Nierówność Jensena oraz pochodne

Igor Staszkiewicz, Hubert Wach

March 2023

1 Teoria

1.1 Pochodne

Def. Pochodna - funkcja określajaca stosunek zmiany wartości funkcji $f(x)$ do zmiany współczynnika wartości parametru dziedziny. Potocznie jest oznaczana jako $f'(x)$. Formalnie rzecz biorac

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

W uproszczeniu, jeżeli wziać dowolna funkcje ciagła i różniczkowalna (tzn. $f'(x)$ jest ciagła) to jeżeli weźmiemy wystarczajaco duże przybliżenie na jej wartości dla x to zacznie ona przypominać prosta - pochodna to współcznynnik kierunkowy owej prostej.

Pare słynnych/przydatnych pochodnych

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(ln(x))' = \frac{1}{x}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(sin(x))' = cos(x)$ oraz $(cos(x))' = -sin(x)$

W jaki sposób zrobić wiecej pochodnych

1. $(cf(x))' = cf'(x)$ oraz $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Dowód: nie mieści sie na marginesie
3. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ Dowód: zostawiony jako ćwiczenie
4. $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

1.1.1 Pare przydatnych cech pochodnych

1. Analiza fucnkji - zawsze gdy chcemy sprwdzić z jaka funkcja mamy do czynienia, warto sprawdzić jaka jest jej pochodna. Wiemy dzieki temu czy istnieje jakaś asymptota, na jakich przedziałach jest monotoniczna oraz na jakich przedziałach jest wypukła (o czym bedzie mowa przy Jensenie).

   Zadanie. Znajdź ekstrema fucnkji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 83$

2. Wszelkie rodzaje monotoniczności. Z definicji mamy fakt, że jeżeli $f(x)$ rośnie w punkcie x to $f'(x)$ jest dodatnie. Można to wykorzystywać do wykazywania wszelkich nierówności miedzy dwoma funkcjami.

   Zadanie. Jeżeli wiem, że $f(x_0) > g(x_0)$ oraz $f'(x) > g'(x)$ dla $x > x_0$, wiem że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $f(x) > g(x)$.

3. Istnieje twierdzenie, że dla $a < b$ istnieje takie c, że $a < c < b$ oraz $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$. Czasami jest to wykorzystywane do wykazania że istnieje jakaś wartość spełniajaca nierówność dla samych a i b.

   Zadanie. Wykaż, że dla $x, y > 0$ zachodzi

$$\frac{y^3 - x^3}{x^2} > 3(y - x) > \frac{y^3 - x^3}{y^2}$$

4. Szereg Taylora. Każda fucnkje $f(x)$ można przedstawić w postaci $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Jeżeli mamy zadana relacje miedzy funkcja i jej pochodnymi (równanie różniczkowe) warto czasami sie zastanowić nad użyciem tego wzoru.

   Zadanie.[**FIZYKA**] Wykaż, że dla ruchu harmonicznego oisanego równaniem $kx(t) = a(t)m$, jedynym rozwiazaniem jest $x(t) = Asin(t\sqrt{\frac{k}{m}}) + Bcos(t\sqrt{\frac{k}{m}})$

1.2 Nierówność Jensena

Def. Nieróność Jensena - mamy dana funkcje $f(x)$, że dla każdych x, y oraz $k \subset (0, 1)$ zachodzi

$$f(xk + y(1-k)) \leq f(x)k + f(y)(1-k)$$

(jest to tzw. funkcja wypukła) oraz ciag wartości $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$.
Wówczas dla dowolnych nieujemnych wartości $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ zachodzi

$$f\left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_kx_k}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}\right) \leq \frac{a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_3f(x_3) + ... + a_kf(x_k)}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}$$

Bez straty ogólności, możemy założyć że $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = 1$. Wóczas powyższa nierówność sprowadza sie do

$$f\left(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_kx_k\right) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_3f(x_3) + ... + a_kf(x_k)$$

Dowód Można go zrobić poprzez indukcje po k, ale łatwiej jest to zrozumieć geometrycznie. Jeżeli weźmiemy punkty $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ...(x_k, f(x_k))$ to zobaczymy że tworza one wielokat wypukły (wykazanie tego pozostawiamy czytelnikowi). Wówczas punkt $((a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_kx_k), a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_3f(x_3) + ... + a_kf(x_k))$ leży wewnatrz tego wielokata. A skoro f leży niżej niż wspomniany wielokat, jej wartość w $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_kx_k)$ jest zdecydowanie mniejsza od ważonej sumy wartości $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_k)$.

Zalecane jest naszkicowanie sobie rysunku podczas analizy powyższego dowodu.

Obserwacja 1 Fakt że funkcja wypukła (jej wykres przypomina w pewnym stopniu litere U) jest dla funkcji różniczkowalnych tożsamy z tym że $f'(x)$ jest niemalejaca, badź innymi słowy, że $f''(x) \geq 0$.

Obserwacja 2 Nierównoś Jensena można wówczas stosować na fukcjach spełniajacych nierównoś w przeciwna strone, czyli $f(xk+y(1-k)) \geq f(x)k+f(y)(1-k)$. Takie funkcje nazywamy funkcjami wklesłymi, a nierówność Jensena zachodzi wówczas w przeciwna strone.

Zadanie. Wykaż $AM \geq GM$

2 Zadania

1. Liczby x_i, y_i sa dodatnie i $x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... + y_n$.Wykaż, że

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i + y_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2}$$

2. (Nierówność Nesbitta) Dla dodatnich a,b,c wykaż, że

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

3. Wykaż, że w trójkacie ABC, o katach α, β, γ zachodzi nierówność $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
4. (Nierówność AG) Dla dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ wykaż, że

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

5. Dla dodatnich a_i, udowodnij $\sqrt[k]{\frac{a_1^k + ... + a_n^k}{n}} \geq \sqrt[l]{\frac{a_1^l + ... + a_n^l}{n}}$
6. Dla dodatnich x_i, wykaż, że

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^{x_1 + ... + x_n} \leq x_1^{x_1} + ... + x_n^{x_n}$$