Weronika Obcowska

Potęga punktu

Teoria

1. **Definicja: potęga punktu względem okręgu**

   Niech ω będzie okręgiem o środku O i promieniu r. Dla każdego punktu P na płaszczyźnie definiujemy potęgę P względem ω jako:

   $$\mathrm{pow}(P, \omega) = |OP|^2 - r^2$$

2. **Stwierdzenie**

   Niech prosta zawierająca punkt P przecina okrąg ω w punktach A, B. Wtedy:

   $$\mathrm{pow}(P, \omega) = |PA| \cdot |PB|$$

3. **Twierdzenie**

   Rozważmy na płaszczyźnie punkty A, B, C, D takie, że proste zawierające odcinki AB i CD nie są równoległe. Niech P będzie punktem przecięcia tych prostych. Załóżmy ponadto, że albo obydwa odcinki AB, CD zawierają punkt P, albo żaden. Wtedy:

   $$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \text{ wtedy i tylko wtedy gdy czworokąt } ABCD \text{ jest cykliczny.}$$

4. **Definicja: oś potęgowa**

   Mając dwa okręgi na płaszczyźnie ω_1 i ω_2 o różnych środkach, definiujemy ich oś potęgową jako zbiór punktów P o własności:

   $$\mathrm{pow}(P, \omega_1) = \mathrm{pow}(P, \omega_2)$$

5. **Swierdzenie: wyznaczanie osi potęgowej**

   Niech ω_1 i ω_2 będą okręgami na płaszczyźnie, o różnych środkach O_1 i O_2. Wówczas oś potęgowa okręgów ω_1 i ω_2 jest prostopadła do odcinka O_1O_2. W szczególności, jeśli ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach A i B, to prosta zawierając odcinek AB jest osią potęgową okręgów ω_1 i ω_2.

6. **Twierdzenie: środek potęgowy**

   Osie potęgowe trzech okręgów o różnych środkach są albo równoległe albo przecinają się w jednym punkcie.

Przykłady

1. **Środek okręgu opisanego na trójkącie**

   Czyli: twierdzimy, że w trójkącie ABC istnieje taki punkt O, że $|OA| = |OB| = |OC|$ i chcemy to udowodnić korzystając z potęgi punktu.

2. **Zadanie z USAMO**

   Mając dwa okręgi ω_1 i ω_2 przecinające się w punktach X i Y, rozważmy prostą przechodzącą przez środek okręgu ω_1 przecinającą okrąg ω_2 w punktach P i Q, oraz podobnie: prostą przechodzącą przez środek ω_2 przecinającą ω_1 w punktach R i S. Pokazać, że jeśli punkty P, Q, R, S są współokręgowe, to środek okręgu (PQR) leży na prostej zawierającej odcinek XY.

Zadania

1. Niech ω_1, ω_2 będą dwoma okręgami przecinającymi się w punktach X, Y. Niech wspólna styczna do nich przecina ω_1 w punkcie A i ω_2 w punkcie B. Udowodnić, że wówczas prosta zawierająca odcinek XY przechodzi przez środek odcinka AB.

2. Niech C będzie punktem na półokręgu o średnicy AB i niech D będzie środkiem łuku AC. Niech E będzie rzutem punktu D na prostą zawierającą BC, a F punktem przecięcia AE z półokręgiem. Pokazać, że prosta zawierająca BF przechodzi przez środek odcinka DE.

3. Dwa okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach M i N. Niech l będzie wspólną styczną do ω_1, ω_2 i przyjmijmy, że punkt M leży bliżej l niż punkt N. Załóżmy, że l przecina ω_1 w punkcie A i ω_2 w punkcie B. Rozważy prostą przechodzącą przez M, równoległą do l, taką że przecina ona drugi raz okręgi ω_1 i ω_2 w punktach C i D odpowiednio. Definiujemy punkty E, P i Q kolejno jako przecięcia prostych zawierających odcinki CA i DB, AN i CD oraz BN i CD. Dowieść, że $|EP| = |EQ|$.

4. **(Twierdzenie Eulera)**

   Rozważmy trójkąt ABC, dla którego defniujemy:

   R jako promień okręgu opisanego na $\triangle ABC$, O jako środek okręgu opisanego na $\triangle ABC$, r jako promień okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ oraz I jako środek okręgu wpisanego w $\triangle ABC$.

   Udowodnić, że zachodzi $(|IO|)^2 = R(R-2r)$. W szczególności: $R \geqslant 2r$.

5. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Niech prosta prostopadła do AC, przechodząca przez punkt B przecina okrąg o średnicy AC w punktach P i Q. Niech prosta prostopadła do AB, przechodząca przez punkt C przecina okrąg o średnicy AB w punktach R i S. Wykazać, że punkty P, Q, R, S są współokręgowe.

6. Rozważmy trójkąt różnoboczny ABC. Oznaczmy wysokości tego trójkąta przez AD, BE, CF, i niech O będzie środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Pokazać, że okręgi (AOD), (BOE) i (COF) przecinają się w punkcie X różnym od O.

7. W trójkącie ostrokątnym ABC przyjmijmy, że kąt przy wierzchołku B jest większy niż kąt przy wierzchołku C. Niech M będzie środkiem odcinka BC, a punkty E, F spodkami wysokości z wierzchołków B i C odpowiednio. Niech K będzie środkiem odcinka ME, a L środkiem odcinka MF. Niech T będzie takim punktem na prostej KL, że odcinki TA i BC są równoległe. Dowieść, że $|TA| = |TM|$.