Autor: Krzysztof Zdon

Prowadzący: Krzysztof Zdon

Niecodzienne nierówności – Finaliści

Metoda stycznej

Chcemy oszacować funkcję przez styczną do jej wykresu w punkcie równości naszej funkcji. Dla przypomnienia - równanie prostej stycznej do różniczkowalnej funkcji f w punkcie x_0 jest dane wzorem: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Przykład 1. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c, d > 0$, takich że $a + b + c + d = 1$ zachodzi nierówność:

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$$

Przykład 2 (OM 47)**.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c \geqslant -\frac{3}{4}$, spełniających równość $a + b + c = 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leqslant \frac{9}{10}.$$

Metoda zbliżeń

Staramy się udowodnić, że w przypadku nierówności, w których występują liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ „opłaca się najbardziej” wziąć równe wartości poprzez zbiżanie ich do siebie. Najlepiej technikę tą opiszą poniższe przykłady i stwierdzenie:

Stwierdzenie 1. Przy zbliżeniu liczb ich iloczyn rośnie.

Przykład 3. Niech $x_1, ..., x_n \geqslant 0$. Udowodnimy nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną. Chcemy więc dowieść, że:

$$A = \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 ... x_n} = G$$

Rozwiązanie przykładu (3)**.** Załóżmy, że istnieje i takie, że $x_i < A$. BSO niech $i = 1$. Wówczas bez straty ogólności $x_2 > A$. Rozważmy teraz podmianę $x_1 := A$ oraz $x_2 := x_1 + x_2 - A$. Wówczas średnia liczb się nie zmienia, ale wzrasta średnia geometryczna. Teraz zauważmy, że takie zbliżanie możemy kontynuować, aż wszystkie liczby x_i będą równe A, a średnia geometryczna będzie tylko rosła. Finalnie wszystkie liczby będą sobie równe, a w tym przypadku nasza nierówność staje się oczywistą równością, co kończy dowód.

Niekiedy opłaca się brać jako stałe inne wyrażenia, np. iloczyn wszystkich liczb:

Stwierdzenie 2. Przy zbliżeniu dwóch liczb dodatnich przy zachowaniu ich iloczynu ich suma rośnie.

Przykład 4. Udowodnij, że dla dodatnich $x_1, ..., x_n > 0$ zachodzi nierówność:

$$(1 + x_1)...(1 + x_n) \geqslant (1 + \sqrt[n]{x_1 ... x_n})^n$$

Rozwiązanie przykładu (4)**.** Zbliżamy liczby, zachowując iloczyn. Wówczas $(1+a)(1+b) = 1 + a + b + ab$, co na mocy powyższej obserwacji oznacza, że przy zbliżaniu liczb prawa strona maleje. Natomiast przy równych wszystkich liczbach mamy równość, co kończy dowód.

Stwierdzenie 3. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i pochodna jest monotoniczna na przedziale, to w wyniku zbliżania a, b z tego przedziału z zachowaniem sumy $a + b$:

- suma $f(a) + f(b)$ maleje, gdy f' rośnie;
- suma $f(a) + f(b)$ rośnie, gdy f' maleje.

Dzięki temu możemy uogólnić naszą wiedzę o tym, co dzieje się z poszczególnymi wyrażeniami podczas zbliżania.

Wniosek 1. W wyniku zbliżania dwóch liczb dodatnich przy zachowaniu ich sumy k-tych potęg (dla $k \neq 0$) zachodzą:

- iloczyn ab rośnie dla $k > 0$ i maleje dla $k < 0$;
- suma $a + b$ rośnie dla $k > 1$ i maleje dla $k < 1$;
- suma m-tych potęg rośnie dla $k > m$ i maleje dla $m > k$.

Przykład 5. Udowodnij nierówność dla liczb dodatnich $x_1, ..., x_n$ i $p > 0$:

$$\left(\frac{a_1^p + ... + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \sqrt[n-1]{\frac{a_1...a_n\left(\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}\right)}{n}}$$

Rozwiązanie przykładu (5)**.** Za stałą przyjmujemy sumę p-tych potęg, a następnie zbliżamy liczby do siebie.

Słodki dodatek - mnożniki Lagrange'a

Krótki wstęp topologiczny:

Definicja 1 (Zbiór otwarty)**.** U w $\mathbb{R}^n$ to taki zbiór, że dla każdego $x \in U$ istnieje kulka o środku w x, która w całości należy do U.

Definicja 2 (Zbiór domknięty)**. Zbiorem domkniętym** nazywamy taki zbiór F, że $\mathbb{R}^n \backslash F$ jest otwarty.

Definicja 3 (Zbiór zwarty)**. Zbiorem zwartym** jest zbiór domknięty i ograniczony.

Mnożniki Lagrange'a

Załóżmy, że mamy znaleźć maksimum lub minimum jakiejś funkcji f wielu zmiennych (np. od a, b, c lub $x_1, ..., x_n$), przy pewnym "porządnym"warunku np. $a + b + c = 3$ albo $x_1...x_n = 1$. Żeby zadość uczynić dokładności, chcemy by funkcja G była różniczkowalna i by jej pochodne cząstkowe były ciągłe. Wówczas prawdziwe jest poniższe tw. Lagrange'a:

Autor: Krzysztof Zdon

Prowadzący: Krzysztof Zdon

Twierdzenie 1 (Mnożniki Lagrnage'a - wersja poważna:)**.** Funkcja $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest pewnym otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$, ma ekstremum warunkowe w $x = (x_1, ..., x_n)$, wtedy , gdy albo wszystkie pochodne cząstkowe G w tym punkcie są zerowe, lub istnieją takie rzeczywiste $\lambda_1, ..., \lambda_m$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial G_i(x)}{\partial x_j}, & j = 1, \dots, n \\ G_k(x_1, \dots, x_n) = 0, & k = 1, \dots, m \end{cases}$$

Spróbujmy rozszyfrować, o czym w zasadzie mówi ten warunek - funkcja G jest naszym "porządnym"warunkiem (np. dla warunku $a + b + c = 3$ mamy $G(a, b, c) = a + b + c - 3$).

Napis $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ oznacza pochodną funkcji f, ale tylko względem zmiennej x_j (np. dla $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2$ mamy

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2.$$

Jakie więc będzie nasze typowe postępowanie? Jeżeli U będzie dziedziną naszej funkcji, to będziemy rozpatrywać $\overline{U}$, czyli niejako U z brzegiem (formalnie jest to domknięcie U). Wnetrze U będziemy sprawdzać przy pomocy mnożników, a brzeg będziemy musieli sprawdzić manualnie.

Przykład 6. Powiedzmy, że chcemy znaleźć maksimum funkcji $f(x, y) = x + y$ na okręgu jednostkowym.

Rozwiązanie przykładu (6)**.** Zastosujemy do tego mnożniki Lagrange'a - naszą funkcją jest $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. No to rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0), \\ G(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Z pierwszej i drugiej równości szybko wnioskujemy, że $x_0 = y_0$. To zostawia nas z dwoma możliwościami $x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $x_0 = y_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Stąd możemy szybko się domyślić, że rozwiązaniem będzie $\sqrt{2}$.

Jak można się domyślić, metodę tą można szeroko wykorzystywać przy nierównościach - oto stosowny przykład:

Przykład 7. Niech a będzie pewną liczbą dodatnią. Udowodnimy, że jeśli $\sum_{i=1}^n x_i = a$, to $\sum_{i<j} x_i x_j \leqslant \frac{n-1}{2n} a^2$.

Rozwiązanie przykładu (7)**.** Dowód: Naszą funkcję G mamy od razu: $G(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n - a$, natomiast

$$f = \sum_{i<j} x_i x_j = \frac{1}{2}((x_1 + ... + x_n)^2 - x_1^2 - ... - x_n^2) = \frac{1}{2}(a^2 - (x_1^2 + ... + x_n^2))$$

Autor: Krzysztof Zdon

Prowadzący: Krzysztof Zdon

Rozpatrując nasz układ równań otrzymujemy równości $x_i = \alpha$ dla każdego i przy naszym hipotetycznym rozwiązaniu. A więc $n\alpha = \sum_{i<j} x_i x_j = a \implies \alpha = \frac{a}{n}$. Po podstawieniu mamy $f(\frac{a}{n}, ..., \frac{a}{n}) = \frac{1}{2}(a^2 - \frac{a^2}{n}) = \frac{n-1}{2n}a^2$.

Zadania

Zadanie 1. Niech $a, b, c > 0$. Udowodnij nierówność:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leqslant 8$$

Zadanie 2. Rozważmy liczby rzeczywiste a, b, c, d, e spełniające poniższe równości:

$$a+b+c+d+e = 8$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 16$$

Znajdź minimalną i maksymalną wartość e.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, ..., x_n$, których suma jest rónwna jeden, zachodzi nierówność:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{x_i}) \geqslant (n+1)^n$$

Zadanie 4. Niech a, b, c, d będą takimi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, które spełniają równość

$$a+b+c+d = 4$$

Znajdź minimalną wartość wyrażenia

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd$$

Zadanie 5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $x_1, ..., x_n$ wiekszych od 1 prawdziwa jest nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + n\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

Zadanie 6. Niech $a, b, c > 0$, udowodnij, że

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} + \frac{(a+c-b)^2}{(a+c)^2+b^2} \geqslant \frac{3}{5}$$