Autor: Igor Staszkiewicz Prowadzący: Igor Staszkiewicz

Algebra I – II etap

Nierówności

Średnie

Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi:

$$A \geqslant G \geqslant H,$$

gdzie

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \quad G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \quad H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

Definicja 1 (Średnia potęgowa)**.** Dla danego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $t \in \mathbb{R}$, mówimy, że

$$P_t(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} & t \neq 0 \\ \sqrt[t]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} & t = 0 \end{cases}$$

Wówczas mamy, dla $x < y$ nierówność $P_x \leqslant P_y$.

1. $$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \sqrt{8}abc$$

2. $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}$$

3. Udowodnij, że dla dodatnich a, b, c zachodzi
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+x) \geqslant 9$$

Nierówność Cauchy-Schwarza

Dla liczb rzeczywistych a_i, b_i zachodzi:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$

Dowód. Rozważmy następujący funkcję kwadratową:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)x + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2.$$

Ponieważ $f(x) \geqslant 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, wynika stąd, że wyróżnik wielomianu $f(x)$ jest niedodatni, tj.:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leqslant 0.$$

W ten sposób uzyskujemy upragnioną nierówność.

■

Istnieją również dwie inne odmiany nierówności Cauchy-Schwarza:

- I postać Engel'a. Dla $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

  Dowód. Podstawiamy do nierówności Cauchy-Schwarza $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ oraz $\sqrt{b_i}$. ■

- II postać Engel'a. Dla $a_i > 0$ oraz $b_i > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}.$$

  Dowód. Podstawiamy do nierówności Cauchy-Schwarza $\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$ oraz $\sqrt{a_i b_i}$. ■

Definicja 2. Ciągi monotoniczne

Dla dwóch ciągów rzeczywistych $A = (a_1, \ldots, a_n)$ oraz $B = (b_1, \ldots, b_n)$ wartość wyrażenia

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

przyjmuje swoje maksimum, gdy ciągi A i B są jednakowo monotonicze (oba są rosnące lub oba są malejące). Analogicznie, jeśli ciągi są przeciwnie monotoniczne (jeden jest rosnący, a drugi malejący), powyższe wyrażenie przyjmuje minimum.

Dowód. Niech i, j, t. że $i < j$, $a_i < a_j$ oraz $b_i > b_j$. Wówczas chcemy

$$a_i \cdot b_i + a_j \cdot b_j < a_i \cdot b_j + a_j \cdot b_i$$

$$a_i \cdot (b_i - b_j) < a_j \cdot (b_i - b_j)$$

$$a_i < a_j$$

Co oczywiście wynika z założeń. Uzyskaliśmy zatem upragnioną nierówność. ■

1. Uzasadnij, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność
$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geqslant a^2 + b^2.$$
Czy i dlaczego warunek dodatniości liczb a, b jest potrzebny?

2. Uzasadnij, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$$

3. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geqslant \frac{a\sqrt{a}}{a+b} + \frac{b\sqrt{b}}{b+c} + \frac{c\sqrt{c}}{c+a}$$

4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geqslant \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{a\sqrt{b}}{a+b}$$

5. Wykaż tzw. Nierówność Nesbitt'a, czyli dla dodatnich a, b, c
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

Wielomiany

Wielomiany są nierozłączną częścią kompendium olimpijskiego, a przede wszystkim są ukryte u podstaw wyższych dziedzin matematyki. Każdy olimpijczyk powinien jak najszybciej oswoić się z ich ideą, jak i również umieć sprawnie operować ich własnościami. Poniżej przedstawiamy najważniejsze definicje i twierdzenia, których zastosowanie napotkacie w wielu zadaniach olimpijskich.

Podstawowe definicje

- Wyrażenie postaci
$$w(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$
nazywamy wielomianem zmiennej X stopnia n, stopień oznaczamy jako deg (z ang. degree).
- Liczby $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy współczynnikami tego wielomianu.
- Współczynniki a_n oraz a_0 nazywamy odpowiednio współczynnikiem wiodącym i wyrazem wolnym.
- Wielomian o współczynniku wiodącym równym 1 nazywamy unormowanym.

- Wielomian o wszystkich współczynnikach równych 0 nazywamy wielomianem zerowym, zaś wielomian $w(X) = a_0$ nazywamy wielomianem stałym.
- Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych i całkowitych oznaczamy odpowiednio jako $\mathbb{R}[X]$ oraz $\mathbb{Z}[X]$.
- Liczbę α, dla której zachodzi $w(\alpha) = 0$, nazywamy pierwiastkiem wielomianu w.

Ważne twierdzenia

Równość Bézouta. Dla danego wielomianu $w(X) \in \mathbb{R}[X]$ stopnia n oraz $\beta \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden wielomian $h(X) \in \mathbb{R}[X]$, dla którego zachodzi równość

$$w(X) = (X - \beta)h(X) + w(\beta),$$

ponadto $\deg h(X) = n - 1$, a wielomiany w i h mają ten sam współczynnik wiodący.

Wniosek (Twierdzenie Bézouta). Element $\alpha \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu $w(X) \in \mathbb{R}[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $h(X) \in \mathbb{R}[X]$, że

$$w(X) = (X - \alpha)h(X),$$

przy czym $\deg h(X) = \deg w(X) - 1$.

Dzielenie z resztą. Dla danych wielomianów $a(X), b(X) \in \mathbb{R}[X]$, gdzie $b \neq 0$, istnieją jednoznacznie wyznaczone wielomiany $q(X)$ i $r(X)$, takie że

$$a(X) = q(X)b(X) + r(X), \quad \text{gdzie } \deg r(X) < \deg b(X).$$

Twierdzenie Lagrange'a. Wielomian stopnia $n - 1$ o współczynnikach z $\mathbb{R}$ ma co najwyżej n pierwiastków w $\mathbb{R}$.

Twierdzenie o jednoznaczności. Istnieje dokładnie jeden wielomian z $\mathbb{R}[X]$ stopnia n, przechodzący przez dane $n + 1$ punktów.

Wzory Viete'a. Wielomian

$$w(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

mogący mieć n pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_n$, można przedstawić w postaci

$$w(X) = a_n(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n).$$

Równania funkcyjne

Zadania tego pokroju wymagają od nas, żebyśmy określili wszystkie funkcje spełniejące podane równanie.

Takimi zadaiami są na przykład

Przykład 1.

$$f(x+y) = f\left(f(x)\right) + y$$

Przykład 2.

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$

Przykład 3.

$$f(f(x)+y) = 2x + f(f(y) - x)$$

jest spełnione tylko przez funkcję $f(x) = x + c$.

Oznaczenia

- Jeśli funkcja przyjmuje elementy ze zbioru A i zwraca elementy ze zbioru B, oznaczamy ten fakt jako $f : A \to B$. Zbiór A nazywamy *dziedziną*, a zbiór B *przeciwdziedziną*.
- Jeśli $f(x)$ spełnia implikację
$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
mówimy wówczas, że f jest *różnowartościowa* (ew. f jest *iniekcją*).
- Jeśli $f : A \to B$ spełnia
$$\forall_{b\in B}\exists_{a\in A} : f(a) = b$$
mówimy wówczas, że f jest *na* (ew. f jest *surjekcją*).
- Jeśli f jest jednoznacznie różnowartościowa i ńa", wówczas mówimy że f jest *bijekcją*.
- Jeśli dla danej $f : A \to B$ istnieje $f^{-1} : B \to A$, że $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$. Taka funkcja istnieje wtedy i tylko wtedy gdy funkcja f jest bijekcją.
- Jeśli mamy funkcję $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$ to funkcję $(g \circ f) : A \to B$ zadaną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ nazywamy *złożeniem g i f*.

Klasyczne tricki

Nigdy nie ma odpowiedzi na wszystkie pytania. natomiast czasami bywają odpowiedzi na pytania, które są zadane.

Tutaj mamy kilka dobrych strategii na podejście do równań funkcyjnych.

- Stosowanie podstawień pod pewne wartości. Najczęściej $x = 0$ lub $x = 1$, ew. inne kombinacje jeśli mamy więcej zmiennych. Daje pewne własności funkcji z którymi można więcej zdziałać.

- Stosowanie podstawień pod inne wartości. Takie podstawienia to często $x' = \frac{1}{x}$, $x' = -x$, $x' = k \cdot x$
- Jeśli mamy wiele zmiannych, możemy określić na nie jakieś relacje jak choćby $y = x$, $y = f(x)$, $y = -x$, $y = \frac{1}{x}$
- Niekiedy warto też przyjrzeć się wielokrotnym złożeniom funkcji samej ze sobą.
- Jeśli mamy dziedzinę liczb naturalnych lub inne podstawy, należy rozważyć indukcję.

Zadania

1. Uzasadnij, że jeżeli $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, to
$$n \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) > (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
Użyj tej nierówności, by udowodnić nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową, ale uważaj na założenia.

2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi
$$2a^2b^2 \leqslant a^3b + b^3a \leqslant a^4 + b^4.$$

3. a, b, c są dodatnie. Wykaż
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leqslant \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

4. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi
$$a^2b + b^2c + c^2d + d^2a \leqslant a^3 + b^3 + c^3 + d^3.$$

5. Niech w trójkącie ABC liczby h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości a, b, c odpowiednio. Uzasadnij, że:
$$(a + b + c)(h_a + h_b + h_c) > 18P_{ABC}.$$

6. a, b, c są liczbami dodatnimi. Wykaż, że
$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}$$

7. $$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geqslant 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

8. Dla $(a_1, a_2, ..., a_n)$ zachodzi $a_1a_2...a_n = 1$, udowodnij:
$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_n + 1) \geqslant 2^n$$

9. Wiedząc, że

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \end{cases}$$

wyznacz $x^4+y^4+z^4$

10. Niech wielomian $w(x)$ będzie n-tego stopnia, oraz dla wszystkich całkowitych k spełniających $0 \leqslant k \leqslant n$

$$w(k) = 2^{k+1}$$

Podaj wartość $w(n+1)$

11. Niech $w(x) \in Z[x]$ będzie unormowany oraz dla $q \in \mathbb{Q}$ zachodzi $w(q) = 0$. Wykaż, że q jest całkowie.

12. Wykaż, że dla bijekcji f zachodzi $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

13. Dana jest f ciągła, że $f(1000) = 999$ oraz $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$. Znajdź $f(500)$.

14. Wyznaczyć funkcje wszytskie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$f(x)f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1$$