

Kontest 1 - 27.09.2022

Pierwszaki

Zadanie 1. Udowodnij, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\dots A_{12}$ przekątne A_1A_5 , A_3A_8 i A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 2. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ oraz $a + b + c \leq 4$ i $ab + bc + ca \geq 4$. Udowodnij, że conajmniej dwie z poniższych nierówności są prawdziwe:

$$|a - b| \leq 2, |b - c| \leq 2, |c - a| \leq 2$$

Zadanie 3. Niech a i b będą różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $ab(a + b)$ jest podzielne przez $a^2 + ab + b^2$. Udowodnij, że $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$.

Zadanie 4. Dany jest duży stosik kart. Na każdej karcie napisana jest jedna liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Wiemy, że suma wszystkich liczb na kartach jest równa $k \cdot n!$ dla pewnego k .

Udowodnij, że możemy podzielić nasze karty na k stosów tak, że suma każdego z nich jest równa $n!$.