Kontest 1 - 26.09.2023

Rozwiązania Pierwszaki

Zadanie 1. Mamy danych 17 liczb całkowitych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 9 liczb, których suma jest podzielna przez 9.

Dowód. Bierzemy dowolne 5 liczb. Wśród nich znajdują się 3 liczby a_1, a_2, a_3, których suma dzieli się przez 3: $a_1 + a_2 + a_3 = 3k_1$. Te 3 liczby odkładamy na bok. Pozostało 14 liczb. Powtarzamy tę konstrukcję: bierzemy dowolne 5 liczb i wśród nich znajdujemy 3 liczby a_4, a_5, a_6, których suma dzieli się przez 3: $a_4 + a_5 + a_6 = 3k_2$. W podobny sposób znajdujemy jeszcze 3 takie trójki liczb:

$$a_7 + a_8 + a_9 = 3k_3, \quad a_{10} + a_{11} + a_{12} = 3k_4, \quad a_{13} + a_{14} + a_{15} = 3k_5.$$

Wśród pięciu liczb k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 znajdują się 3 liczby, których suma dzieli się przez 3. Bez straty ogólności (bowiem możemy te liczby przenumerować) możemy założyć, że

$$k_1 + k_2 + k_3 = 3m.$$

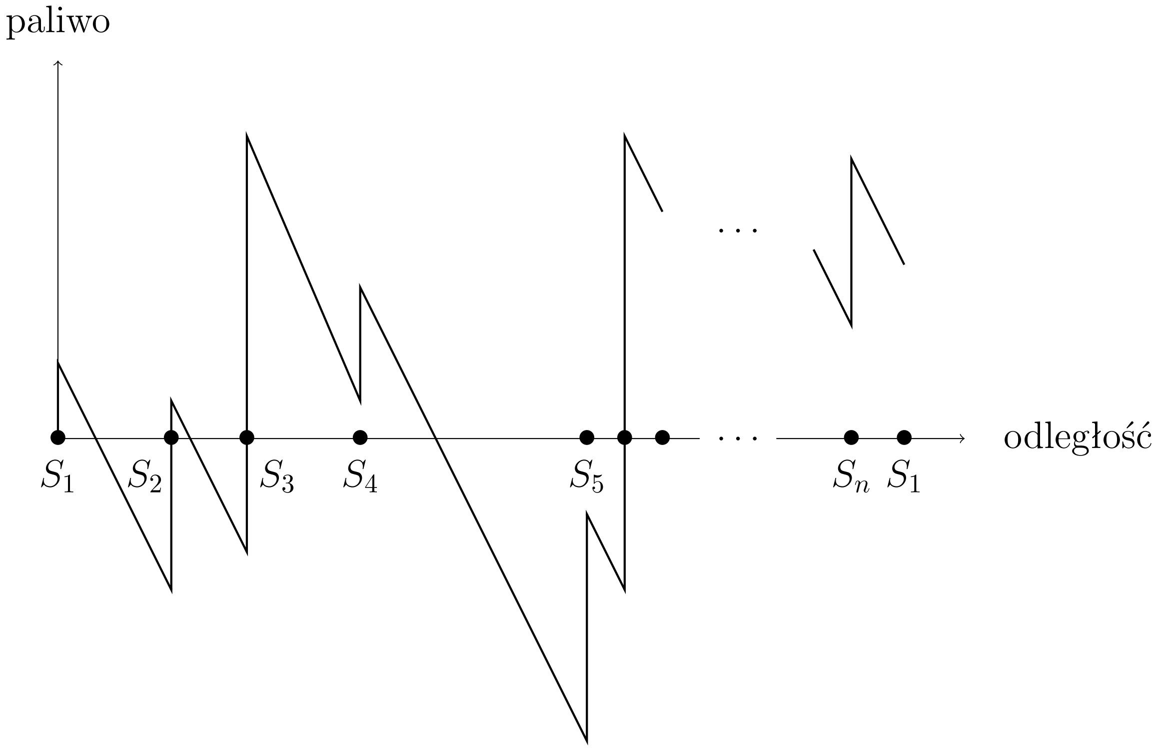
Wówczas

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_9 = 3k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3) = 3 \cdot 3m = 9m.$$

■

Zadanie 2. Dane jest n aut na zapętlonej drodze. Każde z aut ma w sobie pewną ilość benzyny, w sumie benzyny wystarcza na pełne okrążenie drogi. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ można wybrać takie auto początkowe, że zabierając z każdego auta, do którego dojeżdżamy całą benzynę, przejedziemy całe okrążenie.

Dowód. Załóżmy, że możemy zadłużać się i wykorzystywać ujemne paliwo. Oznaczamy stacje jako $S_1, S_2, ..., S_n$ i startujemy z S_1. Narysujmy wykres naszego paliwa zależnie od stacji:



Na każdej stacji dostajemy trochę paliwa, a na trasie pomiędzy dwoma stacjami tracimy trochę paliwa. Istnieje stacja S_min na którą przyjeżdżamy na tej zasadzie z najmniejszą ilością paliwa (prawdopodobnie jest to wartość ujemna). Jeśli więc zaczęlibyśmy od tej stacji i narysowali analogiczny wykres to leżałby on nad poziomą osią. Oznacza to że nie wykorzystywalibyśmy ujemnego paliwa w całej podróży, czyli mamy tezę. ■

Zadanie 3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E leżącym na półprostej AB, a proste AD i BC w punkcie F leżącym na półprostej AD. Przypuśćmy, że istnieje okrąg styczny do półprostych BE i DF oraz do odcinków EC i CF. Wykazać, że odcinek stycznej poprowadzonej z punktu B do okręgu wpisanego w trójkąt ABD ma taką samą długość, jak odcinek stycznej poprowadzonej z punktu D do okręgu wpisanego w trójkąt BCD.

Dowód. Niech P, Q, R, S oznaczają odpowiednio punkty styczności pierwszego z danych w zadaniu okręgów do prostych AB, EC, CF, AD. Wówczas

$$AP = AB + BP = AB + BR = AB + BC + CR,$$

$$AS = AD + DS = AD + DQ = AD + DC + CQ,$$

a ponieważ $AP = AS$ i $CR = CQ$, więc stwierdzamy, że

$$(*)\ AB + BC = AD + DC$$

Pozostaje spostrzec, że odcinek stycznej prowadzonej z punktu B do okręgu wpisanego w trójkąt ABD ma długość $\frac{1}{2}(AB+BD-AD)$, zaś odcinek stycznej poprowadzonej z punktu D do okręgu wpisanego w trójkąt BCD ma długość $\frac{1}{2}(DC + DB - BC)$ i na mocy związku (*) obie te długości są równe. ■

Zadanie 4. Rozstrzygnij, czy istnieją dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniające równość:

$$(3 + \sqrt{7})^k \cdot (4 + \sqrt{7})^m = (5 + \sqrt{7})^n.$$

Dowód. Stosując równość z zadania oraz wzór dwumianowy Newtona możemy łatwo wywnioskować, że

$$(3 - \sqrt{7})^k \cdot (4 - \sqrt{7})^m = (5 - \sqrt{7})^n$$

Wymnażając stronami tą równość z równością z zadania otrzymujemy

$$(3 + \sqrt{7})^k(3 - \sqrt{7})^k \cdot (4 + \sqrt{7})^m(4 - \sqrt{7})^m = (5 + \sqrt{7})^n(5 - \sqrt{7})^n \iff$$

$$\iff (9-7)^k \cdot (16-7)^m = (25-7)^n \iff 2^k \cdot 9^m = 18^n \iff 2^k \cdot 3^{2m} = 2^n \cdot 3^{2n}$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynnniki pierwsze wynika, że potęgi dwójki i trójki obu stron równania są takie same zatem $k = n$ oraz $m = n$. Podstawiając te równości do równania z treści zadania otrzymujemy $(3 + \sqrt{7})^k \cdot (4 + \sqrt{7})^k = (5 + \sqrt{7})^k$ co jest równoważne równości $(3 + \sqrt{7}) \cdot (4 + \sqrt{7}) = 5 + \sqrt{7}$, jednak lewa strona tej równości jest większa od 12, a prawa jest mniejsza więc otrzymujemy sprzeczność. Nie ma zatem liczb k, m, n spełniających równość z zadania. ■