Liczby Catalana i tw. Ramsey'a

Tw. Ramsey'a

Niech $r, b \geqslant 1$. Istnieje liczba $R(r, b)$ zależna tylko od r i b mająca następującą własność: dla każdej kliki G mającej $R(r, b)$ wierzchołków, której krawędź jest pokolorowana na czerwono lub na niebiesko istnieje albo: podklika o r wierzchołkach i krawędziach tylko czerwonych, albo podklika o b wierzchołkach i krawędziach tylko niebieskich.
Dodatkowo $R(r, b)$ to najmniejsza liczba o podanej własności. Ponadto zachodzi:

$$R(r, b) \leqslant R(r-1, b) + R(r, b-1) \text{ dla każdych } r, b \geqslant 1, \text{ oraz } R(r, b) \leqslant \binom{r+b-2}{r-1}$$

Dowód:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po sumie $r + b$. Oczywiście $\forall_{r,b}\ R(r, 1) = R(1, b) = 1$, ponieważ jednoelementowa podklika istnieje zawsze gdy mamy chociaż jeden wierzchołek. Mamy więc bazę indukcyjną: $R(1, 1)$ istnieje oraz spełnia: $R(1, 1) \leqslant 1 = \binom{0}{0}$.

Krok indukcyjny: bierzemy r, b i zakładamy, że istnieją liczby $R(n, k)$ dla $n + k < r + b$.
Weźmy klikę K o $R(r-1, b) + R(r, b-1)$ wierzchołkach i wybierzmy jeden wierzchołek v.
Stopień v jest równy $R(r-1, b) + R(r, b-1) - 1$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta wśród sąsiadów v istnieje $R(r, b-1)$-klika połączona z v krawędziamy niebieskimi albo $R(r-1, b)$-klika połączona z v krawędziamy czerwonymi. BSO załóżmy istnienie podkliki K zwanej dalej G rozmiaru $R(r, b-1)$ połączonej z v tylko niebieskimi krawędziami.
Z założenia indukcyjnego G zawiera albo: podklikę czerwoną rozmiaru r, albo podklikę niebieską rozmiaru $b-1$, która jest połączona z wierzchołkiem v niebieskimi krawędziami, więc tworzy wraz z nim podklikę K która jest cała niebieska i ma rozmiar b, co chcieliśmy udowodnić.

■

Tw. Ramsey'a dla zbiorów

Niech $1 \leqslant k \leqslant s$, istnieją liczby $R_r(k; s)$ takie, że dla każdego zbioru X o mocy $n \geqslant R_r(k; s)$, jeśli r kolorami pokolorujemy wszystkie k-elementowe podzbiory X (jest ich $\binom{n}{k}$) to istnieje s-elementowy podzbiór X, który jest k-monochromatyczny, tzn. wszystkie jego k-elementowe podzbiory mają ten sam kolor. $R_r(k; s)$ to najmniejsza liczba o tej własności.

Uwagi:

$R_2(2; s) = R(s, s)$ korzystając z wcześniejszej notacji.
$R_r(k; s) \geqslant s \geqslant k$, ponieważ inaczej zbiór nie ma s elementowych podzbiorów.

Dowód:

Podzielimy dowód na dwie części:

1. Redukcja problemu do przypadku $R_2(k; s)$.
2. Dowód istnienia liczb $R_r(k; s)$ dla $r = 2$.

(1) Indukcja po r, pokażemy, że $R_{r+1}(k;s) \leqslant R_r(k;R_2(k;s))$.
Weźmy zbiór X o $R_r(k;R_2(k;s))$ elementach i pokolorujmy jego k-elemenotwe podzbiory $r+1$ kolorami ponumerowanymi od 0 do r.
Potraktujmy kolory 0 i 1 jako jeden kolor, wtedy mamy zbiór mocy $R_r(k;R_2(k;s))$ którego k elementowe podzbiory kolorujemy r kolorami. Z założenia indukcyjnego istnieje podzbiór G, nazwijmy go H o $R_2(k;s)$ elementach, którego wszystkie k-elementowe pozdbiory są albo jednego z kolorów $2, 3, \ldots, r$, wtedy po prostu $R_2(k;s) \geqslant s$, albo jego podzbiory są pokolorowane dokładnie dwoma kolorami: $0, 1$, wtedy oczywiście z faktu, że $|H| = R_2(k;s)$ otrzymujemy, że istnieje szukane podzbiór mocy s w H, czyli też w X.

(2) Aby rozwiązać przypadek dla dwóch kolorów zdefiniujemy $R(k;r,b)$ dla $2 \leqslant k \leqslant r, b$ jako najmniejszą liczbę taką, że jeśli zbiór ma co najmniej $R(k;r,b)$ elementów i pokolorujemy jego k-elementowe podzbiory na dwa kolory: czerwony i niebieski, to powstanie: albo r-elementowy zbiór o wszystkich k-elementowych podzbiorach czerwonych, albo b-elementowy zbiór o wszystkich k-elementowych podzbiorach niebieskich. Oczywiście $R(k;s,s) = R_2(k;s)$.
Pokażemy, że $R(k;r,b)$ są skończone.
Dowód przeprowadzimy poprzez dwie indukcje: pierwsza po k, a druga po $r+b$, przypadkiem bazowym jest oczywiście $R(k;k,b) = b, R(k;r,k) = r$, dla $k = 2$ kolorujemy krawędzi, więc dostajemy po prostu tw. Ramseya, które już udowodniliśmy.
Krok indukcyjny udowodnimy dowodząc nierówności:

$$R(k;r,b) \leqslant R(k-1;R(k,r-1,b),R(k;r,b-1))+1, \qquad r,b \geqslant k+1, k \geqslant 2$$

Rozważmy zbiór $X : |X| = R(k-1;R(k,r-1,b),R(k;r,b-1))+1$, pokolorujmy jego k-elementowe podzbiory na czerwono i niebiesko, a następnie wybierzmy jeden element x.
Kolorowanie k-elementowych podzbiorów indukuje kolorowanie $(k-1)$-elementowych podzbiorów zbioru $X \setminus \{x\}$, poprzez przypisanie zbiorowi A o mocy $k-1$ koloru zbioru $A \cup \{x\}$.

Mamy więc podzbior X o mocy $R(k-1;R(k,r-1,b),R(k;r,b-1))$ na którym zadane jest kolorowanie $(k-1)$-elementowych podzbiorów, więc istnieje $R(k,r-1,b)$-elementowy podzbiór X w którym wszystkie podzbiory $(k-1)$-elementowe są czerwone, albo $R(k;r,b-1)$-elementowy podzbiór X w którym wszystkie $(k-1)$-elementowe podzbiory są niebieskie, BSO możemy założyć pierwszą opcję.
Istnieje $R(k,r-1,b)$-elementowy podzbiór X w którym wszystkie $(k-1)$-elementowe podzbiory są czerwone, więc mamy dwie opcje: istnieje szukany b-elementowy zbiór o niebieskich k-podzbiorach, albo istnieje $r-1$-elementowy zbiór który wraz z x tworzy szukany r-elementowy podzbiór X o czerwonych k-elementowych podzbiorach, co chcieliśmy wykazać.

■

Wersja nieskończona tw. Ramsey'a

W każdej nieskończonej klice której krawędzi są pokolorowane r kolorami istnieje nieskończona monochromatyczna podklika.

Dowód:

Redukcja z r kolorów do 2 jest identyczna jak dla przypadku skończonego, więc BSO $r = 2$.
Wybierzmy jeden wierzchołek v_1 i rozważmy zbiór wierzchołków połączonych z nim krawędzią niebieską, jeśli jest on skońcozny wyrzućmy te wierzchołki, w przeciwnym razie wyrzućmy wszystkie wierzchołki poza v_1 i tymi połączonymi niebieską krawędzią z v_1.
Otrzymaliśmy nieskończony graf, a procedurę możemy powtarzać, za każdym razem nadając dodatkowo etykietę wierzchołkowi - b jeśli zostawiliśmy jego niebieskich sąsiadów oraz poprzednie v_i, a r jeśli zostawiliśmy jego czerwonych sąsiadów oraz poprzednie v_i.
Dostajemy nieskończony ciąg w którym wierzchołki v_i mają etykiety b i r,co najmniej jeden z zbiorów: wierzchołki etykietowane przez b, wierzchołki etykietowane przez r jest nieskończony, a wszystkie jego krawędzi mają ten sam kolor, co dowodzi tezy.

■

Ciekawostki:

Liczby $R(r, b)$ zwane są liczbami Ramseya, istnieje wiele otwartych problemów związanych z oszacowaniami lub wyznaczaniem dokładnych wartości tych liczb.
Liczby $R(k, k)$ są znane tylko dla $k \leqslant 4$, pytanie o $R(k, k)$ możemy zadać w taki sposób:
jaka jest najmniejsza liczba wierzchołków kliki aby po pokolorowaniu dwoma kolorami wszystkich jej krawędzi musiała powstać podklika monochromatyczna rozmiaru k?

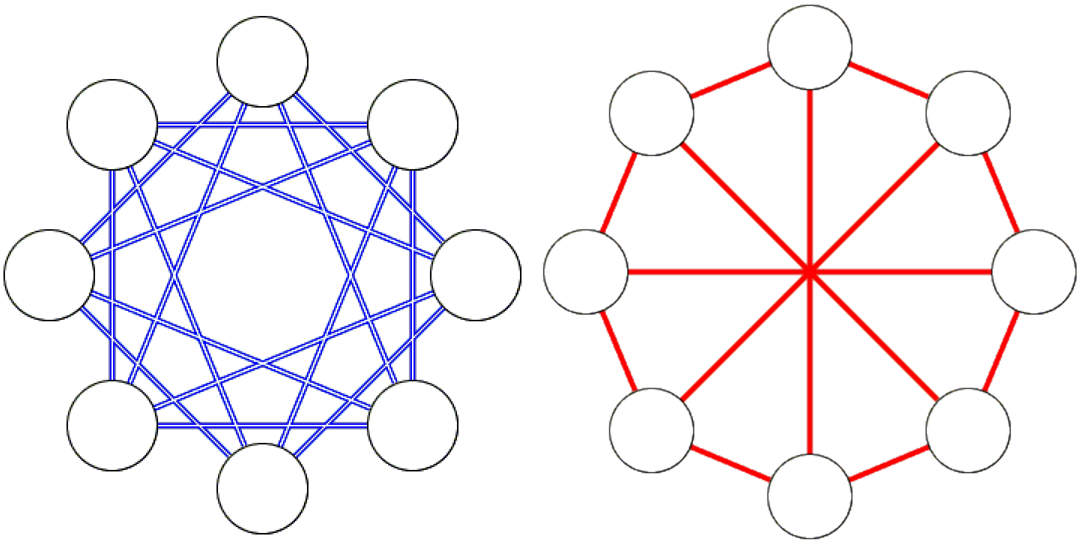
Zadanka:

1. Znajdź $R(3, 3)$ i $R(4, 3)$.
2. Niech $1 \leqslant r \in \mathbb{N}$. Pokaż, że istnieje $n_0 = n_0(r)$ spełniające następującą własność:
   dla każdego $n \geqslant n_0$ jeśli pokolorujemy wszystkie niepuste podzbiory zbioru $\{1, \ldots, n\}$ za pomocą r kolorów, to powstaną niepuste rozłączne podzbiory A i B, takie, że A, B i $A \cup B$ będą tego samego koloru.

Rozwiązania zadanek:

1. $R(3,3) = 6$, ponieważ jeśli weźmiemy pięciokąt foremny i pokolorujemy przekątne na niebiesko, a boki na czerwono, to otrzymujemy kontrprzykład dla 5 wierzchołków.
   Dla sześciu wybieramy jeden ustalony wierzchołek x, patrzymy na jego krawędzi, co najmniej trzy z pośród nich są tego samego koloru, a wierzchołki należące do tych krawędzi różne od x muszą albo utworzyć monochromatyczny trójkąt albo domknąć monochromatyczny trójkąt z x krawędziami pomiędzy sobą.

   $R(3,4) = 9$, ponieważ $R(3,4) \leqslant R(2,4) + R(3,3) - 1 = 9$ (mocniejsze oszacowanie korzysta z faktu, że obie liczby $R(2,4)$ i $R(3,3)$ są parzyste). Kontrprzykład dla 8 wierzchołków:

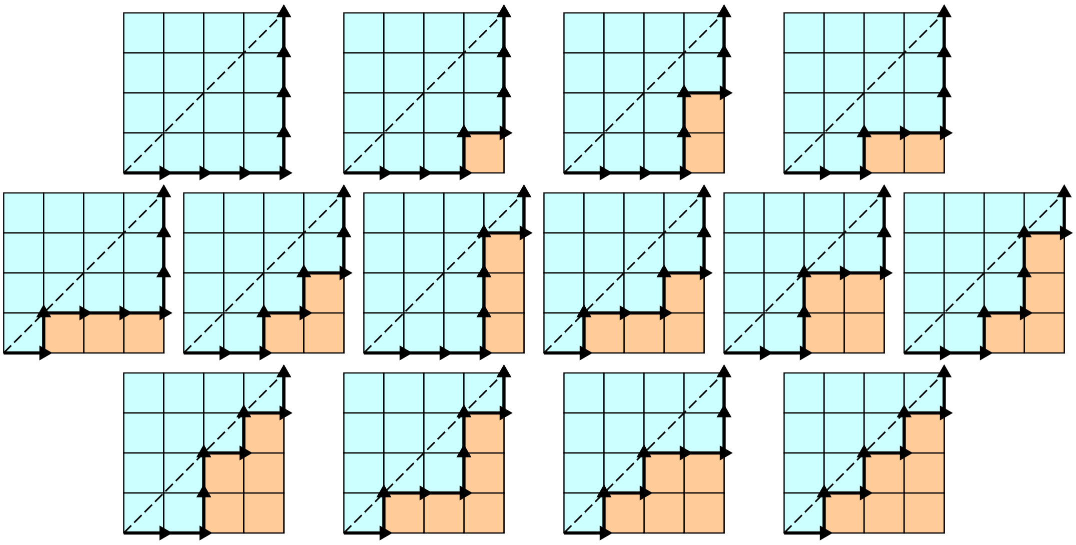
   ■

2. Z tw. Ramsey'a wiemy, że istnieje $n_0(r) = R_r(2;3)$ takie, że jeśli pokolorujemy krawędzi n-kliki o $n \geqslant n_0(r)$ używając r kolorów, to powstanie monochromatyczny trójkąt.
   Niech $n \geqslant n_0(r)$ oraz $C_k = \{1, \ldots, k\}$, przy czym $C_0 = \varnothing$, dla $k = 0, 1, \ldots, n$.
   Pokolorujmy pary $\{i, j\}$ dla $i < j$ kolorem $C_j \setminus C_i$. Z definicji $R_r(2;3)$ istnieją $i < j < k$ dla których $\{i, j\}, \{j, k\}$ i $\{i, k\}$ mają ten sam kolor.
   Mamy więc rozłączne $A = \{i + 1, ..., j\}$ i $B = \{j + 1, ..., k\}$,
   oraz $A \cup B = \{i + 1, ..., k\}$ ma ten sam kolor.

   ■

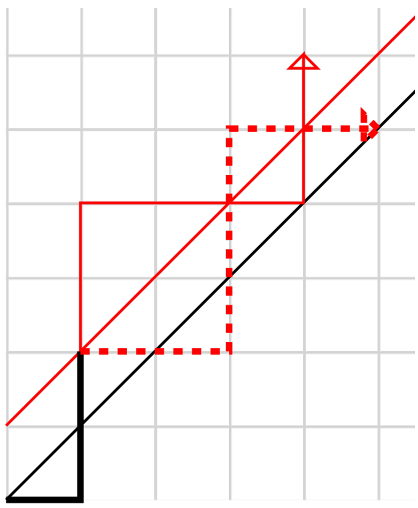
Liczby Catalana

Liczby Catalana (C_n) to szczególny ciąg liczbowy majacy liczne zastosowania w kombinatoryce. Na nasze potrzeby zdefiniujemy C_n jako liczbę ścierzek z lewego dolnego rogu kwadratu o wymiarach $n \times n$ do jego prawego górnego rogu, takich, że nie przechodzą one ponad przekątną łączącą te wierzchołki oraz wykorzystują tylko ruchy o 1 w prawo i o 1 w górę. Np. $C_4 = 14$:



Dowód wzoru jawnego:

Wszystkich ścieżek z lewego dolnego do prawego górnego rogu (licząc te przecinające przekątną) jest $\binom{2n}{n}$, ponieważ na tyle sposobów możemy wybrać, w drodze długości $2n$ w których n krokach chcemy iść w prawo. Wystarczy więc policzyć te przechodzące ponad krawędź.
W tym celu weźmy dowolną ścieżkę przechodzącą ponad rozważaną przekątną i po pierwszym przekroczeniu odbijmy ją symetycznie względem prostej $y + x = -1$,
zakładając, że lewy dolny róg to $(x, y) = (0, 0)$, a osi są $0X$ "w prawo" a $0Y$ "w górę".



Trafimy oczywiście końcem ścieżki w punkt $(n-1, n+1)$, a każda "zła" ścieżka od $(0,0)$ do (n,n) da nam dokładnie jedną ścieżkę od $(0,0)$ do $(n-1,n+1)$.
Pozostało zauważyć, że jest to odwzorowanie bijektywne, każda ścieżka od $(0,0)$ do $(n-1,n+1)$ po odbiciu fragmentu po pierwszym przejściu jest ścieżką łączącą nasze wierzchołki kwadratu, więc "złych" ścieżek jest $\binom{(n+1)+(n-1)}{n+1} = \binom{2n}{n+1}$. Dobrych ścieżek jest więc:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{((n-1)!)^2n^2} - \frac{(2n)!}{((n-1)!)^2n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{((n-1)!)^2n^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

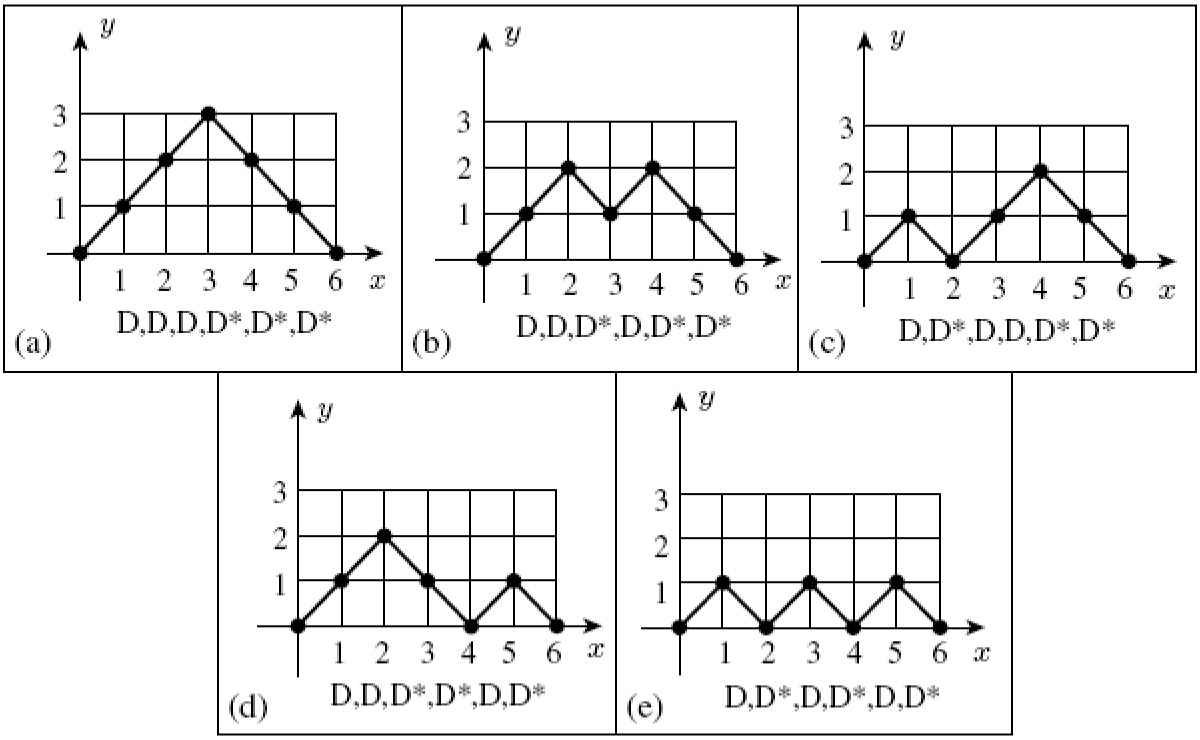
■

Wniosek (wzór rekurencyjny pierwszego stopnia):

$$C_{n+1} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{((n+1)!)^2(n+2)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)^2}\binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{n+2}C_n$$

Inne interpretacje kombinatoryczne:

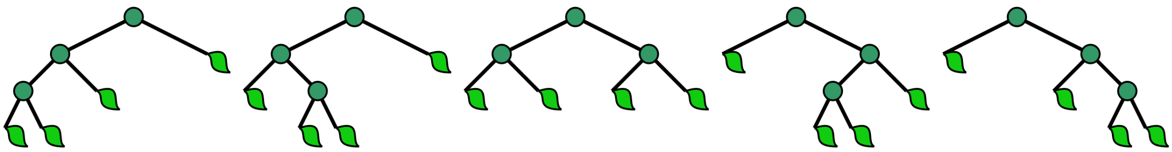
Obracając kwadraty $n \times n$ o 135 stopni antyzegarowo natychmiast otrzymujemy, że C_n jest też liczbą dróg z $(0,0)$ do $(2n,0)$ znajdujących się w całości w I ćwiartce kartezjańskiego układu współrzędnych, używających tylko przejść postaci $(x,y) \to (x+1, y-1)$ oraz $(x,y) \to (x+1, y+1)$.



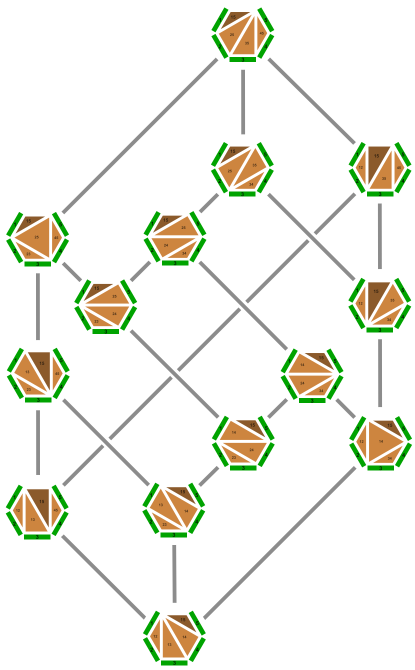
Natomiast patrząc na ułożenie ruchów "w górę (D)" i "w dół (D^*)" widzimy, że jest to tez ilość *poprawnych nawiasowań* długości $2n$ składających się z "(" oraz ")"

$n = 0$:	*	1 way
$n = 1$:	()	1 way
$n = 2$:	()(), (())	2 ways
$n = 3$:	()()(), ()(()), (())(), (()()), ((()))	5 ways
$n = 4$:	()()()(), ()()(()), ()(())(), ()(()()), ()((())), (())()(), (())(()), (()())(), ((()))(), (()()()), (()(())), ((())()), ((()())), (((())))	14 ways
$n = 5$:	()()()()(), ()()()(()), ()()(())(), ()()(()()), ()()((())), ()(())()(), ()(())(()), ()(()())(), ()((()))(), ()(()()()), ()(()(())), ()((())()), ()((()())), ()(((()))), (())()()(), (())()(()), (())(())(), (())(()()), (())((())), (()())()(), (()())(()), ((()))()(), ((()))(()), (()()())(), (()(()))(), ((())())(), ((()()))(), (((())))(), (()()()()), (()()(())), (()(())()), (()(()())), (()((()))), ((())()()), ((())(())), ((()())()), (((()))()), ((()()())), ((()(()))), (((())())), (((()()))), ((((()))))	42 ways

Oczywiście poprawne nawiasowania dają nam drzewo wywołania operatora binarnego, co przekłada się na wniosek, że regularnych ukorzenionych drzew binarnych o $n + 1$ liściach (równoważnie n wierzchołkach niebędących liściami) też jest C_n:



Z których łatwo przejdziemy do triangulacji (podział na trójkąty) $(n + 2)$-kąta:
(ciemny brązowy - korzeń, zielony - liść, jasny brąz - reszta)



Wzór rekurencyjny:

Mając triangulacje możemy szybko dostać wzór rekurencyjny:

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}, \quad \forall n \geqslant 0$$

Wynika on z faktu, że możemy ustalić jedną wybraną krawędź i wybrać na n sposobów wierzchołek z którym ta krawędź utworzy trójkąt, a pozostałe trójkąty wybierzemy spośród dwóch wielokątów które zostaną nam do podzielenia na dokłądnie $C_i C_{n-i}$ sposobów, gdzie wielokąty które otrzymaliśmy mają $i + 2$ oraz $n - i + 2$ wierzchołki.
Oczywiście dla różnych wyborów wierzchołka dostajemy różne triangulacje, poniewaz różnią się własnie tym, że wyróżniona krawędź jest w innym trójkącie.

Zadanka:

1. Udowodnij, że liczba sposobów, na jakie możemy podzielić wierzchołki n-kąta foremnego na niepuste zbiory (nie numerujemy zbiorów) tak, aby każdy wierzchołek należał do dokładnie jednego zbioru oraz otoczki wypukłe tych zbiorów były rozłączne jest równa C_n.
2. Udowodnij, że liczba ciągów $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ spełniających $a_i \leqslant i$ jest równa C_n
3. Znajdź liczbę ciągów $1 = a_1, a_2, \ldots, a_n$ (długości n) takich, że $1 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$.
4. Znajdź liczbę częściowych uporządkowań n nieetykietowanych obiektów.