Kontest 2 – Finaliści

Zadanie 1. Kwadraty szachownicy o wymiarach 100×100 są pomalowane 100 różnymi kolorami. Każdy kwadrat ma tylko jeden kolor, a każdy kolor jest użyty dokładnie 100 razy. Udowodnij, że istnieje wiersz lub kolumna na szachownicy, w którym użytych jest co najmniej 10 kolorów.

Zadanie 2. Dowieść, że gdy a, b są dodatnimi liczbami rzeczywistymi to zachodzi:

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} \geqslant \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

Zadanie 3. Niech n będzie liczbą naturalną. Liczba całkowita $a > 2$ nazywa się n-rozkładalną, jeśli $a^n - 2^n$ jest podzielne przez wszystkie liczby postaci $a^d + 2^d$, gdzie $d \neq n$ jest naturalnym dzielnikiem n. Znajdź wszystkie liczby złożone $n \in \mathbb{N}$, dla których istnieje liczba n-rozkładalna.

Zadanie 4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P, Q, R, S leżą na bokach AB, BC, CD, DA odpowiednio, przy czym odcinki PR i QS dzielą ten czworokąt na cztery czworokąty o prostopadłych przekątnych. Udowodnij, że punkty P, Q, R, S leżą na okręgu.