Prosimy wypełnić poniższe pola DRUKOWANYMI literami:

Imię i nazwisko

E-mail

Nr telefonu

+	4	8									

Klasa

Rozmiar koszulki

Test kwalifikacyjny na Warsztaty Matematyczne 2023

Klasy pierwsze i drugie

Test składa się z uporządkowanych w kolejności **losowej** 30 zestawów po 3 pytania. Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić. Test trwa 180 minut.

Zasady punktacji

- Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
- Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.
- Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
- Za zadanie zrobione w całości dobrze dodatkowe **2** punkty.
- Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
- Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** pkt.

Powodzenia!

Uwaga! Przez zbiór liczb naturalnych w zadaniach rozumiemy zbiór liczb całkowitych większych lub równych 0.

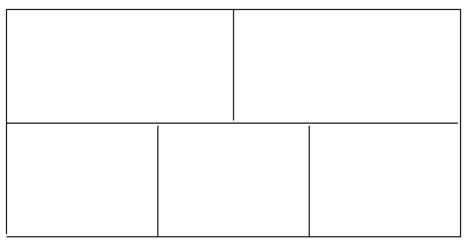
1. Liczba $\sqrt{48 - 24\sqrt{3}} - \sqrt{28 + 16\sqrt{3}}$ jest:

- ☐ ujemna
- ☐ całkowita
- ☐ niewymierna

2*. Liczba dodatnich dzielników liczby 2023 o sumie cyfr nie będącej liczbą pierwszą: jest:

- ☐ równa 1
- ☐ pierwsza
- ☐ liczbą Fibonacciego

3*. Minimalna liczba pociągnięć (pociągnięcie kończy się, kiedy oderwiesz ołówek od papieru) niezbędnych do narysowania poniższej figury, jeśli żadnej linii nie wolno przechodzić dwukrotnie jest:



- ☐ równa 3
- ☐ równa 4
- ☐ równa 5

4. Minimalna liczba ruchów którą trzeba wykonać skoczkiem szachowym *(skoczek rusza się po literce „L” – 2 od siebie, a potem 1 w bok)*, aby przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy o wymiarach 8×8 jest:

- ☐ równa 5
- ☐ równa 6
- ☐ równa 8

5. Jeżeli a jest liczbą wymierną, zaś b liczbą niewymierną, to:

- ☐ $a + b$ zawsze jest liczbą niewymierną
- ☐ ab zawsze jest liczbą niewymierną
- ☐ $\sqrt{b}$ może być liczbą wymierną dla $b > 0$

6. Wiemy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia następujące równanie:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas:

- ☐ jeśli $f(4) = 10$ to $f(50) = 1295$
- ☐ dla danych liczb rzeczywistych a, b, takich że $a \neq 0$ istnieje takie f, że $f(a) = b$
- ☐ istnieje f, które jest monotoniczne

7. Dany jest prostokąt $ABCD$. Na bokach AB, BC, CD, DA obrano odpowiednio punkty E, F, G, H, że $EFGH$ jest prostokątem. Na bokach AB i CD obrano również odpowiednio punkty I i J, różne od E, G, takie, że czworokąt $IFJH$ jest również prostokątem.

- ☐ pole przecięcia prostokątów $EFGH$ i $IFJH$ nie zależy od wyboru tych punktów na bokach prostokąta $ABCD$
- ☐ $AE = IB$
- ☐ $[EFGH] + [IFJH] = [ABCD]$

8. Czy istnieją dwie różne potęgi liczby n, których różnica jest podzielna przez m, gdy:

- ☐ $n = 5$, $m = 100$?
- ☐ $n = 7$, $m = 2137$?
- ☐ $n = 17$, $m = 2023$?

9*. Czy istnieją dodatnie liczby $a, b \in \mathbb{R}$ spełniające równanie $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$:

- ☐ gdy a i b są nieparzyste?
- ☐ gdy $4 < a + b$?
- ☐ w nieskończonej liczbie? (Czy par (a, b) spełniających to równanie jest nieskończenie wiele?)

10. Staś rzuca regularnymi kostkami do gry. Czy prawdopodobieństwo, że:

- ☐ suma oczek na dwóch kostkach wyniesie co najmniej 10 jest większe niż $\frac{1}{6}$?
- ☐ iloczyn oczek na trzech kostkach jest podzielny przez 9 jest większe niż 25%?
- ☐ suma oczek na czterech kostkach jest podzielna przez 6 jest mniejsze niż $\frac{1}{6}$?

11. Wielomian $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1$

- ☐ rozkłada się na iloczyn dwóch wielomianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych
- ☐ ma cztery różne pierwiastki rzeczywiste
- ☐ ma pierwiastek wymierny

12. Liczba 100!

- ☐ ma 25 zer na końcu
- ☐ jest większa niż 50^{100}
- ☐ ma więcej niż 50 liczb pierwszych odległych od niej o nie więcej niż 200

13. Czworokąt wypukły ma dokładnie dwie osie symetrii. Wynika z tego, że jest on:

- ☐ rombem
- ☐ prostokątem
- ☐ równoległobokiem

14*. Na okręgu o średnicy AB wybieramy punkty C, D. Ortocentra trójkątów ACD i BCD oznaczamy odpowiednio przez P, Q. W takiej sytuacji wiemy, że:

- ☐ $|AP| = |BQ|$
- ☐ $|PQ| = |DC|$
- ☐ $|BC| = |DP|$

15*. Dany jest duży trójkąt równoboczny o boku 6. Chcemy umieścić w nim k trójkątów równobocznych o boku 1, takich że ich boki są równoległe do boków dużego trójkąta, ale trójkąty są obrócone o 180 stopni (są do góry nogami). Małe trójkąty nie mogą nachodzić na siebie (mogą za to stykać się brzegami) ani wystawać poza duży trójkąt. Czy jest to możliwe:

- ☐ dla $k = 16$
- ☐ dla $k = 13$
- ☐ dla $k = 27$

16. Mamy naszyjnik (prosty sznurek), na który jest nawleczonych po 16 kamieni dwóch typów. Pewna liczba złodziei chce rozciąć naszyjnik na jak najmniejszą liczbę części i porozdzielać między siebie te części tak, aby każdy złodziej dostał tyle samo kamieni każdego z typów.

- ☐ Mamy czterech złodziei. Czy zawsze wystarczy 5 cięć?
- ☐ Mamy dwóch złodziei. Czy zawsze wystarczą 2 cięcia?
- ☐ Mamy ośmiu złodziei. Czy zawsze wystarczy 14 cięć?

17. Czy największa liczba, której nie da się przedstawić w postaci $ka+lb$, dla całkowitych dodatnich k, l, to:

- ☐ 7 dla $a = 3, b = 5$
- ☐ 39 dla $a = 7, b = 8$
- ☐ 28306 dla $a = 15, b = 2023$

18. Dwóch bukmacherów ustaliło kursy na nadchodzący mecz dwóch drużyn AiB. Kurs to para liczb (a, b), która oznacza, że w przypadku postawienia x pieniędzy na drużynę A i jej zwycięstwa gracz dostaje $x \cdot a$ pieniędzy, zaś w przypadku postawienia x pieniędzy na drużynę B i jej zwycięstwa gracz dostaje $x \cdot b$ pieniędzy. Czy mając pewną liczbę pieniędzy można porobić takie zakłady, żeby być pewnym wygrania większej niż postawiona liczba pieniędzy, niezależnie od wyniku meczu?

- ☐ Kursy to $(\frac{14}{10}, \frac{28}{10})$, $(\frac{13}{10}, \frac{34}{10})$
- ☐ Kursy to $(\frac{27}{10}, \frac{15}{10})$, $(\frac{26}{10}, \frac{16}{10})$
- ☐ Kursy to $(\frac{19}{10}, \frac{19}{10})$, $(\frac{17}{10}, \frac{23}{10})$

19. W pewnym grafie każdy wierzchołek ma stopień 100. Wynika z tego, że istnieje ścieżka (ciąg niekoniecznie różnych wierzchołków, z których każde dwa kolejne są połączone krawędzią) długości:

- ☐ 100
- ☐ 101
- ☐ 102

20. Dawno, dawno temu żył pewien mądry król. Jego posiadłości otaczały cztery okrągłe mury o wspólnym środku w zamku i promieniach kolejno 50, 100, 150, 200 (tereny pomiędzy murami także należały do posiadłości króla). W królestwie panował pokój, więc król postanowił, że wyburzy wszystkie cztery mury i zbuduje z pozyskanego z nich materiału nowy okrągły mur o największym możliwym obwodzie, ponownie z jego zamkiem w środku. Jaki jest stosunek pola nowych posiadłości do pola wcześniejszych posiadłości (jako liczba większa lub równa 1)?

- ☐ $\frac{25}{4}$
- ☐ $\frac{24}{5}$
- ☐ $\frac{175}{28}$

21*. Przez usunięcie z ciągu liczb całkowitych dodatnich $(1, 2, 3, \ldots)$ wszystkich kwadratów liczb naturalnych powstał nowy ciąg. Jego 2003-ci wyraz to:

- ☐ 2046
- ☐ 2047
- ☐ 2048

22. Iloczyn cyfr dodatniej liczby całkowitej n wynosi 4^{100}. Wynika z tego, że

- ☐ n jest parzysta.
- ☐ n ma conajmniej 100 cyfr.
- ☐ suma cyfr n jest nie mniejsza od 400.

23. Na bokach trójkąta ostrokątnego ABC leżą wierzchołki kwadratu $XYZT$, przy czym X i Y leżą na AB, Z znajduje się na BC oraz T na CA. Pole figury $\mathcal{F}$ będziemy oznaczać $[\mathcal{F}]$. Wówczas prawdą jest, że:

- ☐ $[XYZT] \leqslant \frac{1}{2}[ABC]$
- ☐ $[XYZT] \geqslant \frac{1}{3}[ABC]$
- ☐ $[XYZT] \leqslant \frac{3}{4}[ABC]$

24. Na pewnym n-osobowym przyjęciu nie ma takiej trójki osób, że wszyscy się znają. Czy prawdą jest że

- ☐ istnieje $n \geqslant 7$ takie, że nie ma również żadnej trójki osób w której wszyscy się nie znają
- ☐ jeśli $n = 9$ to na przyjęciu może być 21 znajomości
- ☐ jeśli $n = 11$ to na przyjęciu mogą być 33 znajomości

25. Pierwiastki wielomianu $4x^5 - 4x^4 + 13x^3 + 11x^2 + 10x - 6$ spełniają własność:

- ☐ suma wynosi 1
- ☐ przynajmniej jeden z nich jest niewymierny
- ☐ iloczyn jest równy $\frac{3}{2}$

26. Liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówność $a \geqslant b$. Wynika z tego, że

- ☐ $a^2 \geqslant ab$
- ☐ $a^2 \geqslant b^2$
- ☐ $a^3 \geqslant b^3$

27*. Czy poniższe implikacje są prawdziwe dla dowolnych zbiorów?

- ☐ $A \cup C \subseteq B \cup C \implies C \setminus B \subseteq C \setminus A$
- ☐ $A \cap C \subseteq B \cap C \implies C \setminus B \subseteq C \setminus A$
- ☐ $A \cap B \cap C = \varnothing \implies A \cap B \subseteq (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

28. Czy następujące wyrażenia są prawdziwe?

- ☐ $\mathrm{nwd}(7603, 7501) > 100$
- ☐ $\mathrm{nwd}(23921, 26439) > 100$
- ☐ $\mathrm{nwd}(2397, 4841) > 100$

29. Czy dla dowolnych dwóch trójkątów o równych polach a, b zachodzi:

- ☐ suma długości wysokości trójkąta a jest większa niż suma wysokości trójkąta b wtedy i tylko wtedy, gdy obwód trójkąta a jest mniejszy niż obwód trójkąta b
- ☐ pole okręgu wpisanego w trójkąt a jest większe od pola okręgu wpisanego w trójkąt b wtedy i tylko wtedy, gdy obwód trójkąta a jest większy niż obwód trójkąta b
- ☐ jeśli mają ten sam obwód okręgu wpisanego, to są przystające

30. Czy dla dowolnych liczb a, b, c, d, e, f zachodzą poniższe nierówności:

- ☐ $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$
- ☐ $(ad + be + cf)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2)$
- ☐ $(1 + \cos(a))^{\sin^2(a)} \leqslant 1 + \sin^2(a) \cdot \cos(a)$