Sztuka Trygopały

Agata Stępińska, Jan Kwieciński

08.12.2022

1 Definicja i podstawowe wzory

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \text{ ——— } \sin(\alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha)$$
$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) \text{ ——— } \cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha)$$

2 Wzory na sumy

a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

c) $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$

3 Twierdzenia do Pałowania

3.1 Pole trójkąta

Dla każdego trójkąta ABC zachodzi:

$$[ABC] = \tfrac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$$

3.2 Twierdzenie sinusów

Dla każdego trójkąta ABC zachodzi:

$$\tfrac{AB}{\sin(\gamma)} = \tfrac{BC}{\sin(\alpha)} = \tfrac{CA}{\sin(\beta)} = 2R$$

3.3 Twierdzenie cosinusów

Dla każdego trójkąta ABC zachodzi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

4 Przykłady

Przykład 0 Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^\circ$. Punkt E jest rzutem prostokątnym D na prostą AB. Punkt F jest taki, że czworokąt $DEBF$ jest prostokątem.

1. Wykazać, że trójkąty AED i CFD są podobne.
2. Niech $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CAD$ oraz $a = DF$, $b = CF$, $c = AD$.
   Wyznaczyć $\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \cos\alpha,\ \cos\beta,\ tg\,\alpha,\ tg\,\beta$ w zależności od a, b, c.
3. Wykorzystując uzyskane zależności wyznaczyć: $\sin(\alpha + \beta),\ \cos(\alpha + \beta),\ tg(\alpha + \beta)$.

Przykład 1 Udowodnij, że w dowolnym trójkącie spełniona jest tożsamość:
$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$

Przykład 2 Wykorzystując twierdzenie Cosinusów zbadaj jakimi trójkątami (ostrokątnymi, prostokątnymi, czy rozwartokątnymi) są trójkąty o bokach długości:

(a) 2, 3, 4

(b) 3, 4, 5

(c) 4, 5, 6

Przykład 3 (74 OM I etap zadanie 3) Dany jest trójkąt ABC. Okrąg styczny do boku AC oraz do przedłużeń boków AB, BC ma promień długości r_1. Okrąg styczny do boku BC oraz do przedłużeń boków AB, AC ma promień długości r_2. Udowodnić, że jeżeli $r_1 + r_2 = AB$, to trójkąt ABC jest prostokątny.
Przykład 4 Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ABC, ABH, BCH, CAH mają równe promienie, gdzie H to ortocentrum trójkąta ABC.
Przykład 5 (PreOM 2022 zadanie 20) Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC, przy czym $\angle APC = 150°$. Udowodnij, że z odcinków AP, BP, CP można zbudować trójkąt prostokątny.

5 Zadanka

Zadanie 1 Wykazać, że pole S trójkąta o bokach a, b, c i promieniu R okręgu opisanego wyraża się wzorem $S = \frac{abc}{4R}$
Zadanie 2 Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Wykazać, iż

$$\sqrt{[ABE]} + \sqrt{[CDE]} \leqslant \sqrt{[ABCD]}$$

Zadanie 3 (73 OM I etap zadanie 8) Dany jest trójkąt ABC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC, a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $\sqrt{2} * EM \leqslant AB$.
Zadanie 4 W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AM i CN. $[ABC] = 18$, $[MNB] = 2$, $MN = 2\sqrt{2}$. Oblicz promień okręg opisanego na trójkącie ABC.
Zadanie 5 Niech O_1 i O_2 to środki okręgów stycznych wewnętrznie w punkcie A, których promienie to r_1 i r_2. Prosta k przecina obydwa okręgi w punktach B i C (leżą po tej samej stronie prostej O_1O_2). Znajdź promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
Zadanie 6 (reguła równoległoboku) Udowodnij, że suma kwadratów długości przekątnych w równoległoboku jest równa sumie kwadratów wszystkich jego boków.
Zadanie 7 (wzór Stewarta) Dany jest trójkąt ABC i D na odcinku BC. $AD = d$, $BD = m$, $DC = n$. Wtedy

$$d^2 = \frac{1}{a}(b^2m + c^2n) - mn$$

Zadanie 8 Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = 3AB$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ABC. Niech D będzie rzutem na AC środka łuku BAC okręgu opisanego na ABC. Dowieść, że D leży na okręgu opisanym na trójkącie BIC.

6 Wskazówki

Zadanie 1 z jakim twierdzeniem kojarzy Ci się ten wzór?
Zadanie 2 Skorzystaj ze wzoru na pole i przekształć tezę
Zadanie 3 Przedstaw AE korzystając tylko z AB i funkcji trygonometrycznych a następnie policz EM z twierdzenia cosinusów.
Zadanie 4 Trójkąty podobne, a dalej liczenie i wzorki
Zadanie 5 Oznacz przecięcie k z O_1O_2
Zadanie 6 i 7 Tw. cos
Zadanie 8 Módl się.