Kontest 4 – mini PreOM 2025

Zadanie 1. Dany jest zbiór n punktów ($n \geqslant 2$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Kolorujemy wszystkie odcinki o końcach w tym zbiorze tak, by każde dwa odcinki o wspólnym końcu miały różne kolory.

Wyznaczyć najmniejszą liczbę kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie.

Zadanie 2. Wykaż, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n wszystkie dzielniki pierwsze liczby n^2+1 są mniejsze od n.

Zadanie 3. Rozważamy na płaszczyźnie kwadraty jednostkowe, których wierzchołki mają obie współrzędne całkowite. Niech S będzie szachownicą, której polami są wszystkie kwadraty jednostkowe zawarte w kole określonym nierównością $x^2+y^2 \leqslant 1998^2$. Na wszystkich polach szachownicy piszemy liczbę $+1$. Wykonujemy ciąg operacji. Każda z nich polega na wybraniu dowolnego rzędu poziomego, pionowego lub ukośnego i zmianie znaków wszystkich liczb napisanych na polach wybranego rzędu. (Rząd ukośny tworzą wszystkie pola szachownicy S, których środki leżą na pewnej prostej przecinającej osie układu współrzędnych pod kątem $45°$.)

Rozstrzygnąć, czy w ten sposób można doprowadzić do sytuacji, w której na jednym polu będzie napisana liczba -1, a na pozostałych $+1$.

Zadanie 4. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem wypukłym spełniającym warunki:

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F = 360°$$

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA.$$

Pokaż, że:

$$BC \cdot DF \cdot EA = EF \cdot AC \cdot BD.$$