PreOM 2023 - Dzień 3

Rozwiązania

Zadanie 1. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie BC znajduje się punkt D na krawędzi AC. Na krótszym łuku CD okręgu opisanego trójkąta BCD znajduje się punkt K. Półprosta CK przecina prostą równoległą do prostej BC przechodzącą przez A w punkcie T. Niech M będzie środkiem odcinka DT. Udowodnij, że $\sphericalangle AKT = \sphericalangle CAM$.

Rozwiązanie:
Odbijmy punkt A względem M aby otrzymać punkt A'. Niech E będzie drugim punktem przecięcia wspomnianego okręgu i AB. Wówczas mamy $TAA'E$ cykliczne, ponieważ $DE \parallel BC \parallel TA \parallel A'D$ oraz $AE = AD = TA'$. Zauważmy również, że $\sphericalangle ATK = 180° - \sphericalangle KCB = \angle KEB$, więc $ATA'K$ również jest cykliczny. Z tego wynika, że $\sphericalangle TKA = \sphericalangle TA'A = \angle MAC$, czyli teza. ■

Zadanie 2. Niech $a, b, c, d > 0$ oraz $abcd = 1$. Udowodnij, że:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \geqslant 2$$

Rozwiązanie:
Wykonajmy następujące podstawienia dla $x, y, z, y > 0$:

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{z}{x}, \quad ,c = \frac{t}{z}, \quad d = \frac{y}{t}$$

(np. $x = 1 = abcd, y = bcd, z = b, t = bc$) Dostajemy:

$$\frac{y}{x+z} + \frac{x}{z+t} + \frac{z}{y+t} + \frac{t}{x+y} \geqslant 2$$

Niech:

$$I = \frac{y}{x+z} + \frac{x}{z+t} + \frac{z}{y+t} + \frac{t}{x+y}$$

oraz

$$J = y(x+z) + x(z+t) + z(y+t) + t(x+y)$$

Korzystając z nierówności Cauchy'ego - Schwarza dostajemy:

$$IJ \geqslant (x + yz + t)^2$$

Co daje:

$$I \geqslant \frac{(x+yz+t)^2}{J}$$

Wystarczy więc pokazać, że:

$$\frac{(x+yz+t)^2}{yx+yz+xz+xt+zy+zt+tx+ty} \geqslant 2$$

Jest to równoważne do

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geqslant 2(yz + xt), \quad (x-t)^2 + (y-z)^2 \geqslant 0$$

■

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieje liczba całkowita m, taka że $2^n - 1$ dzieli $m^2 + 9$.

Rozwiązanie:
Rozważmy dowolny dzielnik pierwszy $p \neq 3$ liczby $2^n - 1$. Wiemy, że

$$1 = \left(\frac{m^2}{p}\right) = \left(\frac{-9}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

Stąd każdy dzielnik pierwszy różny od 3 musi być postaci $p = 4k + 1$.

Lemmat 1:
Jeśli $n > 1$ jest nieparzyste to istnieje liczba pierwsza $p \neq 3$ oraz $p \equiv_4 3$, że $p|2^n - 1$

Dowód: Mamy $2^n - 1 \equiv_4 3$ oraz $2^n - 1 \equiv_3 1$, więc jest taki dzielnik.

Jeśli $n = 2^k \cdot m$ gdzie $m > 1$ jest nieparzyste to $2^m - 1|2^n - 1$, bo $2^n - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)(2^{2m} + 1)\dots(2^{2^{k-1}m} + 1)$ (można to pokazać np. indukcyjnie ze względu na k). Stąd z Lematu 1 jedynym sensownym kandydatem na rozwiązanie są liczby postaci $n = 2^k$.

Wówczas mamy $n = (2 + 1)(2^2 + 1)\dots(2^{2^{k-1}} + 1)$

Lemmat 2:
Dla $m > n \geqslant 0$ mamy $2^{2^n} + 1 \perp 2^{2^m} + 1$.

Dowód: Z powyższego $2^{2^n} + 1|2^{2^m} - 1$, więc $NWD(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1) = NWD(2^{2^n} + 1, 2) = 1$

Zatem weźmy układ równań:

$$\begin{cases} m \equiv 0 \, mod \, (2 + 1) \\ m \equiv 3 * 2 \, mod \, (2^2 + 1) \\ \dots \\ m \equiv 3 * 2^{2^{k-2}} \, mod \, (2^{2^{k-1}}) \end{cases}$$

Dla każdego k mamy $m^2 \equiv -9 \, mod \, (2^{2^k} + 1)$, zatem z Lematu 2 i Chińskiego Twierdzenia o Resztach znajdujemy szukane m.

■

Zadanie 4. Niech x będzie dodatnią liczbą wymierną. Udowodnij, że istnieje całkowita dodatnia liczba n oraz parami różne dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$ takie, że $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.

Rozwiązanie:
Ciąg (a_n) konstruujemy algorytmem zachłannym: załóżmy, że mamy już wybrane jakieś liczby $a_1, a_2, \dots, a_k$. Wtedy wybieramy jako a_{k+1} najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która nie została jeszcze wybrana taką, że $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} \leqslant x$. Pokażemy, że ten algorytm zawsze się zakończy.
Udowodnimy, że z każdym krokiem algorytmu maleje licznik liczby $x - \frac{1}{a_1} - \dots - \frac{1}{a_k} = d_k = \frac{r_k}{s_k}$

(r_k, s_k to względnie pierwsze liczby naturalne). Ponieważ nie może istnieć nieskończony malejący ciąg liczb naturalnych, to (r_n) musi być skończony, a zatem algorytm musi się zakończyć w skończonej liczbie kroków.
Szereg

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots >\right.$$
$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots\right.$$

jest rozbieżny, więc istnieje takie m, że

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\leqslant x<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+1}$$

Bierzemy $a_1=1,\dots,a_m=m$. Zachodzi nierówność $d_m<\frac{1}{m+1}=\frac{1}{a_m+1}$. Pokażemy, że nierówność $d_k<\frac{1}{a_k+1}$ jest niezmiennikiem kroku algorytmu dla $k\geqslant m$.
Załóżmy, że mamy wybrane $a_1,\dots,a_k$ takie, że $d_k<\frac{1}{a_k+1}$. Dzięki temu, wybrane zachłannie a_{k+1} spełnia nierówność

$$\frac{1}{a_{k+1}}\leqslant d_k<\frac{1}{a_{k+1}-1}$$

Wtedy

$$d_{k+1}=d_k-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{r_ka_{k+1}-s_k}{s_ka_{k+1}}$$

Zachodzi nierówność $r_{k+1}\leqslant r_ka_{k+1}-s_k$ (przechodzi w równość, gdy ułamek już jest skrócony).
Zachodzi nierówność

$$r_ka_{k+1}-s_k<r_k\Leftrightarrow d_ka_{k+1}-1<d_k\Leftrightarrow d_k<\frac{1}{a_{k+1}-1}$$

co jest prawdziwe z założenia, zatem $r_{k+1}<r_k$. Potrzebujemy jeszcze pokazać, że spełniona jest nierówność $d_{k+1}<\frac{1}{a_{k+1}+1}$. Równoważnie

$$d_{k+1}<\frac{1}{a_{k+1}+1}\Leftrightarrow d_k-\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{1}{a_{k+1}+1}\Leftarrow\frac{1}{a_{k+1}-1}-\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{1}{a_{k+1}+1}$$

Ostatnia nierówność jest spełniona, bo $a_{k+1}>1$.
Pokazaliśmy, że ciąg liczb naturalnych (r_n) jest od pewnego momentu malejący, z czego wnioskujemy, że musi być skończony.

■