Autor: Daniela Spurtacz Prowadzący: Daniela Spurtacz

Metoda ekstremum

Teoria

Metoda ekstremum polega na wybraniu elementu maksymalnego pod jakimś względem np. wierzchołka o maksymalnym stopniu, największego elementu zbioru, punktów najbardziej oddalonych od siebie i przez zbadanie jego własności udowodnić tezę — czasem przez sprzeczność a czasem konstruktywnie.

Przykłady

1. Danych jest skończenie wiele rozłącznych wnętrzami okręgów na płaszczyźnie. Udowodnij, że pewien z nich styczny jest do co najwyżej sześciu okręgów.
2. Udowodnij, że niezerowy wielomian $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniający $f(x)f(x+3) = f(x^2+x+3)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
3. W pewny turnieju wzięło udział n zawodników, każdych dwóch rozegrało ze sobą dokładnie jeden mecz — nie było remisów. Wykaż, że można wszystkich ustawić w kolejce w taki sposób, że każdy wygrał z zawodnikiem stojącym bezpośrednio za nim.
4. Danych jest n niebieskich i n czerwonych punktów na płaszczyźnie, żadne trzy z nich nie są współliniowe. Udowodnić, że da się narysować n nieprzecinających się odcinków, każdy z nich o końcach w punktach o różnym kolorze.

Zadania

5. Wszyscy uczestnicy pewnych warsztatów matematycznych usiedli w okręgu. Okazało się, że każdy ma tyle lat co średnia wieku (w latach) uczestników siedzących bezpośrednio obok niego. Udowodnić, że wszyscy są w tym samym wieku.
6. Dany jest graf o $2n$ wierzchołkach i $n^2 + 1$ krawędziach. Udowodnij, że istnieje w nim trójkąt.
7. Udowodnij, że poniższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich
$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2).$$
8. Dane są punkty na płaszczyźnie takie, że każdy jest środkiem odcinka łączącego pewne dwa (różne od niego) z tych punktów. Udowodnij, że tych punktów jest nieskończenie wiele.
9. Udowodnij, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 można włożyć wewnątrz pewnego prostokąta o polu dwa (tak że wielokąt nie wystaje poza prostokąt).
10. Na ile części n prostych w położeniu ogólnym rozcina płaszczyznę?
Położenie ogólne to takie, że żadne trzy proste się nie przecinają w tym samym punkcie ani żadne dwie nie są równoległe.
11. Siedem krasnoludków siedzi wokół okrągłego stołu; każdy ma przez sobą kubek. W niektórych kubkach jest mleko, w sumie trzy litry. Jeden z krasnoludków rozlewa swoje mleko po równo wszystkim pozostałym, następnie pozostali, każdy dokładnie raz, robi to samo. Okazało się, po tym jak siódmy z nich rozlał swoje mleko, że każdy ma tyle samo mleka w swoim kubku co na początku. Ile każdy z nich ma mleka w kubku?

Szkice rozwiązań

1. Minimalny promień
2. Największy pierwiastek
3. Najdłuższa kolejka
4. Taki układ, że suma długości odcinków jest najmniejsza, potem nierówność trójkąta
5. Wziąć najstarszego uczestnika
6. Weź największy zbiór parami niepołączonych wierzchołków.
7. Rozwiązanie z min x i /3
8. Punkty najdalej od siebie
9. Najdłuższa przekątna/bok, potem rachunek na polach - trójkątach
10. Każdy (prawie) obszar ma swój najniższy punkt
11. Krasnoludek z największą ilością mleka tuż przed rozlaniem go