Autor: Mikołaj Znamierowski

Prowadzący: Mikołaj Znamierowski

Geometria III – II etap

Teoria

Twierdzenie 1 (o dwusiecznej)**.** Dany jest trójkąt ABC. Na prostej AB leżą takie punkty D i E, że proste CD i CE są dwusiecznymi kątów wewnętrznego i zewnętrznego przy wierzchołku C. Wówczas $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} = \frac{AE}{EB}$.

Twierdzenie 2 (Menelaosa)**.** Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB. Wówczas punkty D, E, F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -1$$

Twierdzenie 3 (Cevy)**.** Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB. Wówczas proste AD, BE, CF są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = +1$$

Twierdzenie 4 (trygonometryczne Cevy)**.** Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F w płaszczyźnie tego trójkąta. Wówczas proste AD, BE, CF są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\sin \sphericalangle CAD}{\sin \sphericalangle DAB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ABE}{\sin \sphericalangle EBC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BCF}{\sin \sphericalangle FCA} = +1$$

przy czym każdy z powyższych kątów jest skierowany.

Przykłady

Ćwiczenie 1. Dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C w trójkącie ABC przecinają proste BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że punkty D, E, F są współliniowe.

Ćwiczenie 2. Wykazać istnienie środka ciężkości, środka okręgu wpisanego, punktu Gergonne'a, punktu Nagela i ortocentrum w trójkącie.

Twierdzenie 5 (Gaussa)**.** Dany jest czworokąt $ABCD$. Niech $E = AB \cap CD$ oraz $F = BC \cap AD$. Wówczas środki odcinków AC, BD i EF są współliniowe.

Twierdzenie 6 (Jacobiego)**.** Do trójkąta ABC dobudowano trójkąty DBC, ECA, FAB tak, że $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAF$, $\sphericalangle FBA = \sphericalangle CBD$ oraz $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACE$ (kąty są skierowane). Wówczas, proste AD, BE, CF są współpękowe.

© 2024 Kuźnia Olimpijska s.c.

Zadania

1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Dwusieczne kątów ACB, ACD przecinają odcinki AB, AD odpowiednio w punktach P, Q. Dwusieczna kąta zewnętrznego BCD przecina prostą BD w punkcie R. Dowieść, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.

2. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D leży na boku BC, przy czym $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{3}$. Punkt M jest środkiem boku AB, a punkt F jest środkiem odcinka CM. Proste DF i AC przecinają się w punkcie E. Obliczyć $CE : EA$.

3. Dany jest trójkąt ABC. Prosta k przecina proste BC, CA, AB odpowiednio w punktach X, Y, Z. Niech X', Y', Z' będą obrazami symetrycznymi punktów X, Y, Z odpowiednio względem środków boków BC, CA, AB. Dowieść, że punkty X', Y', Z' leżą na jednej prostej.

4. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach BC i CA, w taki sposób, że proste DE i AB są równoległe. Punkt P leży na odcinku AM. Proste EM oraz CP przecinają się w punkcie X, a proste DP oraz CM przecinają się w punkcie Y. Dowieść, że punkty X, Y, B są współliniowe.

5. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB. Punkty X, Y, Z są odpowiednio środkami odcinków AD, BE, CF. Wykazać, że proste KX, LY, MZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

6. Okrąg dopisany do trójkąta ABC, naprzeciwko A jest styczny do AC w K i do BC w L. Niech M to rzut B na dwusieczną kąta BAC. Udowodnij, że K, L, M są współliniowe.

7. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i AD. Odcinki DK oraz BL przecinają się w punkcie P. Punkt Q został wybrany w taki sposób, że czworokąt $AKQL$ jest równoległobokiem. Dowieść, że punkty P, Q, C leżą na jednej prostej.

8. Dany jest trójkąt ABC. Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $CE = CF$. Punkt M jest środkiem boku AB. Odcinki CM i EF przecinają się w punkcie P. Dowieść, że
$$\frac{EP}{PF} = \frac{BC}{AC}$$

9. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, o kącie prostym przy wierzchołku C. Kwadraty $BCED$ i $ACFG$ dobudowane zostały na zewnątrz tego trójkąta. Proste AD i BG przecinają się w P. Udowodnij, że CP jest prostopadłe do AB.

10. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ wpisany w okrąg. Udowodnij, że proste AD, BE, CF są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$$

© 2024 Kuźnia Olimpijska s.c.

Autor: Mikołaj Znamierowski

Prowadzący: Mikołaj Znamierowski

11. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC. Prosta k, równoległa do BC, przecina odcinek AB w punkcie R, zaś prosta symetryczna do k względem BC, przecina proste AC i AM odpowiednio w punktach Q i X. Prosta przechodząca przez X równoległa do AB przecina odcinek BC w punkcie P. Udowodnij, że punkty P, Q i R są współliniowe.

12. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie ABC. Punkty D, E, F leżą na bokach BC, CA, AB odpowiednio, przy czym proste AD, BE, CF są współpękowe. Okrąg styczny do BC w D leżący na zewnątrz ABC jest styczny do Ω w X. Okrąg styczny do CA w E leżący na zewnątrz ABC jest styczny do Ω w Y. Okrąg styczny do AB w F leżący na zewnątrz ABC jest styczny do Ω w Z. Udowodnij, że AX, BY, CZ są współpękowe.

13. Dany jest czworokąt wypukły $AFDE$ nie będący trapezem. Używając jedynie linijki, skonstruować takie punkty B i C, leżące odpowiednio na prostych AF i AE, że punkt D leży na prostej BC, a proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

© 2024 Kuźnia Olimpijska s.c.