Jakub Baranowski

Koło 21.12.23r. - Od osi potęgowych do twierdzenia Ponceleta

1. Punkty P i Q leżą wewnątrz okręgu ω. Przez każdy punkt $A \in \omega$ prowadzimy cięciwę AB przechodzącą przez punkt P. Niech γ_A oznacza okrąg opisany na trójkącie AQB. Udowodnić, że wszystkie tak otrzymane okręgi γ_A przechodzą przez dwa ustalone punkty.

2. Dane są dwa różne punkty P, Q. Pokaż, że dla $\lambda > 0, \lambda \neq 1$ zbiór

$$\omega_\lambda := \{X : PX = \lambda \cdot QX\}$$

jest okręgiem. Załóżmy teraz, że $\lambda \neq \mu$. Pokaż, że osią potęgową okręgów $\omega_\lambda, \omega_\mu$ jest symetralna odcinka PQ. Dalej, załóżmy, że KL jest cięciwą okręgu ω_λ styczną do okręgu ω_μ w punkcie B, a prosta KL przecina symetralną PQ w punkcie S. Pokaż, że $SB = SQ$.

3. Cięciwy A_0A_1, B_0B_1 okręgu Ω przecinają się w punkcie wewnętrznym E i są styczne do okręgu ω leżącego całkowicie wewnątrz okręgu Ω odpowiednio w punktach R i Q. Proste A_0B_0, A_1B_1 nie są równoległe. Udowodnij, że trójkąt utworzony przez proste A_0B_0, A_1B_1, QR jest równoramienny.

Dwa ambitne zadania:

4. $ABCDE$ jest takim pięciokątem wypukłym, że $BC = DE$. Wewnątrz niego istnieje punkt T spełniający $TB = TD, TC = TE$ oraz $\sphericalangle TBA = \sphericalangle AET$. Proste CD i CT przecinają prostą AB odpowiednio w punktach P i Q, a proste CD i DT przecinają prostą AE odpowiednio w punktach R, S. Proste P, B, A, Q leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności, tak jak i punkty R, E, A, S. Udowodnij, że na okręgu P, S, Q, R da się opisać okrąg.

5. W trójkącie ABC punkt I to środek okręgu wpisanego. Niech prosta l będzie styczną do okręgu wpisanego różną od jego boków. Na prostej l obieramy punkty X, Y, Z takie, że $\sphericalangle AIX = \sphericalangle BIY = \sphericalangle CIZ = 90°$ Udowodnić, że proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.