Kontest 2 - 27.09.2023

Rozwiązania Finaliści

Zadanie 1. Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych $x, y > 1$, zachodzi

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geqslant 8.$$

Dowód. Załóżmy bez straty ogólności, że $x \geqslant y$. Wtedy $x^2 \geqslant y^2$ i $\frac{1}{y-1} \geqslant \frac{1}{x-1}$, więc z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geqslant \frac{x^2}{x-1} + \frac{y^2}{y-1}.$$

Ponadto

$$\frac{x^2}{x-1} \geqslant 4 \iff (x-2)^2 \geqslant 0.$$

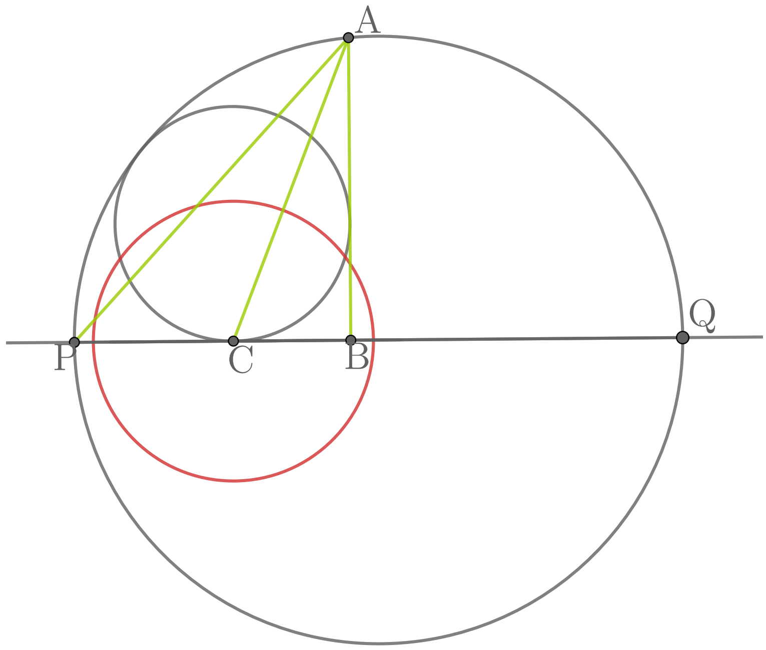
Zatem

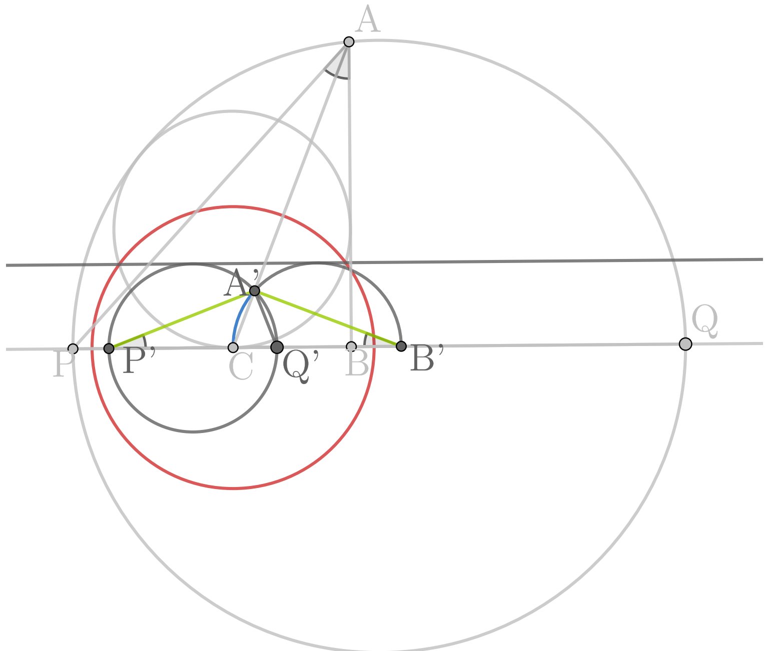
$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geqslant \frac{x^2}{x-1} + \frac{y^2}{y-1} \geqslant 8.$$

■

Zadanie 2. Niech PQ będzie średnicą półokręgu H. Okrąg O jest wewnętrznie styczny do H i styczny do PQ w C. Niech A będzie punktem na H, a B punktem na PQ, takim, że $AB \perp PQ$ i AB jest styczne do O. Udowodnij, że AC jest dwusieczną $\sphericalangle PAB$.

Dowód. Rozważmy inwersję o środku C i dowolnym promieniu r. Trójkąty CAP i $CP'A'$ oraz trójkąty $\triangle CAB$ i $\triangle CB'A'$ są podobne, więc AC jest dwusieczną $\sphericalangle PAB$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CAB$, co jest równoważne do $\sphericalangle CP'A' = \sphericalangle CB'A'$.





Prosta PQ przechodzi na samą siebie. Skoro okrąg O przechodzi przez C, w inwersji przechodzi on na prostą O' równoległą do PQ. H jest styczny do okręgu O i jest prostopadły do prostej PQ, więc przechodzi na półokrąg H' o średnicy $P'Q'$ styczny do prostej O'. Odcinek AB jest styczny do okręgu O i jest prostopadły do PQ, więc przechodzi na łuk $A'B'$ na półokręgu stycznym do prostej O' i ma średnicę CB'.

Zauważmy, że łuk $A'Q'$ oraz łuk $A'C$ są symetryczne względem symetralnej odcinka CQ', co nam daje $\sphericalangle CP'A' = \sphericalangle CB'A'$ ■

Zadanie 3. Niech x, y będą liczbami całkowitymi spełniającymi $2 \leqslant x, y \leqslant 100$. Udowodnij, że istnieje $n \in \mathbb{N}_+$, takie, że $x^{2^n} + y^{2^n}$ nie jest pierwsze.

Dowód. Jeśli $x = y$, to teza jest oczywista, więc dalej zakładamy $x \neq y$. Pokażemy, że dla liczby pierwszej $p = 257 = 2^8 + 1$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $x^{2^n} + y^{2^n}$ jest wielokrotnością p. Niech $z \in 2, \ldots, p-2$, takie że $z \equiv xy^{-1} \ (mod\, p)$ (takie z istnieje, bo $0 < x,\ y < p$ i $x \neq y$ oraz $0 < x + y < p$). Zauważmy, że $ord_p(z) \mid p - 1 = 2^8$, więc $ord_p(z) = 2^s$, $s \geqslant 2$. Ponadto

$$p \mid z^{2^s} - 1 = (z^{2^{s-1}} - 1)(z^{2^{s-1}} + 1),$$

ale $p \nmid z^{2^{s-1}} - 1$, więc $z^{2^{s-1}} \equiv -1 \ (mod\, p)$, czyli $x^{2^{s-1}} \equiv -y^{2^{s-1}} \ (mod\, p)$, skąd $p \mid x^{2^{s-1}} + y^{2^{s-1}}$. Pozostaje zauważyć, że równanie $u^2 + v^2 = 257$ ma dokładnie jedno rozwiązanie: $(16, 1)$, z dokładnością do zmiany kolejności lub znaków (znany fakt lub sprawdzenie ręczne). Zatem $x^{2^{s-1}} + y^{2^{s-1}}$ nie jest liczbą pierwszą, bo $x,\ y > 1$. ■

Zadanie 4. *Podziałem* liczby n nazywamy przedstawienie liczby n w postaci sumy liczb całkowitych dodatnich, przy czym *podziały* uznajemy za takie same, jeśli da się z jednego uzyskać drugi poprzez zmianę kolejności dodawania.

Udowodnij, że dla naturalnej liczby n liczba podziałów liczby n, z których każda część występuje co najmniej dwa razy jest równa liczbie podziałów n na części, które są podzielne przez 2 lub 3.

Dowód. Niech a_n oznacza liczbę takich podziałów liczby n, w których każdy składnik występuje przynajmniej dwukrotnie. Niech b_n oznacza liczbę takich podziałów liczby n, w których każdy składnik jest podzielny przez 2 lub 3. Przyjmujemy $a_0 = b_0 = 1$. Zdefiniujmy funkcje tworzące

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

$A(x)$ można zapisać jako iloczyn szeregów formalnych.

$$A(x) = \left(1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\right)\left(1 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots\right)$$
$$\left(1 + x^6 + x^9 + \dots\right) \dots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + x^{2k} + x^{3k} + \dots\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(-x^k + \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn}\right) =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(-x^k + \frac{1}{1-x^k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^k+x^{2k}}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+x^{3k}}{1-x^{2k}} =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^{6k}}{(1-x^{3k})(1-x^{2k})}$$

Podobnie możemy zapisać $B(x)$ jako iloczyn szeregów formalnych.

$$\left(1 + x^2 + x^4 + \dots\right)\left(1 + x^3 + x^6 + \dots\right)\left(1 + x^4 + x^8 + \dots\right) \dots =$$
$$= \prod_{\substack{k \geqslant 1 \\ 2|k \vee 3|k}}^{\infty}\left(1 + x^k + x^{2k} + \dots\right) = \prod_{\substack{k \geqslant 1 \\ 2|k \vee 3|k}}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}$$
$$=_{\text{Zasada włączeń i wyłączeń}} \left(\prod_{k\geqslant 1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k}}\right)\left(\prod_{k\geqslant 1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{3k}}\right)\left(\prod_{k\geqslant 1}^{\infty}(1-x^{6k})\right) =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^{6k}}{(1-x^{2k})(1-x^{3k})}$$

Stąd mamy równość szeregów formalnych $A(x) = B(x)$, co implikuje $a_n = b_n$ dla każdego $n \geqslant 0$.

Uwaga. Jeśli ktoś nie czuje się komfortowo z szeregami formalnymi, to rozwiązanie można również przepisać używając jedynie wielomianów. Aby pokazać tezę dla wszystkich $n < N$ można zdefiniować $A(x), B(x)$ jako wielomiany stopnia $D \gg N$ i pokazać, że $x^N \mid A(x) - B(x)$. Wówczas możemy zastąpić iloczyny nieskończone przez iloczyny skończone i wszystkie równości rozpatrujemy modulo wielomian x^N. ■