Mecz starszych – rozwiązania

Zadanie 1. Dane są względnie pierwsze wielomiany f, g z całkowitymi współczynnikami. Definiujemy ciąg $a_n = NWD(f(n), g(n))$. Udowodnić, że ten ciąg jest okresowy.

Dowód. Wielomiany $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ są względnie pierwsze, więc korzystając z algorytmu Euklidesa można znaleźć wielomiany $a, b \in \mathbb{Q}[X]$, takie że

$$fa + gb = 1,$$

więc mnożąc przez odpowiednią liczbę naturalną A dostaniemy

$$fF + gG = A,$$

gdzie $F = Aa \in \mathbb{Z}[X]$ i $G = Ab \in \mathbb{Z}[X]$. Pokażemy, że A jest okresem ciągu (a_n). Wiemy, że dla $n \in \mathbb{N}$ $f(n + A) \equiv f(n) \pmod A$ i $g(n + A) \equiv g(n) \pmod A$, więc $a_n \mid f(n + A)$ i $a_n \mid g(n + A)$, bo $a_n \mid A$, czyli $a_n \mid a_{n+A}$. Podobnie $a_{n+A} \mid a_n$, więc $a_{n+A} = a_n$. ■

Zadanie 2. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie że

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy).$$

Dowód. Udowodnimy, że jedynymi rozwiązaniami są $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$ i $f(x) = 1 - x$, które jak łatwo sprawdzić spełniają nasze równanie. Zauważmy, że jeśli f jest rozwiązaniem, to $-f$ także. Ponadto jeśli $f(0) = 0$, to podstawiając $y = 0$ dostaniemy $f \equiv 0$, więc dalej zakładamy $f(0) > 0$.

Pokażemy, że $f(z) = 0 \iff z = 1$ oraz $f(0) = 1$. Gdyby $f(z) = 0$ i $z \neq 1$, to podstawiając $(x, y) = (z, z(z - 1)^{-1})$ (tak aby $x + y = xy$) wnioskujemy, że $f(0) = 0$ co daje sprzeczność. Zauważmy, że wstawiając $x = y = 0$ otrzymamy $f(f(0)^2) = 0$, więc $f(0) = 1$ i $f(1) = 0$.

Teraz wykażemy, że jeżeli f jest różnowartościowa, to $f(x) = 1 - x$. Podstawiając $y = 0$ dostajemy $f(f(x)) = 1 - f(x)$, więc

$$f(1 - f(x)) = f(f(f(x))) = 1 - f(f(x)) = f(x).$$

Zatem $1 - f(x) = x$, skąd $f(x) = 1 - x$.

Pozostaje wykazać różnowartościowość f. Wstawiając $y = 1$ do naszego równania otrzymujemy $f(x + 1) = f(x) - 1$, więc z indukcji

$$f(x + n) = f(x) - n.$$

Załóżmy teraz, że $f(a) = f(b)$. Korzystając z powyższej równości możemy przesunąć a oraz b, tak aby istniały liczby x oraz y spełniające $x + y = a + 1$, $xy = b$ (takie liczby istnieją wtedy i tylko wtedy gdy $(a + 1)^2 - 4b \geqslant 0$). Wówczas

$$f(f(x)f(y)) = f(xy) - f(x + y) = f(b) - f(a + 1) = f(b) + 1 - f(a) = 1,$$

skąd

$$f(f(x)f(y) + 1) = 0.$$

Wobec tego $f(x)f(y) + 1 = 1$, więc $f(x)f(y) = 0$ i $1 \in \{x, y\}$. Jednakże z tego wynika $a = b$, czyli f jest istotnie różnowartościowa. ■

Zadanie 3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Określ najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą k, która spełnia następującą własność: możliwe jest zaznaczenie k komórek na planszy $2n \times 2n$ tak, aby istniał unikatowy podział planszy na kostki domina 1×2 i 2×1, w taki sposób, żeby żadna z nich nie zawierała dwóch spośród oznaczonych komórek.

Zadanie 4. Dla pewnych liczb naturalnych n możemy znaleźć dwa różne multizbiory liczb całkowitych dodatnich $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ takie, że multizbiory

$$\{a_1 + a_2, a_1 + a_3, \ldots, a_1 + a_n, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n\} \quad \text{oraz}$$
$$\{b_1 + b_2, b_1 + b_3, \ldots, b_1 + b_n, b_2 + b_3, \ldots, b_{n-1} + b_n\}$$

są równe. Znajdź wszystkie n o takiej własności.

Dowód. Rozpatrzmy wielomiany $A(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i}, B(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}$. Te wielomiany spełniają $A(1) = B(1) = n$ oraz

$$A(x)^2 - B(x)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} x^{a_i + a_j}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + 2 \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} x^{b_i + b_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} - \sum_{i=1}^{n} x^{2b_i}$$
$$= A(x^2) - B(x^2)$$

Dzieląc obustronnie przez niezerowy wielomian $A(x) - B(x)$ dostajemy $A(x) + B(x) = \frac{A(x^2) - B(x^2)}{A(x) - B(x)}$. Chcemy wyznaczyć z tego równania n. Wstawiając $x = 1$ z lewej strony dostajemy $2n$, ale z prawej mamy dzielenie przez 0. Radzimy sobie z tym w sposób standardowy dla wielomianów. Z tw. Bezouta, $A(x) - B(x) = (1 - x)^k C(x)$ dla pewnego $k > 0$ i wielomianu $C(x)$ takiego, że $C(1) \neq 0$. Wówczas

$$A(x) + B(x) = \frac{(1 - x^2)^k C(x^2)}{(1 - x)^k C(x)} = (1 + x)^k \frac{C(x^2)}{C(x)} \Rightarrow 2n = A(1) + B(1) = 2^k \frac{C(1)}{C(1)} = 2^k$$

Stąd $n = 2^{k-1}$ jest warunkiem koniecznym. Przeprowadzając to samo rozumowanie od tyłu możemy udowodnić, że dla wszystkich n tej postaci takie multizbiory istnieją.
Niech $n = 2^{k-1}$. Weźmy $C(x) = x$, wtedy $A(x) - B(x) = x(1-x)^k$. Biorę $A(x) = x\frac{(1+x)^k + (1-x)^k}{2}$ i $B(x) = x\frac{(1+x)^k - (1-x)^k}{2}$. Łatwo zweryfikować, że te wielomiany spełniają $A(x) - B(x) = x(1-x)^k$. Ze wzoru dwumianowego wynika, że mają współczynniki całkowite nieujemne. Ponadto

$$A(x)^2 - B(x)^2 = (A(x) - B(x))\,(A(x) + B(x)) =$$
$$= x(1 - x)^k \cdot x(1 + x)^k = x^2(1 - x^2)^k = A(x^2) - B(x^2)$$

Zatem musi zachodzić

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} x^{a_i + a_j} = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} x^{b_i + b_j}$$

co implikuje równość multizbiorów $\{a_i + a_j : 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$ i $\{b_i + b_j : 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Sprawdzamy, że $A(x), B(x)$ mają zerowy współczynnik przy x^0, więc $a_i, b_i > 0$. Finalnie widzimy, że $A(1) = B(1) = n = 2^{k-1}$, więc oba multizbiory mają wymaganą liczbę elementów. Wygenerowane w ten sposób multizbiory można opisać następująco.
Jeśli $n = 2^{k-1}$, to multizbiór $\{a_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ zawiera same nieparzyste liczby, z czego liczbę nieparzystą m zawiera $\binom{k}{m-1}$ razy. Z kolei multizbiór $\{b_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ zawiera same parzyste liczby, gdzie liczba m zawiera się w nim $\binom{k}{m-1}$ razy. ■

Zadanie 5. Uczestnik Warsztatów Matematycznych pisał kontest w grupie finalistów. Po tym jak 2 godziny po rozpoczęciu kontestu wleciała poprawka do treści wpadł w gwałtowny szał. Wziął dwie kwadratowe kartki papieru o polu 2023 i podarł każdą z nich na 2023 kawałków w kształcie wielokątów o polach równych 1 (każdą z nich mógł podrzeć w inny sposób). Następnie złożył fragmenty każdej z dwóch kartek z powrotem w swój oryginalny kształt i ułożył na sobie w taki sposób, że fragmenty drugiej kartki przykryły kompletnie kawałki pierwszej kartki. Udowodnij, że uczestnik może położone tak kartki przebić z użyciem 2023 pinezek w taki sposób, aby wszystkie 4046 fragmentów zostało przebitych.

Dowód. Potraktujmy każdy fragment kartki jako wierzchołek w grafie, przy czym dwa wierzchołki są połączone nieskierowaną krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy jeden fragment leży (przynajmniej częściowo) na drugim. W konsekwencji krawędzie istnieją jedynie pomiędzy fragmentami pierwszej i drugiej kartki, zatem utworzony graf jest dwudzielny. Nazwijmy zbiór wierzchołków odpowiadających fragmentom pierwszej kartki A, a zbiór pozostałych wierzchołków B.
Rozpatrzmy dowolny podzbiór $K \subseteq A$ rozmiaru n. Wtedy pole figury utworzonej przez odpowiadające im n fragmentów wynosi dokładnie n. Rozpatrzmy podzbiór L wszystkich wierzchołków z B, które są połączone krawędzią z którymś z wierzchołków z K. Wówczas figura utworzona przez fragmenty odpowiadające wierzchołkom z K zawiera się w figurze utworzonej przez figurę złożoną z wierzchołków z L, zatem pole figury odpowiadającej L musi wynosić co najmniej n. Ale ponieważ każdy z fragmentów w L ma pole 1, to musi ich być co najmniej n. Ten graf spełnia zatem warunek Halla i $|A| = |B|$, więc istnieje w nim pełne skojarzenie. Dla krawędzi $e = (p, q)$ należącej do tego skojarzenia, uczestnik może przebić pinezkę przez fragmenty p, q. Wówczas użyje 2023 pinezek i na pewno przebije każdy z 4046 fragmentów. ■

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnych, dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ac}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant a+b+c$$

Dowód. Wyrażenie jest symetryczne, więc bez straty ogólności zakładam $a \geqslant b \geqslant c$. Wówczas $a^2 \geqslant b^2 \geqslant c^2$ i $\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{1}{a+b}$, więc z nierówności ciągów jednomonotonicznych

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$$

Dodając do obu stron $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$ dostajemy

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant \frac{a(a+b)}{a+b} + \frac{b^2(b+c)}{b+c} + \frac{c^2(c+a)}{c+a} = a+b+c$$

■

Zadanie 7. Udowodnij że istnieje nieskończenie wiele takich trójek liczb całkowitych (a, b, p) takich, że p jest liczbą pierwszą oraz spełnione są dwa następujące warunki:

1. $0 < a \leqslant b < p$

2. $p^5 \mid (a+b)^p - a^p - b^p$

Dowód. Kluczowa jest obserwacja, że dla $p \equiv 1 \pmod 3$ $p(x^2+xy+y^2)^2 \mid (x+y)^p - x^p - y^p$ jako wielomiany zmiennych x, y. Wtedy z faktu, że, jak udowodnimy na końcu, istnieją $0 < a$, $b < p$, takie że $p^2 = a^2 + ab + b^2$, wynika teza.

Nasza obserwacja jest równoważna z

$$(x^2 + x + 1)^2 \mid (x + 1)^p - x^p - 1 =: F(x),$$

bo współczynniki dwumianowe $\binom{p}{k}$ dzielą się przez p dla $0 < k < p$. Niech ζ będzie pierwiastkiem z jedynki trzeciego stopnia. Wtedy

$$F(\zeta) = (-\zeta^2)^p - \zeta^p - 1 = -\zeta^2 - \zeta - 1 = 0.$$

Ponadto

$$F'(\zeta) = p(\zeta + 1)^{p-1} - p\zeta^{p-1} = p - p = 0,$$

więc ζ jest podwójnym pierwiastkiem F, czyli $(x^2 + x + 1)^2 \mid F(x)$.

Pozostaje pokazać istnienie liczb $0 < a$, $b < p$, takich że $p^2 = a^2 + ab + b^2$. Korzystając z prawa wzajemności reszt kwadratowych

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{3-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = 1,$$

więc -3 jest resztą kwadratową modulo p, skąd jak zaraz pokażemy wynika, że jest też resztą kwadratową modulo p^2. Z LTE

$$v_p((-3)^{\frac{p(p-1)}{2}} - 1) = v_p((-3)^{\frac{p-1}{2}} - 1) + 1 \geqslant 2,$$

więc jeśli g jest generatorem reszt modulo p^2 i $-3 \equiv g^x \pmod{p^2}$, to $2 \mid x$ i istotnie -3 jest resztą kwadratową modulo p^2. Wobec tego równanie $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p^2} \iff (2x+1)^2 \equiv -3 \pmod{p^2}$ ma rozwiązania i niech $r \in \{1, \ldots, p^2 - 1\}$ będzie dowolnym z nich. Z tw. Thue'go istnieją dwie liczby a, b, takie że $0 < |a| \leqslant p$ i $0 < b < p$ spełniające $ra \equiv b \pmod{p^2}$, więc

$$a^2 + ab + b^2 \equiv a^2(r^2 + r + 1) \equiv 0 \pmod{p^2},$$

skąd $|a| < p$ i $0 < a^2 + ab + b^2 < 3p^2$, czyli

$$a^2 + ab + b^2 = p^2 \quad \text{lub}$$

$$a^2 + ab + b^2 = 2p^2.$$

Drugi przypadek nie może zachodzić, co łatwo sprawdzić rozpatrując reszty a i b modulo 2. Zatem $a^2+ab+b^2 = p^2$. Niech $a' \in \mathbb{R}$ będzie drugim pierwiastkiem wielomianu $x^2+bx+b^2-p^2$, tzn.

$$x^2 + bx + b^2 - p^2 = (x - a)(x - a').$$

Wówczas $a+a' = -b$, więc $a' \in \mathbb{Z}$ oraz $aa' = b^2 - p^2 < 0$, więc możemy dodatkowo założyć $a > 0$ (ewentualnie zamieniając a z a'). Zatem znaleźliśmy $0 < a$, $b < p$, takie że $p^2 = a^2 + ab + b^2$. ■

Zadanie 8. Dane są nieparzysta liczba pierwsza p i liczba całkowita $k \geqslant 2$, takie że $p^2 \nmid 2^{p-1}-1$. Dany jest również wielokąt foremny o p^k wierzchołkach $A_0A_1\dots A_{p^k-1}$. Niech S będzie zbiorem wierzchołków A_r, takich że istnieje całkowite nieujemne i spełniające $p^k \mid 2^i - r$. Udowodnić, że S można podzielić na rozłączne p-elementowe zbiory, których elementy są wierzchołkami p-kąta foremnego.

Dowód. Niech g będzie generatorem reszt modulo p^k i $s \in \{1,2,\dots p^{k-1}(p-1)\}$, takie że $g^s \equiv 2\,(mod\,p^k)$. Wtedy dla $a \in \{0,1,\dots,p^k-1\}$ istnieje $i \in \mathbb{N}$, takie że $a \equiv 2^i\,(mod\,p^k)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje x niepodzielne przez p, takie że $a \equiv x^s\,(mod\,p^k)$.

Pokażemy, że dla $i \in \mathbb{N}$ istnieje $j \in \mathbb{N}$, takie że $2^i + p^{k-1} \equiv 2^j\,(mod\,p^k)$. Równoważnie dla x niepodzielnego przez p istnieje y niepodzielny przez p, taki że $x^s + p^{k-1} \equiv y^s (mod p^k)$. Zauważmy, że dla $l \in \mathbb{N}$, korzystając ze wzoru dwumianowego, mamy

$$(x + p^{k-1}l)^s - x^s \equiv sx^{s-1}p^{k-1}l\,(mod\,p^k),$$

więc wystarczy wziąć $l \in \{1,2,\dots,p-1\}$, takie że

$$sx^{s-1}l \equiv 1\,(mod\,p)$$

oraz $y \equiv x + p^{k-1}l\,(mod\,p^k)$, bo jak udowodnimy $p \nmid s$.

Przypuśćmy, że $p \mid s$. Wówczas

$$2^{p^{k-2}(p-1)} \equiv g^{p^{k-2}s(p-1)} \equiv 1\,(mod\,p^k),$$

więc

$$p^k \mid 2^{p^{k-2}(p-1)} - 1.$$

Jednakże z LTE

$$v_p(2^{p^{k-2}(p-1)} - 1^{p^{k-2}}) = v_p(2^{p-1}-1) + (k-2) = k-1,$$

więc istotnie $p \nmid s$.

Teza wynika bezpośrednio z wyżej udowodnionego faktu. ■

Zadanie 9. Dany jest czworokąt cykliczny $ABCD$. Przedłużmy półproste DA i DC do punktów P i Q, tak że $AP = BC$ i $CQ = AB$ (P i Q leżą po przeciwnej stronie D względem A i C). M jest środkiem PQ. Udowodnij, że $MA \perp MC$.

Dowód. Niech X będzie przecięciem (DAC) i (DPQ). Wówczas $X : AP \to CQ$, czyli $\frac{XA}{XC} = \frac{AP}{CQ} = \frac{BC}{AB}$. Niech K będzie przecięciem BX i AC. Wówczas z podobieństwa $\frac{AX}{AK} = \frac{BC}{BK}$ oraz $\frac{CX}{CK} = \frac{AB}{BK}$. Z powyższych zależności dostajemy $AK = CK$, czyli K jest środkiem AC, więc $X : AK \to PM$. Stąd $\frac{KM}{XK} = \frac{AP}{AX} = \frac{BC}{AX} = \frac{CK}{XK}$, więc $KM = CK$ i analogicznie $KM = AK$ co dowodzi tezy. ■

Zadanie 10. Niech $ABCD$ będzie czworokątem cyklicznym oraz $E = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $F = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $G = \overline{DA} \cap \overline{BC}$. Okrąg opisany na trójkącie ABE przecina prostą BC w punktach B i P, a okrąg opisany na trójkącie ADE przecina prostą CD w punktach D i Q. Załóżmy, że C, B, P, G oraz C, Q, D, F są współliniowe w tej kolejności. Niech $M = \overline{FP} \cap \overline{GQ}$. Udowodnić, że $\sphericalangle MAC = 90^\circ$.

Dowód. Główny pomysł polega na skupieniu się na samoprzecinającym się czworokącie cyklicznym $PQDB$ zamiast danym czworokącie $ABCD$.

Zauważmy, że istotnie czworokąt $PBQD$ jest cykliczny, bo z potęgi punktu

$$CQ \cdot CD = CA \cdot CE = CB \cdot CP.$$

Ponadto E leży na prostej PQ, bo używając kątów skierowanych

$$\measuredangle AEP = \measuredangle ABP = \measuredangle ABC = \measuredangle ADC = \measuredangle ADQ = \measuredangle AEQ.$$

Wobec tego A jest punktem Miquela czworokąta cyklicznego $PQDB$ i jeśli $H = \overline{PD} \cap \overline{BQ}$, to z własności punktu Miquela A jest rzutem punktu H na prostą CE. Pozostaje zauważyć, że punkty M, A, H są współliniowe na mocy twierdzenia Pappusa dla $\overline{BPG}$ i $\overline{DQF}$. ■

Zadanie 11. Punkt G jest środkiem ciężkości czworościanu $A_1A_2A_3A_4$, a punkty A_1', A_2', A_3' i A_4' to drugie punkty przecięcia sfery opisanej na czworościanie $A_1A_2A_3A_4$ z prostymi GA_1, GA_2, GA_3 i GA_4, odpowiednio. Udowodnić, że

$$GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GA_4 \leqslant GA_1' \cdot GA_2' \cdot GA_3' \cdot GA_4'$$

oraz

$$\frac{1}{GA_1'} + \frac{1}{GA_2'} + \frac{1}{GA_3'} + \frac{1}{GA_4'} \leqslant \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GA_2} + \frac{1}{GA_3} + \frac{1}{GA_4}.$$