Mecz starszych

Zadanie 1. Dane są względnie pierwsze wielomiany f, g z całkowitymi współczynnikami. Definiujemy ciąg $a_n = NWD(f(n), g(n))$. Udowodnić, że ten ciąg jest okresowy.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie że

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Zadanie 3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Określ najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą k, która spełnia następującą własność: możliwe jest zaznaczenie k komórek na planszy $2n \times 2n$ tak, aby istniał unikatowy podział planszy na kostki domina 1×2 i 2×1, w taki sposób, żeby żadna z nich nie zawierała dwóch spośród oznaczonych komórek.

Zadanie 4. Dla pewnych liczb naturalnych n możemy znaleźć dwa różne multizbiory liczb całkowitych dodatnich $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ takie, że multizbiory

$$\{a_1 + a_2, a_1 + a_3, \ldots, a_1 + a_n, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n\} \quad \text{oraz}$$
$$\{b_1 + b_2, b_1 + b_3, \ldots, b_1 + b_n, b_2 + b_3, \ldots, b_{n-1} + b_n\}$$

są równe. Znajdź wszystkie n o takiej własności.

Zadanie 5. Uczestnik Warsztatów Matematycznych pisał kontest w grupie finalistów. Po tym jak 2 godziny po rozpoczęciu kontestu wleciała poprawka do treści wpadł w gwałtowny szał. Wziął dwie kwadratowe kartki papieru o polu 2023 i podarł każdą z nich na 2023 kawałków w kształcie wielokątów o polach równych 1 (każdą z nich mógł podrzeć w inny sposób). Następnie złożył fragmenty każdej z dwóch kartek z powrotem w swój oryginalny kształt i ułożył na sobie w taki sposób, że fragmenty drugiej kartki przykryły kompletnie kawałki pierwszej kartki. Udowodnij, że uczestnik może położone tak kartki przebić z użyciem 2023 pinezek w taki sposób, aby wszystkie 4046 fragmentów zostało przebitych.

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnych, dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ac}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant a+b+c$$

Zadanie 7. Udowodnij że istnieje nieskończenie wiele takich trójek liczb całkowitych $(a,\ b,\ p)$ takich, że p jest liczbą pierwszą oraz spełnione są dwa następujące warunki:

1. $0 < a \leqslant b < p$
2. $p^5 \mid (a+b)^p - a^p - b^p$

Zadanie 8. Dane są nieparzysta liczba pierwsza p i liczba całkowita $k \geqslant 2$, takie że $p^2 \nmid 2^{p-1} - 1$. Dany jest również wielokąt foremny o p^k wierzchołkach $A_0 A_1 \ldots A_{p^k-1}$. Niech S będzie zbiorem wierzchołków A_r, takich że istnieje całkowite nieujemne i spełniające $p^k \mid 2^i - r$. Udowodnić, że S można podzielić na rozłączne p-elementowe zbiory, których elementy są wierzchołkami p-kąta foremnego.

Zadanie 9. Dany jest czworokąt cykliczny $ABCD$. Przedłużmy półproste DA i DC do punktów P i Q, tak że $AP = BC$ i $CQ = AB$ (P i Q leżą po przeciwnej stronie D względem A i C). M jest środkiem PQ. Udowodnij, że $MA \perp MC$.

Zadanie 10. Niech $ABCD$ będzie czworokątem cyklicznym oraz $E = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $F = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $G = \overline{DA} \cap \overline{BC}$. Okrąg opisany na trójkącie ABE przecina prostą BC w punktach B i P, a okrąg opisany na trójkącie ADE przecina prostą CD w punktach D i Q. Załóżmy, że C, B, P, G oraz C, Q, D, F są współliniowe w tej kolejności. Niech $M = \overline{FP} \cap \overline{GQ}$. Udowodnić, że $\sphericalangle MAC = 90^\circ$.

Zadanie 11. Punkt G jest środkiem ciężkości czworościanu $A_1A_2A_3A_4$, a punkty A_1', A_2', A_3' i A_4' to drugie punkty przecięcia sfery opisanej na czworościanie $A_1A_2A_3A_4$ z prostymi GA_1, GA_2, GA_3 i GA_4, odpowiednio. Udowodnić, że

$$GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GA_4 \leqslant GA_1' \cdot GA_2' \cdot GA_3' \cdot GA_4'$$

oraz

$$\frac{1}{GA_1'} + \frac{1}{GA_2'} + \frac{1}{GA_3'} + \frac{1}{GA_4'} \leqslant \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GA_2} + \frac{1}{GA_3} + \frac{1}{GA_4}.$$