Nierowności

Miron Hunia

23.09.2022

1 Wstęp

1.1 Własności nierówności

1. $x^2 \geq 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.
2. Jeśli $L \geq P$ i $a > 0$, to $aL \geq aP$.
3. Jeśli $L \geq P$, to $-L \leq -P$.
4. Jeśli $L_1 \geq P_1$ i $L_2 \geq P_2$, to $L_1 + L_2 \geq P_1 + P_2$.
5. Jeśli $L_1 \geq P_1 \geq 0$ i $L_2 \geq P_2 \geq 0$, to $L_1 L_2 \geq P_1 P_2$.
6. Jeśli $L_1 \geq P_1 \geq 0$ i $n > 0$, to ${L_1}^n \geq {P_1}^n$.
7. Jeśli $f(x)$ jest funkcją niemalejącą i $L \geq P$, to $f(L) \geq f(P)$, o ile $f(L)$ i $f(P)$ są zdefiniowane.

1.2 Elementarne metody dowodzenia nierówności

- Mając daną nierówność $L \geq P$ przedstawiamy $L - P$ jako sumę kwadratów i korzystamy z elementarnej nierówności $x^2 \geq 0$. Im bardziej skomplikowana nierówność, tym trudniej tą metodę zastosować.
- Jeśli w zadaniu występuje zmienna liczba elementów zależna od jakiegoś parametru n, to warto rozpatrzyć indukcję. Czasem tezę indukcyjną trzeba wzmocnić.
- Udowodnienie kilku nierówności pośrednich, a potem dodanie/wymnożenie ich stronami.
- Podstawienia. Na przykład w nierówności w której podane jest założenie $abc = 1$ można zastosować podstawienie $a = \frac{p}{q}, b = \frac{q}{r}, c = \frac{r}{p}$. Inne przydatne podstawienia to $abc = p, ab+bc+ac = q, a+b+c = r$ oraz $a = y + z, b = x + z, c = x + y$. Stosując podstawienia trzeba mieć pewność, że dziedzina nierówności pozostaje ta sama.

W przypadku bardziej złożonych nierówności konieczne jest zastosowanie kombinacji tych metod w połączeniu z użyciem jednej z **przydatnych nierówności** opisanych dalej.

1.3 Założenia bez straty ogólności (b.s.o.)

Możliwość dodawania założeń do zadania jest przydatna, bo zazwyczaj im więcej założeń mamy do dyspozycji, z tym większej liczby rzeczy możemy korzystać w dowodzie i tym łatwiej rozwiązać zadanie.

Def. 1 (Wyrażenie symetryczne) *Wyrażenie jest symetryczne jeśli dowolna permutacja jej jego zmiennych daje to samo wyrażenie.*

Na przykład, wyrażenie $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ jest symetryczne, natomiast $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a + b + c)d$ nie jest.
Jeśli nierówność jest symetryczna, możesz założyć b.s.o. że zmienne są uporządkowane w dowolny sposób w jaki chcesz (na przykład, posortowane rosnąco).

Def. 2 (Wyrażenie cykliczne) *Wyrażenie jest cykliczne jeśli cykliczne przesunięcie jego zmiennych daje to samo wyrażenie.*

Na przykład wyrażenie $\frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{b^2+d^2}$ jest cykliczne, natomiast $(a + b - c)^2$ nie jest.
Jeśli wyrażenie jest cykliczne, możesz założyć b.s.o. że dowolna zmienna ma największą/najmniejszą wartość.

Def. 3 (Wyrażenie dodatnio jednorodne) *Wyrażenie jest dodatnio jednorodne jeśli mnożąc każdą zmienną przez pewną liczbę $s > 0$ przemnaża wartość całego wyrażenia przez s^k dla pewnej liczby rzeczywistej k, zwanej śtopniem jednorodności".*

Na przykład wyrażenie $x^5+2x^3y^2+9xy^4$ jest dodatnio jednorodne stopnia 5, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ jest dodatnio jednorodne stopnia 1 i $x + \frac{1}{x}$ nie jest dodatnio jednorodne.
Jeśli obie strony nierówności są dodatnio jednorodne tego samego, niezerowego stopnia, można założyć b.s.o. że zmienne spełniają pewne równanie, na przykład $x + y + z = 2$, $xyz = 1$ lub $a(b + c + d) = 5$. Wybrane równanie musi spełniać następujące wymagania:

1. Prawa strona równania jest dodatnią stałą.

2. Lewa strona równania jest dodatnio jednorodna niezerowego stopnia.

3. Lewa strona równania jest zawsze dodatnia.

2 Przydatne nierówności

Zdecydowaną większość zadań olimpijskich rozwiązuje się podstawiając rzeczy do jednej ze znanych nierówności, ewentualnie wspomagając się trikami opisanymi w poprzedniej sekcji.

2.1 Ciągi jednomonotoniczne

Twierdzenie 1 *Jeśli ciągi* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), \ldots, (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *są dodatnie i nierosnące, wówczas*

$$a_1b_1 \ldots z_1 + a_2b_2 \ldots z_2 + \cdots + a_nb_n \ldots z_n \geq a'_1b'_1 \ldots z'_n + a'_2b'_2 \ldots z'_2 + \cdots + a'_nb'_n \ldots z'_n$$

gdzie ciągi $(a'_1, a'_2 \ldots a'_n), (b'_1, b'_2 \ldots b'_n), \ldots, (z'_1, z'_2 \ldots z'_n)$ *są dowolnymi permutacjami oryginalnych ciągów.*

W szczególnym przypadku gdy są tylko dwa ciągi, nie jest wymagane aby ciągi były dodatnie.

2.2 Średnie potęgowe

Dla danej liczby rzeczywistej p i dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definiujemy ich średnią potęgową stopnia p jako:

$$M_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n})^{\frac{1}{p}}$$

i

$$M_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{a.a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

Twierdzenie 2 *Dla ustalonego ciągu* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*,* $M_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *jest rosnące względem* p*.*

W szczególności, podstawiając $p = -1, 0, 1, 2$ otrzymujemy **bardzo ważną nierówność**:

$$\sqrt[2]{\frac{a_1^2 + a_2^2 \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a.a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

2.3 Caushy-Schwarz

Twierdzenie 3 *Dla danych liczb rzeczywistych* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *i* $b_1, b_2, \ldots, b_n$*, zachodzi:*

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

Alternatywne formy tego twierdzenia zachodzą dla **liczb dodatnich**.

Twierdzenie 4

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{(b_1 + \cdots + b_n)}$$

Twierdzenie 5

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n) \geq \left(\sqrt{a_1b_1} + \cdots + \sqrt{a_nb_n}\right)^2$$

3 Zadanka

O ile nie stwierdzono inaczej, załóż w zadaniach że zmienne są dodatnie rzeczywiste, że n jest liczbą naturalną dodatnią i że celem jest udowodnienie podanej nierówności.

1. $$(1+a^2)(1+b^2) \geq 4ab$$

2. $$a^3+b^3+c^3 \geq \sqrt{8}abc$$

3. $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}$$

4. (nierówność Nesbitt-a)
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

5. $$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})$$

6. (Chebyshev) $(a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n)$ i $(b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n)$ są ciągami (niekoniecznie dodatnich) liczb rzeczywistych. Udowodnij:
$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}$$

7. $$(a+b)^n-a^n-b^n \geq \frac{2^n-2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-2}$$

8. $$abc(a+b+c) \leq a^3b+b^3c+c^3a$$

9. $$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i+b_i})^2 \geq (\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i})^2+(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{b_i})^2$$

10. Dodatnie x, y, z spełniają $xyz(x+y+z)=1$, znajdź minimalną wartość
$$(x+y)(y+z)$$

11. Dodatnie a, b, c spełniają $abc=1$. Wykaż, że
$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{b+a}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

12. Dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$. Wykaż, że
$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d)-4$$

13. Liczby rzeczywiste (niekoniecznie dodatnie) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots x_{2n-1}$ mają średnią arytmetyczną równą A. Wykaż, że
$$2((x_1-A)^2+(x_2-A)^2+\cdots+(x_{2n-1}-A)^2) \geq (x_1-x_n)^2+(x_2-x_n)^2+\cdots+(x_{2n-1}-x_n)^2$$