KUŹNIA OLIMPIJSKA

Kontest 3 – II etap

Zadanie 1. Znajdź wszystkie całkowite k i n spełniające równanie:

$$1! + 2! + \ldots + k! = 1 + 2 + \ldots + n.$$

Zadanie 2. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, którego przekątne AC i BD przecinają się pod kątem prostym. M, N to środki odpowiednio boków BC i AD. Znajdź długość odcinka MN, jeżeli AC oraz BD mają odpowiednio długości a i b.

Zadanie 3. W szkole jest 2021 dzieci, z których każde zna co najmniej 45 innych dzieci w tej szkole. Udowodnij, że w tej szkole istnieje czwórka dzieci, które mogą usiąść wokół okrągłego stołu w taki sposób, że każde dziecko zna swoich dwóch sąsiadów.

Zadanie 4. Dowieść, że gdy n jest liczbą całkowitą większą od 3 oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_2, a_3, \ldots, a_n$ spełniają równość $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$, to zachodzi nierówność:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$