Mecz Młodszych

1. Znajdź wszystkie różnowartościowe funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ warunek: $f(f(n)) \leqslant \frac{n+f(n)}{2}$

2. Niech $P_k(x) = 1+x+x^2+...+x^{k-1}$. Udowodnij, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

3. Niech n będzie daną liczbą całkowitą dodatnią. Przypuśćmy, że wybieramy n liczb z poniższej tabelki
$$\begin{matrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{matrix}$$
w taki sposób, że żadne dwie nie mogą leżeć w tym samym wierszu lub kolumnie. Wyznacz największy możliwy iloczyn tych wybranych liczb.

4. Dwóch piratów Arrrrr i Barrrrr obrabowało wielką łódź East India Company. Łup składa się z jednego wielkiego diamentu i monet w dwóch w workach. W jednym worku jest x a w drugim y monet. Piraci postanowili że podzielą się łupem w następujący sposób. Zagrają w grę, w której ruch polega na wybraniu liczby m i zabraniu $2m$ monet z jednego z worków, wzięciu m z nich dla siebie i odłożeniu m monet do drugiego worka. Pirat który nie będzie mógł zrobić ruchu przegrywa, a drugi bierze wielki diament. Dla jakich liczb x, y Arrrrr ma strategię wygrywającą, jeśli wykonuje on pierwszy ruch.

5. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wykaż nierówność
$$\sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)} \geqslant \sqrt{3(a+b)^2+3(b+c)^2+3(c+a)^2}$$

6. Udowodnij, że
$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)...\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$$

7. Liczby względnie pierwsze p i q spełniają zależność:
$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$
Udowodnij, że p jest podzielne przez 1979.

8. Znajdź wszystkie liczby naturalne $n < 10^{100}$, dla których jednocześnie $n|2^n$, $n-1|2^n-1$ oraz $n-2|2^n-2$.

9. Dane są trzy współliniowe punkty A, B, C oraz dowolny punkt P nieleżący na tej prostej. Udowodnij, że środki okręgów opisanych na trójkątach PAB, PBC, PCA oraz punkt P tworzą czworokąt cykliczny.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty E i F leżą na bokach AC i AB opowiednio, że zachodzi równość $BC^2 = BA\cdot BF + CE\cdot CA$. Udowodnij, że dla różnych położeń pumktów E i F okrąg opisany na trójkącie AEF przechodzi przez pewien punkt stały inny niż A.