Autor: Jerzy Szempliński

Prowadzący: Jan Piotrowicz, Jerzy Szempliński

Kombinatoryka I – II etap

Metody

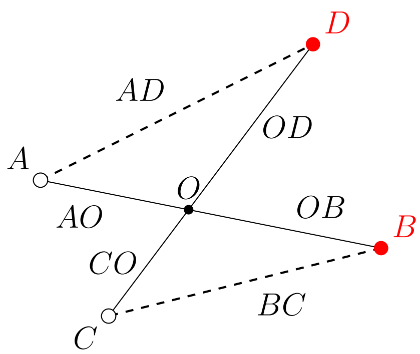
Metoda ekstremum

Metoda ekstremum polega na rozważeniu pewnego elementu ekstremalnego oraz wnioskowaniu na jego podstawie pewnych własności, bądź istnienia elementu, który zaprzecza ekstremalności wybranego elementu. Najczęstsze przykłady to:

- W zbiorze liczb naturalnych liczba najmniejsza.
- W ograniczonym z dołu/góry zbiorze liczb (w szczególności zbiorze skończonym) liczba najmniejsza/ największa.

Przykład 1. Na płaszczyźnie zaznaczono $2n$ punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Następnie n z nich pokolorowano na biało, a pozostałe n na czerwono. Udowodnij, że można narysować na płaszczyźnie n nieprzecinających się odcinków, aby każdy z zaznaczonych punktów był końcem dokładnie jednego odcinka oraz każdy odcinek miał jeden koniec biały, a drugi czerwony.

Rozwiązanie 1. Istnieje skończenie wiele sposobów narysowania odcinków tak, aby spełniały założenia zadania ignorując warunek przecinania się. Możemy więc wybrać to z nich, które ma najmniejszą sumę długości odcinków. Załóżmy, że przy takim narysowaniu odcinków pewne dwa z nich przecinają się. Nazwijmy je AB i CD, a ich punkt przecięcia O, przy czym bez straty ogólności załóżmy, że A i C są białe, a B i D czerwone. Zauważmy, że z nierówności trójkąta $AD < AO + OD$ oraz $BC < BO + OC$. Nierówności są ostre, bo żadne trzy punkty nie są współliniowe. Po ich dodaniu stronami otrzymujemy $AD + BC < AO + OD + BO + OC = AB + CD$. To oznacza, że wybranie odcinków AD i BC zamiast AB i CD pozwoliłoby na zmniejszenie sumy długości odcinków. To jednak nie jest możliwe, bo wybraliśmy na początku takie odcinki, że suma ich długości była najmniejsza. To znaczy, że otrzymaliśmy sprzeczność, czyli w takim wyborze żadne dwa odcinki się nie przecinają, a więc spełniają warunki zadania.



Zasada szufladkowa Dirichleta

Definicja 1 (Wersja prosta)**.** Do n szufladek włożono co najmniej k obiektów. Wtedy w co najmniej jednym z nich znajduje się co najmniej $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ obiektów.

Przykład 2. Pokaż, że w 29-osobowej klasie istnieje pięć osób, które urodziły się tego samego dnia tygodnia.

Rozwiązanie 2. Niech szufladkami będą dni tygodnia. Każdą osobę przypisujemy do dnia tygodnia, w którym się urodziła. Skoro jest 29 osób i 7 szufladek, to do któregoś trafi co najmniej $\lceil \frac{29}{7} \rceil = 5$ z nich.

Przykład 3. Wykaż, że istnieje taka liczba naturalna $n > 1$, że trzy ostatnie cyfry liczby 7^n to 007.

Rozwiązanie 3. Przyporządkujmy potęgi liczby 7 od 7^2 do 7^{1002} do ich reszt z dzielenia przez 1000. Z zasady szufladkowej wynika, że istnieje taka reszta z dzielenia przez 1000, że co najmniej dwie z tych potęg mają. Weźmy dwie takie liczby i oznaczymy je jako 7^k i 7^n. Zauważmy, że ich różnica musi być podzielna przez 1000. Wtedy $1000 \mid 7^k(7^{n-k} - 1)$, i skoro 1000 i 7 są względnie pierwsze, to $7^{n-k} \equiv 1 \pmod{1000}$. Z tego otrzymujemy, że 7^{n-k+1} na 007.

Definicja 2 (Wersja nieskończona)**.** Do n szufladek włożono nieskończenie wiele obiektów(np. wszystkie liczby naturalne). Wtedy w co najmniej jednym z nich znajduje się nieskończenie wiele obiektów.

Uwaga 1. Wyrażenia „co najmniej" i „co najwyżej" zapisujemy `oddzielnie`!

Niezmienniki

Możemy pokazać, że pewna własność zachowuje się pomimo różnych zmian.

Przykład 4. Mamy standardową czarno-białą szachownicę 8×8. Czy za pomocą ruchów polegających na zamianie kolorów wszystkich pól w danym rzędzie lub kolumnie możemy doprowadzić do sytuacji, że liczba białych pól wynosi 17?

Rozwiązanie 4. Zauważmy, że jeśli w zamienianym rzędzie (kolumnie) znajdowało się k pól białych i $8-k$ pól czarnych, to po zamianie będzie w nim $8-k$ pól białych i k pól czarnych. To oznacza, że różnica pomiędzy liczbą pól białych i czarnych zmieni się o $k-(8-k)-((8-k)-k) = 2k - 2(8-k)$. Jest to liczba parzysta niezależnie od k, a więc parzystość różnicy liczby pól białych i czarnych pozostaje taka sama. Na początku jest to liczba parzysta, a więc nie możemy otrzymać nieparzystej liczby 17.

Półniezmienniki

Możemy wykazać, że pewne własności zmieniają się w określony sposób. Najczęściej za każdym razem pewna liczba naturalna się zmniejsza, a więc po pewnej liczbie kroków dojdzie do zera.

Przykład 5. Na szachownicy $n \times n$ umieszczono liczby całkowite. W każdym ruchu możemy zamienić znaki wszystkich liczb w jednym rzędzie lub kolumnie. Rozstrzygnij, czy zawsze można doprowadzić do sytuacji, w której w każdym rzędzie i kolumnie suma liczb jest nieujemna.

Rozwiązanie 5. Zauważmy, że zamieniając znaki w kolumnie lub rzędzie z sumą ujemną, suma wszystkich liczb na planszy się zwiększa. Takie ruchy nazwiemy rozsądnymi.

Zauważmy też, że za każdym razem wykonując rozsądny ruch suma liczb na planszy zwiększa się o co najmniej 2, ponieważ kolumna / rząd w której wykonywany jest ruch miała / miał sumę co najwyżej -1, a po zmianie ma co najmniej 1.

Teraz możemy stwierdzić, że jeśli na początku suma wszystkich liczb na szachownicy wynosiła n, to po k rozsądnych ruchach suma liczb na szachownicy wynosi co najmniej $n + 2K$.

Zauważmy, że suma liczb na szachownicy nie może przekroczyć sumy wartości bezwzględnych tych liczb, nazwijmy ją N. Gdyby po wykonaniu dowolnej liczby rozsądnych ruchów zawsze istniała kolumna/rząd z ujemną sumą liczb, to zawsze można by wykonywać rozsądne ruchy, zwiększając sumę liczb na szachownicy do ponad N. Tak jednak być nie może, więc strategia wykonywania rozsądnych ruchów doprowadzi do sytuacji, w której wszystkie rzędy i kolumny mają nieujemną sumę.

Podwójne zliczanie

Pewne rzeczy możemy policzyć na dwa sposoby. Muszą być one równe, co pozwala na wyciąganie wniosków o obliczonych wartościach.

Przykład 6. Czy liczby $1, 2, \ldots, 45$ można podzielić na 15 grup po trzy liczby w taki sposób, żeby w każdej grupie jedna z liczb była sumą dwóch pozostałych?

Rozwiązanie 6. Policzmy na dwa sposoby sumę liczb od 1 do 45. Ze wzoru wynosi ona $\frac{45(45+1)}{2} = 1035$. Niech i-ta trójka będzie postaci $n_i, m_i, n_i + m_i$. Suma liczb w i-tej trójce wynosi $2n_i + 2m_i$, jest więc parzysta. Dodając sumy wszystkich trójek dodajemy 15 liczb parzystych, a więc otrzymamy liczbę parzystą. Jednak 1035 nie jest liczbą parzystą, a skoro te dwie liczby mają być sobie równe, to otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadania

1. Udowodnij, że wśród dowolnych 8 liczb całkowitych istnieje para takich, których różnica dzieli się przez 7.
2. Spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 200$ wybrano 101. Udowodnij, że istnieje wśród nich taka para liczb, że jedna jest dzielnikiem drugiej.
3. Pokaż, że wśród n osób istnieje para takich, która ma tę samą liczbę znajomych. (Jeśli A zna B, to B zna A)
4. Czy wśród dowolnych $n + 1$ liczb całkowitych można znaleźć dwie, których różnica podzielna jest przez n?
5. Na szachownicy $n \times n$ umieszczono liczby rzeczywiste. W każdym ruchu możemy zamienić znaki wszystkich liczb w jednym rzędzie lub kolumnie. Rozstrzygnij, czy zawsze można doprowadzić do sytuacji, w której w każdym rzędzie i kolumnie suma liczb jest nieujemna.
6. Dana jest szachownica 2000×2000. Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeśli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu, i czy ruch opróżni jakiekolwiek pole). Rozstrzygnąć, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.
7. Na okręgu zaznaczono 4 punkty. Udowodnij, że co najmniej 3 z nich leżą na tym samym półokręgu.
8. Na sferze zaznaczono 5 punktów. Udowodnij, że co najmniej 4 z nich leżą na tej samej półsferze.

9. Jaś ponumerował wierzchołki sześcianu liczbami od 1 do 8, tak, że każdej liczby użył dokładnie raz. Potem na każdej krawędzi napisał liczbę, która jest sumą liczb z wierzchołków danej krawędzi. Wykaż, że istnieją takie dwie krawędzie, że napisano na nich tę samą liczbę.

10. Na pewnej wyspie żyje 13 kameleonów zielonych, 15 żółtych i 17 czerwonych. Codziennie pewne dwa kameleony różnych kolorów zamieniają swój kolor w trzeci. Czy kiedyś może zdarzyć się, że

    - wszystkie kameleony będą tego samego koloru?
    - jest równa liczba kameleonów we wszystkich trzech kolorach?

11. W trójkącie równobocznym o boku 10 wybrano 101 punktów. Pokaż, że odległość pomiędzy pewną parą z nich wynosi nie więcej niż 1.

12. Każdy z punktów płaszczyzny został pomalowany na jeden z 2025 kolorów. Rozstrzygnij, czy niezależnie od sposobu kolorowania można znaleźć prostokąt o wierzchołkach jednego koloru.

13. Każdy z punktów płaszczyzny został pomalowany na jeden z 2025 kolorów. Rozstrzygnij, czy niezależnie od sposobu kolorowania można znaleźć kratę $n \times n$ dla dowolnej naturalnej liczby n o wierzchołkach jednego koloru.

    Przez kratę $n \times n$ rozumiemy zbiór n^2 punktów, z których każdy leży na jednej z n równoległych prostych, równoległych do osi OX i jednej z n równoległych prostych równoległych do osi OY, przy czym na każdej z tych prostych leży dokładnie n punktów.

14. Asia napisała na tablicy liczby od 1 do 2025. W każdym ruchu może teraz zetrzeć dwie liczby n i m oraz zapisać nową liczbę $m + n + mn$. Jakie liczby może otrzymać po 2024 ruchach?

15. Dowieść, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

16. W sześcianie wybrano jedną ścianę, na niej wybrano dwa wierzchołki, które nie leżą przy tej samej krawędzi i wpisano w nich liczbę 1. W pozostałych wierzchołkach sześcianu wpisano 0. W każdym ruchu można dodać 1 do każdego wierzchołka, który leży przy jednej krawędzi. Czy da się doprowadzić do sytuacji, że na wszystkich wierzchołkach jest zapisana ta sama liczba?

17. (Tw. Erdősa-Szekeresa) Udowodnij, że w ciągu $mn+1$ różnych liczb rzeczywistych istnieje podciąg rosnący o długości $m+1$ lub podciąg malejący o długości $n+1$.

18. Na płaszczyźnie narysowano n okręgów, z których każde dwa mają co najwyżej jeden punkt wspólny, dodatkowo w danym punkcie mogą stykać się maksymalnie dwa okręgi. Udowodnij, że istnieje okrąg, który jest styczny do nie więcej niż sześciu innych okręgów.

19. W szkole jest n uczniów. Każdy uczeń może uczestniczyć w dowolnej liczbie zajęć. Każde zajęcia mają co najmniej dwóch uczestników, a jeśli dwa różne zajęcia mają co najmniej dwóch wspólnych uczestników, to liczba uczestników tych dwóch zajęć jest różna. Udowodnij, że liczba zajęć nie przekracza $(n-1)^2$.