Wielomiany

Mikołaj Cudny, Jan Kwieciński

23.11.2022

Wielomiany są nierozłączną częścią kompendium olimpijskiego, a przede wszystkim są ukryte u podstaw wyższych dziedzin matematyki. Każdy olimpijczyk powinien jak najszybciej oswoić się z ich ideą, jak i również umieć sprawnie operować ich własnościami. Poniżej przedstawiamy najważniejsze definicje i twierdzenia których zastosowanie napotkacie w wielu zadaniach olimpijskich.

1 Teoria

Podstawowe definicje

- Wyrażenie postaci $w(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ nazywamy **wielomianem zmiennej** X **stopnia n**, stopień oznaczamy jako **deg** (z ang. *degree*)
- Liczby $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy **współczynnikami** tego wielomianu
- Współczynniki a_n oraz a_0 nazywamy odpowiednio **współczynnikiem wiodącym** i **wyrazem wolnym**
- Wielomian o współczynniku wiodącym równym 1 nazywamy **unormowanym**
- Wielomian o wszystkich współczynnikach równych 0 nazywamy **wielomianem zerowym**, zaś wielomian $w(X) = a_0$ nazywamy **wielomianem stałym**
- Zbiór wszystkich wielomianów o wsp. rzeczywistych i całkowitych oznaczamy odpowiednio jako $\mathbb{R}[X]$ oraz $\mathbb{Z}[X]$
- Liczbę α dla której zachodzi $w(\alpha) = 0$ nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu w

Ważne twierdzenia
(Dowody znajdują się na końcu skryptu)

1.1 Równość Bézouta

Dla danego wielomianu $w(X) \in \mathbb{R}[X]$ stopnia n oraz $\beta \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden wielomian $h(X) \in \mathbb{R}[X]$, dla którego zachodzi równość

$$w(X) = (X - \beta)h(X) + w(\beta)$$

Ponadto, $deg\ h(X) = n - 1$ a wielomiany w i h mają ten sam wsp. wiodący.

1.2 Wniosek (Twierdzenie Bézouta)

Element $\alpha \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu $w(X) \in \mathbb{R}[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $h(X) \in \mathbb{R}[X]$, że

$$w(X) = (X - \alpha)h(X)$$

Przy czym $deg\ h(X) = deg\ w(X) - 1$.

1.3 Dzielenie z resztą

Dla danych wielomianów $a(X), b(X) \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$ istnieją jednoznacznie wyznaczone wielomiany $q(X)$ i $r(X)$, że

$$a(X) = q(X)b(X) + r(X) \text{ i } deg\ r(X) < deg\ b(X)$$

Dzięki temu twierdzeniu możemy łatwo zdefiniować podzielność wielomianów, która będzie działała zasadniczona tak samo jak podzielność liczb całkowitych. Mówimy, że wielomian $a(X)$ dzieli wielomian $b(X) \Leftrightarrow$ istnieje wielomian $k(X)$ spełniający $a(X) \cdot b(X) = k(X)$

1.4 Twiedzenie Lagrange'a

Wielomian stopnia $n \geqslant 1$ o współczynnikach z $\mathbb{R}$ ma conajwyżej n pierwiastków $\mathbb{R}$

1.5 Twierdzenie o jednoznaczności

Istnieje dokładnie jeden wielomian z $\mathbb{R}[X]$ stopnia n przechodzący przez dane $n+1$ punktów. Innymi slowy, $n+1$ punktów na płaszczyźnie wyznacza jednoznacznie wielomian.

1.6 Wzory Viete'a

Wielomian $w(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \quad a_n \neq 0$ mający n pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_n$ można przedstawić w postaci $w(X) = a_n(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n)$ i ponadto $\forall_k \frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^{n-k} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k \in [n]} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$

Uwaga: Symbol $[n]$ oznacza zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$. Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie koniecznie muszą być różne! Mogą pojawić się tzw. **pierwiastki wielokrotne**, które występują kilkukrotne. Np. w wielomianie postaci $w(X) = 3(X-1)^2(X-2)$ liczba 1 jest pierwiastkiem dwukrotnym. Wtedy pierwiastki to $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$ a wzory Viete'a działają poprawnie.

1.7 Twierdzenie Darboux dla wielomianów

Dany jest wielomian $w(X) \in \mathbb{R}[X]$. Jeśli istnieją liczby rzeczywiste a, b dla których $w(a) = c$ i $w(b) = d$ to dla każdej liczby $y \in [c, d]$ istnieje $x \in [a, b]$, że $w(x) = y$

1.8 Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Dany jest unormowany wielomian $w(X) \in \mathbb{Z}[X],\ deg\ w \geqslant 1$, zaś $\alpha \in \mathbb{Q}$ jest jego pierwiastkiem wymiernym, to $\alpha \in \mathbb{Z}$

2 Rozgrzewka

Rozgrzewka 1 Wyznacz wszystkie $n \in \mathbb{Z}$, dla których zachodzi: $(n^2+4) | n^5 - 3n^4 + 10n^3 - 17n^2 + 28n - 20$
Rozgrzewka 2 Rozwiąż nierówność $\frac{4x^3-3x+1}{x^3-15x^2-27x+51} \geqslant 0$

3 Zadanka

Przydatny fakt 1 Dla unormowanego wielomianu stopnia nieparzystego zachodzi dla $x \to -\infty \quad w(x) \to -\infty$ zaś dla $x \to +\infty \quad w(x) \to +\infty$. Oprócz tego wielomian przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, tzn. $\forall_{y\in\mathbb{R}} \exists_{x\in\mathbb{R}} w(x) = y$
Przydatny fakt 2 Dla unormowanego wielomianu stopnia parzystego zachodzi dla $x \to -\infty \quad w(x) \to \infty$ zaś dla $x \to +\infty \quad w(x) \to +\infty$. Oprócz tego wielomian nie przyjmuje wszystkie wartości rzeczywistych.

Dowody obu tych faktów nie są mega twórcze, więc je pominiemy. Intuicja jest taka, że jednomian a_nX^n jest najszybciej rosnącą częścią całego wielomianu, a suma $a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ dla bardzo ujemnych lub bardzo dodatnich X-ów nie ma dużo do gadania.

Zadanie 1 Udowodnij, że dla $x, y \in \mathbb{Z}$ oraz $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ zachodzi podzielność $P(x) - P(y) | Q(P(x)) - Q(P(y))$
Zadanie 2 Dany jest wielomian $w(x) \in \mathbb{Z}[X]$, dla którego $w(20)w(13) = 2013$.
Udowodnij, że w(x) nie ma pierwiastków całkowitych.
Zadanie 3 Udowodnij, że wielomian stopnia nieparzystego posiada pierwiastek rzeczywisty.
Zadanie 4 Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste x, y, z spełniają

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

To co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa a.
Zadanie 5 Dwa trójmiany kwadratowe $(f(x) = ax^2 + bx + c,\ g(x) = dx^2 + ex + f) \in \mathbb{Z}[X]$ mają wspólny pierwiastek $k \notin \mathbb{Z}$. Udowodnij, że $b = e$ oraz $c = f$.
Zadanie 6 Reszta z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumiany $x - 1,\ x - 2,\ x - 3$ wynosi odpowiednio $1,\ 6,\ 13$. Znaleźć resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
Zadanie 7 Dany jest wielomian $w(x) \in \mathbb{Z}$, który dla czterech różnych liczb całkowitych przyjmuje wartość 5. Udowodnij, że dla żadnej liczby całkowitej nie przyjmuje on wartości 7
Zadanie 8 Wielomian $w(x)$ spełnia $w(x - 1)w(x + 4) = w(x^2 + 3x + 2)$. Udowodnij, że w nie ma pierwiastków rzeczywistych.
Zadanie 9 Wielomian $w(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 1$ ma trzy pierwiastki $a < b < c$. Znajdź wielomian sześcienny, którego pierwiastkiem jest liczba $\frac{ab}{c}$
Zadanie 10 Wielomian $w(x)$ stopnia 2005 spełnia warunek $w(k) = \frac{k^2}{k+1}$ dla $k = 0, 1, \ldots, 2005$. Rozstrzygnąć, czy z tego wynika, że $w(2006)$ jest liczbą całkowitą.
Zadanie 11 Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian 1000 stopnia, którego współczynniki należą do zbioru $\{-1, 1\}$ oraz ma on 1000 pierwiastków rzeczywistych.
Zadanie 12 Dane są liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 oraz liczba całkowita dodatnia dzieląca ich sumę i sumę kwadratów. Wykazać, że $m | x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 - 5x_1x_2x_3x_4x_5$

Zadanie 13 Udowodnij, że zbiór dzielników pierwszych niestałego wielomianu w (tzn. takich $p \in \mathbb{P}$ dla których $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ p|w(x)$ jest nieskończony.
Zadanie 14 (55 OM - III - P2) Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych, dla których wielomian W przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.
Zadanie 15 (73 OM - I - P6 (pała dla ambitnych)) Dana jest funkcja kwadratowa f oraz parami różne liczby rzeczywiste x, y, z, dla których $f(x) = yz$, $f(y) = zx$, $f(z) = xy$. Wyrazić jawnie wartość $f(x + y + z)$ w zależności od x, y, z.

4 Dowody

Dowód 1.1

Korzystamy z algebraicznej definicji $w(X)$ i rozpisujemy:

$$w(X) - w(\beta) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k - \beta^k)$$

Ze wzoru skróconego mnożenia możemy zapisać $(X^k - \beta^k) = (X - \beta)h_{k-1}$. Ponieważ każda kombinacja liniowa wielomianów jest wielomianem (oczywiste!), to widzimy że wielomian $h(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k h_{k-1}$ spełnia naszą równość. Ponadto każdy z wielomianów h_{k-1} jest unormowany i ma stopień $k-1$, więc h ma stopień $n-1$ a współczynnik wiodący wynosi a_n.

Dowód 1.2

Dowód w jedną stronę wynika natychmiast **twierdzenia 1.1**, zaś w drugą z definicji pierwiastka $w(\alpha) = 0$.

Dowód 1.3

Rozpatrzmy takie przedstawienie $W(x)$ w postaci

$$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x),$$

gdzie $deg\ r$ jest najmniejsze możliwe. Jeżeli $deg\ r < deg\ b$ to zachodzi teza. Rozpatrzmy przypadek, gdy $deg\ r \geqslant deg\ b$. Niech $deg\ b = n$ oraz $deg\ r = n + k$. Przyjmijmy

$$b(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

$$r(x) = b_{n+k}x^{n+k} + b_{n+k-1}x^{n+k-1} + ... + b_1 x + b_0.$$

Zauważmy, że wielomiany $r(x)$ oraz $\frac{b_{n+k}}{a_n}x^k b(x)$ mają równy stopień i współczynnik wiodący. Odejmując je od siebie skróci się on, stąd wielomian $r(x) - \frac{b_{n+k}}{a_n}x^k P(x)$ ma mniejszy stopień niż wielomian $r(x)$. Możemy zapisać

$$a(x) = \left(q(x) + \frac{b_{n+k}}{a_n}x^k\right) \cdot b(x) + \left(r(x) - \frac{b_{n+k}}{a_n}x^k b(x)\right),$$

co przeczy temu, że stopień r był minimalny.

Dowód 1.4

Udowodnimy to indukcyjnie. Gdy stopień wielomianu jest równy jeden, to jest on funkcją rosnącą ciągłą zatem ma dokładnie jeden pierwiastek. Krok indukcyjny jest następujący każdego wielomianu $w(x)$ stopnia k, posiadającego pierwiastek x_1 z twierdzenia Bezouta możemy przedstawić go w postaci:
$w(X) = (X - x_1)h(X)$ przy czym $deg(h) = k - 1$.

Dowód 1.5

Najpierw udowodnimy nie wprost, że istnieje maksymalnie jeden taki wielomian. Oznaczmy przez (a_i, A_i) współrzędne wspomnianych punktów zaś $w(x), u(x)$ takie wielomiany, że $\forall_{i \in 1,..,n+1} w(a_i) = u(a_i)$. Niech $h(x) = w(x) - u(x)$. Wówczas $deg(h) \leqslant n$ oraz $\forall_{i \in 1,..,n+1} h(a_i) = A_i - A_i = 0$ Czyli z 1.4 $deg(h) = -\infty$ czyli $\forall_x w(x) = u(x)$
Wyznaczanie zacznijmy od wyznaczenia n + 1 wielomianów $g_i(x)$ takich, że $\forall_{i<j}\ g_i(a_j) = 0,\ g_j(a_i) = 0$ oraz $\forall_i\ g_i(a_i) = 1$.

Te warunki spełnia $w_i(x) = \frac{\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n+1} (x-a_k)}{\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n+1} (a_i-a_k)}$.

Wówczas szukany wielomian wynosi $W(x) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i \cdot w_i(x)$

Dowód 1.6

Pierwszą część dowodu przeprowadzamy następująco: Z twierdzenia Bézouta indukcyjnie konstruujemy wielomiany $h_n, h_{n-1}, \ldots, h_0$ takie że $(\star)$ $h_{k+1}(X) = (X - x_{k+1})h_k$ przy czym $h_n = w$, przy czym konstruujemy je od $k + 1 = n$ w dół i dowodzimy, że dla $k > 0$ $h_k(x_k) = 0$ co pozwala nam skorzystać z tw.Bézouta dla wielomianu h_k i liczby x_k. Teraz należy zauważyć że tw.Bézouta gwarantuje nam równość $deg\ h_k = k$ zaś wszystkie wielomiany h_k mają ten sam współczynnik wiodący a_n. Stąd wynika, że $h_0 = a_n$. Teraz iterujemy równość $(\star)$ i dostajemy $w(X) = (X - X_n)h_{n-1} = (X - x_n)(X - x_{n-1})h_{n-2} = \ldots = h_0(X - x_n)(X - x_{n-1}) \ldots (X - x_1)$ co z uwzględnieniem $h_0 = a_n$ kończy tą część dowodu.

Teraz niech $b_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum\limits_{i_1,i_2,\ldots,i_k \in [n]} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$. Opuszczając nawiasy równości dowiedzionej w pierwszej częsci dowodu dostajemy, że $w(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n b_k X^k$. To zaś oznacza, że wielomian $q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_n b_k - a_k) X^k$ jest wielomianem zerowym stąd $a_k - a_n \cdot b_{n-k} = 0$ dla każdego k. To oczywiście kończy dowód.

Dowód 1.7

Twierdzenie jest bezpośrednią konsekwencją ciągłości wielomianu i twierdzenie darboux dla funkcji ciągłych. Niestety zagadnienie ciągłości wykracza poza materiał licealny i olimpijski. Możecie jednak śmiało się powoływać na to twierdzenie.

Dowód 1.8

Przedstawmy pierwiastek w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z},\ p \perp q$. Wówczas:
$w(x) = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_n \cdot q^n}{q^n}$

Jeżeli $w(x) = 0$, to wtedy licznik tego ułamka wynosi 0, czyli jest podzielny przez q.
A zatem $q | a_n \cdot p^n \implies q | p \implies q = -1 \vee q = 1 \implies \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$