Kontest 1 - 27.09.2022

Rozwiązania Finaliści

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli wielomian $f(x) = x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma 6 pierwiastków rzeczywistych (z krotnościami), to $a = b = c = d = 0$
Rozwiązanie: Z wzorów Viete'a otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 0$$

$$\sum_{i,j} x_i x_j = 0$$

więc też, $(\sum_{i=1}^{6} x_i)^2 - 2\sum_{i,j} x_i x_j = 0$, czyli $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0$, czyli:
$x_i \in \mathbb{R}$ daje $x_i = 0$, co dawodzi tezy.

■

Zadanie 2. Rozstrzygnij czy istnieje na płaszczyźnie niepusty, skończony zbiór okręgów o rozłącznych wnętrzach takich, że każdy jest styczny do dokładnie pięciu z pozostałych.
Rozwiązanie: Rozważmy dwunastościan foremny z wpisanymi okręgami we wszystkie ściany oraz punkt P - dowolny wierzchołków tego dwunastościanu. Niech O będzie środkiem sfery ω opisanej na naszym dwunastościanie. Rzutujemy okręgi na ω, patrząc od strony punktu O, a następnie robimy inwersję (3D) w P, co przeprowadza rzuty okręgów na płaszczyznę (bo "prostuje" sferę), w taki sposób, że są rozłączne wewnętrznie oraz zachowują swoje styczności, co kończy dowód.

■

Zadanie 3. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym oraz M środkiem boku BC oraz H ortocentrum. Odcinki BE oraz CF są wysokościami w trójkącie ABC. Przypuśćmy, że na prostej EF jest taki punkt X, że $\angle XMH = \angle HAM$ oraz A, X leżą po przeciwnych stronach MH.
Udowodnij, że AH przecina odcinek MX w połowie.
Rozwiązanie: Z równości kątów wiemy, że prosta XM jest styczna do okręgu (AHM) oraz z przeliczenia kątów $AEHF$ jest cykliczny.
Rozważmy 3 okręgi: (M), $(AEHF)$ i (AHM). Osią potęgową (M) i (AHM) jest prosta MX, (AHM) i $(AEHF)$ - prosta AH oraz (M) i $(AEHF)$ - prosta k równoległa do EF - równo odległa od punktu M i prostej EF (bo $ME = MF$ - $(ACEF)$ jest cykliczny).
Proste te przecinają się w jednym punkcie - środku potęgowym tych trzech okręgów. Prosta k przecina w połowie MX, stąd mamy tezę.

■

Zadanie 4. Niech $a_2, a_3, \ldots, a_n$ będą liczbami dodatnimi spełniającymi $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Udowodnij, że:

$$(a_2+1)^2 \cdot (a_3+1)^3 \cdot \ldots \cdot (a_n+1)^n \geqslant n^n$$

Rozwiązanie: Szacujemy wyraz $(a_k+1)^k$ z AG

$$(a_k+1)^k = \left(k\frac{a_k + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1}}{k}\right)^k \geqslant k^k \cdot \frac{a_k}{(k-1)^{k-1}} = a_k \cdot \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$$

Obie strony są dodatnie, więc nierówności można wymnożyć stronami.

$$(a_2+1)^2 \cdot (a_3+1)^3 \cdot \ldots \cdot (a_n+1)^n \geqslant \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} a_2 a_3 \ldots a_n = n^n$$

■