Rozwiązania Kontestu 4 – mini PreOM 2025

Zadanie 1. Dany jest zbiór n punktów ($n \geqslant 2$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Kolorujemy wszystkie odcinki o końcach w tym zbiorze tak, by każde dwa odcinki o wspólnym końcu miały różne kolory.

Wyznaczyć najmniejszą liczbę kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie.

Źródło: XLVIII OM etap II, zadanie 3 link

Rozwiązanie 1. Przyjmijmy, że dane punkty są wierzchołkami pewnego n-kąta (jeśli $n = 2$, wystarczy oczywiście jeden kolor). Wszystkie odcinki o jednakowym kolorze wyznaczają rozłączne pary wierzchołków wielokąta. Maksymalna liczba rozłącznych podzbiorów dwuelementowych zbioru n-elementowego wynosi $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Zatem liczba kolorów jest nie mniejsza niż:

$$\binom{n}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1} = \begin{cases} n & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ n-1 & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Wykażemy, że ta liczba kolorów wystarcza do spełnienia żądanego warunku.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, bierzemy zbiór wierzchołków n-kąta foremnego i malujemy jednakowym kolorem bok i wszystkie równoległe do niego przekątne; odcinki nierównoległe malujemy różnymi kolorami. Użyliśmy n kolorów.

Gdy n jest liczbą parzystą, bierzemy zbiór wierzchołków $(n-1)$-kąta foremnego V oraz jeszcze jeden punkt P_0. Kolorujemy boki i przekątne wielokąta V w sposób opisany powyżej, używając $n-1$ kolorów. Dla każdej rodziny równoległych odcinków jednakowego koloru k_i, pozostaje jeden wierzchołek P_i wielokąta V nie będący końcem żadnego z tych odcinków. Malujemy odcinek P_0P_i, kolorem k_i. Użyliśmy $n-1$ kolorów, spełniając wymagany warunek.

Źródło: XLVIII OM etap II, zadanie 3 link

Zadanie 2. Wykaż, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n wszystkie dzielniki pierwsze liczby n^2+1 są mniejsze od n.

Źródło: Kwadrat nr. 16, zadanie 4 rozdziału Tożsamość Sophie Germain link

Rozwiązanie 2. Niech $n = 2m^2$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas na mocy tożsamości Sophie Germain:

$$n^2 + 1 = 4m^4 + 1^4 = (2m^2 - 2m + 1)(2m^2 + 2m + 1),$$

a zatem każdy dzielnik pierwszy liczby $n^2+1 = 4m^4+1$ jest dzielnikiem pierwszym $(2m^2-2m+1)$ lub $(2m^2+2m+1)$. Zauważmy jednak, że $2m^2-2m+1 < 2m^2 = n$, więc dzielniki pierwszego czynnika rozkładu są mniejsze od n. Przeanalizujmy drugi czynnik, jeśli jest on złożony, to jego dzielniki pierwsze są niewiększe niż $\frac{2m^2+2m+1}{2} < 2m^2$, wtedy liczba n^2+1 ma dzielniki pierwsze mniejsze od n. Pozostaje wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych m liczba $2m^2+2m+1$ jest liczbą złożoną. Rozważmy $m=5k+1$, gdzie k jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$2m^2+2m+1=2(5k+1)^2+2(5k+1)+1\equiv 0 \pmod 5,$$

więc $2m^2+2m+1$ jest liczbą złożoną, co kończy dowód wobec dowolności k.

Źródło: Kwadrat nr. 16, zadanie 4 rozdziału Tożsamość Sophie Germain link

Zadanie 3. Rozważamy na płaszczyźnie kwadraty jednostkowe, których wierzchołki mają obie współrzędne całkowite. Niech S będzie szachownicą, której polami są wszystkie kwadraty jednostkowe zawarte w kole określonym nierównością $x^2+y^2\leqslant 1998^2$. Na wszystkich polach szachownicy piszemy liczbę $+1$. Wykonujemy ciąg operacji. Każda z nich polega na wybraniu dowolnego rzędu poziomego, pionowego lub ukośnego i zmianie znaków wszystkich liczb napisanych na polach wybranego rzędu. (Rząd ukośny tworzą wszystkie pola szachownicy S, których środki leżą na pewnej prostej przecinającej osie układu współrzędnych pod kątem $45°$.)

Rozstrzygnąć, czy w ten sposób można doprowadzić do sytuacji, w której na jednym polu będzie napisana liczba -1, a na pozostałych $+1$.

Źródło: XLIX OM etap III, zadanie 6 link

Rozwiązanie 3. Odpowiedź: nie można.

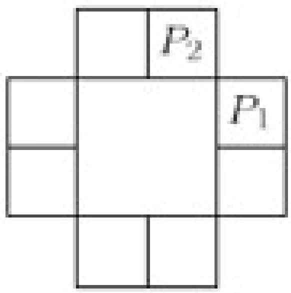
Przypuśćmy, że da się uzyskać konfigurację z dokładnie jednym polem P_1, na którym jest napisana liczba -1. Z uwagi na standardowe symetrie szachownicy S można założyć, że pole P_1 ma środek $(a-\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})$, gdzie $a\geqslant b\geqslant 1$ (a, b - liczby całkowite). Punkt (a,b) jest wierzchołkiem pola P_1, więc $a^2+b^2<1998^2$.

Wykażemy, że kwadrat jednostkowy P_2 o środku $(a-\frac{3}{2}, b+\frac{1}{2})$ także jest polem szachownicy S.

Jeżeli $a>b$, to $(a-1)^2+(b+1)^2\leqslant a^2+b^2\leqslant 1998^2$. Jeśli zaś $a=b$, to nierówność $a^2+b^2=2a^2\leqslant 1998^2$ na pewno nie jest równością; stąd wynika, że:

$$(a-1)^2+(b+1)^2=2a^2+2\leqslant 1998^2.$$

Zatem punkt $(a-1,b+1)$, czyli prawy górny wierzchołek kwadratu P_2, należy do koła, o którym mowa w zadaniu. W konsekwencji cały kwadrat P_2 zawiera się w tym kole, czyli jest polem szachownicy S.



Rozważmy teraz osiem kwadratów jednostkowych, z których dwa są polami P_1 i P_2, ułożonych tak jak na rysunku. Ponieważ kwadraty P_1 i P_2 są polami szachownicy S, więc pozostałe sześć kwadratów również.

Zauważmy, że każdy rząd pionowy, poziomy lub ukośny zawiera albo dokładnie dwa spośród ośmiu danych pól, albo nie zawiera żadnego z nich. Iloczyn liczb napisanych na tych ośmiu polach nie ulega wobec tego zmianie w wyniku wykonywanych operacji i stale jest równy 1. Nie jest więc możliwe, by w pewnym momencie na polu P_1 znalazła się liczba -1, a na pozostałych $+1$.

Źródło: XLIX OM etap III, zadanie 6 link

Zadanie 4. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem wypukłym spełniającym warunki:

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F = 360^\circ$$

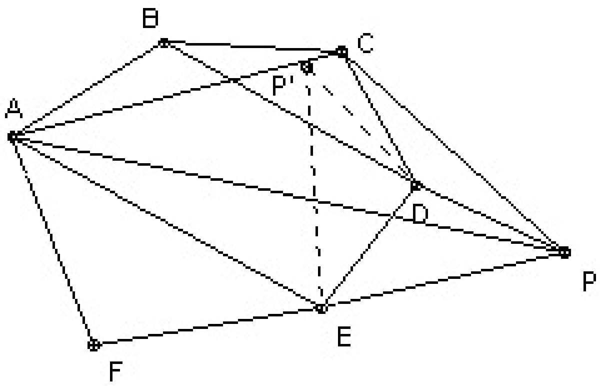
$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA.$$

Pokaż, że:

$$BC \cdot DF \cdot EA = EF \cdot AC \cdot BD.$$

Źródło: IMO Shortlist 1998, zadanie G6 link

Rozwiązanie 4. Wybierzmy punkt P tak, aby trójkąty AFE i PDE były podobne, oraz trójkąt PDE nie przecinał wnętrza $ABCDEF$ (czyli P, nie P').



Oznacza to, że:

$$\sphericalangle PDE = \sphericalangle AFE \quad \text{i} \quad \sphericalangle PED = \sphericalangle AEF.$$

Mamy więc:

$$EF/ED = EA/EP$$

Ponadto zachodzi równość:

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DEA + \sphericalangle AEF = \sphericalangle DEA + \sphericalangle PED = \sphericalangle PEA,$$

co oznacza, że trójkąty DEF i PEA są podobne. Zatem:

$$FD/EF = AP/EA \tag{1}$$

Podobieństwo trójkątów AFE i PDE daje również równość:

$$FA/EF = DP/DE.$$

Stąd:

$$AB/BC = (DE/CD) \cdot (FA/EF),$$

co po podstawieniu prowadzi do zależności:

$$(DE/CD) \cdot (DP/DE) = PD/DC.$$

Mamy również:

$$\sphericalangle CDE + \sphericalangle EDP + \sphericalangle PDC = 360^\circ,$$

więc:

$$\sphericalangle D + \sphericalangle F + \sphericalangle PDC = 360^\circ.$$

Dla danych warunków:

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F = 360^\circ,$$

stąd:

$$\sphericalangle PDC = \sphericalangle ABC.$$

Oznacza to, że trójkąty ABC i PDC są podobne, czyli:

$$CB/CD = CA/CP.$$

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCA = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCP = \sphericalangle ACP.$$

Więc trójkąty BCD i ACP są podobne, co daje:

$$BC/BD = AC/AP.$$

Mnożąc przez (1) otrzymujemy:

$$(BC/BD) \cdot (FD/EF) = AC/EA,$$

co prowadzi do żądanej równości.

Źródło: IMO Shortlist 1998, zadanie G6 link