Autor: Miron Hunia

Prowadzący: Miron Hunia

Pochodne

Pojęcia

Poprawne korzystanie z pochodnych wymaga wkroczenia w teren analizy rzeczywistej.

Notacja małego o

Dla danych funkcji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ piszemy, że $f(x) = o(g(x))$ lub $f \in o(g)$ ze względu na zmienną x, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć takie $\delta > 0$, że

$$\forall_{|x|<\delta} |f(x)| < \varepsilon g(x)$$

Stwierdzenie. $f(x) = o(g(x))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
Przykłady:

- $x = o(1)$
- jeśli $f(x) \to_{x\to 0} 0$, to $f(x) = o(1)$
- $x^{n+1} = o(x^n)$

Często będziemy pisać we wzorkach rzeczy w rodzaju $f = g + o(1)$; wtedy $o(1)$ oznacza pewną funkcję, która jest $o(1)$.

Ciągłość

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie x, jeśli $f(x + h) = f(x) + o(1)$ ze względu na h.
Intuicyjnie ciągłość oznacza, że mała zmiana argumentu f wywołuje małą zmianę wartości.

Twierdzenie 1 (Własność Darboux)**.** *Jeśli f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i $f(a) < s, f(b) > s$ to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f(c) = s$.*

Uwaga. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Ćwiczenie. Udowodnij, że dowolny wielokąt wypukły można podzielić prostą na dwie figury o równym obwodzie i polu.

Różniczkowalność

Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna* w punkcie x, jeśli istnieje funkcja f' określona na otoczeniu x taka, że $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$ ze względu na h.
Alternatywnie: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ i f jest różniczkowalne wtedy i tylko wtedy, gdy ta granica istnieje.
Intuicyjnie, funkcja jest różniczkowalna, jeśli można ją dobrze przybliżyć funkcją liniową.

Twierdzenie 2 (Twierdzenie Darboux, nieważne na OMie)**.** *Pochodna ma własność Darboux.*

Przydatne jest również branie pochodnej pochodnej: $f''(x) = (f'(x))'$ i tak dalej, tj. $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.
Wiele funkcji, które pospolicie używamy są *gładkie* co oznacza, że są różniczkowalnie dowolnie wiele razy.

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Lagrange'a, nieważne na OMie)**.** *Jeśli f jest różniczkowalne na przedziale $[a, b]$, to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$*

Autor: Miron Hunia Prowadzący: Miron Hunia

Własności pochodnej

Do liczenia pochodnej w praktyce używa się jej wygodne własności arytmetyczne ($f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$):

$$(af)' = af' \qquad (f+g)' = f' + g'$$
$$(fg)' = f'g + fg' \qquad (f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$
$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Popularne pochodne:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\ln(x)' = \frac{1}{x} \qquad (a^x)' = \log a \cdot a^x$$
$$\sin(x)' = \cos(x) \qquad \cos(x)' = -\sin(x)$$

Ćwiczenie. Oblicz pochodną funkcji $\frac{x}{1+\sqrt{x}}$.

Pochodna może nam dać wiele informacji o funkcji.

Twierdzenie 4. Jeśli $f' \geq 0$ na przedziale (a, b), to f jest niemalejąca na (a, b)

Zmieniając znak dostajemy warunek na to, że funkcja jest nierosnąca. Zmieniając nierówność na ostrą dostajemy warunek na to, że jest rosnąca.
Można tego twierdzenia używać do dowodzenia nierówności. W szczególności, jeśli $f(x_0) > m$ i $f'(x) > 0$ dla $x_0 > x$, to $f(x) > m$ dla $x_0 > x$.

Twierdzenie 5. Jeśli $f'' \geq 0$ na przedziale (a, b), to f jest wypukła na (a, b)

Zmienając znak dostajemy warunek na to, że funkcja jest wklęsła.

Twierdzenie 6 (Metoda Fermata)**.** Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $f(x_0) = \max_{x\in(a,b)} f(x)$ lub $f(x_0) = \min_{x\in(a,b)} f(x)$, to $f'(x_0) = 0$

Punkty w których pochodna się zeruje nazywamy *punktami krytycznymi.*
Z tej metody wynika prosty, choć dość brutalny algorytm dowodzenia nierówności.
Teza: $f(x) > m$.

1. Liczymy f'
2. Rozwiązujemy równanie $f'(x) = 0$. Oznaczmy zbiór tych rozwiązań przez X
3. Weryfikujemy, że $f(x) > m$ dla $x \in X$.
4. Jeśli chcemy udowodnić tezę na $[a, b]$, to musimy jeszcze zweryfikować $f(a) > m, f(b) > m$. Jeśli chcemy udowodnić tezę na $\mathbb{R}$ to musimy jeszcze sprawdzić $\lim_{x\to\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Jeśli wykonamy te kroki to mamy udowodnione, że $f(x) > m$ dla wszystkich x na badanej dziedzinie.
Bonus. W Twierdzeniu 6, x_0 może być minimum jedynie jeśli $f(x_0)'' < 0$ oraz maksimum jedynie jeśli $f(x_0)'' > 0$.

Autor: Miron Hunia
Prowadzący: Miron Hunia

Optymalizacja funkcji wielu zmiennych

Jeśli funkcja f przyjmuje kilka argumentów, np. $f(x, y, z)$, to nadal możemy używać tego aparatu. Możemy "zamrozić" zmienne y, z (potraktować je jako stałe) i wówczas możemy traktować f jako funkcję zmiennej x. W takiej sytuacji możemy obliczyć jej pochodną względem zmiennej x. Taką procedurę skrótowo zapisujemy jako $\frac{\partial f}{\partial x}$. Analogicznie możemy zdefiniować i obliczyć $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Gradient

Dla funkcji rzeczywistej wielu zmiennych pojęcie pochodnej przejmuje pojęcie gradientu. Gradient funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest wektorem zadanym następująco

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

Twierdzenie 7 (Pochodna parametryzacji)**.** Przyjmijmy, że do funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ wstawiamy jako argumenty $\boldsymbol{x} = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Wówczas pochodna funkcji $f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ (jest to funkcja jednej zmiennej t) to

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t))x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n(t))x_n'(t) = \nabla f(\boldsymbol{x}(t)) \cdot D\boldsymbol{x}(t)$$

Jest to analog Twierdzenia 4 dla funkcji wielu zmiennych.
W szczególności, ∇f wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji.

Twierdzenie 8 (Metoda Fermata dla wielu zmiennych)**.** Jeśli f jest różniczkowalne w punkcie (wektorze) x_0, U jest zbiorem otwartym* i $f(x_0) = \max_{x \in U} f(x)$ lub $f(x_0) = \min_{x \in U} f(x)$, to $\nabla f(x_0) = 0$.

To jest kwintesencjalne twierdzenie do używania pochodnych na OMie. Gdy mamy dowolną nierówność, możemy ją sprowadzić do problemu minimalizowania funkcji. Na przykład nierówność

$$(1 + a^2)(1 + b^2) \geq 4ab$$

Sprowadza się do

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 - 4ab = f(a, b) \geq 0$$

Mamy

$$\nabla f = (2ab^2 + 2a - 4b, 2a^2b + 2b - 4a)$$

Stąd

$$\begin{cases} 2ab^2 + 2a - 4b = 0 \\ 2a^2b + 2b - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2b}{1+b^2} \\ 2a^2b + 2b - 4a = 0 \end{cases}$$

Wstawiając do dolnego równania, możemy wyznaczyć b:

$$\frac{8b^3}{(1+b^2)^2} + 2b - \frac{8b}{1+b^2} = 0 \Leftrightarrow 2b = \frac{8b}{(1+b^2)^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{(1+b^2)^2} \Rightarrow (1+b^2) = \pm 2 \Rightarrow b = \pm 1$$

Wtedy dostajemy dwa punkty krytyczne $(1, 1)$ i $(-1, -1)$, mamy $f(1, 1) = 0$ i $f(-1, -1) = 0$.
Musimy jeszcze zbadać co się dzieje w nieskończoności, na szczęście to jest proste: załóżmy bez straty ogólności że a idzie do nieskończoności, wówczas a^2 dominuje nad $-4ab$.
Przekomplikowane? Może. Ale ważne, że wyszło, i co ważniejsze: nie wymagało od nas praktycznie żadnego myślenia.

Uwaga. Gdy używamy Twierdzenia 8 do dowodzenia nierówności, to

1. jeśli działamy na całym $\mathbb{R}^n$, to musimy zbadać co się dzieje gdy zbiegamy do nieskończoności. Wtedy co najmniej jedna zmienna zbiega do nieskończoności.
2. jeśli działamy na jakimś podzbiorze $\mathbb{R}^n$, to musimy zbadać co się dzieje na jego brzegu. Jeśli podzbiór nie jest ograniczony, to musimy też zbadać co się dzieje w nieskończnoności.

Dodatkowe uwagi

Do dowodzenia nierówności, gdzie zmienne spełniają pewne równanie (na przykład $a+b+c=1$) można stosować metody mnożników Lagrange'a, która uogólnia metodę Fermata. Wykracza ona poza materiał tego wykładu.
Słowo przestrogi. Stosowanie pochodnych w dowodzeniu nierówności, a szczególnie mnożników Lagrange'a, jest postrzegane krzywym okiem w środowiskach olimpijskich, co przekłada się na bardziej surowe ocenianie. Takie metody są również obliczeniowo wymagające. W stosowaniu tych metod trzeba uważać, by być solidnym i dokładnie rozpatrzyć założenia stosowanych twierdzeń, uzasadnić różniczkowalność odpowiednich funkcji itp. Używanie analizy do innych celów nie jest źle postrzegane. W szczególności, można używać pochodnej do sprawdzenia wypukłości funkcji (np. do nierówności Jensena), stosowanie pochodnej przy równaniach wielomianowych itp.

Zadania

1. Udowodnij, że funkcja $x \log x$ jest wypukła.
2. Udowodnij, że funkcja $\sqrt{\frac{x^3}{x^3+a}}$ jest wypukła dla $a > 0$ i $x > 0$.
3. Udowodnij, że funkcja $\frac{x-1}{x^n-1}$ jest wypukła dla $x > 1$ i $n > 1$.
4. Udowodnij, że jeśli x jest pierwiastkiem wielomianu P w krotności n, to jest pierwiastkiem wielomianu P' w krotności $n-1$.
   Wniosek. Wielomian $\frac{P}{NWD(P,P')}$ ma te same pierwiastki co P, ale wszystkie w pierwszej krotności.
5. (nierówności Bernoulliego)
   $(1+x)^r \geq 1+rx$ gdy $x \geq -1, r \geq 1$
   $(1+x)^r \leq 1+rx$ gdy $x \geq -1, 0 \leq r \leq 1$
6. Wielomian P ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że wielomian P' ma co najmniej $n-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.
7. Wielomian P stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że dla dowolnej liczby $a \neq 0$ wielomian $P'(x) + aP(x)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.
8. Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \dots, a_n$ spełniają równość
   $$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$
   Udowodnij, że wielomian $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ma pierwiastek w przedziale $(0,1)$.
9. Wyznacz liczbę pierwiastków wielomianu $x^3 - px + q$ w zależności od wartości parametrów $p, q \in \mathbb{R}$.
10. Wykaż, że dla dowolnych liczb $b > a > 0$ mamy nierówności
    $$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$
11. $a, b, c \geq 0$, udowodnij
    $$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a$$
12. Załóżmy, że $a \geq b \geq c > 0$. Udowodnij nierówność
    $$a^c \cdot b^a \cdot c^b \geq a^b \cdot b^c \cdot c^a$$