Kontest 1 - 26.09.2023

Rozwiązania Finaliści

Zadanie 1. Ile minimalnie pociągnięć długopisu trzeba wykonać, aby narysować klikę $2n$ wierzchołkową, nie rysując żadnej krawędzi więcej niż raz (pociągnięcia rysują łamaną zmieniającą kierunki tylko w wierzchołkach rysowanego grafu)?

Dowód. Oznaczmy wierzchołki kliki przez $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$. Możemy narysować kliknę K_{2n} za pomocą n pociągnięć w następujący sposób:

1. Rysujemy $n-1$ pociągnięć, dla $1 \leqslant i \leqslant n-1$ pociągnięcie numer i jest przekątną kliki idącą od wierzchołka v_i do wierzchołka v_{i+n}.
2. Graf pozostały do narysowania ma stopnie wierzchołków równe $2n-2$, więc istnieje w nim ścieżka Eulera która jest ostatnim pociągnięciem potrzebnym do narysowania kliki.

Z drugiej strony zauważymy, że klika K_{2n} posiada $2n$ wierzchołków o nieparzystym stopniu. Jedna ścieżka może zmienić parzystość co najwyżej dwóch wierzchołków, więc potrzeba co najmniej $\frac{2n}{2} = n$ pociągnięć.

Liczba n jest zarówno dolnym jak i górnym ograniczeniem, więc minimalna liczba pociągnięć długopisu potrzebna do narysowania K_{2n} to n. ∎

Zadanie 2. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon R_+ \to R_+$ takie, że dla każdych x, y rzeczywistych dodatnich zachodzi:

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)).$$

Dowód. Dla $y > 0$, rozpatrzmy funkcję $\varphi(x) = x + yf(x)$, $x > 0$. Ta funkcja jest iniekcją: gdyby $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, to

$$f(x_1)f(y) = f(\varphi(x_1)) = f(\varphi(x_2)) = f(x_2)f(y),$$

więc $f(x_1) = f(x_2)$, z czego wynika, że $x_1 = x_2$ z definicji o φ. Teraz, jeśli $x_1 > x_2$ i $f(x_1) < f(x_2)$, otrzymujemy

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad \text{dla} \quad y = \frac{x_1 - x_2}{f(x_2) - f(x_1)} > 0,$$

co jest niemożliwe, gdyż f jest niemalejące. Równanie funkcyjne daje wówczas

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) \geqslant 2f(x)$$

i w konsekwencji $f(y) \geqslant 2$ dla $y > 0$. W związku z tym

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y) = f(y + xf(y)) \geqslant f(2x)$$

zachodzi dla dowolnie małego $y > 0$, co oznacza, że f jest stała na przedziale $(x, 2x]$ dla każdego $x > 0$. Ale wtedy f jest stała na sumie wszystkich przedziałów $(x, 2x]$ dla każdego $x > 0$, czyli na całym $\mathbb{R}_+$. Teraz równanie funkcyjne daje nam $f(x) = 2$ dla każdego x, co oczywiście jest rozwiązaniem. ■

Zadanie 3. Niech D, E, F będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio z bokami BC, CA i AB. Dla każdych dwóch trójkątów spośród $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, $\triangle CDE$ narysowano wspólną styczną zewnętrzną okręgów wpisanych w te trójkąty różną od boków trójkąta ABC. Wykazać, że te trzy styczne przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Niech S będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Wykażemy, że każda ze stycznych rozważanych w treści zadania przechodzi przez punkt S. Dowód przeprowadzimy dla trójkątów AEF i BDF (w pozostałych przypadkach postępujemy analogicznie).

Niech P będzie środkiem łuku EF niezawierającego punktu D. Wtedy

$$\angle EFP = \angle FEP = \angle AFP,$$

skąd wniosek, że punkt P leży na dwusiecznej kąta AFE. Analogicznie uzasadniamy, że punkt P leży na dwusiecznej kąta AEF, więc w efekcie pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt AEF. Podobnie dowodzimy, że środek Q łuku DF niezawierającego punktu E pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BDF. W takim razie z lematu o trójliściu otrzymujemy

$$PF = PS \quad \text{oraz} \quad QF = QS.$$

Symetria względem prostej PQ przekształca zatem punkt F na punkt S, zaś prostą AB styczną do okręgów wpisanych w trójkąty AEF i BDF na styczną do tych okręgów rozważaną w treści zadania. W takim razie należy do niej punkt S, co kończy rozwiązanie zadania. ■

Zadanie 4. Duży prostokąt podzielono na mniejsze prostokąty, z których każdy ma co najmniej jedną parę boków o całkowitej długości. Pokaż, że duży prostokąt również ma co najmniej jedną parę boków o całkowitej długości.

Dowód. Oznaczmy duży prostokąt jako R. Ustawmy R na płaszczyźnie w taki sposób, by jego dolny róg leżał w $(0, 0)$. Niech S będzie zbiorem wierzchołków małych prostokątów, które mają obydwie współrzędne całkowite, a T będzie zbiorem wszystkich małych prostokątów. Tworzymy graf dwudzielny z $S \cup T$ poprzez połączenie każdego punktu z S z prostokątami z T, których jest on wierzchołkiem. Istnieje wtedy parzyście wiele krawędzi, ponieważ z założenia wynika, że każdy mały prostokąt może mieć 0, 2, lub 4 wierzchołki w S. Każdy punkt z S, który nie jest wierzchołkiem R jest wierzchołkiem 2 lub 4 prostokątów. Skoro $(0, 0)$, które jest wierzchołkiem tylko jednego prostokąta należy do S, to musi istnieć także inny punkt należący do S posiadający nieparzyście wiele krawędzi. Może to być prawdą tylko wtedy, gdy jeszcze jeden wierzchołek R należy do S, co oznacza, że albo wysokość albo szerokość R jest całkowita.

Zadanie to posiada wiele ciekawych rozwiązań, część z nich została przedstawiona w pracy: Fourtenn Proofs of a Result About Tiling a Rectangle ■