Rozwiązania Kontestu 4 – II etap

Zadanie 1. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że:

$$\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}\geqslant a+b+c.$$

Źródło: Zadanie 05.2 z link

Rozwiązanie 1. Po wymnożeniu, uporządkowaniu i przeniesieniu na jedną stronę otrzymujemy

$$0\leqslant 2a^4+2b^4+2c^4+a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ac^3+a^2b^2-2a^2b^2-2a^2bc^2-2ab^2c^2-2ab^2-2abc-2a^2bc$$

$$\begin{aligned}&=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+a^2b^2+b^4+c^4+a^4-2a^2c^2\\&+ab\big(a^2+b^2-2c^2\big)+bc\big(b^2+c^2-2a^2\big)+ca\big(c^2+a^2-2b^2\big)\\&=(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\\&+ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2\\&+ab\big(2ab-2c^2\big)+bc\big(2bc-2a^2\big)+ca\big(2ca-2b^2\big).\end{aligned}$$

Pierwsze 6 wyrazów od lewej z powyższego wyrażenia to kwadraty, więc na pewno są nieujemne, z kolei pozostałe możemy zapisać jako

$$\begin{aligned}&2a^2b^2-2abc^2+2b^2c^2-2a^2bc+2c^2a^2-2ab^2c\\&=a^2\big(b^2+c^2-2bc\big)+b^2\big(a^2+c^2-2ac\big)+c^2\big(a^2+b^2-2ab\big)\\&=a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Zatem nierówność jest spełniona.

Źródło: Rozwiązanie 05.2 z link

Zadanie 2. Niech $p>2$ będzie liczbą pierwszą, a $a_1,a_2,\ldots,a_p$ oraz $b_1,b_2,\ldots,b_p$ permutacjami liczb $1,2,\ldots,p$. Udowodnij, że pewne dwie spośród liczb $a_1b_1,a_2b_2,\ldots,a_pb_p$ dają tą samą resztę z dzielenia przez p

Źródło: Żółty Neugebayer

Rozwiązanie 2. Jeśli dla pewnych $i\neq j$ zachodzi $a_i=b_j=p$, to dla dowolnych wartości a_j,b_i mamy $a_ib_i=0 \mod p$ oraz $a_jb_j=0 \mod p$, zatem teza jest spełniona. Załóżmy w takim razie b.s.o, że $a_1=b_1=p$. Wtedy, jeśli dla każdego i oprócz 1 a_ib_i tworzy układ wszystkich pozostałych reszt, to ich iloczyn byłby równy $-1 \mod p$, z twierdzenia Wilsona. Z tego samego twierdzenia wiemy też, że iloczyn $a_2\cdot\ldots\cdot a_p=-1 \mod p$ oraz $b_2\cdot\ldots\cdot b_p=-1 \mod p$, ponieważ są to wszystkie możliwe liczby $\mod p$ oprócz 0. Zatem $a_2\cdot\ldots\cdot a_p\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_p=-1\cdot-1=1$, co jest sprzecznością.

Źródło: Żółty Neugebayer

Zadanie 3. Dany jest wiekokąt wypukły o obwodzie 4. Wykazać, że wielokąt ten można pokryć kołem o promieniu 1.

Źródło: zestaw zadań prof. Pompe z przedmiotu Geometria I – MIM UW

Rozwiązanie 3. Wybierzmy pewne dwa punkty P, Q na obwodzie wielokąta, tak aby dzieliły ten obwód na dwie równe części. Środek odcinka PQ nazwijmy M. Udowodnijmy, że odległość między dowolnym wierzchołkiem a M jest mniejsza od 1, a zatem cały wielokąt mieści się w kole o promieniu 1 i środku w M.

Zauważmy, że $PQ < 2$, zatem $PM, MQ < 1$. Rozważmy teraz dowolny wierzchołek X, i odbijmy go symetrycznie względem M, otrzymamy równoległobok $XPX'Q$. Z nierówności trójkąta $PX + PX' > XX' = 2XM$. Skoro $XPX'Q$ jest rónoległobokiem, ta nierówność jest równoważna z $PX + XQ > 2XM$. Ale wiemy że X należy do łamanej PQ długości 2 (utworzonej przez podzielenie obwodu wielokąta na pół), zatem mamy

$$2 \geqslant PX + XQ > 2XM \iff 1 > XM,$$

co kończy zadanie.

Źródło: rozwiązanie z ćwiczeń

Zadanie 4. Dominika i Stefan grają w grę. Na początku Dominika pisze na tablicy dodatnią liczbę całkowitą, następnie Dominika i Stefan na zmianę wykonują ruchy. Stefan zaczyna. W każdym swoim ruchu Stefan zamienia liczbę n znajdującą się na tablicy na liczbę postaci $n - a^2$ dla pewnego całkowitego a. W każdym swoim ruchy Dominika zmiania liczbę n znajdującą się na tablicy na pewną jej całkowitą potęgę n^k. Stefan wygrywa jeśli w pewnym momencie na tablicy pojawi się liczba 0. Czy Stefan ma strategię wygrywającą?

Źródło: The 11th Romanian Master of Mathematics Competition: link

Rozwiązanie 4. Odpowiedzią jest tak. Dla dodatniego n zdefiniujmy jej *bezkwadratową część*$S(n)$ jako najmniejsze dodatnie a, takie że n/a jest kwadratem jakiejś liczby całkowitej. Czyli $S(n)$ jest iloczynem wszystkich liczb pierwszych, których potęga w rokładzie n jest nieparzysta. Przyjmujemy, że $S(0) = 0$.

Pokażmy teraz, że (*) w każdym swoim ruchu Dominika nie zwiększa *bezkwadratowej* części liczby na tablicy, oraz że (**) Stefan zawsze może zastąpić dodatnią liczbę na tablicy taką nieujemną liczbą k, że $S(k) < S(n)$. Zatem dla gry rozpoczętej od dodatniej liczby Stefan może wygrać w maksymalnie $S(n)$ ruchach.

Udowodnijmy teraz (*): Z definicji $S(n)$, jeśli Dominika zmieni n na $n^k = n'$, to $S(n') = S(n)$ jeśli k jest nieparzyste lub $S(n') = 1 \leqslant S(n)$ jeśli k jest parzyste.

Z kolei aby udowodnic (**) rozważmy stan tablicy przed ruchem Stefana - znajduje się tam jakaś liczba $n = S(n) \cdot b^2$. Zatem w swoim ruchu Stefan może zastąpić ją $n' = n - b^2 = (S(n) - 1)b^2$, zatem $S(n') \leqslant S(n) - 1$.

Źródło: The 11th Romanian Master of Mathematics Competition: link