Kontest 3 - 28.09.2023

Rozwiązania Pierwszaki

Zadanie 1. Czy istnieje 14 liczb naturalnych o takiej własności, że jeśli dodamy do każdej jeden to iloczyn wszystkich liczb rośnie 2008 razy?

Dowód. Zauważmy, że $2008 = 2^3 \cdot 251$. Biorąc:

$$x_1 = x_2 = \ldots x_{10} = 1, \quad x_{11} = x_{12} = x_{13} = 4, \quad x_{14} = 250$$

dostajemy tezę na mocy równości

$$1^{10} \cdot 4^3 \cdot 250 \cdot 2008 = 2^{10} \cdot 5^3 \cdot 251.$$

■

Zadanie 2. Niech $ABCD$ będzie czworokątem cyklicznym. Proste AD i BC przecinają się w punkcie E. Oznaczmy przez M przecięcie BD z prostą przechodzącą przez E równoległą do AC. Z M rysujemy prostą styczną do okręgu opisanego na $ABCD$ w punkcie T. Udowodnij, że $MT = ME$.

Dowód. Z równoległości ME i AC mamy

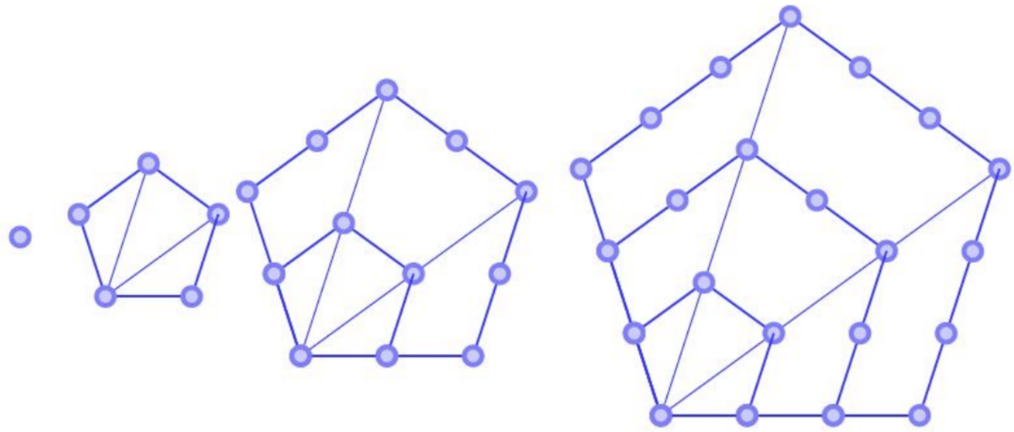
$$\sphericalangle MEB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle MDE$$

Zachodzi również $\sphericalangle BME = \sphericalangle EMD$, więc trójkąty BME oraz EMD są podobne. Zatem

$$\frac{MB}{ME} = \frac{ME}{MD}.$$

Wynika stąd, że $ME^2 = MD \cdot MB$. Z potęgi punktu mamy również $MT^2 = MD \cdot MB$, co nam daje $MT = ME$. ■

Zadanie 3. Liczby pięciokątne $P_1 = 1, P_2 = 5, P_3 = 12, P_4 = 22, \ldots$ są liczbami wierzchołków na kolejnych planszach, jak na rysunku poniżej.



Znajdź wzór jawny na P_n.

Dowód. Zauważmy, że $P_n = P_{n-1}+4+3(n-2) = P_{n-1}+3n-2$, gdyż jest to liczba wierzchołków planszy $n-1$ z dodatkowymi 4 wierzchołkami i 3 krawędziami długości $n-2$. Zakładając, że $P_n = an^2+bn+c$ dla pewnych współczynników rzeczywistych a, b, c, mamy:

$$an^2+bn+c = a(n-1)^2+b(n-1)+c+3n-2$$
$$an^2+bn+c = an^2-2an+a+bn-b+c+3n-2$$
$$2an-a+b = 3n-2$$

Widzimy, że $2a=3$, więc $a=\frac{3}{2}$ oraz $-a+b=-2$, więc $b=-\frac{1}{2}$. $P_1=1$, czyli $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+c=1$, więc $c=0$. Otrzymaliśmy wzór

$$P_n = \frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n.$$

Sprawdźmy indukcyjnie czy wzór jest poprawny. O P_n wiemy, że $P_n = P_{n-1}+3n-2 = \sum_{i=1}^{n} 3i-2$.

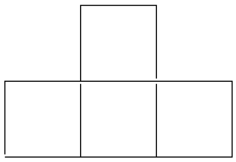
Dla $P_1 = 1 = 3\cdot 1-2$.

Załóżmy, że $P_k = \frac{3}{2}k^2+\frac{7}{2}k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

$$P_{k+1} = \frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k+3(k+1)-2 = \frac{3}{2}(k+1)^2-\frac{1}{2}(k+1).$$

■

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że szachownicę o boku n daje się rozciąć na kostki tetromina złożone z 4 kwadratów jednostkowych, przystające do przedstawionej na rysunku.



Dowód. 1° Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba pól szachownicy jest liczbą nieparzystą, szachownicy nie można więc rozciąć na figury, z których każda ma cztery pola.

2° Kwadrat o boku 4 można rozciąć na cztery kostki tetromina jak na rysunku po prawej. Ponieważ każdy kwadrat o boku podzielnym przez 4 można podzielić na kwadraty 4×4, liczby n podzielne przez 4 spełniają warunki zadania.

[grafika]

3° Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy n jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4. Pokolorujmy szachownicę w standardowy sposób jak na rysunku po prawej, gdzie przedstawiono kolorowanie w przypadku $n = 10$. Przypuśćmy, że szachownica została rozcięta na kostki tetromina zgodnie z warunkami zadania. Zauważmy, że każda kostka tetromina składa się z trzech pól jednego koloru i jednego pola drugiego, czyli nieparzystej liczby pól każdego koloru.

Zauważmy też, że liczba otrzymanych kostek tetromina jest nieparzysta. Istotnie, ponieważ $n = 4k + 2$ dla pewnej liczby naturalnej k, to $n^2/4 = (2k + 1)^2$ co jest liczbą nieparzystą. Wobec tego łącznie wszystkie tetromina zawierają nieparzystą liczbę białych pól. Tymczasem szachownica zawiera parzyście wiele pól każdego koloru. Uzyskana sprzeczność oznacza, że w tym przypadku żądane rozcięcie szachownicy nie jest możliwe.

Odpowiedź

Warunki zadania spełniają liczby n podzielne przez 4. ■