Kontest 1 – PreOM 2025

Zadanie 1. Znajdź wszystkie pary n, x spełniające równanie:

$$1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n = x!,$$

gdzie n, x są całkowite nieujemne.

Zadanie 2. W trójkącie ABC, $\sphericalangle A = 60^\circ$. Punkt D leży na odcinku BC. Niech O_1, O_2 będą środkami okręgów opisanych na trójkątach $\triangle ABD, \triangle ACD$, odpowiednio. Niech M będzie punktem przecięcia prostych BO_1, CO_2, a N środkiem okręgu opisanego na $\triangle DO_1O_2$. Udowodnij, że przy zmianie położenia D na odcinku BC, prosta MN przechodzi przez stały punkt (niezależny od przesuwania D po odcinku BC).

Zadanie 3. Rozstrzygnij czy istnieją dwa wielomiany o współczynnikach całkowitych P, Q stopni co najmniej 100 spełniające zależność

$$P(Q(x)) = 3Q(P(x)) + 1,$$

dla każdego rzeczywistego x.

Zadanie 4. Rozważmy 2018 parami przecinających się okręgów, takich że każda para okręgów przecina się dokładnie w dwóch punktach, a żadne trzy okręgi nie przechodzą przez ten sam punkt. Okręgi te dzielą płaszczyznę na obszary ograniczone przez łukowe *krawdzie*, które spotykają się w *wierzchokach*. Zauważmy, że na każdym okręgu znajduje się parzysta liczba wierzchołków.

Dla danego okręgu na przemian kolorujemy jego wierzchołki na czerwono i niebiesko. Każdy wierzchołek zostaje pokolorowany dwukrotnie - raz dla każdego z dwóch okręgów, które przecinają się w tym punkcie. Jeśli oba kolory w danym wierzchołku są takie same, to przyjmuje on ten kolor; w przeciwnym razie staje się żółty.

Pokaż, że jeśli jakiś okrąg zawiera co najmniej 2061 żółtych punktów, to istnieje obszar, którego wszystkie wierzchołki są żółte.