Kontest 2 - 27.09.2023

Rozwiązania Pierwszaki

Zadanie 1. Rozwiąż w dodatnich liczbach rzeczywistych x równanie

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+17}+\sqrt{x+28}=18.$$

Dowód. Zauważmy, że dla $n=8$ otrzymujemy:

$$\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}+\sqrt{36}=3+4+5+6=18.$$

Dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$ funkcja $g_a:[-a,\infty)\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ zadana wzorem

$$g_a(x)=\sqrt{x+a}$$

jest rosnąca, a suma funkcji rosnących jest również rosnąca. W takim razie funkcja $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ dana wzorem

$$f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{8+x}+\sqrt{17+x}+\sqrt{28+x}$$

jest rosnąca, więc może przyjąć daną wartość tylko raz, w skutek czego $x=8$ jest jedynym rozwiązaniem. ■

Zadanie 2. Liczby rzeczywiste a,b,c są różne od zera i spełniają układ równań

$$\begin{cases}a^2+a=b^2\\ b^2+b=c^2\\ c^2+c=a^2\end{cases}$$

Udowodnij, że $(a-b)(b-c)(c-a)=1$.

Dowód. Dodając stronami trzy równania danego układu, uzyskujemy

$$a^2+a+b^2+b+c^2+c=b^2+c^2+a^2,\quad \text{skąd}\quad a+b+c=0.$$

W szczególności, skoro liczby a,b,c są różne od zera, to również liczby $b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$ są różne od zera.

Z pierwszego, drugiego i trzeciego równania danego układu wynika kolejno, że

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2=-a=b+c,$$

$$(b-c)(b+c) = b^2 - c^2 = -b = c + a,$$
$$(c-a)(c+a) = c^2 - a^2 = -c = a + b,$$

Mnożąc stronami powyższe równości, uzyskujemy

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b)(b+c)(c+a).$$

Liczba $(a+b)(b+c)(c+a)$ jest różna od zera, więc dzieląc przez nią obie strony ostatniej równości, uzyskujemy tezę zadania. ■

Zadanie 3. Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym, w którym $AB = AC$. Niech D będzie punktem na odcinku BC takim, że $BD = 2 \cdot DC$, a P takim punktem na AD, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BPD$. Udowodnij, że

$$\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle DPC$$

Dowód. Niech A' i A'' będą punktami odpowiednio na bokach AB i AC, że $2 \cdot AA' = A'C$ i $2 \cdot AA'' = A''B$ oraz niech $\sphericalangle BAC = \alpha$. Wówczas biorąc jednokładność o środku w B i skali $\frac{2}{3}$ punkt C przejdzie na D, punkt A na A'' i okrąg opisany na ABC na okrąg opisany BDA''. Ponadto punkt P również leży na okręgu opisanym na BDA'', ponieważ $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BPD$ oraz jednokładność zachowuje kąt wpisany na łuku. Zatem

$$\sphericalangle APA'' = 180^\circ - \sphericalangle A''PB - \sphericalangle BPD = 180^\circ - \sphericalangle A''DB - \sphericalangle BAC =$$
$$= 180^\circ - \sphericalangle ACB - \sphericalangle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Ponadto z tw. Talesa $A'A''$ jest równoległe do BC oraz $AA'A''$ jest równoramienny, więc $\sphericalangle AA'A'' = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, z czego wynika, że czworokąt $AA'PA''$ jest cykliczny.

Stąd z tw. Miguela cykliczny jest również czworokąt $CA'PD$, więc

$$\sphericalangle DPC = \sphericalangle DA'C.$$

Rozważmy jednokładność o środku w C i skali $\frac{3}{2}$. W tej jednokładności A' przejdzie na A oraz D przejdzie na M - środek odcinka BC. Stąd $\sphericalangle DA'C = \sphericalangle MAC$, a oczywiście $\sphericalangle MAC = \frac{\alpha}{2}$ co chcieliśmy pokazać. ■

Zadanie 4. Zapisano na tablicy liczby od 1 do 9. Antoni i Bożydar skreślają w swoim ruchu po jednej nieskreślonej liczbie. Ten, kto skreśli trzy liczby sumujące się do 15 wygrywa. Jeżeli Antoni zacznie grę, to który z graczy powinien ją wygrać?

Dowód. Układamy kwadrat magiczny:

$$\begin{matrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{matrix}$$

zawierający wszystkie osiem możliwych sum, co zamienia grę na remisowe kółko i krzyżyk. ■