

Kontest 3 - 28.09.2023

Starsi

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n \geq 2$, że wszystkie liczby naturalne mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny.

Zadanie 2. Dany jest zbiór X składający się z 2003 liczb rzeczywistych. Dla każdych różnych $x, y \in X$ zachodzi $x^2 + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Udowodnij, że $x\sqrt{2}$ jest wymierne dla każdego $x \in X$.

Zadanie 3. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC , zaś odcinki AH_A , BH_B i CH_C są jego wysokościami. Punkty O_A , O_B i O_C są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach BOC , COA i AOB . Wykazać, że proste O_AH_A , O_BH_B i O_CH_C mają punkt wspólny.

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita dodatnia n . Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele kwadratów postaci $k \cdot 2^n - 7$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią.