Funkcje tworzące

Miron Hunia

26 września 2023

1 Szeregi potęgowe

Def. 1 (Funkcja analityczna) *Funkcja analityczna to taka funkcja f, która może być w sąsiedztwie jakiegoś punktu zapisana w postaci zbieżnego szeregu potęgowego. Na potrzeby tego skryptu, interesują nas funkcje analityczne w 0, tj. takie, że dla dostatecznie małych niezerowych x zachodzi*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Wiele funkcji z którymi się stykamy jest analitycznych. Na przykład (w odpowiednio małym sąsiedztwie)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{\underline{n}} \frac{x^n}{n!}$$

Suma, różnica, iloczyn, złożenie i (zazwyczaj) iloraz funkcji analitycznych również jest funkcją analityczną.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Caushy-Hadamarda) *Niech $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ to szereg potęgowy. Wówczas istnieje liczba R, nazywana promieniem zbieżności taka, że dla $|x| < R$ szereg jest zbieżny, a dla $|x| > R$ szereg jest rozbieżny. Ponadto, jeśli istnieje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, to mamy wzór*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Twierdzenie 2 *Jeśli istnieje $R > 0$ takie, że dla wszystkich $|x| < x$ zachodzi*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

Wówczas $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots$.

Innymi słowy, szeregi potęgowe które się zgadzają w sąsiedztwie jakiegoś punktu muszą być tym samym szeregiem potęgowym.

Na szeregach potęgowych można przeprowadzać operacje arytmetyczne.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n c_n$$

gdzie $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Taki ciąg (c_n) nazywamy *splotem* ciągów (a_n) i (b_n).
Powyższe wzory się komplikują, gdy uwzględnimy kwestie zbieżności. Zamiast wdawać się w analizę zbieżności, zróbmy krok w abstrakcję i zacznijmy badać *formalne szeregi potęgowe.*

Def. 2 (Formalny szereg potęgowy) *Formalnym szeregiem potęgowym nazywamy obiekt postaci*

$$\sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Formalny szereg potęgowy nie jest funkcją, choć definitywnie przypomina funkcje analityczne. Szeregi formalne pozwalają nam przeprowadzać operacje arytmetyczne bez martwienia się o zbieżność. Niestety, oznacza to, że nie zawsze możemy przejść od formalnego szeregu potęgowego do funkcji analitycznej.

2 Funkcje tworzące

Funkcją tworzącą ciągu (a_n) nazywamy szereg formalny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dla danej funkcji tworzącej $f(x)$, przez $[x^n]\, f(x)$ oznaczam współczynnik przy x^n w $f(x)$.
Funkcje tworzące mają wiele zastosowań przy znajdowaniu tożsamości, szczególne w kombinatoryce. Są wygodnym narzędziem manipulowania wielkościami kombinatorycznymi, na przykład wielkościami zbiorów.
Ponieważ funkcja tworząca jest szeregiem formalnym, to można bez martwienia się o zbieżność wykonywać na nim poniższe operacje.
Dla funkcji tworzących $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$:

$$[x^n]\,(f+g) = a_n + b_n$$

$$[x^n]\,(fg) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$[x^n]\,(x^k f) = a_{n-k}$$

$$[x^n]\,(x^{-k} f) = a_{n+k}$$

$$[x^n]\,\mathcal{D}f = (n+1)a_{n+1}$$

$$[x^n]\,\mathcal{I}f = \frac{1}{n} a_{n-1}$$

($\mathcal{D}$ oznacza u mnie operator pochodnej $x^n \to nx^{n-1}$, a $\mathcal{I}$ operator całki $x^n \to \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.

W porównaniu do szeregów potęgowych tracimy dwie operacje - ewaluację (obliczenie sumy szeregu dla pewnej wartości x) oraz granicę (obliczenie granicy sumy szeregu dla x dążącego do pewnej wartości). Zanim wykonamy którąś z tych operacji na funkcji tworzącej musimy się upewnić, że powiązany szereg potęgowy jest zbieżny.

2.1 Zastosowanie - rekurencje

Gdy mamy dany ciąg spełniający pewną rekurencyjną zależność, możemy rozpatrzeć jego funkcję tworzącą $g(x)$. Wówczas rekurencyjna zależność ciągu daje nam równanie funkcyjne, z którego możemy wyznaczyć formułę na $g(x)$.
Przykład. Niech F_n oznacza n-tą liczbę Fibbonaciego i $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}x^n$. Wtedy z równania $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dostajemy

$$g(x) = F_1 + xg(x) + x^2 g(x) \Leftrightarrow g(x)(1 - x - x^2) = 1 \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Co nam to daje? W tym przypadku, możemy rozbić $g(x)$ na ułamki proste. Jeśli $\phi, -\phi^{-1}$ to pierwiastki $x^2 - x - 1$, to

$$g(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\phi}{1 - x\phi} + \frac{\phi^{-1}}{1 + x\phi^{-1}} \right)$$

Rozwijając ilorazy w szereg geometryczny dostajemy

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi \left(1 + x\phi + \dots\right) + \phi^{-1} \left(1 - x\phi^{-1} + x^2\phi^{-2} - \dots\right)\right)$$

Po obu stronach równości mamy funkcje tworzące! Możemy zatem przyrównać współczynniki.

$$[x^n]\, g(x) = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{n+1} - (-\phi^{-1})^{n+1}\right)$$

Zauważmy, że w tym rozumowaniu traktowaliśmy funkcję tworzącą jako obiekt czysto algebraiczny. Oznacza to, że kwestie zbieżności zupełnie nas nie obchodzą.

2.2 Zastosowanie - sumowanie

Jeśli mamy do policzenia sumę, w której występuje wyrażenie postaci $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$, to sugeruje, żeby rozpatrzyć funkcje tworzące ciągów (a_n) i (b_n).
Przykład. Obliczmy sumę

$$\sum_{\substack{i+j+k=17 \\ i \geq 0 \\ j \geq 0 \\ k \geq 0}} ijk = S$$

Rozważmy funkcję tworzącą

$$F(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} ix^i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} jx^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} kx^k\right) = (\sum_{i=0}^{\infty} ix^i)^3$$

Wtedy $S = \left[x^{17}\right] F(x)$. Ponadto możemy policzyć, że

$$\sum_{i=0}^{\infty} ix^i = x\mathcal{D}(\sum_{i=0}^{\infty} x^i) = x\mathcal{D}\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(zapamiętaj tą sumę, jest ważna)
Wtedy $F(x) = \frac{x^3}{(1-x)^6}$. Rozpisując ze wzoru dwumianowego $(1-x)^{-6}$ dostajemy, że $S = \binom{19}{5}$.

2.3 Zastosowanie - kombinatoryczne tożsamości

Funkcje tworzące kodują w sobie kombinatoryczne zależności. Potrafią dowodzić tożsamości, które normalnie dowodzilibyśmy poprzez bijekcje, bez wskazywania bijekcji.
Przykład.

$$[x^n]\,(1+x)^{(a+b)} = [x^n]\,(1+x)^a(1+x)^b$$

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

Przykład. Niech a_n to liczba sposobów, na które można zapisać n złotych wydać z użyciem monet $2zł$ i $1zł$. Wówczas

$$g(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = (1+x^2+x^4+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) = \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left((1+2x+3x^2+\ldots)+\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)x^n$$

Stąd $a_n = \lfloor\frac{n}{2}+1\rfloor$.

2.4 Technika - snake oil

Metoda snake oil ("cudowny lek") służy do liczenia sum. Gdy chcemy policzyć sumę $\sum_k f(n,k)$ to rozszerzamy ją do podwójnej sumy i zmieniamy kolejność sumowania.

$$\sum_{n\geq 0} x^n \sum_k f(n,k) = \sum_k \sum_{n\geq 0} x^n f(n,k)$$

Przykład. Obliczmy $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n-k}$.

$$\sum_{n\geq 0} S_n x^n = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{0\leq k\leq n}\binom{k}{n-k} = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} x^n\binom{k}{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{n=k}^{\infty}x^{(n-k)}\binom{k}{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{m=0}^{\infty}x^m\binom{k}{m}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}x^k(1+x)^k\frac{1}{1-x(1+x)} = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Już wiemy, że to funkcja tworząca ciągu (F_{n+1}), więc $S_n = F_{n+1}$.

2.5 Technika - iloczyn nieskończony

Często chcemy zdefiniować funkcję tworzącą poprzez iloczyn, być może nieskończony. Tak długo jak pracujemy nad szeregami formalnymi, nie musimy martwić się nad zbieżnością tak zdefiniowanych szeregów.
Przykład. *Podziałem* liczby n nazywamy przedstawienie n jako sumy liczb naturalnych. Podziały uznajemy za takie same z dokładnością do zamiany kolejności dodawania. Niech a_n oznacza liczbę różnych podziałów liczby n. Wtedy funkcja tworząca ciągu a_n to

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+\ldots)\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{nk}\right)$$

2.6 Technika - filtr pierwiastkiem z jedynki

Twierdzenie 3 (Filtr pierwiastkiem z jedynki) *Jeśli ω jest nietrywialnym pierwiastkiem wielomianu $z^m - 1$, to z wzorów Vieta mamy*

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{m-1} = 0$$

Można używać tej własności, aby filtrować z szeregu potęgowego wybrane współczynniki.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow g(1) + g(\omega) + \cdots + g(\omega^{m-1}) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ m|n}} a_n$$

Użycie tej metody wymaga zbieżności szeregu. Można jej bezpiecznie używać na szeregach skończonych (wielomianach).
Gdy pracujemy z funkcjami tworzącymi zdefiniowanymi przez iloczyn, przydaje się również równość wielomianów

Twierdzenie 4

$$1 + z^m = (1 + z)(1 + \omega z) \dots (1 + \omega^{m-1} z) = \prod_{k=0}^{m-1} (1 + \omega^k z)$$

2.7 Technika - ciąg w wykładnikach

Dla ciągu różnych liczb naturalnych (a_n) możemy również zbudować funkcję tworzącą na inny sposób.

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n = a_m]\, x^n = \sum_{m=0}^{\infty} x^{a_m}$$

2.8 Technika - funkcja tworząca wielu zmiennych

Idee z funkcji tworzących można również stosować dla więcej niż jednej zmiennej. W ten sposób możemy kodować ciągi kombinatoryczne zależące od paru zmiennych. Na przykład, funkcja tworząca dwóch zmiennych jest postaci

$$f(x, y) = \sum_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 0}} a_{i,j} x^i y^j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} x^i y^j$$

3 Ściąga z funkcjami tworzącymi

$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$	$\sum_{n=0} x^n$
$\frac{x}{(1-x)^2}$	$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots$	$\sum_{n=0} nx^n$
$\frac{-x-1}{(1-x)^3}$	$x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \dots$	$\sum_{n=0} n^2 x^n$
$(1+x)^m$	$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \dots$	$\sum_{n=0} \binom{m}{n} x^n$
$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$	$x^m + (m+1)x^{m+1} + \frac{(m+1)(m+2)}{2} x^{m+2} + \dots$	$\sum_{n=0} \binom{n}{m} x^n$
$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$	$1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + 70x^4 + \dots$	$\sum_{n=0} \binom{2n}{n} x^n$
$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$	$1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \dots$	$\sum_{n=0} C_n x^n$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$	$\sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots$	$\sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$
$\frac{1}{1-x-x^2}$	$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5$	$\sum_{n=0} F_{n+1} x^n$

4 Zadanka

1. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$

$$\sum_{a+b=n} \binom{2a}{a} \binom{2b}{b} = 4^n$$

2. Liczby (a_n) spełniają $a_0 = 1, a_1 = 1$ i $a_n = 4(a_{n-1} - a_n)$ dla $n \geq 2$. Znajdź wzór na a_n.

3. Dla $n \geq 0$ znajdź postać zwartą sumy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}$$

4. Ile istnieje niepustych podzbiorów zbioru $S = \{1, 2, \ldots, 2000\}$, w których suma elementów jest podzielna przez 5?

5. *Podziałem* liczby n nazywamy przedstawienie liczby n w postaci sumy liczb całkowitych, przy czym *podziały* uznajemy za takie same, jeśli da się z jednego uzyskać drugi poprzez zmianę kolejności dodawania. Udowodnij, że podziałów liczby n, w których składniki są parami różne jest tyle samo, co podziałów liczby n, w których każdy składnik jest nieparzysty.

6. Niech $m \leq n$ to liczby naturalne. Znajdź postać zwartą sumy

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

7. Niech F_n to n-ta liczba Fibonacciego. Znajdź wartość sumy

$$F_4 + F_8 + F_{12} + \cdots + F_{1000}$$

8. $n > 0$ jest liczbą naturalną. Ile istnieje wielomianów $P(x)$ o współczynnikach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ takich, że $P(2) = n$?

9. Czy zbiór liczb naturalnych (bez zera) może zostać podzielony na więcej niż jeden, ale skończoną liczbę parami rozłącznych ciągów arytmetycznych, z których każde dwa mają różną różnicę?

10. Udowodnij dla $n \geq 0$ tożsamość

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{2n}{n-i} = \binom{3n}{n}$$

11. (IMO 1995) p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Znajdź liczbę takich podzbiorów A zbioru $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, że

   (a) A ma dokładnie p elementów.

   (b) Suma elementów w A jest podzielna przez p.

12. Liczby $a_0, a_1, \ldots$ tworzą rosnący ciąg nieujemnych liczb całkowitych. Spełniają zależność, że każda liczba całkowita może zostać unikalnie przedstawiona w postaci $a_i + 2a_j + 4a_k$, gdzie i, j, k nie muszą być różne. Oblicz a_{2023}.

13. Prostokąt $a \times b$ może zostać pokryty pewną liczbą prostokątów $p \times 1$ i $1 \times q$, gdzie a, b, p, q to ustalone dodatnie liczby całkowite. Prostokątów nie można obracać. Udowodnij, że a jest podzielne przez p lub b jest podzielne przez q.

5 SPOJLERY DO ZADAŃ

Gdzie nie stwierdzono inaczej, $f(x)$ oznacza funkcję tworzącą stworzoną przez ciąg w zadaniu.

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)^2$
2. $f(x)-1-x=4x(f(x)-1)-4x^2f(x)$
3. "Snake oil"
4. Filtr pierwiastkiem z jedynki na $-1+(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2000})$.
5. $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\dots$
6. "Snake oil"
7. Znajdź postać zamkniętą na $F_1+xF_2+\cdots+x^{999}F_{1000}$ (hint: pomnóż przez $(1-x-x^2)$. Potem filtr pierwiastkiem z jedynki.
8. $f(x)=\prod_{i=0}^{\infty}\left(1+x^{2^i}+x^{2\cdot 2^i}+x^{3\cdot 2^i}\right)$
9. Załóż niewprost, ze się da. Dla ciągu arytmetycznego $(a_1,a_2,\dots)$ rozpatrz funkcję tworzącą $x^{a_1}+x^{a_2}+\dots$. Ile wyniesie suma takich funkcji tworzących?
10. Udowodnij przez "snake oil" ogólniejszą formułę (tożsamość Vandermonda), $\binom{m+n}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$
11. Rozpatrz $F(x,y)=(1+xy)(1+x^2y)\dots(1+x^{2p}y)$. Jeśli $a_{n,m}\,[x^ny^m]\,F(x,y)$, to odpowiedź wynosi $a_{p,p}+a_{2p,p}+\dots$. Filtr pierwiastkiem z jedynki.
12. Ciąg w wykładnikach. $f(x)f(x^2)f(x^4)=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}\Rightarrow f(x)=(1+x)(1+x^8)(1+x^{8^2})\dots$
13. Prostokątowi przyporządkuj wielomian dwóch zmiennych $\sum x^iy^j$ przebiegający po indeksach, które reprezentują współrzędne punktów wewnątrz prostokąta. Policz wartość w odpowiednim pierwiastku z jedynki.