Kontest 3 - 28.09.2023

Finaliści

Zadanie 1. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki

$$x + y + z = 3, \quad xy + yz + zx = -9.$$

Udowodnić, że $-27 \leqslant xyz \leqslant 5$.

Zadanie 2. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Udowodnij, że

$$p^2 \mid 2^p - 2 \iff p \mid \frac{(p-1)!}{1 \cdot 2} + \frac{(p-1)!}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{(p-1)!}{(p-2)(p-1)}.$$

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli a, b, $c \in \mathbb{R}_+$, $a + b + c = 3$, to

$$\frac{b+c+bc}{a^2+b^3+c^4} + \frac{c+a+ca}{b^2+c^3+a^4} + \frac{a+b+ab}{c^2+a^3+b^4} \leqslant 3.$$

Zadanie 4. Niech ABC będzie trójkątem różnobocznym o okręgu opisanym Ω i środku okręgu wpisanego I. Półprosta AI przecina BC w punkcie D oraz okrąg Ω ponownie w punkcie M. Okrąg o średnicy DM przecina Ω ponownie w punkcie K. Linie MK i BC przecinają się w punkcie S, a N jest środkiem odcinka IS. Okręgi opisane na trójkątach KID oraz MAN przecinają się w punktach L_1 i L_2. Udowodnij, że Ω przechodzi przez środek odcinka IL_1 lub IL_2.