Autor: Miłosz Kwiatkowski Prowadzący: Miłosz Kwiatkowski

Teoria

Twierdzenie o dwusiecznej
Dany jest trójkąt ABC oraz taki punkt X na boku AB, że CX jest dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$. Wówczas $\frac{AX}{XB} = \frac{AC}{CB}$.

Okrąg Apoloniusza
Dane są dwa różne punkty A i B. Okręgiem Apoloniusza punktów A i B dla wartości rzeczywiste λ nazwiemy zbiór punktów X takich, że

$$\frac{AX}{BX} = \lambda.$$

Taki zbiór oznaczamy $\mathcal{A}(AB, \lambda)$

Kącik historyczny
Apoloniusz z Pergi - jeden z geometrów starożytnej Grecji. Badał m.in. krzywe stożkowe i je sklasyfikował w swoim traktacie *Stożowe*. Znany jest też z niżej wspomnianego problemu Apoloniusza.

Problem Apoloniusza
Skostruuj okrąg styczny do trzech zadanych (parami nie współśrodkowcyh) okręgów.

Zadania

1. Dany jest czworokąt $ABCD$. Dwusieczne kątów $\sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle DCB$ przecinają się na przekątnej AC. Wykaż że dwusieczne kątów ABC i $\sphericalangle CDA$ przecinają się na przekątnej BD.
2. Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na prostej k, przy czym $AB = 1, BC = 2, CD = 6$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki punkt P , nie leżący na prostej k, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD$.
3. Dany jest trójkąt ABC. Oznaczmy przez a, b, c długości boków BC, AC i AB. Dwusieczna $\sphericalangle ACB$ przecina AB w punkcie D. Oblicz długości AD i DB.
4. Niech I oznaczać będzie środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta CI przecina AB w punkcie D. Wyraź $\frac{CI}{ID}$ za pomocą długości boków trójkąta ABC.
5. Dane są punkty A, B. Skonstruować (cyrklem i linijką) taki punkt C, że $AC = 2BC$ oraz $\sphericalangle ACB = 60°$
6. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Proste AD i BC przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że dwusieczne kątów $\sphericalangle APD$ i $\sphericalangle DQC$ przecinają się na prostej przechodzącej przez środki przekątnych AC i BD.
7. Dane są okręgi o_1 i o_2 rozłączne zewnętrznie. Wyznaczyć zbiór takich punktów X, z których okręgi o_1 i o_2 widać pod tym samym kątem.
8. Wykaż, że okręgi $\mathcal{A}(AB, \frac{b}{a})$, $\mathcal{A}(BC, \frac{c}{b})$, $\mathcal{A}(CA, \frac{a}{c})$ przecinają się w dwóch punktach.
   Uwaga. Te punkty nazywamy punktami Apoloniusza trójkąta ABC.
9. Dany jest punkt P leżący wewnątrz trójkąta ABC spełniający

   $$\frac{AP}{BC} = \frac{BP}{AC} = \frac{CP}{AB}.$$

   Wykaż że punkt P leży na prostej eulera.