Nierówności

Jeremi Hyska

24.11.2023

1 Nierówności Basic

- Nierówności między średnimi: Niech $x_1, x_2, ..., x_n > 0$. Wtedy zachodzą poniższe nierówności: $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$. Czytając od lewej do prawej, średnia kwadratowa $\geq$ arytmetyczna $\geq$ geometryczna $\geq$ harmoniczna. Równości zachodzą wtedy i tylko wtedy gdy x_i są parami równe.
- Cauchy-Schwarz: Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami liczb nieujemnych. Wtedy: $(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2$ Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{a_i}{b_i}$ jest stałe.
- Podstawiając do nierówności Cauchyego-Schwarza ciągi $(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}})$ i $(\sqrt{b_n})$ dostajemy postać Engela tejże nierówności: $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_n^2}{\sum_{i=1}^n b_n}$ Pomaga nam ona w pozbywaniu się sum ułamków.
- Ciągi jednomonotoniczne: Dwa ciągi (a_n) i (b_n) są jednomonotoniczne jeśli $a_i > a_j \iff b_i > b_j$. Wtedy $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i c_i$, gdzie (c_n) jest dowolną permutacją (b_n).
- Jeśli w jakiejś nierówności a, b, c, są bokami trójkąta, to możemy zrobić podstawienie $a := x + y, b := x + z, c := y + z$ dla $x, y, z > 0$

2 Zadania level 1

1. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$ dla $x, y, z > 0$
2. $n! < (\frac{n+1}{2})^n$ dla $n \in \mathbb{N}$
3. (Nesbitt) $a, b, c > 0$
   $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$
4. (Chebyshev) $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n, b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$
   $\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}$

5. Dla liczb dodatnich a, b, c, że $abc = 1$
   $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$

6. $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 3$
   $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$

7. $a, b, c, d > 0$
   $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$

8. $\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + xz} \leq 2(x + y + z)$ dla $x, y, z \geq 0$

9. Dla a, b, c będących długościami boków trójkąta o obwodzie 3.
   $\frac{1}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{1}{\sqrt{a-b+c}} + \frac{1}{\sqrt{-a+b+c}} \geq \frac{9}{ab+bc+ac}$

3 Nierówności Premium

- Mocniejsze Średnie: Dla ciągu (a_n) liczb dodatnich i dodatnich wag $w_1, w_2, ..., w_n$, definiujemy średnią potęgową $P(r)$ w następujący sposób: Dla $r \neq 0$: $P(r) = \sqrt[r]{\frac{w_1 a_1^r + w_2 a_2^r + ... + w_n a_n^r}{w_1 + w_2 + ... + w_n}}$. Dla $r = 0, P(0)$ jest ważoną średnią geometryczną, $P(0) = \sqrt[w_1+w_2+...+w_n]{a_1^{w_1} a_2^{w_2} ... a_n^{w_n}}$. Wtedy twierdzenie mówi nam, że $P(i) > P(j) \iff i > j$. Zauważmy, że $P(2) \geq P(1) \geq P(0) \geq P(-1)$ daje nam nierówność między średnimi.

- Mocniejszy Cauchy-Schwarz czyli Holder: Dodajemy więcej ciągów niż tylko marne 2 i dorzucamy wagi. Niech $(a_n), (b_n), ..., (z_n)$ będą ciągami liczb dodatnich. Niech też $w_a, w_b, ..., w_z$ będą wagami o sumie 1. Wtedy: $(\sum_{i=1}^n a_i)^{w_a} (\sum_{i=1}^n b_i)^{w_b} ... (\sum_{i=1}^n z_i)^{w_z} \geq \sum_{i=1}^n (a_i^{w_a} b_i^{w_b} ... z_i^{w_z})$

- Nierówność Bernoulliego: Dla $x \geq -1$ i $r \geq 1$ mamy $(x + 1)^r \geq 1 + xr$

- Chytry trik: Jeśli nierówność jest jednorodna, możemy "przeskalować" obie strony, dostając dzięki temu jakieś fajne założenie, najczęściej coś w stylu $abc = 1$ albo $a + b + c = 1$

4 Zadania level 2

1. $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 3$
   $a^b b^c c^a \leq 1$

2. $3(a + b + c) >= 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$

3. Dla $a, b, c > 0$:
   $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$

4. $\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b}} \geq \sqrt{(a + b + c)} \geq \sum \frac{a}{\sqrt{2a+b}}$

5. Dla $a, b, c > 0$ i $abc = 1$
$\frac{a}{\sqrt{7+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{7+a+c}} + \frac{c}{\sqrt{7+b+a}} \geq 1$
$\frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{7+a^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{7+b^2+a^2}} \geq 1$

5 Nierówności Extra

- Definicja: Funkcja $f(x)$ jest wypukła na przedziale jeśli dla dowolnych $a \geq c$ należących do tego przedziału, wykres funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ znajduje się "pod" odcinkiem łączącym punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Formalnie, dla dowolnego $1 \geq r \geq 0$, mamy
$rf(a) + (1-r)f(b) \geq f(ra + (1-r)b)$
Mniej formalnie, wykres funkcji jest w kształcie litery "U".

- Definicja: Dla ciągów (a_n) i (b_n) mówimy, że ciąg (a_n) majoryzuje ciąg (b_n) jeśli spełnione są jednocześnie warunki:
$a_1 \geq b_1$
$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$
...
$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq b_1 + b_2 + ... + b_n$

- Nierówność Jensena: Jeśli f jest funkcją wypukłą na jakimś przedziale, to dla ciągu (a_n) liczb z tego przedziału i wag $w_1, w_2, ..., w_n$ o sumie 1, mamy:
$w_1 f(a_1) + w_2 f(a_2) + ... + w_n f(a_n) \geq f(w_1 a_1 + w_2 a_2 + ... + w_n a_n$

- Nierówność Muirheada: Niech (a_n), (b_n) i (x_n) będą ciągami liczb nieujemnych, takimi, że (a_n) majoryzuje (b_n). Wtedy zachodzi:
$\sum_{sym} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n}$

- Nierówność Karamaty: Niech f(x) będzie funkcją wypukłą na jakimś przedziale i niech (a_n), (b_n) będą ciągami liczb z tego przedziału, takimi, że (a_n) majoryzuje (b_n). Wtedy zachodzi:
$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n)$

6 Zadania level 3

1. Użyj Jensena aby udowodnić nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną.

2. Dla a, b, c będących bokami trójkąta:
$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c}$

3. Dla $a, b, c > 0$
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}) \geq \frac{9}{a+b+c}$

4. Dla $x_1, x_2, ..., x_n > 1$
$\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_n}} \geq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n}$

5. Dla $a, b, c > 0$:
$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$