Kontest 3 - 28.09.2023

Rozwiązania Finaliści

Zadanie 1. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki

$$x + y + z = 3, \quad xy + yz + zx = -9.$$

Udowodnić, że $-27 \leqslant xyz \leqslant 5$.

Dowód. Rozpatrzmy wielomian

$$W(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - 3t^2 - 9t - xyz.$$

Mamy $W'(t) - 3(t^2 - 2t - 3) = 3(t + 1)(t - 3)$. Skoro wielomian W ma trzy pierwiastki, to $W(-1) \geqslant 0$, $W(3) \leqslant 0$, co jest równoważne nierównościom $xyz \leqslant 5$ oraz $xyz \geqslant -27$. ■

Zadanie 2. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Udowodnij, że

$$p^2 \mid 2^p - 2 \iff p \mid \frac{(p-1)!}{1 \cdot 2} + \frac{(p-1)!}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{(p-1)!}{(p-2)(p-1)}.$$

Dowód.

$$(p-1)! \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(p-2) \cdot (p-1)} \right) =$$
$$= (p-1)! \left((1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}) \right)$$

W uproszczeniu tego wyrażenia pomoże nam zależność $k^{-1} \equiv (-1)^{k-1}\frac{1}{p}\binom{p}{k}$ mod p ($\frac{1}{p}$ z prawej strony skraca się z licznikiem w $\binom{p}{k}$, więc wychodzi liczba całkowita). Przekształcając równoważnie widzimy, że ta zależność jest prawdziwa:

$$k^{-1} \equiv (-1)^{k-1}\frac{1}{p}\binom{p}{k} \mod p \Leftrightarrow k^{-1} \equiv (-1)^{k-1}\frac{1}{p}\frac{p!}{k!(p-k)!} \iff$$
$$\iff (k-1)! \equiv (-1)^{k-1}(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)$$
$$\iff (-1)^{k-1}(k-1)! \equiv (-1)(-2)\cdots(-k+1) \mod p$$

Ostatnia kongruencja jest prawdziwa, gdy z każdego składnika iloczynu po prawej wyfaktoryzujemy -1. Skorzystamy z tej zależności, aby zrobić podstawienie.

$$p \mid (p-1)!\left((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p-1})\right) \iff$$

$$\iff p \mid (p-1)!\left(\frac{1}{p}\binom{p}{1}+\frac{1}{p}\binom{p}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\binom{p}{p-1}\right) \iff$$

$$\iff p^2 \mid (p-1)!\left(\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\cdots+\binom{p}{p-1}\right) \iff$$

$$\iff p^2 \mid (p-1)!\left((1+1)^p-\binom{p}{0}-\binom{p}{p}\right) \iff p^2 \mid (p-1)!\,(2^p-2) \iff$$

$$\iff p^2 \mid 2^p-2$$

Wszystkie przeprowadzone przekształcenia były równoważne.“ ■

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli a, b, $c \in \mathbb{R}_+$, $a+b+c=3$, to

$$\frac{b+c+bc}{a^2+b^3+c^4}+\frac{c+a+ca}{b^2+c^3+a^4}+\frac{a+b+ab}{c^2+a^3+b^4} \leqslant 3.$$

Dowód. Zauważmy, że z nierówności Cauchy'ego-Schwarza

$$(a^2+b^3+c^4)(a^2+b+1) \geqslant (a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\frac{1}{(a^2+b^3+c^4)(a^2+b+1)} \leqslant \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

$$\frac{b+c+bc}{a^2+b^3+c^4} \leqslant \frac{(b+c+bc)(a^2+b+1)}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Wynika z tego, że

$$\sum_{cyc}\frac{b+c+bc}{a^2+b^3+c^4} \leqslant \sum_{cyc}\frac{(b+c+bc)(a^2+b+1)}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Aby dowieść tezy wystarczy wykazać, że

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c+bc)(a^2+b+1)}{(a^2+b^2+c^2)^2} \leqslant 3$$

czyli równoważnie

$$\sum_{cyc}(b+c+bc)(a^2+b+1) \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\sum_{cyc}(a^2b + b^2 + b + a^c + bc + c + a^2bc + b^c + bc) \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} 2bc + \sum_{cyc}(b+c) + \sum_{cyc}(a^2b + a^2c) + \sum_{cyc} a^2bc + \sum_{cyc} b^2c \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)^2 \quad (*)$$

Wiemy, że

$$\sum_{cyc}(b+c) = 6, \quad \sum_{cyc} b^2c = \sum_{cyc} a^2b, \quad \sum_{cyc} 2bc = 2\sum_{cyc} ab$$

oraz

$$\sum_{cyc}(a^2b + a^2c) + \sum_{cyc} a^2bc = \sum_{cyc}(a^2b + ab^2) + abc(a+b+c) =$$

$$= \sum_{cyc}(a^2b + ab^2) + 3abc = (ab+bc+ca)(a+b+c) = 3(ab+bc+ca) = 3\sum_{cyc} ab.$$

W związku z tym $(*)$ przyjmuje postać

$$\sum_{cyc} a^2 + 5\sum_{cyc} ab + 6 + \sum_{cyc} a^2b \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)^2. \quad (**)$$

Pozostaje zauważyć, że z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną

$$(a^2+b^2+c^2)^2 + 3 = \sum_{cyc}(a^4 + a^2b^2 + a^2b^2 + 1) \geqslant 4\sum_{cyc} a^2b$$

oraz

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 3 \quad \text{i} \quad a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Na koniec

$$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \sum_{cyc} a^2b$$
$$\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 6$$
$$\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 5(a^2+b^2+c^2) \geqslant 5(ab+bc+ca)$$
$$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant (a^2+b^2+c^2)$$

Co po zsumowaniu stronami daje:

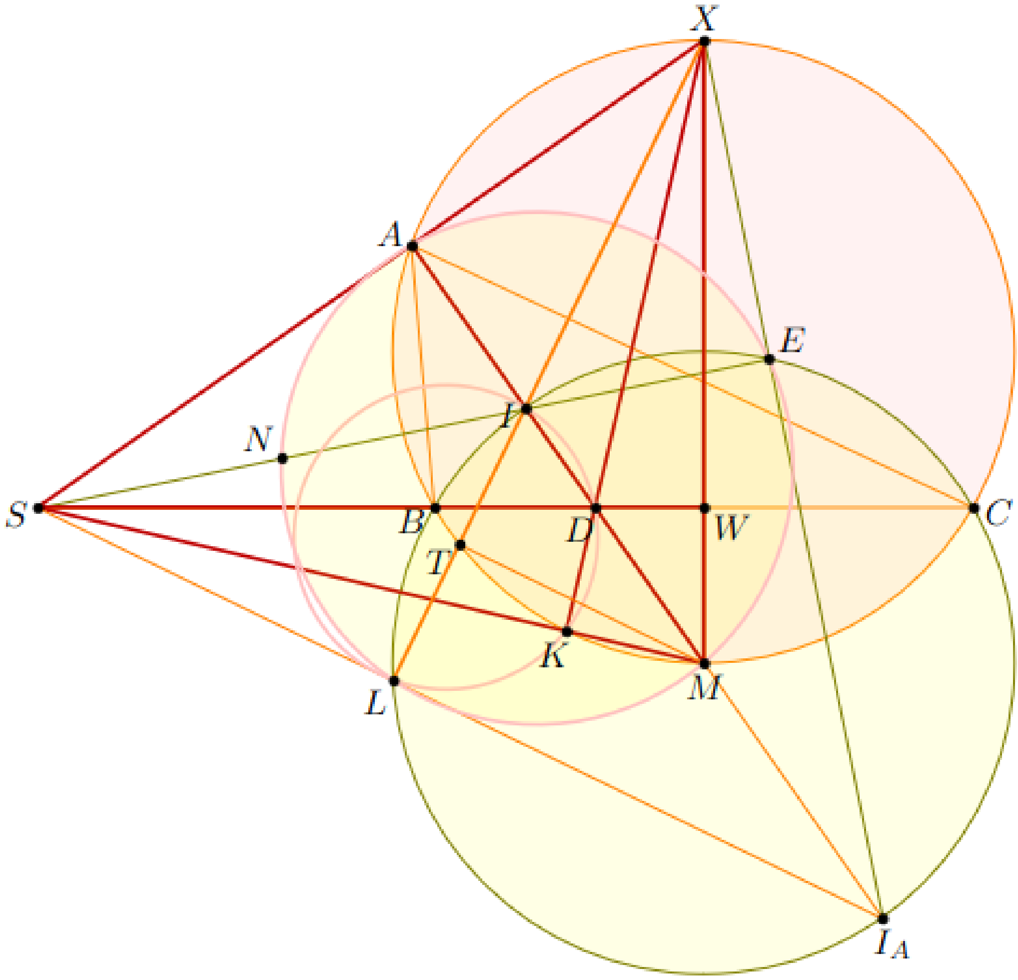
$$3(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant \sum_{cyc} a^2b + 6 + 5\sum_{cyc} ab + \sum_{cyc} a^2$$

Dowodzi to $(**)$, czyli teza zachodzi. ■

Zadanie 4. Niech ABC będzie trójkątem różnobocznym o okręgu opisanym Ω i środku okręgu wpisanego I. Półprosta AI przecina BC w punkcie D oraz okrąg Ω ponownie w punkcie M. Okrąg o średnicy DM przecina Ω ponownie w punkcie K. Linie MK i BC przecinają się w punkcie S, a N jest środkiem odcinka IS. Okręgi opisane na trójkątach KID oraz MAN przecinają się w punktach L_1 i L_2. Udowodnij, że Ω przechodzi przez środek odcinka IL_1 lub IL_2.

Dowód. Niech W będzie środkiem odcinka BC, a X punktem antypodycznym do M na Ω. Zauważmy, że KD przechodzi przez X, więc proste BC, MK, XA przecinają się w ortocentrum trójkąta DMX, i.e. w punkcie S. Oznaczmy przez I_A środek okręgu dopisanego do boku BC trójkąta ABC.

Niech E będzie rzutem I na XI_A. Wtedy E leży na okręgu o środku w M, który przechodzi przez I, B, C, I_A. Zatem S jest środkiem potęgowym okręgu Ω oraz okręgów o średnicach IX i II_A. Wobec tego prosta SI przechodzi przez E, więc I jest ortocentrum trójkąta XSI_A. Oznaczmy przez L rzut X na SI_A.



Pokażemy, że L leży na obu okręgach opisanych na trójkątach KID i MAN. Punkt ten leży na okręgu opisanym na trójkącie MAN, bo okrąg ten jest okręgiem dziewięciu punktów trójkąta XSI_A. Ponadto

$$XD \cdot XK = XW \cdot XM = XA \cdot XS = XI \cdot XL,$$

więc punkty K, D, I, L leżą na jednym okręgu.

Pozostaje pokazać, że środek T odcinka IL leży na Ω. Jednakże, to wynika z faktu, że $TM \parallel LI_A \implies \angle MTX = 90°$. ■