Zadansy na obiad

Zad. 1 Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) takie, że

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

Zad. 2 Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ taki, że $\sphericalangle ABD = 30^\circ$, $\sphericalangle BCA = 75^\circ$, $\sphericalangle ACD = 25^\circ$ oraz $CD = CB$. Okrąg opisany na DAC przecina półprostą CB w punkcie E. Wykaż, że $CE = BD$.

Zad. 3 Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych $x, y, z > 0$ takich, że $xyz = 1$, zachodzi nierówność

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \leqslant \sqrt{2}(x+y+z).$$

Zad. 4 Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) takie, że

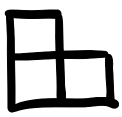
$$\frac{3a^2}{b} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{a^2+b} \quad \text{są liczbami całkowitymi.}$$

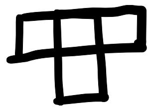
Zad. 5 Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą niestałymi wielomianami z całkowitymi współczynnikami. Załóżmy, że wielomian $P(x)Q(x) - 2023$ ma co najmniej 25 różnych pierwiastków całkowitych. Dowieść, że wielomiany $P(x)$ oraz $Q(x)$ mają stopień co najmniej 3.

Zad. 6 Okrąg o środku I jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ i jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N, Proste KL i MN przecinają się w punkcie P. Wykazać, że proste BD oraz IP są prostopadłe.

Zad. 7 Czy jest możliwe rozstawienie liczb $1, 1, 2, 2, \ldots, 2023, 2023$ w rzędzie, tak aby między dwoma egzemplarzami liczby i stało dokładnie $i-1$ liczb dla każdego $i = 1, 2, \ldots, 2023$?

Zad. 8 $eL - Sidz$ to klocek stworzony z klocka 2×2 bez jednego z kwadratów jednostkowych, a $T - pose$ to klocek zbudowany z 4 kwadratów jednostkowych (Z "plusa" bez jednej z kwadratów nieśrodkowych). Profesor Sidz ma 100 klocków $eL - Sidz$ oraz 75 klocków $T - pose$. Czy zgadzasz się z Profesorem Sidzem, że potrafi wypełnić całą szachownicę 20×30? Uzasadnij odpowiedź.


eL-Sidz


T-pose

Bonusowe zadanka

Zad. 1 Niech $(a_n)_{n \geqslant 1}$ będzie rosnącym ciągem dodatnich liczb całkowitych taki, że

$$a_{n+1} - a_n \leqslant 2023$$

dla każdego n. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par (i, j), że $i < j$ oraz $a_i \mid a_j$.

Zad. 2 Niech $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ oraz a_n to ściśle rosnący ciąg dodatnich liczb całkowitych takie, że $a_n \leqslant f(n)$ dla każdego n. Dowieść, że zbiór liczb pierwszych dzielących co najmniej jeden element z ciągu (a_n) jest nieskończony.