Mecz Starszych

1. Dany jest trójkąt ABC. Udowodnij, że

$$\sin\left(\frac{3\cdot\sphericalangle A}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\cdot\sphericalangle B}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\cdot\sphericalangle C}{2}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\cos\left(\frac{\sphericalangle A-\sphericalangle B}{2}\right)+\cos\left(\frac{\sphericalangle B-\sphericalangle C}{2}\right)+\cos\left(\frac{\sphericalangle C-\sphericalangle A}{2}\right)$$

2. Dana jest funkcja $f(A)$, której argumentem jest punkt na płaszczyźnie, a wartością liczba rzeczywista. Wiemy, że dla dowolnego trójkąta niezdegenerowanego ABC, którego środkiem ciężkości jest punkt M, zachodzi $f(M)=f(A)+f(B)+f(C)$. Udowodnij, że dla dowolnego punktu A, $f(A)=0$.

3. Gracze na zmianę stawiają białe i czarne skoczki ("konie") na planszy $n\times n$ na wolnych miejscach. Dodatkowo nie można postawić skoczka na miejscu zagrożonym przez skoczka przeciwnika. Przegrywa nie mogący wykonać ruchu.
Dla jakich n pierwszy gracz ma strategię wygrywającą?

4. Niech l-mayador będzie ścieżką długości $l+1$ (liczba krawędzi), której l różnych wierzchołków niebędących początkiem i końcem ścieżki (początek i koniec mogą być tym samym wierzchołkiem) ma stopień 2. Udowodnij, że jeśli średni stopień wierzchołka w grafie G jest mniejszy od $2+\frac{2}{3l-1}$ i G nie zawiera w sobie cyklu prostego, który jest spójną składową (nie zawiera 2-regularnego grafu będącego spójną składową), to w G jest wierzchołek stopnia co najwyżej 1 lub l-mayador.

5. Niech $a,b,c\in\mathbb{R}_+$, że $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leqslant 4$. Udowodnij, że:

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3$$

6. Niech $a,b,c\in\mathbb{R}_+$, że $a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$. Udowodnij, że:

$$2(ab+bc+ca)+4\min(a^2,b^2,c^2)\geqslant a^2+b^2+c^2$$

7. Niech $n>1$ będzie liczbą całkowitą, że $n|2^{\varphi(n)}+3^{\varphi(n)}+...+n^{\varphi(n)}$. Niech $p_1,p_2,...,p_k$ będą wszystkimi, parami różnymi dzielnikami pierwszymi n. Udowodnij, że liczba $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_1p_2...p_k}$ jest całkowita. ($\varphi(n)$ jest funkcją Eulera)

8. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC i AD jego średnicą. Styczna do tego okręgu w punkcie D przecina prostą BC w P. Prosta PO przecina proste AC i AB w M i N odpowiednio. Udowodnij, że $OM=ON$.

9. Okrą wpisany Ω trójkąta ostrokątnego ABC jest styczny do boku BC w punkcie K. Niech AD będzie wysokością w trójkącie ABC i M środkiem AD. Jeśli N jest punktem wspólnym Ω i prostej KM różnym od K, udowodnij, że Ω i okrąg opisany na trójkącie BCN są styczne w punkcie N.

10. Udowodnij, że jeśli siedem wierzchołków sześcioscianu o ośmiu wierzchołkach leży na sferze to ósmy też.