Kontest 1 - 27.09.2022

Rozwiązania Starsi

Zadanie 1. Niech AA' będzie środkową w trójkącie ABC. Niech D będzie punktem na AA' oraz E przecięciem BD i AC. Okrąg opisany na trójkącie BCE przecina AB ponownie w punkcie F.
Udowodnij, że jeśli punkty C, D i F są współliniowe to trójkąt ABC jest równoramienny.
Rozwiązanie: Z tw. Cevy dla trójkąta ABC i punktów A', E, F otrzymujemy

$$\frac{BA'}{CA'}\frac{CE}{AE}\frac{AF}{BF} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AF}{BF},$$

więc z tw. odwrotnego do tw. Talesa $EF \parallel BC$. Zatem czworokąt $BCEF$ jest cyklicznym trapezem, więc jest trapezem równoramiennym, czyli $AB = AC$.

■

Zadanie 2. Dany jest graf dwudzielny o częściach A i B, w którym $|A| = 2n$, $|B| = 2n + 1$ oraz wszystkie wierzchołki w części A mają ten sam stopień.
Wykaż, że pewne dwa wierzchołki w części B mają ten sam stopień.
Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że wierzchołki w części B mają parami różne stopnie. Skoro są połączone tylko z wierzchołkami z A, to stopniami tymi są wszystkie liczby od 0 do $2n$. Liczba krawędzi w grafie jest więc równa

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$$

czyli nie jest podzielna przez $2n$. Z drugiej strony, jeśli każdy wierzchołek w części A ma stopień d, to łączna liczba krawędzi w grafie jest równa $2nd$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

■

Zadanie 3. Niech AD, BE, CF będą wysokościami w trójkącie ostrokątnym ABC. Prosta równoległa do EF przechodząca przez D przecina prostą AB w punkcie R i AC w Q. Niech P będzie przecięciem prostych EF i CB. Udowodnij, że okrąg opisany na PQR przechodzi przez środek odcinka BC.

Rozwiązanie: Załóżmy b.s.o., że $AB < AC$. Niech M będzie środkiem BC. Wtedy P leży na półprostej $\overrightarrow{CB}$ za B, Q na odcinku AC, a R na półprostej $\overrightarrow{AB}$ za B. Punkty B, C, E, F oraz A, B, D, E są współokręgowe, więc $\angle QCB = \angle ACB = \angle AFE = \angle ARQ = \angle BRQ$, czyli punkty B, R, C, Q są współokręgowe. Zatem z potęgi punktu mamy

$$DB \cdot DC = DQ \cdot DR.$$

Zauważmy, że $\angle BEC = 90°$ i M jest środkiem BC, więc $MB = ME$ i $\angle EBM = \angle BEM$. Ponadto

$$\angle EBM = \angle EPM + \angle BEP$$

$$\angle BEM = \angle DEM + \angle BED.$$

Jednakże $\angle BEP = \angle BCF = 90° - \angle ABC = \angle BAD = \angle BED$, więc $\angle EPM = \angle DEM$, czyli trójkąty EPM i DEM są podobne. Wobec tego

$$MB^2 = ME^2 = MD \cdot MP = MD \cdot (MD + PD) = MD^2 + MD \cdot PD \Rightarrow$$

$$MD \cdot PD = MB^2 - MD^2 = (MB - MD)(MB + MD) = BD \cdot (MC + MD) = BD \cdot CD.$$

Zatem $MD \cdot PD = BD \cdot CD = DQ \cdot DR$, więc okrąg opisany na trójkącie PQR przechodzi przez M.

■

Zadanie 4. Wyznacz liczbę par dodatnich liczb całkowitych m, n spełniających równanie:

$$m(m+1) = (n-17)(n+17)$$

. **Rozwiązanie:**

$$a = n - m$$

$$0 = (m+a)^2 - 17^2 - m^2 - m = a^2 + (2a-1)m - 17^2 \iff$$

$$\iff (0 < a < 17 \wedge 2a - 1 \mid 17^2 - a^2) \iff$$

$$\iff (0 < a < 17 \wedge 2a-1 \mid 4(17^2 - a^2) + (2a-1)(2a+1) = 34^2 - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \iff$$

$$\iff (0 < 2a - 1 < 33 \wedge 2a - 1 \mid 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \iff$$

$$\iff 2a - 1 \in \{1, 3, 5, 7, 11, 15, 21\}$$

■