Kolorowanki

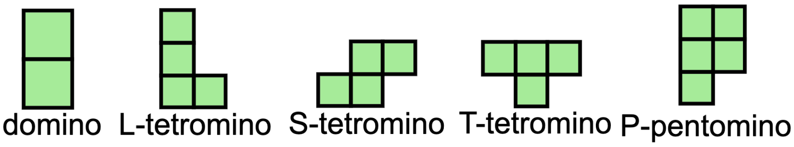
Jakub Słowikowski

29 września 2022

1 Wstęp

Istnieje wiele problemów kombinatorycznych, dotyczących pokrywania planszy "płytkami". Częstym sposobem na rozwiązanie ich jest pokolorowanie planszy w sprytny sposób, ilustrujący pewne ciekawe własności.

Oprócz płytek prostokątnym, w zadaniach będziemy korzystać również z poniższych kształtów:



2 Zadanka

Zadanie 1. *Czy planszę* 8×8 *z usuniętymi dwoma przeciwległymi rogami możemy pokryć całkowicie dominami?*

Zadanie 2. *Wyznacz wszystkie takie liczby całkowite dodatnie* n*, że szachownicę o boku* n *daje się rozciąć na kostki T-tetramina.*

Zadanie 3. *Dana jest szachownica o wymiarach* 2014×2014*. Czy można tak ją pokryć kostakmi domina, aby liczba kostek ułożonych poziomo była równa liczbie kostek ułożonych pionowo?*

Zadanie 4. *Czy kwadrat* 10×10 *można pokryć klockami o wymiarach* 1×4*?*

Zadanie 5. *Pewien prostokąt pokryto klockami, z których każdy jest wymiaru* 2×2 *lub* 1×4*. Następnie zebrano wszystkie klocki i wymieniono jeden klocek* 2×2 *na klocek* 1×4*. Wykaż, że nie da się pokryć wyjściowego prostokąta tak otrzymanym zestawem klocków.*

Zadanie 6. *Udowodnij, że kwadratu* 9×9 *nie można pokryć klockami, z których każdy jest wymiaru* 1×5 *lub* 1×6*.*

Zadanie 7. *Czy kwadrat* 13×13 *można pokryć klockami, z których każdy ma wymiary* 2×2 *lub* 3×3*?*

Zadanie 8. *Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku* 2^{2014} *można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3 lub 5.*

Zadanie 9. *Czy szachownicę* 8×8 *można pokryć piętnastoma L-tetraminami, składającymi się z czterech kwadratów* 1×1*, oraz jednym kwadratem* 2×2*?*

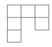
Zadanie 10. *Kwadrat o wymiarach* 7×7 *jest pokryty szesnastoma klockami o wymiarach* 3×1 *i jednym o wymiarach* 1×1*. Jakie są możliwe położenia klocka* 1×1 *w tym kwadracie?*

Zadanie 11. *Prostokąt pokryto L-tetraminami i S-tetraminami (wyjątkowo akceptujemy także ich odbicia pionowe!). Udowodnij, że liczba L-tetramin jest parzysta.*

Zadanie 12. *Prostokąt* $a \times b$ *nazwiemy parzystym jeśli* a *oraz* b *są parzyste. Załóżmy, że plansza* $n \times n$*, gdzie* n *jest nieparzyste, pokryta jest parzystymi prostokątami i kwadratami jednostkowymi. Ustal najmniejszą możliwą liczbę kwadratów jednostkowych użytych do tego pokrycia.*

Zadanie 13. *Plansza* 7×7 *pokryta jest P-pentominami w taki sposób, że dokładnie jedna komórka pokryta* *jest dwoma płytkami a pozostałe komórki dokładnie jedną. Ustal wszystkie możliwe pozycje podwójnie pokrytej płytki.*

Zadanie 14. *Niech m, n będą liczbami całkowitymi większymi niż 2. Pokolorujmy każdą komórkę planszy $m \times n$ na biało lub na czarno. Jeśli dwie komórki o wspólnej krawędzi mają różne kolory nazywamy tą parę komórek różną. Niech S będzie liczbą różnych par na planszy $m \times n$. Udowodnij, że to czy S jest parzyste zależy wyłącznie od komórek leżących na krawędzi planszy, wyłączając te na rogach.*

Zadanie 15. *(IMO 2004) Ustal dla jakich m, n prostokąt $m \times n$ możemy pokryć kształtami* .

3 Co dalej?

Ambitnych zachęcam do przerobienia zadań z podanej poniżej literatury. Bardzo ambitnych odsyłam również do skryptu Yufeia Zhao *Coloring and Weights*.

Literatura

[1] Łukasz Bożyk *Tilings and Colorings*

[2] Mateusz Kandybo *Zadania z Kolorowania*

[3] *Kwadrat nr 13*

[4] *Mathematical Excalibur Volume 20, Number 3*