Autor: Jeremi Hyska Prowadzący: Jeremi Hyska

Kombi Bombi

Zadania

1. Niewidzialna Yeti Yoanna siedzi w pewnym wierzchołku grafu o N wierzchołkach. Grupa H myśliwych próbuje ją złapać (nie widzą jej, bo jest niewidzialna). Każdego dnia, każdy myśliwy wybiera jeden wierzchołek i przeszukuje go. Jeśli wierzchołek Yoanny został przeszukany, to zostaje złapana, w przeciwnym przypadku, nocą przemieszcza się do wybranego sąsiedniego wierzchołka. Udowodnić, że jeśli myśliwi mają strategie żeby złapać Yoannę w $N!$ dni, to mają też strategię która pozwala złapać Yoannę w 2^N dni.

2. Prostokąt $\mathcal{R}$ o nieparzystych długościach boków jest podzielony na małe prostokąty o całkowitych długościach boków. Udowodnij, że przynajmniej jeden z małych prostokątów ma odległości od czterech boków prostokąta $\mathcal{R}$, które są albo wszystkie nieparzyste, albo wszystkie parzyste.

3. Punkt nazywany jest miejscem, jeśli (x, y) w płaszczyźnie jest taki, że x i y są obydwa liczbami całkowitymi dodatnimi mniejszymi lub równymi 20.

   Początkowo każde z 400 miejsc jest wolne. Amy i Ben na przemian kładą kamienie, przy czym Amy zaczyna jako pierwsza. W swojej turze Amy umieszcza nowy czerwony kamień w wolnym miejscu, tak aby odległość pomiędzy żadnymi dwoma miejscami zajętymi przez czerwone kamienie nie była równa $\sqrt{5}$. W swojej turze Ben umieszcza nowy niebieski kamień w dowolnym wolnym miejscu. (Miejsce zajęte przez niebieski kamień może znajdować się w dowolnej odległości od jakiegokolwiek innego zajętego miejsca.) Kończą, gdy gracz nie może umieścić kamienia.

   Znajdź największe K, takie że Amy może zapewnić, że umieści co najmniej K czerwonych kamieni, niezależnie od tego, jak Ben umieszcza swoje niebieskie kamienie.

4. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Zaczynamy od n stosów kamyków, z których każdy początkowo zawiera jeden kamyk. Można wykonać ruchy następującego rodzaju: wybrać dwa stosy, wziąć równą liczbę kamyków z każdego stosu i utworzyć nowy stos z tych kamyków. Znajdź (w zależności od n) najmniejszą liczbę niepustych stosów, które można uzyskać, wykonując skończoną sekwencję takich ruchów.

5. Dana jest liczba całkowita $N \geq 2$. Zbiór $N(N+1)$ piłkarzy, z których żaden nie ma tej samej wysokości, ustawia się w rzędzie. Sir Alex chce usunąć $N(N-1)$ piłkarzy z tego rzędu, pozostawiając nowy rząd $2N$ piłkarzy, w którym spełnione są następujące N warunki:

   (1) nikt nie stoi pomiędzy dwoma najwyższymi graczami,

   (2) nikt nie stoi pomiędzy trzecim i czwartym najwyższym zawodnikiem,

   $\vdots$

   (N) nikt nie stoi pomiędzy dwoma najniższymi graczami.

   Pokaż, że jest to zawsze możliwe.

6. Pięciu wikingów siedzi wokół dużego ogniska. Wiedzą, że Oluf nałoży czapkę jednego z czterech kolorów (czerwony, zielony, niebieski lub żółty) na głowę każdego wikinga, a po krótkim czasie na milczenie każdy starszy mężczyzna będzie musiał napisać na kartce jeden z czterech kolorów. Każdy starszy mężczyzna będzie mógł zobaczyć kolor czapek tylko swoich dwóch sąsiadów, nie widzi swojego ani czapek pozostałych dwóch starszych mężczyzn, i nie może komunikować się po tym, jak Oluf zacznie nakładać czapki.

   Pokaż, że starsi mężczyźni mogą opracować strategię z wyprzedzeniem, tak aby co najwyżej dwóch z nich napisało kolor swojej własnej czapki.

7. Myśliwy i niewidzialny królik grają w grę na nieskończonej siatce kwadratowej. Najpierw myśliwy ustala kolorowanie komórek z użyciem skończonej liczby kolorów. Następnie królik w tajemnicy wybiera komórkę, w której zacznie. Co minutę królik informuje myśliwego o kolorze swojej bieżącej komórki, a potem

w tajemnicy przemieszcza się do sąsiedniej komórki, której wcześniej nie odwiedził (dwie komórki są sąsiednie, jeśli mają wspólną krawędź). Myśliwy wygrywa, jeśli po pewnym skończonym czasie:

- królik nie może się poruszać; lub - myśliwy może określić komórkę, w której królik zaczął.

Zdecyduj, czy istnieje strategia wygrywająca dla myśliwego.

8. Sieć społecznościowa ma 2019 użytkowników, z których niektóre pary są przyjaciółmi. Kiedy użytkownik A jest przyjacielem użytkownika B, użytkownik B jest również przyjacielem użytkownika A. Wydarzenia następującego rodzaju mogą się powtarzać, jedno po drugim:

   Trzech użytkowników A, B i C, gdzie A jest przyjacielem zarówno B, jak i C, ale B i C nie są przyjaciółmi, zmieniają swoje statusy przyjaźni w taki sposób, że B i C teraz są przyjaciółmi, ale A nie jest już przyjacielem ani B, ani C. Wszystkie inne statusy przyjaźni pozostają niezmienione.

   Początkowo 1010 użytkowników ma po 1009 przyjaciół, a 1009 użytkowników ma po 1010 przyjaciół. Udowodnij, że istnieje sekwencja takich wydarzeń, po której każdy użytkownik jest przyjacielem co najwyżej jednego innego użytkownika.

9. Liczba naturalna a jest zawarta w liczbie naturalnej b, jeśli możliwe jest uzyskanie a przez skasowanie niektórych cyfr z b (w ich reprezentacjach dziesiętnych). Na przykład, 123 jest zawarte w 901523, ale nie jest zawarte w 3412.

   Czy istnieje nieskończony zbiór liczb naturalnych, taki że żadna liczba w tym zbiorze nie jest zawarta w żadnej innej liczbie z tego zbioru?

10. Udowodnić, że dla każdej liczby nieparzystej n, liczba pokryć dominami 1×2 prostokąta $n\times(n+1)$ jest nieparzysta.