

# Kombi-Geo – Finałiści

## Metody

- Ekstremum!!! Rozważaj punkty które są najbliżej siebie, punkty które mają najmniejszą/największą którąś współrzędną itp.
- Indukcja!
- Otoczka wypukła zbioru punktów  $S$  to najmniejszy wielokąt wypukły taki że każdy z punktów z  $S$  leży wewnątrz lub na brzegu tego wielokąta. Wierzchołkami otoczki wypukłej są punkty z  $S$ . Jeśli punktom z  $S$  odpowiadają liczby zespolone  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , to otoczka wypukła to zbiór wszystkich punktów postaci  $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ , gdzie  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  są liczbami nieujemnymi takimi że  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ .
- Dany jest  $n$ -kąć foremny. Jego triangulacją nazwiemy zbiór  $n - 3$  jego przekątnych, z których żadne dwie się nie przecinają poza wierzchołkami wielokąta. Triangulacja dzieli wielokąt na  $n - 2$  trójkąty.
- Twierdzenie Sylvestra-Gallai: Wśród  $n$  punktów na płaszczyźnie takich że nie wszystkie są współliniowe, istnieje prosta która przechodzi przez dokładnie 2 z nich.
- Wzór Picka: Niech  $P$  będzie wielokątem bez samoprzecięć, którego wszystkie wierzchołki są punktami kratowymi. Niech  $W$  będzie liczbą punktów kratowych wewnątrz wielokąta, a  $B$  będzie liczbą punktów kratowych na jego brzegach. Wtedy pole tego wielokąta jest równe  $W + \frac{B}{2} - 1$ .
- Twierdzenie Helly'ego: W przestrzeni  $\mathbb{R}^d$  dane jest  $n > d$  zbiorów wypukłych  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Jeśli każdy podzbiór  $d + 1$  z nich ma niepuste przecięcie, to przecięcie wszystkich tych zbiorów też jest niepuste.

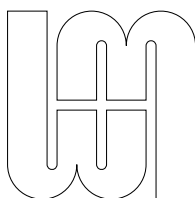
## Zadania

**Zadanie 1.** Dane jest 5 punktów płaszczyzny, żadne 3 nie są współliniowe. Udowodnij że pewne 4 z nich tworzą wielokąt wypukły.

**Zadanie 2.** (Mszana '23) Danych jest  $n \geq 2$  punktów na płaszczyźnie. Załóżmy, że dla każdego punktu  $X$ , istnieje dokładnie jeden punkt  $N(X)$ , który jest bliżej  $X$  niż wszystkie pozostałe punkty. Dla każdego punktu  $X$ , rysujemy z niego odcinek do  $N(X)$  oraz kolorujemy  $N(X)$  na czerwono. Załóżmy, że na koniec każde dwa z danych punktów są połączone łamaną. Udowodnić, że jest co najmniej  $\frac{n-2}{4}$  czerwonych punktów.

**Zadanie 3.** (Mszana '22) Niech  $P = A_1 A_2 A_3 \dots A_{180}$  będzie 180-kątem foremnym. Niech  $X$  będzie punktem we wnętrzu  $P$ . Udowodnić, że istnieją takie indeksy  $i \neq j$ , że  $179^\circ < \angle A_i X A_j \leq 180^\circ$ .

**Zadanie 4.** Na płaszczyźnie dany jest wielokąt o obwodzie równym 4. Udowodnij że da się go przykryć kołem o promieniu 1.



Poręba Wielka, 13.01.2025

Autor: Jeremi Hyska

Prowadzący: Jeremi Hyska

**Zadanie 5.** (Mszana '24) Czy istnieje 777-kąt wypukły którego zbiór długości boków to  $\{1, 2, \dots, 777\}$ , a wszystkie jego kąty mają równe miary?

**Zadanie 6.** (Mszana '22) Punktem kratowym nazwiemy punkt na płaszczyźnie o obu współrzędnych całkowitych. Dany jest skończony zbiór  $S$  punktów kratowych. Wykazać, że można wykonać jedynie skończenie wiele operacji następującej postaci: dla czterech różnych punktów kratowych  $A, B, C, D$ , przy czym punkty  $A, B$  należą do  $S$ , a punkty  $C, D$  nie należą do  $S$ ,  $AB > CD$  oraz  $ACBD$  jest równoległobokiem, punkty  $A, B$  usuwamy z  $S$ , zaś punkty  $C, D$  dodajemy do  $S$ .

**Zadanie 7.** (Mszana '22) Na płaszczyźnie danych jest  $n$  prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Wykazać, że wśród części, na które rozcinają one płaszczyznę, jest co najmniej  $n - 2$  trójkątów.

**Zadanie 8.** Dany jest skończony zbiór kartek o sumarycznym polu 4. Udowodnij że za ich pomocą da się przykryć kwadrat o boku długości 1. (Kartki mogą na siebie nachodzić).

**Zadanie 9.** (RMO '03) Dany jest wielokąt wypukły na płaszczyźnie. Udowodnij że istnieje co najwyżej jedna jego triangulacja taka, że każdy powstały w niej trójkąt jest ostrokątny.

**Zadanie 10.** (IGO '21) Dany jest wypukły 2024-kąt  $A_1A_2\dots A_{2024}$ . Udowodnij że istnieją takie 2 jego wierzchołki  $A_i, A_j$ , że koło o średnicy  $A_iA_j$  zawiera co najmniej 674 pozostałych wierzchołków.

**Zadanie 11.** (Chiny '08) Znajdź wszystkie takie liczby całkowite dodatnie  $n$  o tej własności, że istnieje  $n$ -kąt wypukły ze wszystkimi wierzchołkami w punktach kratowych, którego wszystkie długości boków są różnymi liczbami całkowitymi nieparzystymi.