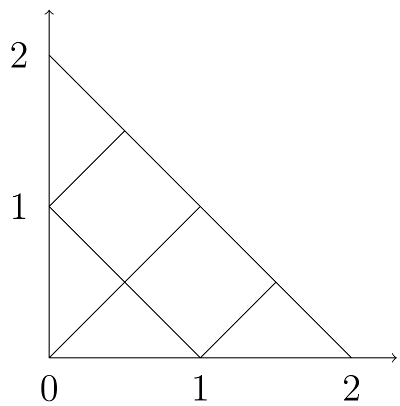
Zadanie 4. Liczby nieujemne $a_1, a_2, \dots, a_7$, $b_1, b_2, \dots, b_7$ spełniają warunek

$$a_i + b_i \leqslant 2 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, 7.$$

Wykazać, że dla pewnych dwóch różnych liczb $k, m \in \{1, 2, \dots, 7\}$ zachodzi nierówność:

$$|a_k - a_m| + |b_k - b_m| \leqslant 1.$$

Dowód. Zaznaczmy w układzie współrzędnych punkty $P_i = (a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \dots, 7)$. Z warunków zadania wynika, że punkty te leżą wewnątrz lub na obwodzie trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$. Podzielmy ten trójkąt na sześć obszarów: dwa kwadraty i cztery trójkąty prostokątne, jak na rysunku. Punktów jest siedem, więc pewne dwa z nich - na przykład P_k i P_m - leżą w tym samym obszarze $\mathcal{O}$ danego podziału.



Jeśli obszarem $\mathcal{O}$ jest kwadrat, to przez $Q = (u, w)$ oznaczmy jego środek; jeśli zaś obszarem $\mathcal{O}$ jest trójkąt prostokątny, to niech $Q = (u, w)$ będzie środkiem jego przeciwprostokątnej. W obu przypadkach $|x - u| + |y - w| \leqslant \frac{1}{2}$ dla punktów (x, y) należących do obszaru $\mathcal{O}$. W szczególności

$$|a_k - u| + |b_k - w| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad |a_m - u| + |b_m - w| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Stąd dostajemy

$$
\begin{aligned}
|a_k - a_m| + |b_k - b_m| &= |(a_k - u) + (u - a_m)| + |(b_k - w) + (w - b_m)| \leqslant \\
&\leqslant |a_k - u| + |u - a_m| + |b_k - w| + |w - b_m| = \\
&= (|a_k - u| + |b_k - w|) + (|a_m - u| + |b_m - w|) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

■