

PreOM 2024 - Dzień 3

Zadanie 1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem cyklicznym którego przecięcie przekątnych to E , a środek boku AB to M . Niech P, Q, R będą rzutami prostopadłymi E na DA, AB, BC odpowiednio. Udowodnij, że M leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR .

Zadanie 2. Niech $n > 2$ będzie naturalne oraz p_1, p_2, \dots, p_n będą różnymi liczbami pierwszymi. Załóżmy, że istnieje dodatnia liczba całkowita r o tej własności, że reszta z dzielenia: $\prod_{i \neq k} p_i$ przez p_k jest równa r dla wszystkich $1 \leq k \leq n$. Udowodnij, że $r \leq n - 2$.

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze liczb wymiernych dodatnich, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające dla wszystkich dodatnich liczb wymiernych warunki

$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad \text{oraz} \quad f(x^3) = (f(x))^3.$$

Zadanie 4. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich nieprzystających trójkątów prostokątnych, że ich boki mają całkowitą długość oraz liczby wyrażające długości przyprostokątnych tych trójkątów są względnie pierwsze i ich różnica jest równa 7.