Mecz Starszych

Rozwiązania

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC. Udowodnij, że

$$\sin\left(\frac{3\cdot\sphericalangle A}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\cdot\sphericalangle B}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\cdot\sphericalangle C}{2}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\cos\left(\frac{\sphericalangle A-\sphericalangle B}{2}\right)+\cos\left(\frac{\sphericalangle B-\sphericalangle C}{2}\right)+\cos\left(\frac{\sphericalangle C-\sphericalangle A}{2}\right)$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że:

$$\cos\left(\frac{\sphericalangle A-\sphericalangle B}{2}\right)=\cos\left(\frac{(\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C)-(2\cdot\sphericalangle B+\sphericalangle C)}{2}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\cdot\sphericalangle B+\sphericalangle C}{2}\right)=\sin\left(\sphericalangle B+\frac{\sphericalangle C}{2}\right)$$

Podobnie:

$$\cos\left(\frac{\sphericalangle B-\sphericalangle C}{2}\right)=\sin\left(\sphericalangle C+\frac{\sphericalangle A}{2}\right),\ \cos\left(\frac{\sphericalangle C-\sphericalangle A}{2}\right)=\sin\left(\sphericalangle A+\frac{\sphericalangle B}{2}\right)$$

Korzystając ze wzoru na sinus sumy otrzymujemy równoważnie nierówność:

$$\sum_{cykl.}\sin\sphericalangle X\cos\frac{\sphericalangle X}{2}+\sum_{cykl.}\cos\sphericalangle X\sin\frac{\sphericalangle X}{2}\leqslant\sum_{cykl.}\sin\sphericalangle X\cos\frac{\sphericalangle Y}{2}+\sum_{cykl.}\cos\sphericalangle X\sin\frac{\sphericalangle Y}{2}$$

Zauważmy że funkcja $x\mapsto\cos(x)$ jest malejąca na przedziale $(0,\pi)$, a funkcja $x\mapsto\sin\frac{x}{2}$ jest rosnąca na tym przedziale. Z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych wynika więc, że:

$$\sum_{cykl.}\cos\sphericalangle X\sin\frac{\sphericalangle X}{2}\leqslant\sum_{cykl.}\cos\sphericalangle X\sin\frac{\sphericalangle Y}{2}$$

Podobnie na przedziale $(0,\pi)$ funkcja $x\mapsto\cos\frac{x}{2}$ jest malejąca, wystarczy więc pokazać że $\sin(\sphericalangle A),\sin(\sphericalangle B),\sin(\sphericalangle C)$ ustawione są w przeciwnej kolejności, aby móc zastosować twierdzenie dla pozostałej części nierówności.

Jeśli trójkąt ABC nie jest rozwartokątny, to są w odpowiedniej kolejności, gdyż funkcja $x\mapsto\sin x$ jest rosnąca na przedziale $(0,\frac{\pi}{2}]$.

Jeśli trójkąt ABC jest rozwartokątny, to bez straty ogólności niech $\sphericalangle C$ będzie kątem rozwartym. Wtedy:

$$\sin(\sphericalangle C)=\sin(\pi-\sphericalangle A-\sphericalangle B)=\sin(\sphericalangle A+\sphericalangle B)>\sin(\sphericalangle A),\sin(\sphericalangle B)$$

przy czym ostatnia nierówność wynika z tego, że $\sphericalangle A + \sphericalangle B < 90°$. Sinusy kątów A i B również są w odpowiedniej kolejności, jako że te kąty są mniejsze od 90°.

Możemy więc zastosować twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych:

$$\sum_{cykl.} \sin \sphericalangle X \cos \frac{\sphericalangle X}{2} \leqslant \sum_{cykl.} \sin \sphericalangle X \cos \frac{\sphericalangle Y}{2}$$

Dodanie otrzymanych nierówności stronami da nam dowodzoną nierówność.

■

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f(A)$, której argumentem jest punkt na płaszczyźnie, a wartością liczba rzeczywista. Wiemy, że dla dowolnego trójkąta niezdegenerowanego ABC, którego środkiem ciężkości jest punkt M, zachodzi $f(M) = f(A)+f(B)+f(C)$. Udowodnij, że dla dowolnego punktu A, $f(A) = 0$.
Rozwiązanie: Rozważmy trójkąt równoboczny BCD o środku A, otrzymujemy $f(B)+f(C)+f(D) = f(A)$. Rozważmy trójkąt złożony z środków ciężkości trójkątów ABC, ABD, ACD, środek tego trójkąta to A, otrzymujemy:
$f(A) = 3f(A)+2f(B)+2f(C)+2f(D) = 5f(A)$, co daje $f(A) = 0$, co dowodzi, że $f(X) = 0$

■

Zadanie 3. Gracze na zmianę stawiają białe i czarne skoczki ("konie") na planszy $n \times n$ na wolnych miejscach. Dodatkowo nie można postawić skoczka na miejscu zagrożonym przez skoczka przeciwnika. Przegrywa nie mogący wykonać ruchu.
Dla jakich n pierwszy gracz ma strategię wygrywającą?
Rozwiązanie: Jeśli $2 \mid n$, to 1 gracz przegrywa poprzez strategię kopiowania ruchów - gramy na symetryczne pole względem środka, zawsze możemy postawić tak skoczka jako drugi gracz, ponieważ jeśli pierwszy gracz postawił swojego, to tylko ten nowy mógłby szachować pole symetryczne - ale pole symetryczne ma sumę modułów różnic współrzędnych parzystą, a skoczki szachują tylko pola o sumie modułów równej 3.
Jeśli $n = 2k + 1$, to gracz pierwszy ma następującą strategię wygrywającą: gra na pole $(k + 1,\ k + 1)$ a następnie gra symetrycznie względem tego pola - ponownie argument z sumą modułów różnic współrzędnych sprawia, że jest to strategia wygrywająca.

Odp: Gracz pierwszy ma strategię wygrywającą dla n nieparzystych.

■

Zadanie 4. Niech l-mayador będzie ścieżką długości $l+1$ (liczba krawędzi), której l różnych wierzchołków niebędących początkiem i końcem ścieżki (początek i koniec mogą być tym samym wierzchołkiem) ma stopień 2. Udowodnij, że jeśli średni stopień wierzchołka w grafie G jest mniejszy od $2 + \frac{2}{3l-1}$ i G nie zawiera w sobie cyklu prostego, który jest spójną składową (nie zawiera 2-regularnego grafu będącego spójną składową), to w G jest wierzchołek stopnia co najwyżej 1 lub l-mayador.

Rozwiązanie: Niech d oznacza średni stopień wierzchołka w grafie G, oraz niech $\rho = \frac{1}{3l-1}$. Przeprowadzimy dowód przez sprzeczność. Zakładmy, że G nie posiada wierzchołka stopnia nie większego niż 1, ani $l-mayadora$,zaś $d < 2+2\rho$. Wykorzystamy metodę dischargingu.

Będziemy rozdzielać ładunek tak, aby każdy wierzchołek miał go nie mniej niż $2 + 2\rho$. G nie ma wierzchołka o stopniu co najwyżej 1, więc minimalny stopień wierzchołka w G wynosi przynajmniej 2. G nie ma $2-$regularnego grafu będącego spójną składową, więc każdy wierzchołek stopnia 2 leży na unikalnej maksymalnej ścieżce. Rozdzielamy ładunek w taki sposób, że każdy wierzchołek stopnia 2 dostaje ładunek ρ od każdego końca jego maksymalnej ścieżki. Skoro każdy wierzchołek stopnia 2 leży na unikalnej maksymalnej ścieżce, więc kończy z ładunkiem $2 + 2\rho$. Jako, że $l - mayadory$ nie występują w grafie G, to każdy wierzchołek stopnia $j \geqslant 3$ daje ładunek maksymalnie $l - 1$ wierzchołkom wzdłuż ścieżki zaczynającej się od każdej z jego krawędzi, czyli traci maksymalnie $j(l-1)\rho$ ładunku. Aby pokazać, że jego ostateczny ładunek wynosi przynajmniej $2 + 2\rho$ obliczmy:

$$j - j(l-1)\rho \geqslant 3\left(1 - \frac{l-1}{3l-1}\right) = 2 + \frac{2}{3l-1} = 2 + 2\rho$$

Ale takie rozłożenie ładunku implikuje $d \geqslant 2 + 2\rho$, co daje sprzeczność.

■

Zadanie 5. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, że $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4$
Udowodnij, że:

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3$$

Rozwiązanie: Przekształćmy założenie: $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leqslant 2$
Zauważmy, że:

$$\frac{2+2ab}{(a+b)^2} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+2ab}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2+(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}$$

Sumując dla wszystkich par:

$$\sum_{cyc} \frac{2ab+2}{(a+b)^2} \geqslant 3 + \sum_{cyc} \frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2} \geqslant 6$$

Z ciągów jednomonotonicznych lub AM-GM.

$\blacksquare$

Zadanie 6. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, że $a+b+c = 4\sqrt[3]{abc}$. Udowodnij, że:

$$2(ab+bc+ca) + 4\min(a^2, b^2, c^2) \geqslant a^2 + b^2 + c^2$$

Rozwiązanie: Bez straty ogólności, niech $a \geqslant b \geqslant c$, możemy również założyć, że $c = 1$, ponieważ przemnożenie a, b, c przez $\frac{1}{c^2}$ nie zmienia założenia i tezy.
Otrzymujemy tezę postaci: $2(ab+a+b)+4 \geqslant a^2+b^2+1$, czyli $4ab+2a+2b+3 \geqslant (a+b)^2$
Założenie przybiera postać: $a+b = 4(ab)^{\frac{1}{3}} - 1$
Niech $t = (ab)^{\frac{1}{3}}$, podstawmy $a+b = 4t-1$ z założenia do tezy:

$$4t^3 + 2(4t-1) + 3 \geqslant (4t-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 4t^3 - 16t^2 + 16t = 4t(t-2)^2$$

$\blacksquare$

Zadanie 7. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą, że $n|2^{\varphi(n)} + 3^{\varphi(n)} + ... + n^{\varphi(n)}$. Niech $p_1, p_2, ..., p_k$ będą wszystkimi, parami różnymi dzielnikami pierwszymi n. Udowodnij, że liczba $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_1 p_2 ... p_k}$ jest całkowita. ($\varphi(n)$ jest funkcją Eulera)

Rozwiązanie: Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą dzielącą n. Wtedy:

$$0 \equiv_p 2^{\varphi(n)} + 3^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)} \equiv_p \sum_{i=0}^{\frac{n}{p}} \sum_{j=1}^{p} (ip + j)^{\varphi(n)} - 1 \equiv_p \frac{n}{p}(p-1) - 1$$

przy czym $j^{\varphi(n)} \equiv_p 1$ dla każdego $p \nmid j$, ponieważ $p \mid n \implies \varphi(p) \mid \varphi(n)$. Sprowadzając do wspólnego mianownika wyrażenie w treści zadania, otrzymujemy:

$$\frac{1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i}}{\prod_{i=1}^{k} p_i}$$

Skoro dla każdego p_i zachodzi $p_i \mid \frac{n}{p_i} + 1$ oraz $p_i \mid \frac{n}{p_j}$ dla $j \neq i$, to licznik dzieli się przez każdą z liczb p_i, czyli jest to liczba całkowita.

■

Zadanie 8. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC i AD jego średnicą. Styczna do tego okręgu w punkcie D przecina prostą BC w P. Prosta PO przecina proste AC i AB w M i N odpowiednio. Udowodnij, że $OM = ON$.

Rozwiązanie: Załóżmy b.s.o., że B leży pomiędzy P i C. Niech prosta równoległa do MN przechodząca przez C przecina prostą AN w Q, a prostą AO w R. Trójkąty AMN i ACQ są podobne, więc teza jest równoważna temu, że $RC = RQ$. Niech L będzie środkiem BC. Pokażemy, że $LR \parallel BQ$ (skąd wyniknie $RC = RQ$. Zauważmy, że $\angle OLP = \angle OLB = 90° = \angle ODP$, więc punkty O, P, D, L leżą na jednym okręgu. Zatem $\angle ODL = \angle OPL$. Ponadto $OP \parallel RC$, więc $\angle RDL = \angle RCL$, skąd L, R, D, C są współokręgowe. Zatem

$$\angle RLC = 180° - \angle RDC = 180° - \angle ADC = 180° - ABC = \angle QBC.$$

Dlatego też $LR \parallel BQ$.

■

Zadanie 9. Okrą wpisany Ω trójkąta ostrokątnego ABC jest styczny do boku BC w punkcie K. Niech AD będzie wysokością w trójkącie ABC i M środkiem AD. Jeśli N jest punktem wspólnym Ω i prostej KM różnym od K, udowodnij, że Ω i okrąg opisany na trójkącie BCN są styczne w punkcie N.

Rozwiązanie: Jeśli $AB = AC$, to teza jest oczywista. Dalej zakładamy, że $AB \neq AC$. Niech J będzie środkiem okręgu ω dopisanego do boku BC trójkąta ABC, a E, F punktami styczności Ω o środku w I do odpowiednio AC, AB. Niech Y będzie punktem styczności ω do boku BC, a X takim punktem na ω, że XY jest jego średnicą. Wtedy jednokładność przekształcająca Ω na ω przekształca K na X, więc A, K, X są współliniowe, czyli M, K, J też są współliniowe (bo $AD \parallel XY$). Zauważmy, że styczna do Ω w N nie jest równoległa do BC. Gdyby tak nie było, to punkty I, N, M, K byłyby współliniowe, więc na tej prostej leżałyby także punkty A, D (prosta ta przechodzi przez środek AD i jest prostopadła do BC), czyli punkty A, I, D są współliniow, skąd $AB = AC$ wbrew naszemu założeniu. Niech S będzie punktem przecięcia tej stycznej i prostej BC. Zauważmy, że J leży na biegunowej S względem Ω, więc z prawa wzajemności biegunowej S leży na biegunowej J względem Ω. Ponadto czworokąt $BJCI$ jest cykliczny, więc biegunową J względem Ω jest prosta B^*C^*, gdzie B^*, C^* są środkami odcinków KF, KE, bo obraz J w inwersji względem Ω leży na prostej B^*C^* oraz $B^*C^* \parallel EF \perp AJ$. Zatem S leży na prostej B^*C^*. Niech K' będzie punktem przecięcia prostych EF, BC. Wtedy S jest środkiem odcinka KK'. Znanym faktem jest, że $(K', K; B, C) = -1$, więc z lematu Newtona $SK^2 = SB \cdot SC$, czyli $SN^2 = SK^2 = SB \cdot SC$, czyli okrąg opisany na trójkącie BCN jest styczny do Ω w N.

■

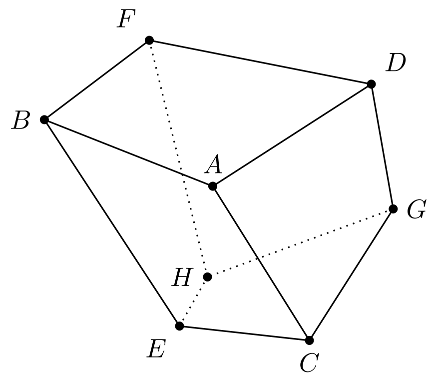
Zadanie 10. Udowodnij, że jeśli siedem wierzchołków sześciościanu o ośmiu wierzchołkach leży na sferze to ósmy też.

Rozwiązanie: Udowodnimy najpierw, że wszystkie ściany są czworokątami. Z wzoru Eulera:

$$8 - E + 6 = 2 \implies E = 12$$

Z drugiej strony $2E$ jest równe sumie ilości krawędzi każdej ściany. Jeśli któraś ściana byłaby trójkątem, to pozostałe ściany miały by sumę ilości krawędzi równą 21, czyli z zasady szufladkowej Dirichleta, któraś ściana miałaby więcej niż 4 krawędzie. Jeśli jednak sześciościan ma ścianę o więcej niż czterech krawędziach, to musi być ona pięciokątem, a pozostałe pięć ścian trójkątami, wtedy jednak nie ma ośmiu wierzchołków. Wynika z tego, że każda ściana musi mieć 4 krawędzie.

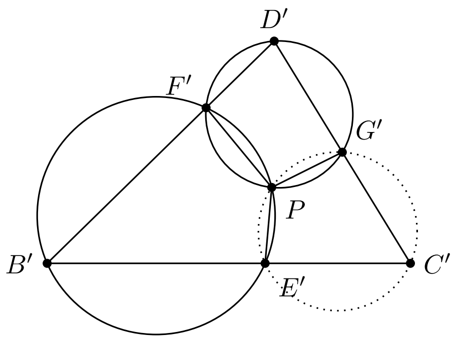
Nazwijmy punkty jak przykładowym rysunku poniżej, przy czym ósmym punktem jest punkt H:



Weźmy dowolną sferę o środku w A i wykonajmy względem niej inwersję. Zauważmy że:

1. Obrazem kuli zawierającej punkty B, C, D, E, F, G jest płaszczyzna zawierająca obrazy tych punktów.
2. Płaszczyzny ABC, ACD, ADB są własnymi obrazami.
3. Obrazami płaszczyzn BEF, CEG, DFG są kule przechodzące przez A.

Skoro B', C', E' leżą na przecięciu płaszczyzn $B'C'A$, $B'C'D'$, to leżą na jednej prostej. Podobnie wspóliniowe są punkty B', D', F' oraz $C,' D', G'$. Punkt H jest jednoznacznie zdefiniowany jako przecięcie płaszczyzn BEF, CEG, DFG, a więc punkt H' leży na (jedynym) przecięciu kul będących ich obrazami. Weźmy przecięcia tych kul i płaszczyzny $B'C'D'$, są to odpowiednio okręgi $B'E'F'$, $C'E'G'$, $D'F'G'$. Udowodnimy że okręgi te przecinają się w jednym punkcie.



Punkt E' leży na odcinku $B'C'$, ponieważ kolejność punktów A, B, E, C na okręgu ABC nie zmienia się lub zostaje odwrócona po inwersji. Analogiczne F' i G' leżą na odpowiednich odcinkach. Niech punkt P będzie przecięciem okręgów $D'F'G'$, $B'E'F'$ innym od F'. Wtedy:

$$\sphericalangle E'PG' = 360^\circ - \sphericalangle E'PF' - \sphericalangle F'PG' = \sphericalangle E'B'F' + \sphericalangle G'D'F' = 180^\circ - \sphericalangle E'C'G'$$

Czyli P leży też na okręgu $C'G'E'$. Oznacza to że P leży na kulach $AB'E'F'$, $AC'E'G'$, $AD'F'G'$, czyli $P = H'$, a skoro P leży na płaszczyźnie $B'C'D'$ będącej obrazem kuli $ABCD$, to H leży na tej kuli.

■