KUŹNIA OLIMPIJSKA

Rozwiązania Kontestu 1 – Finaliści

Zadanie 1. Wielomian $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, gdzie $a_{2n} \neq 0$ nie ma żadnych pierwiastków rzeczywistych. Udowodnij, że $Q(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_0$ również nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie 1. Zakładamy bez straty ogólności, że $a_{2n} > 0$. Załóżmy nie wprost, że istnieje pierwiastek a wielomianu Q. Wielomian $W(x) = P(x) - Q(x)$ jest nieparzysty. Zatem

$$0 = W(a) + W(-a) = P(a) + P(-a) - Q(a) - Q(-a) = P(a) + P(-a),$$

to jednak oznacza, że na przedziale $[-a, a]$ istnieje x_0 takie, że $P(x_0) \leqslant 0$. Jednak przez to, że $a_{2n} > 0$ dla dostatecznie dużych wartości jest dodatni. Istnieje zatem pomiędzy nimi pierwiastek. Sprzeczność.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie takie pary liczb pierwszych p, q, że spełniona jest podzielność:

$$pq \mid 5^q + 5^p$$

Źródło: Zadanie 2 z Chinese National Olympiad 2009

Rozwiązanie 2. Przypadek 1: $p = q$. Wtedy $p^2 \mid 2 \cdot 5^p$. A więc $p = 5$. Sprawdzamy że para $(5, 5)$ spełnia nasze warunki.
Od teraz zakładamy $p \neq q$.
Przypadek 2: $q = 5$. Wtedy dostajemy $p \mid 5^p + 5^5$. Ale z małego twierdzenia Fermata wiemy, że $5^p \equiv 5 \pmod p$, więc $p \mid 5 + 5^5$, czyli $p \mid 3130$, a więc $p \in \{2, 5, 313\}$. Sprawdzamy że pary $(2, 5), (5, 2), (5, 313), (313, 5)$ spełniają nasze warunki.
Przypadek 3: $p, q \neq 5$. Znowu rozważamy naszą podzielność modulo p, q. Korzystając znowu z małego twierdzenia Fermata, otrzymujemy: $5^p + 5^q \equiv 5 + 5^q \pmod p$. Skoro $p \neq 5$ to $5^{q-1} \equiv -1 \pmod p$ oraz analogicznie $5^{p-1} \equiv -1 \pmod q$.
Przypadek 4: $p = 2$. Dostajemy $q \mid 25 + 5^q$. Z MTF dostajemy $q \mid 30$. A więc $q = 2$ lub $q = 3$, ale łatwo sprawdzić że $4 \nmid 50$, więc para $(2, 2)$ nie działa. Sprawdzamy że pary $(2, 3), (3, 2)$ działają.
Teraz wiemy już że $2 \neq p, q \neq 5$. W takim razie $5^{p-1} \not\equiv 1 \pmod q$ ale $5^{2(p-1)} \equiv 1 \pmod q$. To ładnie przetłumaczymy na rzędy. Przez $ord_p(5)$ oznaczamy najmniejszą taką liczbę dodatnią całkowitą d, że $5^d \equiv 1 \pmod p$. Ważna własność ord jest taka, że $5^n \equiv 1 \pmod p$ wtedy i tylko wtedy gdy $ord_p(5) \mid n$. A więc z wyżej opisanych własności wiemy, że $ord_p(5) \mid 2(q-1)$ oraz $ord_p(5) \nmid q - 1$. Możemy to wyrazić za pomocą wykładników 2-adycznych: $v_2(ord_p(5)) = v_2(q-1)+1$. Ale z MTF, $ord_p(5) \mid p-1$, więc $v_2(ord_p(5)) \leqslant v_2(p-1)$. Dostajemy więc nierówność $v_2(q-1) + 1 = v_2(p-1)$. Ale analogicznie z drugiej strony dostajemy $v_2(p-1) + 1 = v_2(q-1)$, sprzeczność.
A więc jedyne rozwiązania to: $(5, 5), (2, 5), (5, 2), (5, 313), (313, 5), (2, 3), (3, 2)$.

Źródło: Rozwiązanie z AoPS

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC i jego ortocentrum H. Niech M i N będą środkami BC i AC odpowiednio. Załóżmy że okręgi opisane na BHM i AHN są styczne, a H leży wewnątrz czworokąta $ABMN$, Prosta przechodząca przez H równoległa do AB przecina okręgi opisane na BHM i NHA w K i L odpowiednio. Proste KM i NL przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że $CF = FJ$, gdzie J to środek okręgu wpisanego w trójkąt MHN.

Źródło: Zadanie 1 z APMO 2018

Rozwiązanie 3. Zauważmy, że

$$\sphericalangle FMN = \sphericalangle FKL = \sphericalangle MBH = \sphericalangle MHA$$

oraz

$$\sphericalangle FNM = \sphericalangle NCH = \sphericalangle NHA.$$

Stąd wynika, że jeśli H' jest ortocentrum trójkąta $\triangle AMN$, to punkt F jest izogonalnie sprzężony z H' (tj. $\sphericalangle HBA = \sphericalangle H'MA$).

Ponadto, czworokąt $HMFN$ jest wpisany w okrąg, ponieważ

$$\sphericalangle FMN = \sphericalangle MHA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle FNM = \sphericalangle NHA.$$

Stąd, jako że F jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $\triangle ANM$ (izogonalnym sprzężeniem punktu H'), wynika, że

$$MF = FN.$$

Zatem $FM = FJ = FN$ (z własności trójliścia) oraz $FA = FJ$, ponieważ $FA = FM = FN$.

Źródło: Rozwiązanie z apmo-official.org

Zadanie 4. Na stole leży 2025 zapałek i standardowa kostka do gry, na której górna ścianka pokazuje liczbę oczek a. Igor i Stefan grają w następującą grę: na zmianę zabierają zapałki zgodnie z następującą zasadą, przy czym Igor zaczyna: Gracz, który jest przy ruchu, przechyla kostkę po wybranej krawędzi i zabiera dokładnie tyle zapałek, ile wynosi liczba oczek na górnej ściance kostki. Gracz, który nie może wykonać prawidłowego ruchu, przegrywa. Dla jakich wartości a Stefan może wymusić, że Igor przegra?

Źródło: Zadanie 2 z Bundeswettbewerb Mathematik Runda 2. 2022

Rozwiązanie 4. Jeżeli na kostce na górze znajduje się liczba $a \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, to oczywiste jest, że poprzez przewrócenie kostki na jedną z krawędzi można uzyskać jedną z czterech liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 6\} \setminus \{a, 7-a\}$. W szczególności po przewróceniu kostki ani a, ani $7-a$ nie znajdą się na górze, a zawsze można tak przewrócić kostkę, aby na górze znalazła się liczba 1 lub 2.

Grę opisujemy jednoznacznie jako przesuwanie pionka przez pola tabeli 2026×6, por. rysunek. Sytuację, że na stole znajduje się n zapałek ($0 \leqslant n \leqslant 2025$), a na górze kostki jest liczba

a ($a \in \{1, 2, \ldots, 6\}$) opisujemy jako: „Pionek znajduje się na polu $(n \mid a)$, tj. na polu w wierszu n i kolumnie a". Każdy możliwy ruch odpowiada przesunięciu pionka z pola $(n \mid a)$ na jedno z pól $(n - i \mid i)$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, 6\} \setminus \{a, 7 - a\}$. Ruch jest dozwolony tylko wtedy, gdy $n - i \geqslant 0$. Dozwolone ruchy prowadzą więc dokładnie do czterech pól na przekątnej: $(n - 1 \mid 1), (n - 2 \mid 2), \ldots, (n - 6 \mid 6)$, ale nie do kolumn a ani $7 - a$.

Każdy ruch prowadzi do pola z niższym numerem wiersza, a ponieważ można tak przewrócić kostkę, aby na górze znalazła się jedna z dwóch liczb 1 lub 2, pionek znajdujący się na polu $(n \mid a)$ z $n \geqslant 2$ i dowolnym a można zawsze przesunąć zgodnie z zasadami. Jedynymi polami, z których nie można wykonać żadnego dozwolonego ruchu, są pola w wierszu 0 oraz dwa pola $(1 \mid 1)$ i $(1 \mid 6)$. Gracz, który przed swoim ruchem ma pionek na jednym z tych pól, przegrywa. Dlatego te pola nazywamy polami przegrywającymi i oznaczamy je na czerwono. Gracz, który przed swoim ruchem ma pionek na polu, z którego można wykonać dozwolony ruch na jedno z przegrywających pól, może wymusić wygraną tym ruchem. Takie pola nazywamy polami wygrywającymi i oznaczamy je na zielono.

Na przykład wszystkie pola w wierszu 1 z wyjątkiem $(1 \mid 1)$ i $(1 \mid 6)$ są zielone, podobnie jak wszystkie pola w wierszu 2. Z drugiej strony, jeśli przed ruchem gracza pionek znajduje się na polu, z którego można wykonać ruch wyłącznie na pola wygrywające, jego przeciwnik może wymusić wygraną. Takie pola również nazywamy polami przegrywającymi i oznaczamy je na czerwono. Z kolei pola, z których można dotrzeć do co najmniej jednego czerwonego pola, są polami wygrywającymi i oznaczamy je na zielono.

Postępujemy w ten sposób wiersz po wierszu, aż wszystkie pola tabeli zostaną oznaczone. Jest to możliwe, ponieważ wszystkie ruchy prowadzą do wierszy o niższym numerze, a te pola są już oznaczone. Kolorystyka powtarza się od wiersza drugiego z okresem 9. Liczba 2025 jest podzielna przez 9, a więc pola w tym wierszu będą zaznaczone przegrywające. To oznacza, że Igor jako gracz zaczynający znajduje się na polu przegrywającym niezależnie od tego, w jaki sposób kostka jest ułożona na początku, czyli dla każdego a Stefan może doprowadzić do przegranej Igora.

$n\backslash a$	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	0	0	1	1
4	1	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1
8	1	1	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1
12	1	1	0	0	1	1
13	1	1	0	0	1	1
14	1	0	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1
17	1	1	0	0	1	1
18	0	0	0	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1
21	1	1	0	0	1	1
22	1	1	0	0	1	1
23	1	0	1	1	0	1
24	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1
26	1	1	0	0	1	1
27	0	0	0	0	0	0

Tabela przedstawiająca początkowy układ ruchów wygrywających i przegrywających

Źródło: Rozwiązanie z Bundeswettbewerb Mathematik