Teoria gier

Teoria

1. Rozważamy gry, w których:
   - Grają dokładnie 2 osoby wykonujące ruchy na przemian.
   - Gra musi się skończyć wygraną jednego z graczy lub remisem. (Nie jest to gra kooperacyjna / maksymalizacja punktów)
   - Gra musi się skończyć po odpowiednio dużej ilości ruchów (nie da się grać w nieskończoność).
2. Dla gier, w których nie ma możliwości doprowadzenia gry do stanu remisu możemy zdefiniować następujące pojęcia:
   - **Pozycją wygrywającą** nazwiemy stan w grze, w którym gracz, który właśnie wykonuje ruch może wygrać, jeżeli będzie grał optymalnie (ma strategię wygrywającą).
   - **Pozycją przegrywającą** nazwiemy stan w grze, w którym gracz, który właśnie wykonuje ruch nie ma możliwości wygrania, jakiejkolwiek strategii nie zastosuje przy optymalnej grze przeciwnika.
   - **Ważna własność.** Gdy gracz jest w pozycji wygrywającej to zawsze może wykonać ruch po którym przeciwnik jest w pozycji przegrywającej. Z drugiej strony, jeśli gracz jest w pozycji przegrywającej, to po zagraniu dowolnego ruchu jego przeciwnik otrzyma pozycję wygrywającą.
3. **Lemat.** Jeżeli mamy liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$, oraz $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n > 0$ (xor) to możemy jedną z liczb zmniejszyć tak, by dalej była większa równa 0, a żeby $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$.
   - **Szybki dowód.** Niech $y = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$. Spójrzmy na pierwszy zapalony bit y (odpowiadający za najwyższą potęgę dwójki). Wiemy, że pewna z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ musi mieć też zapalony bit przy tej samej potędze dwójki. Załóżmy, że x_i ma. Wtedy $x_i \oplus y < x_i$. Teraz jak zmniejszymy x_i do $x_i \oplus y$, wtedy $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_i \oplus y \oplus \cdots \oplus x_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus y = y \oplus y = 0$ (własność xor'a).
4. **Drugi banalny lemat.** Jeśli $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$ to jeśli zmienimy wartość dowolnej zmiennej na inną całkowitą nieujemną, wtedy $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{i-zmienione} \oplus \ldots \oplus x_n > 0$.
5. **Definicja.** Funkcja Mex, jest funkcją od zbioru A i zwraca najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną, która nie należy do A (jest to skrót od Minimal EXcluded).
6. W danej grze możemy zdefiniować nimliczby (ang. nimber). Każdej pozycji przypisujemy liczbę, z czego przegrywające pozycje mają wartość 0, pozycje wygrywające mają wartość Mex wszystkich pozycji do których można dojść w jednym ruchu.
7. **Twierdzenie Sprague-Grundy'ego** Dla zbioru gier, którego spełniają warunki:
   - Gracze mogą wykonywać dokładnie te same ruchy w danym momencie.
   - Przegrywa ten, co nie może wykonać ruchu.
   - Gracz może zrobić ruch w dowolnej grze podczas swojej kolejki.

   Wtedy można je rozpatrywać pod kątem zwycięskiej strategii, tak jak w grze NIM. Wartość nimliczby ją określającej, jest równa Xorowi nimliczb danych gier.
8. Podsumowując dane twierdzenie widzimy, że w wyżej wymienionych grach jeżeli jesteśmy na pozycji o liczbie różnej od zera, to możemy sprowadzić przeciwnika na pozycję zerową, a on nie będzie mógł sprowadzić nas na pozycję zerową, co oznacza, że ZAWSZE możemy wykonać ruch, czyli jeśli gra się skończy to wtedy przeciwnik nie może się ruszyć
   (Bo gdy nie ma ruchu do wykonania nimliczba jest równa zero - więc wygrywamy).

Zadania

-1. Zapisano na tablicy liczby od 1 do 9. Antoni i Bożydar skreślają w swoim ruchu po jednej nieskreślonej liczbie. Ten, kto skreśli trzy liczby sumujące się do 15 wygrywa. Jeżeli Antoni zacznie grę, to który z graczy powinien ją wygrać?

0. (Nim na 1 stosie z ograniczeniem) Mamy stosik n żetonów, ten kto nie ma ruchu przegrywa.
W danym ruchu możemy zdjąć $1, 2, 3, 4, 5$ lub 6 żetonów ze stosu. Kto ma strategię wygrywającą?

1. Antoni i Bożydar grają w antynima. Zasady są takie same jak w oryginalnej grze, tylko, że osoba, która zdejmie ostatni żeton przegrywa (gramy na wielu stosach). Jak wygląda strategia w tej grze?

2. Mamy stosik n żetonów. W danym ruchu możemy zdjąć k żetonów ze stosu. Kto ma strategię wygrywającą?
   (a) k musi być potęgą dwójki $(1, 2, 4, 8...)$
   (b) k musi być 1 lub pierwsze
   (c) k musi być potęgą liczby pierwszej (k może być 1)
   (d) k musi być 1, 3 lub 8

3. Zaczynamy z $n = 2$. W danym ruchu powiększamy n o dowolny dzielnik n różny od n. Wygrywa gracz, który przekroczy 2017.

4. Zaczynamy z $n = 1$. W jednym ruchu powiększamy n $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ lub 9 krotnie. Wygrywa gracz, który:
   (a) przekroczy 1000
   (b) przekroczy 1000000

5. Mamy dane kostki domina o rozmiarze 2×1. Gra polega na kładzeniu kostek na prostokątnym stole $n \times m$ tak, by żadne dwie się nie dotykały, gracze kładą je na przemian. Gdy gracz nie może wykonać ruchu przegrywa.

6. Antoni i Bożydar ruszają się na przemian pionkiem po szachownicy. Dozwolony ruch figurą polega na przesunięciu jej o dowolną ilość pól w dół, bądź w lewo, o ile nie wyjdziemy wtedy poza obręb planszy. Osoba, która nie może wykonać ruchu (bo choć jest jej kolej, to figura stoi w narożniku) przegrywa. Dla danych współrzędnych początkowych x, y stwierdź, który gracz wygra, jeśli obaj gracze zagrają optymalnie.

7. Gracze na zmianę rysują przekątne 1010 kąta foremnego. Przekątne nie mogą się przecinać. Gdy gracz nie może wykonać ruchu przegrywa.

8. Monety leżą na n schodkach. W każdym ruchu możemy przenieść jedną monetę na dowolny niższy schodek. Na schodku i leży a_i monet. Przegrywa gracz bez ruchu.

9. Leży na stole w rzędzie n monet. k monet o numerach $a_1, a_2, ..., a_k$ ma widoczną stronę z orłem. Gracze na zmianę odwracają jednego orła i jeśli chcą dodatkowo dowolną monetę po lewej.

10. Jest równanie $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Gracze na zmianę ustalają nie ustalone z całkowitych, różnych od 0 zmiennych a, b, c. Czy pierwszy gracz może grać tak, aby uzyskać wielomian o pierwiastkach całkowitych?

11. A i B wyróżniają liczby całkowite dodatnie $< n$ na zmianę. Nie można wyróżnić liczby będącej dzielnikiem wyróżnionej liczby.
   (a) $n = 10$
   (b) $n = 1000$

Trudniejsze zadania

12. Zapisano na tablicy liczby od 1 do 1000. Antoni i Bożydar wykonują ruch, który polega na skreśleniu wybranej liczby i wszystkich innych nie względnie pierwszych z nią. Nie można skreślać raz skreślonej liczby i gdy gracz nie ma możliwości ruchu przegrywa. Kto wygra? Rozpoczynający, czy drugi gracz?

13. Antoni i Bożydar siedzą na klatce schodowej i na niektórych stopniach położyli żetony. Wykonują ruchy, którymi jest wybranie kilku żetonów stojących na jednym stopniu i zepchnięcie ich o stopień niżej. Żetony które spadną z ostatniego schodka nie biorą udziału w dalszej grze. Ten kto nie może wykonać ruchu przegrywa. Jak dla dowolnego układu żetonów na początku stwierdzić, który gracz ma strategię wygrywającą.

14. Dany jest stosik żetonów. Antoni i Bożydar na przemian wykonują ruchy, które polegają na tym, że w danej turze, jeśli na stosie jest m żetonów, zdejmują ze stosu 1 żeton, 4 żetony, lub p żetonów, gdzie $p \in \mathbb{P}$ oraz $p|m$. Osoba która zdejmie ostatni żeton wygrywa. Czy gracz, który rozpoczyna grę ze stosem o n żetonach ma pozycję wygrywającą?

15. Dany są dwa stosiki żetonów. Antoni i Bożydar na przemian wykonują ruchy, które polegają na tym, że w danej turze mogą zdjąć ze stosu większego dowolną krotność ilości żetonów na mniejszym stosie. Gracz który zdejmie wszystkie żetony z jednego ze stosów wygrywa. Stwierdź, dla danych rozmiarów początkowych stosów a, b, który gracz, rozpoczynający, czy drugi ma strategię wygrywającą.

16. Antoni i Bożydar ruszają się hetmanem po szachownicy. W danym ruchu mogą się ruszyć o dowolną ilość pól w dół, w prawo, bądź po skosie w prawo dół. Ten kto wejdzie hetmanem do narożnika ten wygrywa. Dla początkowych współrzędnych a, b osoba rozpoczynająca grę ma strategię wygrywającą, czy przegrywającą?

17. Dany jest pasek podstawowy złożony z n segmentów jednostkowych i dowolnie wiele pasków lilaróżowych długości l, pasków fuksjowych długości f i pasków koloru khaki długości k segmentów, z czego $f, k, l \in \mathbb{Z}^+$. Ruch polega na położeniu jednego z pasków kolorowych na pasek podstawowy, tak by każdy segment podstawowego był pokryty całkowicie, lub w ogóle. Oczywiście, gracz, co nie może wykonać ruchu przegrywa. A tu kto ma strategię wygrywającą?

18. Rozważamy grę na prostokątnej planszy $m \times 1$ złożonej z m jednostkowych kwadratów ponumerowanych od 1 do m. Na planszy ustawionych jest n pionków, żaden nie znajduje się na polu m. Ruch polega na przestawieniu dowolnie wybranego pionkana pierwsze wolne pole o większym numerze. Dwaj gracze wykonują na zmianę po ruchu. Wygrywa ten, który postawi pionek na ostatnim polu, tzn. na polu o numerze m.

19. Mamy dużą tabliczkę czekolady. Pojedynczy ruch w grze, w którą gra Antoni i Bożydar, polega na wykonaniu poziomego lub pionowego cięcia i zjedzeniu kawałka o mniejszym polu powierzchni. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Czy będzie to gracz rozpoczynający grę, dla danej tabliczki $n \times m$?

Rozwiązania

-1. Układamy kwadrat magiczny:
2 9 4
7 5 3
6 1 8
zawierający wszystkie osiem możliwych sum, co zamienia grę na remisowe kółko i krzyżyk.

0. Jeśli n daje resztę 0 z dzielenia przez 7 to pozycja startowa jest przegrywająca, w przeciwnym wypadku jest wygrywająca poprzez przechodzenie do 0 mod 7.

1. Gramy jak w nim'a, dopóki liczba stosików większych od 1 nie spadnie do 1, gdy nasz przeciwnik gra ruch sprawiający, że jest tylko 1 wyższy stosik to zdejmujemy go całego lub zostawiamy jeden kamyk - co pozwala nam wybrać który z graczy wygrywa.

2. Taktyki:
   (a) Patrzymy modulo 3.
   (b) Gramy modulo 4 (można brać $1, 2, 3$).
   (c) Modulo 6 rozważamy przypadki.
   (d) Patern modulo 11: PWPWPWPWWWW.

3. Gramy kolejno: $2, 3, 4$ następnie 5 lub 6, z 5 można przejść tylko do 6 więc gracz pierwszy wygrywa dla $n \geqslant 5$

4. Wypałowywujemy sprawdzając które liczby są wygrywające "od góry".

5.

6. Strategia wygrywająca: gramy na pola (x, x).

7. Triangulacje zawsze dają tyle samo przekątnych - tutaj 1010-kąt będzie miał 1007 nieprzecinajacych się krawędzi.

8. Interpretujemy monety jako stosy w nim'ie, przy czym wielkość stosu to numer schodka.

9.

10. Może, gra $b = -1$, następnie gra liczbę przeciwną do wybranej jako druga.

11. Patrzymy na grę dla $2, 3, 4, \ldots, n$, jeśli jest przegrywająca gramy 1, jeśli nie to gramy wygrywający ruch, który zabierze też 1.

Rozwiązania trudniejszych zadań

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.