Rozwiązania Kontestu 2 – PreOM 2025

Zadanie 1. Zbiory $A_0, A_1, \ldots, A_{2023}$ spełniają następujące warunki:

$$A_0 = \{3\}$$

$$A_n = \{x+2 \mid x \in A_{n-1}\} \cup \{x(x+1)/2 \mid x \in A_{n-1}\}, \text{ dla każdego } n = 1, 2, \ldots, 2023.$$

Znajdź $|A_{2023}|$.

Źródło: Korean Mathematical Olympiad 2023, zadanie P2 link

Rozwiązanie 1. Odpowiedź to $|A_{2023}| = 2^{2023}$.

Załóżmy, że dwa różne ciągi operacji zaczynające się od 3 prowadzą do tej samej liczby oraz, że najmniejsza liczba, którą można osiągnąć na dwa różne sposoby, jest dana wzorem $\frac{2k(2k+1)}{2}$.

Podczas wykonywania ostatniej operacji powinniśmy mieć $2k^2 + k - 2$ oraz $2k$.

Zaczynając od $\frac{(2k-1)2k}{2} = 2k^2 - k$, aby uzyskać $2k^2 + k$, musimy wykonać co najmniej $k - 1$ operacji.

Jednak nie możemy wykonać tych $k - 1$ dodatkowych operacji, ponieważ po ich wykonaniu $2k$ zmieni się w 2, co prowadzi do sprzeczności.

Zatem operacje, które wykonujemy, zawsze prowadzą do różnych liczb, co dowodzi tezy.

Źródło: AoPS, rozwiązanie użytkownika LuciferMichelson link

Zadanie 2. Niech $b, n > 1$ będą liczbami całkowitymi. Załóżmy, że dla każdego $k > 1$ istnieje taka liczba całkowita a_k, że wyrażenie

$$b - a_k^n$$

jest podzielne przez k. Udowodnij, że $b = A^n$ dla pewnej liczby całkowitej A.

Źródło: IMO 2007 Shortlisted Problems, zadanie N2 link

Rozwiązanie 2. Niech rozkład na czynniki pierwsze liczby b będzie dany jako $b = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$, gdzie $p_1, \ldots, p_s$ są różnymi liczbami pierwszymi. Naszym celem jest wykazanie, że wszystkie wykładniki α_i są podzielne przez n, wtedy możemy przyjąć $A = p_1^{\alpha_1/n} \ldots p_s^{\alpha_s/n}$.

Zastosujmy warunek dla $k = b^2$. Liczba $b - a_k^n$ jest podzielna przez b^2, a zatem dla każdego $1 \leqslant i \leqslant s$ jest ona podzielna przez $p_i^{2\alpha_i} > p_i^{\alpha_i}$, co daje:

$$a_k^n \equiv b \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

oraz

$$a_k^n \equiv b \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i+1}},$$

co implikuje, że największa potęga p_i dzieląca a_k^n to $p_i^{\alpha_i}$. Ponieważ a_k^n jest pełną n-tą potęgą, oznacza to, że α_i jest podzielne przez n.

Komentarz. Jeśli $n = 8$ i $b = 16$, to dla każdej liczby pierwszej p istnieje liczba całkowita a_p taka, że $b - a_p^n$ jest podzielne przez p. W szczególności kongruencja $x^8 - 16 \equiv 0 \pmod p$ rozwija się jako:

$$(x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2) \equiv 0 \pmod p.$$

Jeśli -1 jest resztą kwadratową modulo p, to kongruencja $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \equiv 0$ ma rozwiązanie. W przeciwnym razie jedno z równań $x^2 \equiv 2$ lub $x^2 \equiv -2$ ma rozwiązanie. Zatem rozwiązanie nie może działać, używając wyłącznie pierwszych wartości k.

Źródło: IMO 2007 Shortlisted Problems, zadanie N2 link

Zadanie 3. Niech $ABCD$ będzie kwadratem oraz N punktem na odcinku CD. Ponadto K, L, M niech będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ADN, ABN, BCN. Udowodnij, że K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Źródło: Zadanie zaproponowane przez Mikołaja Znamierowskiego

Rozwiązanie 3. Zauważmy, że proste NK i AL są dwusiecznymi naprzemianległych kątów $\sphericalangle DNA$ i $\sphericalangle NAB$, więc są równoległe. Analogicznie $NM \parallel BL$. Stąd K, L, M, N leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy gdy $\sphericalangle KNM + \sphericalangle KLM = 180°$, co jest równoważne $\sphericalangle ALB + \sphericalangle KLM = 180°$, a to natomiast jest równoważne temu, że L posiada sprzężenie izogonalne w czworokącie $ABMK$. Niech $P = AC \cap BD$. Wiemy, że $\sphericalangle APB + \sphericalangle KPA = 180°$, więc P posiada sprzężenie izogonalne w czworokącie $ABMK$. Jednak $\sphericalangle KAL = \frac{1}{2}\sphericalangle DAN + \frac{1}{2}\sphericalangle NAB = 45° = \sphericalangle PAB$, więc postępując analogicznie dla kąta $angleABM$ dostajemy, że L i P są sprzężone izogonalnie w czworokącie $ABMK$, co kończy dowód.

Źródło: Rozwiązanie zaproponowane przez Mikołaja Znamierowskiego

Zadanie 4. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ $(n \geqslant 2)$. Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \cdot \min\{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\} \leqslant \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Źródło: 2017 China Western Mathematical Olympiad, zadanie Q8 link

Rozwiązanie 4. Zauważmy, że funkcja $f(n) = \frac{n}{2\sqrt{n-1}}$ jest ściśle rosnąca dla $n \geqslant 2$ (utrzymujemy tę definicję $f(n)$ w całym dowodzie).

Możemy zweryfikować twierdzenie dla $n = 2$ poprzez analizę przypadków. Załóżmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla $2 \leqslant n \leqslant k-1$.

Dla $n = k$, niech $b_1 = 1$. Definiujemy b_{i+1} jako najmniejszą liczbę całkowitą większą od b_i, taką że $a_{b_{i+1}} \geqslant a_{b_i}$ (jest ona zdefiniowana tylko wtedy, gdy istnieje $b_{i+1} \leqslant n$). Jeśli c jest największą liczbą całkowitą, dla której b_c jest zdefiniowane (zgodnie z powyższą definicją), to dla wygody przyjmujemy $b_{c+1} = n + 1$.

Najpierw rozważmy przypadek, gdy $b_2 < n + 1$. Wtedy dla każdego j zachodzi $b_{j+1} - b_j < n$. Zatem:

$$\sum_{i=b_j}^{b_{j+1}-1} \max\{a_1, \dots, a_i\} \cdot \min\{a_i, \dots, a_n\} \leqslant \sum_{i=b_j}^{b_{j+1}-1} a_{b_j} \cdot \min\{a_i, \dots, a_{b_{j+1}-1}\}$$

$$\leqslant f(b_{j+1} - b_j) \cdot \sum_{i=b_j}^{b_{j+1}-1} a_i^2 < f(n) \cdot \sum_{i=b_j}^{b_{j+1}-1} a_i^2.$$

Sumując po wszystkich $1 \leqslant j \leqslant c$, otrzymujemy żądany wynik.

Jeśli $b_2 = n + 1$, to $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_n\}$.

Teraz, nietrudno zauważyć przy pomocy argumentu zamiany, że:

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{a_1, \dots, a_i\} \cdot \min\{a_i, \dots, a_n\}$$

jest maksymalizowane (dla ustalonego multizbioru $S = \{a_1, \dots, a_n\}$) w przypadku, gdy $a_1 \geqslant a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \dots \geqslant a_2$. Wystarczy więc założyć, że a_i są posortowane w tej kolejności.

Wtedy mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{a_1, \dots, a_i\} \cdot \min\{a_i, \dots, a_n\} = a_1 \cdot (2a_2 + a_3 + \dots + a_n) \leqslant \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Co jest równoważne:

$$(a_1 - \sqrt{n-1} \cdot \frac{2a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n})^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i^2 - (n-1) \cdot \left(\frac{2a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}\right)^2 \geqslant 0.$$

Co wynika z nierówności Cauchy'ego-Schwarza oraz faktu, że a_2 jest minimalne.

Źródło: AoPS, rozwiązanie użytkownika ployup link