Metoda Discharging'u i kolorowanie grafów planarnych

Przykład użycia metody

Przykład: W naszym pięknym państwie niektóre miasta połączone są drogami. Władze postanowiły usunąć wszystkie skrzyżowania, ponieważ były zbyt niebezpieczne, więc żadne drogi się nie przecinają. Udowodnij, że istnieje miasto z którego wychodzi co najwyżej 5 dróg.

1 Zastosowania Discharging'u.

Zadanie 1.1. Niech G będzie grafem planarnym oraz $mindeg(G) \geqslant 3$. Oznaczmy długość ściany s jako $len(s)$. Wtedy dla każdego planarnego rysunku G istnieje taki wierzchołek v i przyległa do niego ściana s takie, że:

$$len(s) + deg(v) \leqslant 8.$$

Zadanie 1.2. Dana jest szachownica złożona z m kolumn i n rzędów, gdzie $n \leqslant m$. Niektóre pola tej szachownicy kolorujemy na czerwono, tak żeby w każdej kolumnie było przynajmniej jedno czerwone pole. Udowodnij, że istnieje takie czerwone pole, że liczba czerwonych pól w jego rzędzie jest większa niż liczba czerwonych pól w jego kolumnie.
Zadanie 1.3. W dowolnym grafie G, takim że $\tilde{d}(G) < 3$ istnieje albo 1^--wierzchołek lub 2-wierzchołek, który jest sąsiadem pewnego 5^--wierzchołka.
Zadanie 1.4. W dowolnym grafie G, takim że $\tilde{d}(G) < 2 + \frac{1}{3t-2}$ istnieje albo 1^--wierzchołek lub $2t-1$-nitka.

2 Kolorowanie grafów planarnych.

Zadanie 2.1. Każdy graf planarny jest 5-kolorowalny.
Zadanie 2.2. Graf G nazywamy k-kolorowalnym jeśli dla każdego przyporządkowania wierzchołkom z G kolorów $L : V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$ spełniającego $\forall_{v \in V(g)} |L(v)| \geqslant k$ istnieje poprawne kolorowanie G używające w każdym wierzchołku pewnego koloru z jego listy. (Zakładamy więc tutaj że kolorów jest tyle co liczb naturalnych.)
Zadanie 2.3. Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny (***). (Można na discordzie przeczytać szkic dowodu.)

3 Zadania trudniejsze i Praca domowa

Zadanie 3.1. W Stumilowym Lesie między niektórymi domkami zwierząt istnieją ścieżki. Żadne ścieżki nie przecinają się. Każde zwierzątko ma co najmniej 5 przyjaciół i z jego domku prowadzi ścieżka do domku każdego z nich. Udowodnij, że istnieje taka leśna ścieżka, że suma liczby przyjaciół zwierzątek mieszkających na jej krańcach jest mniejsza niż 12.
Zadanie 3.2. Dany jest wypukły wielościan C. Nie ma on żadnej ściany będącej czworokątem ani żadnej ściany będącej pięciokątem. Udowodnij, że ma ścianę będącą trójkątem.
Zadanie 3.3. Kwadrat został podzielony na wiele trójkątów. Udowodnij, że dwa spośród tych trójkątów mają wspólny bok.
Zadanie 3.4 Jeśli G jest grafem planarnym bez trójkątów, to jest on 3-kolorowalny (*)