

Kontest 1 - 27.09.2022

Starsi

Zadanie 1. Niech AA' będzie środkową w trójkącie ABC . Niech D będzie punktem na AA' oraz E przecięciem BD i AC . Okrąg opisany na trójkącie BCE przecina AB ponownie w punkcie F .

Udowodnij, że jeśli punkty C , D i F są współliniowe to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 2. Dany jest graf dwudzielny o częściach A i B , w którym $|A| = 2n$, $|B| = 2n + 1$ oraz wszystkie wierzchołki w części A mają ten sam stopień.

Wykaż, że pewne dwa wierzchołki w części B mają ten sam stopień.

Zadanie 3. Niech AD, BE, CF będą wysokościami w trójkącie ostrokątnym ABC . Prosta równoległa do EF przechodząca przez D przecina prostą AB w punkcie R i AC w Q . Niech P będzie przecięciem prostych EF i CB .

Udowodnij, że okrąg opisany na PQR przechodzi przez środek odcinka BC .

Zadanie 4. Wyznacz liczbę par dodatnich liczb całkowitych m, n spełniających równanie:

$$m(m + 1) = (n - 17)(n + 17)$$

.