Kontest 3 - 30.09.2022

Rozwiązania Starsi

Zadanie 1. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takie, że dla m, n naturalnych zachodzi:

$$m^2 + f(n) \quad | \quad mf(m) + n$$

Zbiór liczb $\mathbb{N}$ nie zawiera 0 w tym zadaniu.
Rozwiązanie Zauważmy, że funkcja $f(n) = n$ spełnia warunki zadania.
Załóżmy teraz, że f spełnia warunki zadania i pokażemy, że $f(1) = 1$.
Jeżeli $f(1)$ jest podzielne przez liczbę pierwszą p, to podstawiając $m = p$ i $n = 1$, dostajemy

$$p^2 + f(1) \mid pf(p) + 1 \Rightarrow p \mid pf(p) + 1$$

co nie jest prawdą. Zatem $f(1) = 1$. Przypuśćmy, że istnieje m naturalne takie, że $f(m) < m$. Wtedy podstawiając $n = 1$, otrzymujemy

$$m^2 + 1 = m^2 + f(1) \mid mf(m) + 1 < m^2 + 1,$$

czyli sprzeczność. Teraz przypuśćmy, że istnieje n naturalne takie, że $f(n) > n$. Podstawiając $m = 1$, dostajemy

$$1 + n < 1 + f(n) \leqslant f(1) + n = 1 + n,$$

kolejna sprzeczność. Wobec tego $f(n) = n$ dla każdego n naturalnego.

■

Zadanie 2. Na płaszczyźnie danych jest n punktów białych i n punktów czarnych, przy czym żadne 3 z tych $2n$ punktów nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że można wybrać n odcinków rozłącznych tak, aby każdy odcinek miał końce dwóch kolorów.

Rozwiązanie Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą białymi, zaś $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$-czarnymi punktami. Mamy wykazać istnienie takiej permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, że odcinki $X_1Y_{a_1}, X_2Y_{a_2}, \ldots, X_nY_{a_n}$ są parami rozłączne. Wybierzmy w tym celu tę permutację, dla której wartość sumy długości $X_1Y_{a_1} + X_2Y_{a_2} + \ldots + X_nY_{a_n}$ jest najmniejsza. Udowodnimy, że ta permutacja spełnia warunki zadania.

Przypuśćmy bowiem, wbrew tej tezie, że pewne dwa z rozpatrywanych odcinków mają punkt wspólny P; dla ustalenia oznaczeń niech będą to odcinki $X_1Y_{a_1}$ oraz $X_2Y_{a_2}$. Punkt P leży oczywiście w ich wnętrzu; zatem z nierówności trójkąta dostajemy:

$$X_1Y_{a_2} + X_2Y_{a_1} < X_1P + PY_{a_2} + X_2P + PY_{a_1} = X_1P + PY_{a_1} + X_2P + PY_{a_2} =$$
$$= X_1Y_{a_1} + X_2Y_{a_2}.$$

Wobec tego zamiana odcinków $X_1Y_{a_1}$ i $X_2Y_{a_2}$ zmniejsza wartość zdefiniowanej sumy. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

■

Zadanie 3. Niech M, N, P będą punktami styczności okręgu wpisanego z bokami AB, BC, CA odpowiednio. Udowodnij, że ortocentrum trójkąta MNP, środek okręgu wpisanego trójkata ABC i środek okręgu opianego trójkąta ABC są współliniowe.

Rozwiązanie Zauważmy, że okrąg wpisany w trójkąt ABC jest okręgiem opisanym na trójkącie MNP. Zatem pierwsze dwa punkty leżą na prostej Eulera trójkąta MNP. Rozważmy inwersję względem okręgu wpisanego w trójkąt ABC o środku I. Punkty A, B, C przechodzą na środki A', B', C' odpowiednio odcinków PM, MN, NP. Środek okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$ jest środkiem okręgu dziewięciu punktów trójkąta MNP, który leży na prostej Eulera trójkąta MNP. Jednakże środek okręgu opisanego na trójkącie ABC, środek okręgu dziewięciu punktów trójkąta MNP i I są współliniowe, więc środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej Eulera trójkąta MNP.

■

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n o następującej własności: w kwadracie $n \times n$ można umieścić nie nachodzące na siebie klocki 1×4 w taki sposób, aby zajęte były wszystkie pola nie leżące przy brzegu (należy wypełnić szczelnie kwadrat $(n-2) \times (n-2)$, a klocki mogą wystawać jedno pole poza ten kwadrat).

Rozwiązanie Rozważmy przypadki:

(1) Liczba n jest podzielna przez 4. W tym przypadku pokrycie jest możliwe, wypełniamy cały kwadrat $n \times n$.

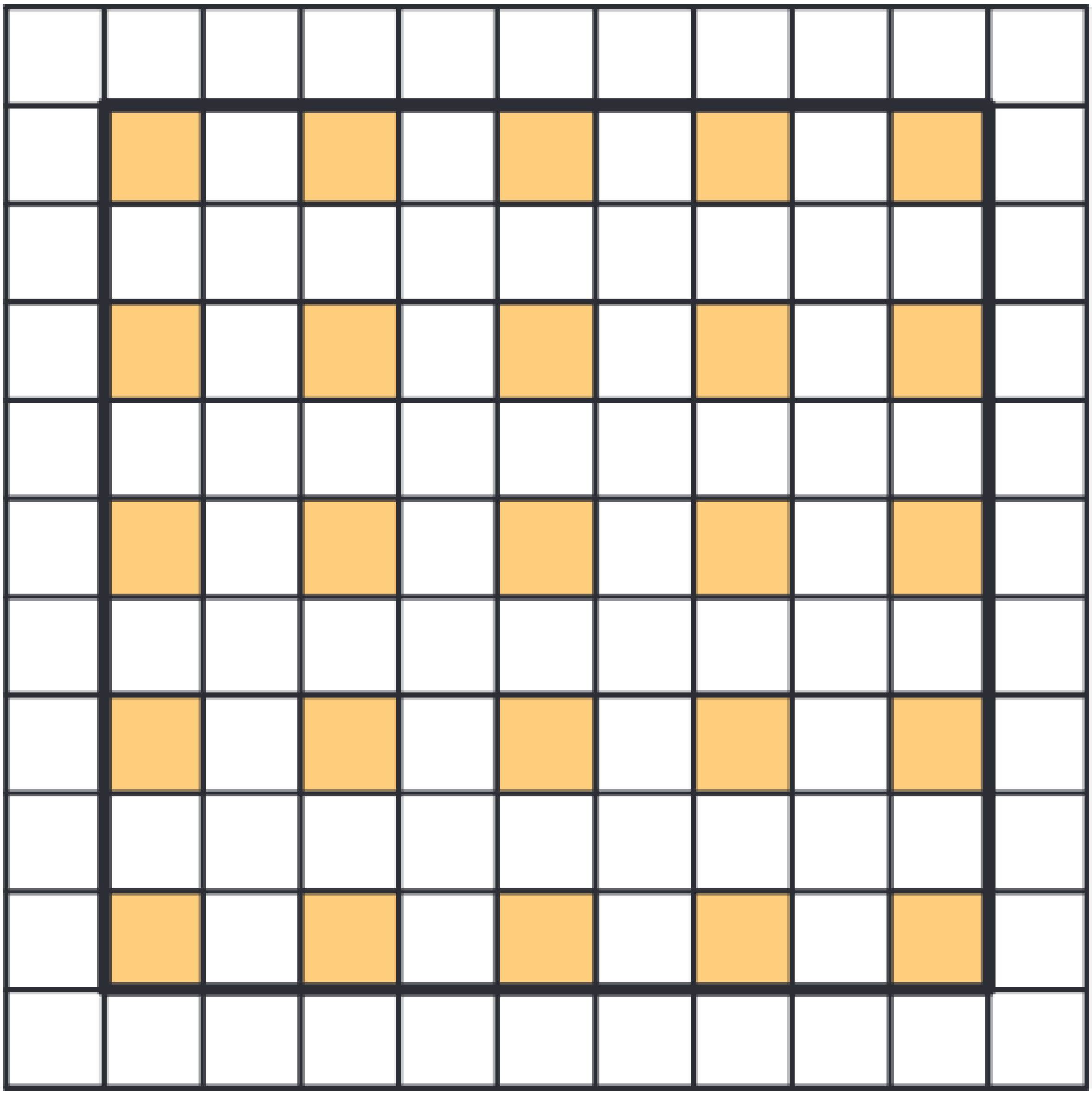
(2) Liczba n daje resztę 1 z dzielenia przez 4. W tym przypadku możemy pokryć klockami narożny kwadrat o boku $n-1$, wówczas w szczególności cały centralny kwadrat $(n-2) \times (n-2)$ zostanie pokryty.

(3) Liczba n daje resztę 2 z dzielenia przez 4. Wypełniamy klockami kwadrat $(n-2) \times (n-2)$ położony centralnie w kwadracie $n \times n$.

(4) Liczba n daje resztę 3 z dzielenia przez 4. Kolorujemy kwadrat tak, jak pokazano na rysunku (obie współrzędne nieparzyste, w centralnym kwadracie). Każdy klocek pokrywa wówczas parzystą liczbę kolorowych pól (0 lub 2).

Z drugiej strony liczba kolorowych pól wynosi $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$, co jest iloczynem dwóch liczb nieparzystych, czyli liczbą nieparzystą. Oznacza to, że w tym przypadku nie istnieje żądane wypełnienie kwadratu.

Odpowiedź. Warunki zadania spełniają te liczby naturalne $n \geqslant 4$, które nie dają reszty 3 przy dzieleniu przez 4.



$\blacksquare$