KUŹNIA OLIMPIJSKA

Rozwiązania Kontestu 4 – PreOM 2025

Zadanie 1. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite a takie, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n \geq 5$ zachodzi $2^n - n^2 \mid a^n - n^a$.

Źródło: 2013 China Western Mathematical Olympiad, Problem 8 link

Rozwiązanie 1. Podstawiając $n = p^2 - 1$ dla pewnej nieparzystej liczby pierwszej p otrzymujemy:

$$p \mid 2^{p^2-1} - (p^2-1)^2 \mid a^{p^2-1} - (p^2-1)^a,$$

więc jeśli liczba pierwsza $p \geq 3$ dzieli a, to z powyższego mamy sprzeczność. Niech $a = 2^k$.

Widzimy, że $2^n - n^2 \mid 2^{nk} - n^{2^k}$, ale $2^n - n^2 \mid 2^{nk} - n^{2k}$.

Thus $2^n - n^2 \mid n^{2^k} - n^{2k}$. For $k \geq 3$ and $k = 0$ however, we may pick arbitrarily large n such that

Zatem $2^n - n^2 \mid n^{2^k} - n^{2k}$. Dla $k \geq 3$ i $k = 0$ możemy jednak wybrać dowolnie duże n takie, że:

$$2^n - n^2 > |n^{2^k} - n^{2k}|$$

Zatem mamy sprzeczność z podzielnością. Łatwo sprawdzić, że pozostałe przypadki $(k = 1, 2)$ dają poprawne rozwiązania, którymi są $a = 2$ oraz $a = 4$.

Źródło: AoPS link

Zadanie 2. Wewnątrz kuli o promieniu 10 umieszczono 3803 odcinki o łącznej długości 3803.

Udowodnij, że istnieje kula o promieniu 1, której wnętrze ma punkty wspólne z co najmniej sześcioma z tych odcinków.

Źródło: Liga zadaniowa 2012/2013, Seria X, zadanie 50 link

Rozwiązanie 2. Dla dowolnego odcinka rozważmy zbiór wszystkich punktów przestrzeni odległych od co najmniej jednego punktu tego odcinka o mniej niż 1 (nazwijmy go otoczeniem odcinka). Jednocześnie jest to zbiór wszystkich takich punktów O, że wnętrze kuli o środku O i promieniu 1 ma punkty wspólne z danym odcinkiem. Zbiór ten, dla odcinka o długości L, jest sumą walca o promieniu podstawy 1 i wysokości L oraz dwóch półkul o promieniu 1.

Objętość takiej figury jest równa: $L\pi + \frac{4}{3}\pi$.

Rozważmy teraz otoczenia wszystkich odcinków umieszczonych w danej kuli o promieniu 10. Suma ich objętości jest równa:

$$V = D\pi + N \cdot \frac{4}{3}\pi,$$

gdzie N jest liczbą odcinków, a D sumą ich długości. Ponieważ zgodnie z warunkami zadania $N = D = 3803$, otrzymujemy:

$$V = 3803\pi + 3803 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{26621}{3}\pi.$$

Zauważmy, że otoczenia mogą wprawdzie wystawać poza daną kulę, ale na odległość nie większą od 1. Zatem każde z tych otoczeń jest zawarte w kuli K o promieniu 11, współśrodkowej z daną kulą. Objętość kuli K jest równa:

$$v = 11^3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 1331 \cdot \frac{4}{3}\pi.$$

Z nierówności:

$$V = \frac{26621}{3}\pi > \frac{26620}{3}\pi = 1331 \cdot \frac{20}{3}\pi = 5 \cdot 1331 \cdot \frac{4}{3}\pi = 5 \cdot v$$

wynika, że co najmniej jeden punkt kuli K należy do otoczeń co najmniej sześciu odcinków.

Kula o środku w tym punkcie i promieniu 1 spełnia warunki zadania.

Źródło: Liga zadaniowa 2012/2013, Seria X, zadanie 50 link

Zadanie 3. Znajdź wszystkie funkcje f z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste takie, że:

$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y, z, t.

Źródło: IMO ShortList 2002, algebra problem 4 link

Rozwiązanie 3. Mamy dane:

$$f(xy - zt) + f(xt + yz) = (f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) \tag{1}$$

dla wszystkich $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Równanie to ma rozwiązania $f(x) = 0$ dla wszystkich x, $f(x) = \frac{1}{2}$ dla wszystkich x oraz $f(x) = x^2$ dla wszystkich x. Te przypadki sprawiają, że obie strony (1) są równe odpowiednio 0, 1 i $(x^2 + z^2)(y^2 + t^2)$. Twierdzimy, że nie ma innych rozwiązań.

Załóżmy, że (1) jest spełnione. Podstawiając $x = y = z = 0$ dostajemy $2f(0) = 2f(0)(f(0) + f(t))$. W szczególności $2f(0) = 4f(0)^2$, co daje $f(0) = 0$ lub $f(0) = \frac{1}{2}$. Jeśli $f(0) = \frac{1}{2}$, to mamy $f(0) + f(t) = 1$, a więc f jest identycznie równa $\frac{1}{2}$.

Załóżmy teraz, że $f(0) = 0$. Podstawiając $z = t = 0$ do (1), otrzymujemy $f(xy) = f(x)f(y)$, co oznacza, że f jest multiplikatywna. Ponieważ $f(1) = f(1)^2$, mamy $f(1) = 0$ lub 1. Jeśli $f(1) = 0$, to $f(x) = f(x)f(1) = 0$ dla wszystkich x.

Zatem możemy założyć, że $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Podstawiając $x = 0$ i $y = t = 1$ do (1), dostajemy:

$$f(-z) + f(z) = 2f(z)$$

co oznacza, że $f(-z) = f(z)$ dla każdego z, czyli f jest funkcją parzystą. Wystarczy więc pokazać, że $f(x) = x^2$ dla liczb dodatnich.

Podstawiając $t = x$ i $z = y$ do (1), otrzymujemy:

$$f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2.$$

To pokazuje, że $f(x^2 + y^2) \geqslant f(x)^2 + f(y)^2$. Stąd, jeśli $u \geqslant v > 0$, to $f(u) \geqslant f(v)$, czyli f jest funkcją rosnącą na liczbach dodatnich.

Podstawiając $z = t = 1$ w (1), otrzymujemy:

$$f(x - 1) + f(x + 1) = 2(f(x) + 1).$$

Przez indukcję po n wynika, że $f(n) = n^2$ dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych n. Ponieważ f jest parzysta, mamy $f(n) = n^2$ dla wszystkich całkowitych n, a następnie, przez kontynuację, także dla liczb wymiernych. Załóżmy, że $f(x) \neq x^2$ dla pewnego $x > 0$. Jeśli $f(x) < x^2$, weźmy liczbę wymierną a taka, że $x > a > \sqrt{f(x)}$. Wtedy $f(a) = a^2 > f(x)$, ale $f(a) \leqslant f(x)$ bo f jest rosnąca, co daje sprzeczność.

Podobny argument pokazuje, że $f(x) > x^2$ jest niemożliwe. Stąd $f(x) = x^2$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, a skoro f jest parzysta, to $f(x) = x^2$ dla wszystkich x.

Źródło: AoPS, Rozwiązanie użytkownika link

Zadanie 4. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne z tą samą orientacją. AD, BE, CF i $A'D', B'E', C'F'$ są odpowiednio wysokościami trójkąta ABC i $A'B'C'$. $P = AA' \cap DD', Q = BB' \cap EE', R = CC' \cap FF'$.

Udowodnij, że P, Q, R są współliniowe.

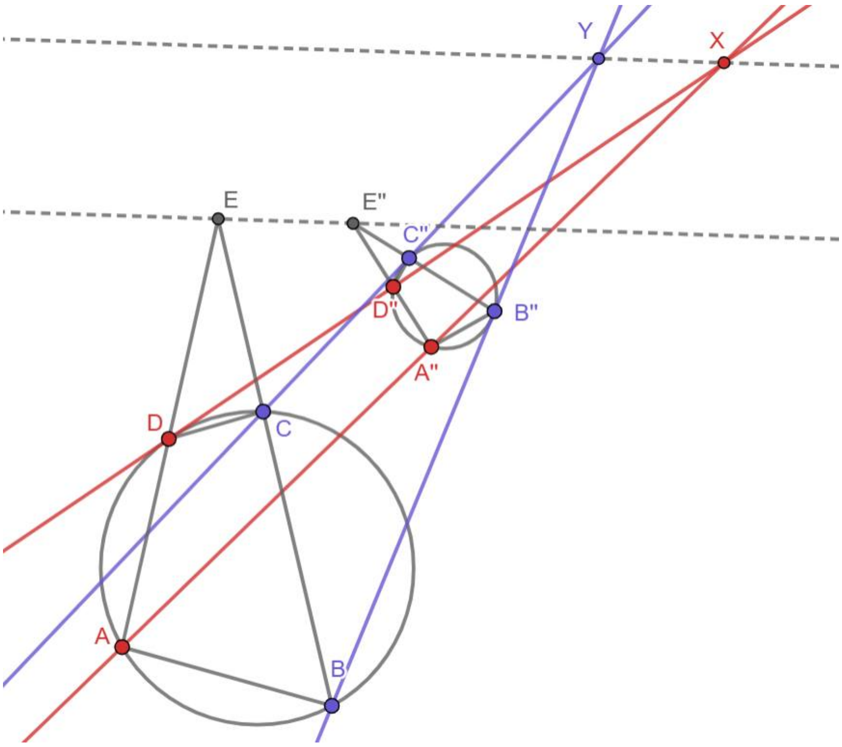
Źródło: Użytkownik Waldemar Pompe, Romantics of Geometry, 6719 link

Rozwiązanie 4.

Lemat 1 (bez dowodu)**.** Jeśli f jest podobieństwem spiralnym z centrum S, a Q jest dowolnym punktem różnym od S takim, że prosta $Qf(Q)$ nie jest odwzorowana na siebie, to zbiór punktów X takich, że punkty X, $f(X)$ i Q są współliniowe, jest okręgiem przechodzącym przez S, Q i $f^{-1}(Q)$.

Będziemy oznaczać takie okręgi jako $f - Q$.

Lemat 2. Niech $ABCD$ i $A''B''C''D''$ będą podobnymi, wpisanymi w okrąg czworokątami o tych samych orientacjach. Niech $E = AD \cap BC$, $E'' = A''D'' \cap B''C''$, $X = AA'' \cap DD''$ i $Y = BB'' \cap CC''$ (zobacz rys. 1). Wtedy $EE'' \parallel XY$.



Rysunek 1

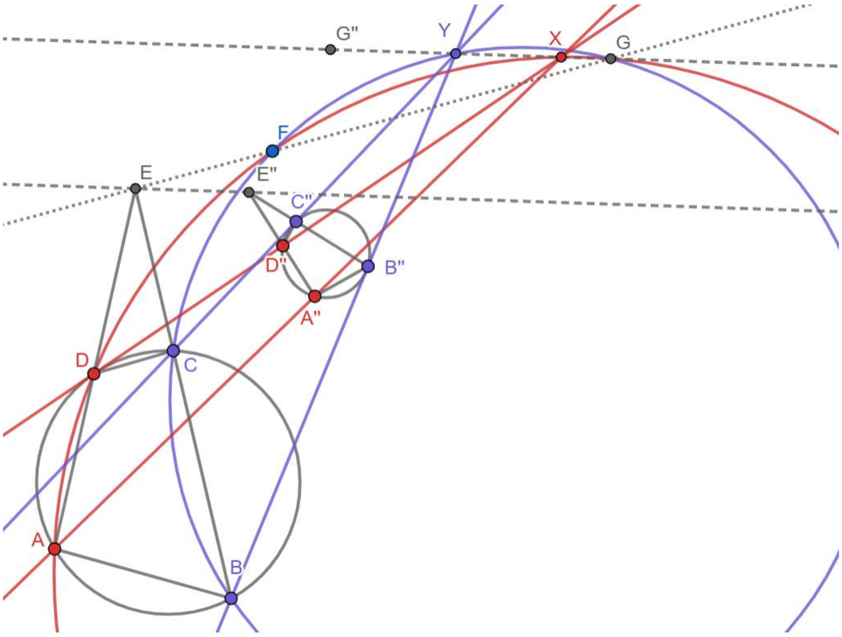
Dowód. Niech f będzie podobieństwem spiralnym odwzorowującym $ABCD$ na $A''B''C''D''$ (i E na E''), a F jego centrum. Ponieważ mówimy o prostej XY, możemy bezpiecznie założyć, że X jest różne od Y. Zatem kąt obrotu w f nie jest równy 180 stopni, a zatem dowolne skończone Q różne od F spełnia warunki naszego lematu 1.

Korzystając z lematu 1 dla $Q = X$ otrzymujemy okrąg $f - X$ jako okrąg opisany na czworokącie $ADFX$ (czerwony). Podobnie, $f - Y$ jest okręgiem opisanym na czworokącie $BCFY$ (fioletowy). Niech G będzie drugim przecięciem tych dwóch okręgów, a $G'' = f(G)$. Ponieważ G leży na $f - X$, to X leży na GG''. Podobnie, Y leży na GG''. Zatem XY i GG'' są tą samą linią. Musimy zatem udowodnić, że $EE'' \parallel GG''$.

Załóżmy, że przecinają się one w skończonym punkcie Q. Wtedy $f - Q$ musi przechodzić przez E, G i F (z definicji). Z drugiej strony, proste AD, BC i GF są współpękowe, ponieważ są osiami potęgowymi okręgów $f - X$, $f - Y$ oraz $o(ABCD)$ (jedyny moment, w którym wykorzystujemy cykliczność czworokąta $ABCD$). Podsumowując, punkty E, G i F są współliniowe, więc nie mogą leżeć na jednym okręgu, co prowadzi do sprzeczności.

■

Niech H i H' będą ortocentrami trójkątów ABC i $A'B'C'$. Ponieważ $BECF$ i $B'E'C'F'$ są podobne, o tych samych orientacjach, czworokątami wpisanymi w okrąg, H jest przecięciem BE i CF, a H' jest przecięciem $B'E'$ i $F'C'$, zatem z lematu 2 mamy $RQ \parallel HH'$. Analogicznie,



Rysunek 2

$PR \parallel HH'$.

Stąd $PR \parallel RQ$, ale ponieważ się przecinają, muszą być tą samą linią. Zatem P, Q i R są współliniowe.

Źródło: Romantics of Geometry, rozwiązanie użytkownika Mikołaj Znamierowski: link