Kontest 1 - 27.09.2022

Finaliści

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli wielomian $f(x) = x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma 6 pierwiastków rzeczywistych (z krotnościami), to $a = b = c = d = 0$.

Zadanie 2. Rozstrzygnij czy istnieje na płaszczyźnie niepusty, skończony zbiór okręgów o rozłącznych wnętrzach takich, że każdy jest styczny do dokładnie pięciu z pozostałych.

Zadanie 3. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym oraz M środkiem boku BC oraz H ortocentrum. Odcinki BE oraz CF są wysokościami w trójkącie ABC. Przypuśćmy, że na prostej EF jest taki punkt X, że $\angle XMH = \angle HAM$ oraz A, X leżą po przeciwnych stronach MH.
Udowodnij, że AH przecina odcinek MX w połowie.

Zadanie 4. Niech $a_2, a_3, \ldots, a_n$ będą liczbami dodatnimi spełniającymi $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Udowodnij, że:

$$(a_2 + 1)^2 \cdot (a_3 + 1)^3 \cdot \ldots \cdot (a_n + 1)^n \geqslant n^n$$

.