



# Lista Zadankowa 1 – Laureat Plus

**Uwaga.** Rezultat 2 zadania 7 to problem z Sangaku, znany jako twierdzenie Iwaty, udowodniony w 1866 roku. Oryginalny dowód miał 52 strony. Rezultat 1 (również zadania 7), jak i sposób dowodu obydwu rezultatów (przedstawiony tutaj w postaci serii zadań) został odkryty przez Waldemara Pompego. Rezultat 6 (jako konstrukcja) został zaproponowany przez Taxia Linneou.

**Definicja 1.** Dla czterech parami różnych skończonych punktów współliniowych  $A, B, C, D$ , przez dwustosunek rozumiemy wielkość

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$$

Jeśli któryś z punktów jest nieskończony, dedefiniujemy jeszcze  $\frac{\overrightarrow{XY}}{\overrightarrow{YZ}} = -1$  dla  $Y$  w nieskończoności oraz  $(ABCD) = (DCBA)$ .

**Definicja 2.** Bijektywne przekształcenie płaszczyzny rzutowej w siebie zachowujące współliniowość punktów i dwustosunek czwórek punktów współliniowych nazywamy rzutowym.

**Definicja 3.** Przez stożkową rozumiemy obraz okręgu w przekształceniu rzutowym. Przez elipsę rozumiemy taką stożkową, która nie posiada punktów w nieskończoności.

**Definicja 4.** Dla prostej  $k$  i nie leżącego na niej punktu  $P$ , przez transformację perspektywiczną o osi  $k$  i środku  $P$  rozumiemy przekształcenie rzutowe, dla którego zarówno punkt  $P$ , jak i każdy punkt prostej  $k$  jest punktem stałym.

**Zadanie 1.** Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są wpisane w kąt o wierzchołku  $P$ . Prosta przez  $P$  przecina okrąg  $o_1$  w punktach  $A$  i  $B$ , zaś okrąg  $o_2$  w punktach  $C$  i  $D$ , przy czym punkty  $B$  i  $C$  leżą pomiędzy  $A$  i  $D$ , zaś  $P$  leży poza odcinkiem  $AD$ . Styczna do  $o_1$  w  $A$  i styczna do  $o_2$  w  $D$  przecinają się w  $X$ . Udowodnij, że  $XA = XD$ .

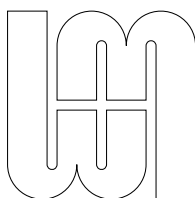
**Zadanie 2.** Niech  $f$  będzie transformacją perspektywiczną o środku  $P$  i osi  $k$ .

1. Niech  $X$  to dowolny punkt. Wykaż, że punkty  $P, X$  oraz  $f(X)$  są współliniowe.
2. Niech  $x$  to dowolna prosta. Wykaż, że proste  $k, x$  oraz  $f(x)$  są współpękowe.

**Zadanie 3.** Dane są współliniowe punkty  $P, T, T'$  oraz nieprzechodząca przez żaden z nich prosta  $k$ . Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna transformacja perspektywiczna o środku  $P$  i osi  $k$  przenosząca  $T$  na  $T'$ .

**Zadanie 4.** Dane są styczne stożkowe  $c$  i  $c'$  wpisane w kąt o wierzchołku  $P$ . Niech  $A$  to punkt styku tych stożkowych i niech  $k$  to prosta styczna do nich przechodząca przez  $A$ . Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna transformacja perspektywiczna o środku  $P$  i osi  $k$  przenosząca  $c$  na  $c'$ .

**Zadanie 5.** Odcinki  $SA$  i  $SB$  są styczne do elipsy  $s$  odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$ , przy czym  $SA = SB$ . Proste  $c$  i  $d$  są styczne do  $s$  i równoległe do  $SA$  i  $SB$  odpowiednio. Niech  $s \cap c = C$  oraz  $s \cap d = D$ . Udowodnij, że  $ABCD$  jest prostokątem.



**Zadanie 6.** Niech  $s$  to elipsa wpisana w kąt o wierzchołku  $A$ , styczna do ramion tego kąta w punktach  $B$  i  $C$ , przy czym  $AB < AC$ . Okrąg  $\omega$  wpisany w ten sam kąt jest styczny do jednego z ramion kąta (i do elipsy) w  $C$ , zaś do drugiego ramienia w  $F$ . Krótszy łuk  $CF$  okręgu  $\omega$  przecina  $s$  w  $K$ . Niech ponadto  $o$  będzie okręgiem wpisanym w ten kąt, stycznym zewnętrznym do  $s$  w  $T$ . Udowodnij, że punkt  $T$ , środek symetrii  $s$  oraz środek odcinka  $CK$  są współliniowe. Wywnioskuj konstrukcję poniższego zadania.

**Zadanie 7.** Okręgi  $o_1, o_2, o_3, o_4$  (o promieniach odpowiednio  $r_1, r_2, r_3$  i  $r_4$ ) i elipsa  $s$  są wpisane w kąt, przy czym  $o_1$  i  $o_4$  są styczne zewnętrznie do  $s$  w  $A$  i  $D$ , zaś  $o_2$  i  $o_3$  są styczne wewnętrznie do  $s$  w  $B$  i  $C$  odpowiednio. Udowodnij, że wówczas:

1. punkty  $A, B, C, D$  są wierzchołkami prostokąta.
2.  $r_1 r_4 = r_2 r_3$ .