WSPÓŁRZĘDNE BARYCENTRYCZNE

Gustaw Wenzel, Kajetan Ramsza

Hiperbola 8.03.2023

1 Teoria

1.1 Masy

Dane są punkty $A_1, A_2, ..., A_n$ oraz liczby $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}, (x_1 + ... + x_n \neq 0)$.
Wtedy $P = S((A_1, x_1), (A_2, x_2), ..., (A_n, x_n)) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overrightarrow{A_iP} = \overrightarrow{0}$.

Twierdzenie 1. (o przegrupowywaniu mas)

$$S((A_1, x_1), (A_2, x_2), (A_3, x_3)) = S((S((A_1, x_1), (A_2, x_2)), x_1 + x_2), (A_3, x_3))$$

(Uczciwy dowód twierdzenia o przegrupowywaniu mas jest długi, nudny i całkowicie nieprzydatny)

Ćwieczenie 1. Udowodnij, że osie symetrii dowolnego wielokąta przecinają się w jednym punkcie.
Ćwieczenie 2. Udowodnij, że środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

1.2 Bary

Układ współrzędnych barycentrycznych rozważamy względem pewnego $\triangle ABC$ o bokach długości a, b, c oraz kątach α, β, γ.

Punkt P ma takie współrzędne $(x : y : z)$, że $P = S((A, x), (B, y), (C, z))$.

Taki zapis jest jednoznaczny z dokładnością do skali, to znaczy:

$$P = (x : y : z) = (kx : ky : kz) \text{ (dla } k \neq 0)$$

Więc jeśli przyjmiemy $x + y + z = 1$, każdy punkt P można opisać na dokładnie jeden sposób (nazywamy to współrzędnymi unormowanymi).

Twierdzenie 2. Niech $A_1 = (0 : y : z)$ będzie pewnym punktem należącym do prostej BC, wówczas każdy punkt $P \in$ prostej AA_1 jest postaci $(x : y : z)$ $(P \neq A)$.

Ćwieczenie 3. Znajdź współrzędne barycentryczne przecięcia dwusiecznej kąta A ze środkową poprowadzoną z wierzchołka B.

1.2.1 Współrzędne ważnych punktów

Środek ciężkości: $G = (1 : 1 : 1)$

Środek okręgu wpisanego: $I = (a : b : c)$

Punkt Lemoine'a(przecięcie symedian): $L = (a^2 : b^2 : c^2)$

Środek okręgu dopisanego: $I_A = (-a : b : c)$

Ortocentrum: $H = (tg\alpha : tg\beta : tg\gamma)$

Środek okręgu opisanego: $O = (sin2\alpha : sin2\beta : sin2\gamma)$

Twierdzenie 3. Dane są punkty $P = (x_1 : y_1 : z_1)$, $Q = (x_2 : y_2 : z_2)$, $R = (x_3 : y_3 : z_3)$

$$\text{Punkty } P, Q, R \text{ są współliniowe} \Leftrightarrow det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

Przykładowo z metody Sarrusa

$$det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2$$

Twierdzenie 4. Jeśli $R = (x_1 : y_1 : z_1),\ Q = (x_2 : y_2 : z_2)$ oraz $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 \neq 0$ to

$$S((R, r), (Q, q)) = (rx_1 + qx_2 : ry_1 + qy_2 : rz_1 + qz_2)$$

Ćwieczenie 4. Dany jest $\triangle ABC$ oraz punkty E,D leżące odpowiednio na bokach AB i AC tak, że zachodzi $AD : DC = 2 : 5$, a $AE : EB = 3 : 4$. Niech Q będzie przecięciem prostych ED i BC, a P przecięciem prostych BD i EC. Znajdź $BP : PD$ i $QB : QC$.

Twierdzenie 5. $P = S(S(BCP) : S(CAP) : S(ABP))$, gdzie $S(XYZ)$ to pole skierowane $\triangle XYZ$, dla dowolnego punktu P.

Twierdzenie 6. Punkt $P = (x : y : z) \in (ABC) \Leftrightarrow a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$, gdzie (ABC) to okrąg opisany na $\triangle ABC$.

2 Zadanka

1. Dany jest trójkąt ABC oraz wpisany w niego okrąg o środku I. Niech D będzie punktem styczności okręgu wpisanego z prostą BC. K, M to odpowiednio środki odcinków AD i BC. Udowodnij, że K, I, M są współliniowe.

2. (Twierdzenie Cevy) Dany jest trójkąt ABC oraz punkty A_1, B_1, C_1 leżące na bokach BC, AC, AB. Udowodnij, że proste AA_1, BB_1, CC_1 są współpękowe wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$

3. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC leżą punktyA_1, B_1, C_1, takie że $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A}$. Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów ABC i $A_1B_1C_1$ leżą w tym samym punkcie.

4. Punkt X leży wewnątrz trójkąta ABC. Proste przechodzące przez X równoległe do AC i BC przecinają AB w punktach K i L. Udowodnij, że współrzędne barycentryczne punktu X względem trójkąta ABC wynoszą $(BL : AK : LK)$.

5. Znajdź współrzędne barycentryczne punktu Nagela. Udowodnij, że środek okręgu wpisanego I, środek ciężkości G oraz N są współliniowe oraz $NG = 2GI$.

6. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC leżą punkty A_1, B_1, C_1, proste B_1C_1, BB_1, CC_1 przecinają prostą AA_1 w punktach M, P, Q odpowiednio. Udowodnij, że
   - $\frac{A_1M}{MA} = \frac{A_1P}{PA} + \frac{A_1Q}{QA}$
   - jeśli $P = Q$, to $MC_1 : MB_1 = \frac{BC_1}{AB} : \frac{CB_1}{AC}$.
7. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC. Punkt E leży na odcinku AC, przy czym $AE : EC = 11 : 9$. Punkt F leży na odcinku AD, przy czym $AF : FD = 2 : 3$. Proste EF i AB przecinają się w punkcie G. Obliczyć $GF : FE$.
8. (II OM 2015) Punkty E, F, G leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, przy czym $2AG = GB$, $2BE = EC$ oraz $2CF = FA$. Punkty P i Q leżą na odcinkach EG i FG odpowiednio, przy czym $2EP = PG$ oraz $2GQ = QF$. Udowodnić, że czworokąt $AGPQ$ jest równoległobokiem.
9. (II OM 2020) Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg wpisany w trójkąt ABM jest styczny do boku AB w punkcie D. Okrąg wpisany w trójkąt ACM jest styczny do boku AC w punkcie E. Punkt F jest taki, że czworokąt $DMEF$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że punkt F leży na prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC.
10. W trójkącie ABC zachodzi AB=BC. Styczne do okręgu opisanego na tym trójkącie w punktach A i B przecinają się w punkcie D, a odcinek DC przecina ten okrąg jeszcze w E. Wykazać, że prosta AE przechodzi przez środek odcinka BD.
11. (IMO 2012) Dany jest trójkąt ABC, punkt J jest środkiem okręgu A - dopisanego. Okrąg ten jest styczny do boku BC w punkcie M, zaś do prostych AB i AC w punktach K i L odpowiednio. Proste LM i BJ przecinają się w punkcie F, proste KM i CJ przecinają się w punkcie G. Niech S będzie punktem przecięcia prostych AF i BC, zaś T punktem przecięcia AG i BC. Udowodnij, że punkt M jest środkiem odcinka ST.