

Mini PreOM 2023 - Dzień 1

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$.

Niech M będzie środkiem ciężkości tego trójkąta, a AH jego wysokością, ponadto niech A' będzie przecięciem półprostej MH z okręgiem ω opisanym na trójkącie ABC .

Udowodnij, że okrąg opisany na $A'HB$ jest styczny do AB .

Zadanie 2. Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach rzeczywistych układu:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9 \\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18 \end{cases}$$

Zadanie 3. Dane są parami różne liczby całkowite a_1, a_2, \dots, a_n , gdzie $n \geq 1$.

Wykazać, że wielomian

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$$

jest nierozkładalny na iloczyn niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 4. Niech m, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi oraz A pewnym zbiorem punktów płaszczyzny, pokolorowanych n kolorami, o współrzędnych całkowitych. Załóżmy, że wewnątrz dowolnego koła o promieniu m znajduje się co najmniej jeden punkt ze zbioru A .

Udowodnij, że, istnieje prostokąt, którego wszystkie wierzchołki są tego samego koloru.