Funkcje arytmetyczne i splot Dirichleta

Miron Hunia

27 października 2022

1 Wstęp

Funkcja arytmetyczna to po prostu funkcja, której dziedzina to zbiór liczb naturalnych, a zbiór wartości liczby rzeczywiste (lub dowolne inne ciało). Takie funkcje często pojawiają się w teorii liczb, więc dobrze jest znać kilka najbardziej pospolitych z nich, wraz z ich własnościami. Przykładami popularnych funkcji algebraicznych są:

- $\phi(n)$ (tocjent): liczba liczb mniejszych od n względnie pierwszych z n.★
- $\Omega(n)$: liczba dzielników pierwszych n, licząc z krotnościami.
- $\omega(n)$: liczba różnych dzielników pierwszych n.
- $\mu(n)$ (funkcja Möbiusa):★
$$\begin{cases} 0 & p^2 \mid n \\ (-1)^{\Omega(n)} & p^2 \nmid n \end{cases}$$
- $\sigma_k(n)$: suma k-tych potęg dzielników n.★
- $\tau(n)$: $\sigma_0(n)$ (liczba dzielników n).★
- $(\frac{n}{p})$ (symbol Legendra) dla stałego p:♢
$$\begin{cases} 0 & n \equiv 0 \mod p \\ 1 & n \equiv x^2 \mod p (\text{dla pewnego x}) \\ -1 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$
- $NWD(n, p)$ dla stałego p ♢
- $\lambda(n)$ (funkcja Liouville'a): $(-1)^{\Omega(n)}$.♢
- $v_p(n)$ dla ustalonego p (wykładnik p-adyczny).
- $rad(n)$: Część bezkwadratowa n (po angielsku *radical*, stąd oznaczenie)★
- $\frac{r_2(n)}{4}$: liczba sposobów, na które można zapisać n jako sumę dwóch kwadratów liczb całkowitych, podzielona przez 4.★

Na potrzeby tego skryptu, wprowadzę również następujące oznaczenia.

- $\epsilon(n)$:♢
$$\begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$
- $n^k(m) = m^k$ ♢
- $\mathbf{1}(n) = 1$ ♢

W badaniu funkcji arytmetycznych często przydają się poniższe własności.

Def. 1 (Funkcja multiplikatywna) *Funkcję arytmetyczną $f(n)$ nazywamy multiplikatywną, jeśli dla każdych naturalnych względnie pierwszych a, b zachodzi $f(a)f(b) = f(ab)$.*

Funkcje $NWD(n,p), \phi(n), \mu(n), \sigma_k(n), \tau(n), \lambda(n), (\frac{n}{p}), \frac{r_2(n)}{4}, n^k(n), \epsilon(n), \mathbf{1}(n)$ są multiplikatywne. Na poprzedniej stronie oznaczone są znakiem ★.

Twierdzenie 1 *Jeśli f jest multiplikatywna i $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, to $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdot f(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot f(p_k^{\alpha_k})$*

Def. 2 (Funkcja całkowicie multiplikatywna) *Funkcję arytmetyczną $f(n)$ nazywamy całkowicie multiplikatywną, jeśli dla każdych naturalnych a, b zachodzi $f(a)f(b) = f(ab)$.*

Funkcje $NWD(n,p), \lambda(n), (\frac{n}{p}), n^k(n), \epsilon(n), \mathbf{1}(n)$ są całkowicie multiplikatywne. Na poprzedniej stronie oznaczone są znakiem $\diamondsuit$.

2 Indukcja po dzielnikach

Wariant indukcji przydatny w teorii liczb, przebiega według następującego schematu (p jest liczbą pierwszą).

1. Dowodzimy własność dla $n = p$.
2. Wykazujemy, że jeśli własność działa dla $n = p^k$, to działa również dla $n = p^{k+1}$.
3. Wykazujemy, że jeśli własność działa dla względnie pierwszych liczb a, b, to działa również dla ab.

W wyniku tak przeprowadzonego dowodu, własność zostaje udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych większych od 1. Przydatność tego schematu wynika z tego, że w teorii liczb funkcje multiplikatywne pojawiają się zaskakująco często.

Ćwiczenie. Udowodnij twierdzenie Eulera indukcją po dzielnikach.

3 Powtórzenie z sum

Poniżej cztery sposoby na zapisanie sumy kwadratów liczb od 1 do n.

$$1 + 4 + \dots + n^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \sum_{\substack{x=k^2 \\ 1 \le x \le n^2}} x \qquad \sum \left[x = k^2\right] \left[1 \le x \le n^2\right]$$

(gdzie $[p(k)]$ wynosi 1 gdy $p(k)$ jest spełnione i 0 w przeciwnym wypadku)

Twierdzenie 2 (Zmiana kolejności sumowania)

$$\sum_{p(a)} \sum_{q(b)} f(a,b) = \sum_{q(b)} \sum_{p(a)} f(a,b)$$

Twierdzenie 3 (Rozdzielność sumowania względem mnożenia)

$$\left(\sum_{p(a)} f(a) \right) \left(\sum_{q(b)} g(b) \right) = \sum_{\substack{p(a) \\ q(b)}} f(a)g(b)$$

4 Splot Dirichleta

Splot Dirichleta to operacja, która przyjmuje dwie funkcje arytmetyczne i zwraca trzecią. Można o niej myśleć jako o szczególnym sposobie mnożenia funkcji arytmetycznych.

Def. 3 (Splot Dirichleta) *Splotem Dirichleta funkcji arytmetycznych f, g nazywamy funkcję $f * g$ zdefiniowaną jako $f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$*

Spełnione są następujące własności.

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (splot Dirichleta zachowuje się jak mnożenie)
4. $\epsilon * f = f$ (ϵ jest zachowuje się jak jedynka)
5. Jeśli $f(1) \neq 0$, to istnieje funkcja f^{-1} zdefiniowana poprzez $f^{-1} * f = \epsilon$ (innymi słowy, można dzielić)
6. **Jeśli f,g są multiplikatywne, to $f * g$ jest multiplikatywne!**
7. Jeśli f jest multiplikatywna i $f(1) \neq 0$, to f^{-1} jest multiplikatywne.
8. Jeśli f jest całkowicie multiplikatywna, to $f \cdot (g * h) = (f \cdot g) * (f \cdot h)$

Przykład. (72 OM, finał) Dana jest dodatnia liczba całkowita $k \geq 2$. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą k najmniejszymi liczbami pierwszymi i niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, \ldots, p_k$.

Funkcja $f(n) = \mu(NWD(N, n))$ jest równa -1 jeśli $n \in \{1, \ldots, N\}$ jest podzielne przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, \ldots, p_k$ i równa 1 w przeciwnym wypadku. Zadanie jest równoważne stwierdzeniu, że $\sum_{k=1}^{N} f(k) = 0$

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) = \sum_{k=1}^{N} \mu(NWD(N, k)) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ d = NWD(n,k)}} \mu(d) = \sum_{d|N} \mu(d) \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ d = NWD(n,k)}} 1$$
$$= \sum_{d|N} \mu(d) \left[1 \leq k \leq N\right] \left[d = NWD(n, k)\right] = \sum_{d|N} \mu(d) \left[1 \leq \frac{k}{d} \leq \frac{N}{d}\right] \left[1 = NWD(\frac{n}{d}, \frac{k}{d})\right]$$
$$= \sum_{d|N} \mu(d)\phi(\frac{n}{d}) = \mu * \phi(N)$$

μ i ϕ są multiplikatywne, więc $\mu * \phi$ również jest. Ponadto $\mu * \phi(2) = 0$, więc $\mu * \phi(N) = 0$. $\square$

Twierdzenie 4 *Jeśli $f = g * h$ i $G(n) = \sum_{k=1}^{n} g(k)$, to*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} h(k) G(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor)$$

Przykład. Wykaż, że wartość oczekiwana sumy dzielników liczby $n \in [1, N]$ jest mniejsza niż N.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1 * n(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{n} \rfloor} 1 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n \lfloor \frac{N}{n} \rfloor < \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} N = N$$

5 Zadanka

Sporo z poniższych zadań można rozwiązywać zarówno indukcją po dzielnikach, jak i splotami Dirichleta. O ile nie stwierdzono inaczej, przyjmij, że w treści chodzi o liczby naturalne oraz że podane w treści funkcje są arytmetyczne.

1. Jaka to funkcja?
$$\mathbf{1}^{-1} \quad \phi * \mathbf{1} \quad \mathbf{1} * \mathbf{1} \quad n^k * \mathbf{1} \quad \tau * \phi \quad \lambda^{-1}$$

2. (Inwersja Möbiusa) Niech $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Wykaż, że $f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu(\frac{n}{d})$.

3. (IMO shortlist 1989) Ciąg (a_n) spełnia zależność $\sum_{d|n} a_d = 2^n$. Pokaż, że $n \mid a_n$.

4. (Bułgaria 1989) Wyznacz
$$\sum_{n=1}^{1989} (-1)^{\Omega(n)} \lfloor \frac{1989}{n} \rfloor$$

5. Udowodnij, że
$$\sum_{d|n} (\tau(d))^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d) \right)^2$$

6. (Multiplikatywna inwersja Möbiusa) Niech $F(n) = \prod_{d|n} f(d)$. Wykaż, że $f(n) = \prod_{d|n} F(d)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

7. (69 OM, finał) Liczbę całkowitą nazywamy *bezkwadratową*, jeśli nie jest ona podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej większej od 1.
Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Przyjmijmy, że w zbiorze $1, 2, 3, \ldots, n$ jest dokładnie M takich liczb bezkwadratowych k, że liczba $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ jest nieparzysta. Wykazać, że liczba M jest nieparzysta.

8. Dana jest liczba bezkwadratowa N i pewna liczba pierwsza p. Ania napisała na tablicy wszystkie liczby od 1 do N^p. Następnie każdą z tych liczb zmazała i zastąpiła jej największym wspólnym dzielnikiem z N^p. Pokaż, że suma liczb na tablicy daje resztę N z dzielenia przez p.

9. Dana jest liczba N. Niech $f(N)$ oznacza liczbę uporządkowanych par liczb naturalnych (a, b) takich, że
$$\frac{ab}{a+b}$$
jest dzielnikiem N. Udowodnij, że $f(N)$ jest zawsze kwadratem liczby naturalnej.

10. Wykaż, że $\mu(n) = \sum_{NWD(k,n)=1} \cos(\frac{2\pi k}{n})$

11. Dana jest liczba bezkwadratowa N. Liczbę nazywamy *fajną*, jeśli jej liczba wspólnych dzielników pierwszych z N jest podzielna przez 3. Znajdź wszystkie liczby N takie, że liczb fajnych w przedziale $[1, N]$ jest dokładnie $\frac{1}{3}N$.

12. (Bulgarian Autumn 2008) Dla danej liczby naturalnej n wyznacz liczbę bezkwadratowych dodatnich liczb całkowitych a takich, że $\lfloor \frac{n}{\sqrt{a}} \rfloor$ jest nieparzyste.

13. Niech $\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ NWD(k,n)=1}} (x - e^{2i\pi\frac{k}{n}})$. Wykaż, że jest to wielomian o współczynnikach całkowitych.
(hint: zadanie 6)

6 Bonus: Szereg Dirichleta

Szereg Dirichleta to przykład funkcji tworzącej zadany wzorem

Def. 4 (Szereg Dirichleta)

$$D(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Twierdzenie 5 (Iloczynowy wzór Eulera) *Jeśli f jest funkcją multiplikatywną i suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ jest zbieżna absolutnie, to zachodzi równość*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots)$$

Szereg Dirichleta związany jest z splotami Dirichleta zależnością

$$D(f,s) \cdot D(g,s) = D(f * g, s)$$

Szeregi Dirichleta mają bliski związek z funkcją ζ Riemanna. Z definicji $D(\mathbf{1}, s) = \zeta(s)$. Jako ćwiczenie, wyraź za pomocą funkcji ζ poniższe sumy.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_2(n)}{n^6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^3}$$

Szeregi Dirichleta używane są do szacowania skończonych sum postaci $\sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^k}$, a także do badania asymptotycznego tempa wzrostu funkcji arytmetycznych.