Rozwiązania Kontestu 5 – II etap

Zadanie 1. 120 piratów dzieli między sobą 119 złotych monet. Następnie kapitan sprawdza, czy którykolwiek z piratów ma 15 lub więcej złotych monet. Jeśli znajdzie pierwszego takiego pirata, ten musi oddać wszystkie swoje monety innym piratom, przy czym nie może dać żadnemu z nich więcej niż jednej monety. Ta kontrola jest powtarzana, dopóki nie ma żadnego pirata z 15 lub więcej złotymi monetami. Czy ten proces zawsze kończy się po skończonej liczbie kontroli?

Źródło: Aufgabe 1 z link

Rozwiązanie 1. Ten proces kończy się zawsze po skończonej liczbie kontroli. Ponadto, poza treścią zadania, można udowodnić, że proces zakończy się najpóźniej po 15. kontroli.

Załóżmy, że istnieje rozdział, w którym przy każdej z 15 kolejnych kontroli spotykany jest pirat z 15 złotymi monetami. Każdy pirat, który zostanie znaleziony przy kontroli z 15 lub więcej złotymi monetami, musi oddać wszystkie swoje złote monety i może po każdej kolejnej kontroli odzyskać najwyżej jedną złotą monetę, więc może być spotkany z 15 lub więcej złotymi monetami najwcześniej po 15 kolejnych kontrolach. Jeśli więc przy 15 kolejnych kontrolach za każdym razem spotykany jest pirat z 15 lub więcej złotymi monetami, żaden pirat nie występuje dwukrotnie.

Ponieważ każdy pirat po każdej kontroli może otrzymać najwyżej jedną złotą monetę, to ten pirat może być spotkany przy kontroli K_i tylko wtedy, gdy przy kontroli K_{i-j} ($j = 0, 1, 2, \ldots, i-1$) miał co najmniej $15 - j$ złotych monet, więc przy kontroli K_1 miał co najmniej $15 - (i-1) = 16 - i$ złotych monet.

Zatem na początku istnieje 15 piratów P_i ($i = 1, 2, \ldots, 15$), z których każdy ma co najmniej $16 - i$ złotych monet. Wśród tych 15 piratów rozdzielono co najmniej $15 + 14 + \cdots + 2 + 1 = 120$ złotych monet, co jest więcej niż całkowita liczba rozdzielonych złotych monet, co stanowi sprzeczność.

Źródło: Aufgabe 1 z link

Zadanie 2. Udowodnij, że dla $n \geqslant 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Źródło: Analiza Matematyczna 1.1, rok 2020

Rozwiązanie 2. Zacznijmy od lewej nierówności, przeprowadzimy dowód indukcyjny, najpierw sprawdźmy bazę indukcyjną, przypadek $n = 1$

$$L = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$
$$P = \frac{1}{2}$$
$$L \leqslant P$$

Więc nierówność dla $n = 1$ zachodzi, teraz czas na krok indukcyjny.
Udowodnimy, że lewa strona zwiększa się zawsze o mniejszą wartość niż prawa. Przechodzimy z wyrażeń dla n na $n + 1$

$$\Delta L = \frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$
$$\Delta P = \frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Pozostało wykazać, że dla $n \geqslant 1$ zachodzi $\Delta L \leqslant \Delta P$
Teza jest więc równoważna:

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{2n+2}$$
$$\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \qquad | \cdot (n+1)(4n^2+8n+4)$$
$$4n^3+8n^2+4n \leqslant 4n^3+8n^2+5n+1 \qquad | - (4n^3+8n^2+4n)$$
$$0 \leqslant n+1$$

Przejdźmy zatem do prawej strony nierówności, tak jak wcześniej przeprowadzimy dowód indukcyjny, najpierw jednak wzmocnimy tezę zmniejszając prawą stronę nierówności do $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (jest to zmniejszenie, ponieważ funkcja: $\frac{1}{x}$ jest malejąca a $2n + 1 > 2n$)
Sprawdźmy bazę indukcyjną, przypadek $n = 1$

$$L = \frac{1}{2}$$
$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Chcemy wykazać $L \leqslant P$ czyli:

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{3}{9} \qquad | \cdot 4$$
$$1 \leqslant \frac{12}{9}$$

Więc nierówność dla $n = 1$ zachodzi, teraz czas na krok indukcyjny.
Udowodnimy, że lewa strona zwiększa się zawsze o mniejszą wartość niż prawa. Przechodzimy z wyrażeń dla n na $n + 1$

$$\Delta L = \frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{2n+1}{2n+2}$$
$$\Delta P = \frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}$$

Pozostało wykazać, że dla $n \geqslant 1$ zachodzi $\Delta L \leqslant \Delta P$
Teza jest więc równoważna:

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}$$
$$\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \leqslant \frac{2n+1}{2n+3} \qquad |\cdot(2n+3)(4n^2+8n+4)$$
$$8n^3+20n^2+14n+3 \leqslant 8n^3+20n^2+16n+4 \qquad |-(8n^3+20n^2+14n+3)$$
$$0 \leqslant 2n+1$$

Źródło: rozwiązanie autorskie – Jakub Piotrowicz

Zadanie 3. Dany jest wielomian $W(x) = x^2 + ax + b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:

Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p.

Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której:

$$W(m) = W(m+1) = 0.$$

Źródło: link

Rozwiązanie 3. Warunek $W(m) = W(m+1) = 0$ oznacza, że

$$W(x) = (x-m)(x-m+1),$$

czyli

$$W(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m.$$

Należy zatem wykazać, że istnieje taka liczba całkowita m, że

$$a = -2m-1 \quad \text{oraz} \quad b = m^2 + m.$$

Ustalmy liczbę pierwszą p. Wówczas dla pewnej liczby całkowitej k liczby

$$A = W(k) = k^2 + ak + b,$$

$$B = W(k+1) = (k+2)k + (a+b+1),$$

są podzielne przez p. Przez p dzielą się więc kolejno następujące liczby:

$$C = B - A = 2k + (a+1),$$

$$D = 2A - kC = (a-1)k + 2b,$$

$$E = (a-1)C - 2D = a^2 - 4b - 1.$$

Liczba E jest wyznaczona przez współczynniki wielomianu W i nie zależy od k. Przeprowadzając to rozumowanie dla każdej liczby pierwszej p, stwierdzamy, że liczba E jest podzielna przez każdą liczbę pierwszą p i w konsekwencji $E = 0$. Stąd wynika, że liczba a jest nieparzysta, tzn.

$$a = -2m - 1$$

dla pewnej liczby całkowitej m, oraz

$$b = \frac{1}{4}(a^2 - 1) = m^2 + m.$$

Źródło: Rozwiązanie ze strony OM: link

Zadanie 4. Niech P będzie dowolnym punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Niech K, L, M to środki boków BC, CA, AB odpowiednio. Niech k to prosta przechodząca przez K prostopadła do AP. Niech l to prosta przechodząca przez L prostopadła do BP. Niech m to prosta przechodząca przez M prostopadła do CP. Udowodnij, że proste k, l, m oraz okrąg opisany na trójkącie KLM mają punkt wspólny.

Źródło: autorskie

Rozwiązanie 4. Niech H, O, G to ortocentrum, środek okręgu opisanego Ω i środek ciężkości trójkąta ABC. Niech P' będzie antypodyczny do P względem Ω. Wówczas O jest środkiem PP' oraz $HG = 2 \cdot GO$ przy czym G leży na odcinku HO. Stąd G jest środkiem ciężkości trójkąta HPP'. Stąd, jeśli Q to środek odcinka PH, to G dzieli odcinek $P'Q$ w stosunku $2:1$. Jednokładność o środku w G i skali $-\frac{1}{2}$ przenosi wówczas punkty A, P' na punkty K, Q. Prosta AP' przechodzi więc na doń równoległą przez K, czyli na prostą k (bo $P'A \perp PA \perp k$). Z drugiej strony $P'A$ przechodzi na QK. Stąd $Q \in k$. Analogicznie Q leży na l oraz m. Ponadto Q leży na okręgu dziewięciu punktów trójkąta ABC (czyli na opisanym na KLM) z powodu jednokładności o środku w H i skali $\frac{1}{2}$ (bo Q jest obrazem $P \in \Omega$).

Źródło: autorskie