Kontest 2 - 29.09.2022

Finaliści

Zadanie 1. Na zewnątrz trójkąta ABC dorysowujemy trójkąty równoramienne BCD, CAE, ABF o podstawach odpowiednio BC, CA, AB. Wykaż, że proste prostopadłe do EF, FD, DE przechodzące odpowiednio przez A, B, C są współpękowe.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{b-a}{d+a} + \frac{c-b}{a+b} + \frac{d-c}{b+c} + \frac{a-d}{c+d} \geqslant 0$$

Zadanie 3. Andrzej i Basia grają grają w grę. Na początku, Andrzej pisze na tablicy dodatnią liczbę całkowitą. Następnie gracze wykonują ruchy na przemian, zaczynając od Basii. W trakcie swojego ruchu Basia zastępuje liczbę n na tablicy liczbą $n - a^2$, gdzie a jest dodatnią liczbą całkowitą. W trakcie swojego ruchu Andrzej zamienia liczbę na tablicy liczbą postaci n^k, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Basia wygrywa gdy liczba na tablicy stanie się zerem. Czy istnieje strategia Andrzeja, która uniemożliwia Basii zwycięstwo?

Zadanie 4. W turnieju piłki nożnej startuje n drużyn i każda rozegrała z każdą inną drużyną dokładnie jeden mecz, który zakończył się wygraną jednej ze stron. Nie jest dostępna pełna rozpiska rezultatów meczów, wiadomo natomiast, że drużyna o numerze $1 \leqslant k \leqslant n$ wygrała dokładnie $0 \leqslant s_k \leqslant n-1$ meczy, przy czym $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n$. Podejrzewasz, że wyniki mogły zostać sfabrykowane. Wykaż, że ciąg (s_n) jest możliwy do uzyskania jako ciąg wygranych kolejnych drużyn wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $1 \leqslant k \leqslant n-1$ zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geqslant \binom{k}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}$$