# Rozwiązania Kontestu 3 – Finaliści

**Zadanie 1.** Dwusieczna kąta wewnętrznego $BAC$ w trójkącie $ABC$ przecina bok $BC$ w punkcie $D$. Prosta $k$ przechodzi przez punkt $D$ i jest prostopadła do $BC$. Symetralna odcinka $AD$ przecina $AD$ i $k$ odpowiednio w $P$ i $Q$. Udowodnij, że punkty $B, C, P, Q$ leżą na jednym okręgu.

**Rozwiązanie 1.** Przecinamy tę symetralną z $BC$ w $M$. Wówczas kąty $\sphericalangle DQM$, $\sphericalangle PDM$ i $\sphericalangle PAM$ są równe, więc mamy podobieństwo trójkątów $MPA$ do $MDQ$, czyli

$MA^2 = MA{\cdot}MD = MP{\cdot}MQ$ (inaczej: trójkąt $QDM$ jest prostokątny z opuszczoną wysokością $DP$, wi

Również mamy $\sphericalangle DCA + \sphericalangle DAC = \sphericalangle ADM = \sphericalangle DAM = \sphericalangle DAB + \sphericalangle BAM$ oraz $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAD$, więc $\sphericalangle MAB = \sphericalangle BAC$, czyli $MA$ jest styczną do okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Wówczas

$$MB \cdot MC = MA^2.$$

Ostatecznie więc $MB \cdot MC = MP \cdot MQ$, co daje tezę z kryterium potęgowego.

**Zadanie 2.** Niech $n$ będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią, a $S(n)$ oznacza liczbę permutacji $\tau$ zbioru $\{1, \dots, n\}$, takich że $k^4 + (\tau(k))^4$ jest liczbą pierwszą dla każdego $k = 1, \dots, n$. Pokaż, że $S(n)$ jest kwadratem.

*Źródło: India TST 2023 Practice Test 2 P3 AoPS*

**Rozwiązanie 2.** Dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$, niech $i^4 + \tau(i)^4 = p_i$, dla liczb pierwszych $p_i$. Wówczas zauważmy, że

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 + (\tau(1)^4 + \tau(2)^4 + \cdots + \tau(n^4)) = 2(1^4 + 2^4 + \cdots + n^4).$$

Teraz, załóżmy, że $n$ jest liczbą parzystą. Wówczas, suma $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ musi być liczbą parzystą. Zauważmy, że dla $i \geqslant 2$, $p_i > i^4 > 2$, więc $p_i$ jest liczbą nieparzystą dla wszystkich $i \geqslant 2$. Zatem, $p_1 + (n-1)$ musi być liczbą parzystą, więc $p_1 - 1$ musi być liczbą parzystą, a więc $p_1$ jest liczbą nieparzystą. Zatem, $\tau(1) \neq 1$.

Teraz, rozważmy graf i połączmy $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i^4 + j^4$ jest liczbą pierwszą. Zauważmy, że jeśli $i = j$, to $2i^4$ jest liczbą pierwszą tylko wtedy, gdy $i = 1$, ale wiemy, że $\tau(1) \neq 1$, więc nie musimy martwić się o ten przypadek. Następnie, jeśli $i$ i $j$ są liczbami o tej samej parzystości, to $i^4 + j^4$ jest liczbą parzystą i większą niż 2, ponieważ $i \neq j$. Zatem, ten graf jest grafem bipartitnym, ponieważ możemy wybrać bipartycje $A = \{1, 3, \cdots, n-1\}$ oraz $B = \{2, 4, \cdots, n\}$ i żadne dwa elementy z $A$ nie są połączone, a żadne dwa elementy z $B$ nie są połączone. Teraz, aby znaleźć $\tau$ dla wszystkich liczb nieparzystych, musimy znaleźć doskonałe dopasowanie z $A$ do $B$, ponieważ chcemy znaleźć $a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}$ – permutację zbioru $B$, taką że $i^4 + a_i^4$ jest liczbą pierwszą dla wszystkich nieparzystych $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Aby znaleźć $\tau$

dla wszystkich liczb parzystych, musimy znaleźć doskonałe dopasowanie z $B$ do $A$, ponieważ chcemy znaleźć $a_2, a_4, \cdots, a_n$ – permutację zbioru $A$, taką że $i^4 + a_i^4$ jest liczbą pierwszą dla wszystkich parzystych $2 \leqslant i \leqslant n$. Zatem, liczba sposobów znalezienia $\tau$ dla wszystkich liczb parzystych to $P$, liczba doskonałych dopasowań z $A$ do $B$, a liczba sposobów znalezienia $\tau$ dla wszystkich liczb parzystych to liczba doskonałych dopasowań z $B$ do $A$, która również wynosi $P$. Zatem, liczba takich permutacji $\tau$ to $P^2$, co jest liczbą doskonałą, i wszystkie takie permutacje działają, ponieważ działają dla wszystkich liczb nieparzystych i parzystych (a są one rzeczywiście permutacjami zbioru $\{1, 2, \cdots, n\}$), więc kończymy dowód w przypadku, gdy $n$ jest liczbą parzystą.

Jeśli $n$ jest liczbą nieparzystą, to $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ również jest liczbą parzystą, a dla $i \geqslant 2$, $p_i > i^4 > 2$, więc $p_i$ jest liczbą nieparzystą dla wszystkich $i \geqslant 2$. Zatem, $p_1 + (n - 1)$ musi być liczbą parzystą, więc $p_1$ musi być liczbą parzystą, a więc $p_1 = 2$, co implikuje, że $\tau(1) = 1$. Zatem, należy znaleźć wszystkie permutacje $\tau$ zbioru $\{2, 3, \cdots, n\}$, dla których $i^4 + \tau(i)^4$ jest liczbą pierwszą dla wszystkich $2 \leqslant i \leqslant n$, ponieważ już rozwiązaliśmy przypadek $i = 1$, a nic poza 1 nie może być przypisane do 1, a 1 może być przypisane tylko do 1.

Aby to zrobić, wykonujemy praktycznie to samo – łączymy $2 \leqslant i \neq j \leqslant n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i^4 + j^4$ jest liczbą pierwszą – jeśli $i = j$, to oczywiście $2i^4$ nie jest liczbą pierwszą, ponieważ $i \geqslant 2$. Jeśli $i$ i $j$ są liczbami o tej samej parzystości, to $i^4 + j^4$ jest liczbą parzystą i większą niż 2, więc ten graf jest grafem bipartitnym, ponieważ możemy wybrać bipartycje $A = \{3, 5, \cdots, n\}$ oraz $B = \{2, 4, \cdots, n - 1\}$, i stosując tę samą logikę, co w przypadku $n$ parzystego, liczba sposobów znalezienia takiego $\tau$ to po prostu kwadrat liczby doskonałych dopasowań z $A$ do $B$, co jest liczbą doskonałą.

Zatem, we wszystkich przypadkach, $S(n)$ jest liczbą doskonałą, jak tego chcieliśmy.

*Źródło: India TST 2023 Practice Test 2 P3 AoPS*

**Zadanie 3.** Funkcję $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ nazywamy gęstą, jeżeli dla dowolnej liczby wymiernej $c$ takiej, że $f(x) < c < f(y)$, dla pewnych całkowitych $x$, $y$, istnieje taka liczba całkowita $z$, że $f(z) = c$.

Znaleźć wszystkie funkcje gęste $f$ spełniające równanie:

$$f(x) + f(y) + f(z) = f(x)f(y)f(z),$$

dla wszystkich liczb całkowitych takich, że $x + y + z = 0$.

**Rozwiązanie 3.** Podstawmy najpierw $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, dostajemy $3f(0) = f(0)^3$, co na mocy wymierności $f(0)$ daje $f(0) = 0$. Wstawiając $(x, y, z) = (0, x, -x)$, dostajemy

$$f(-x) = -f(x).$$

Podstawiając $(x, y, z) = (2x, -x, -x)$ i korzystając z powyższej równości otrzymujemy $f(2x) - 2f(x) = f(x)^2 \cdot f(2x)$, co daje:

$$f(2x)(1 - f(x)^2) = 2f(x).$$

Gdyby dla pewnego $a \in \mathbb{Z}$ zachodziło $f(a) = \pm 1$, to podstawiając $x = a$ powyżej dostalibyśmy $f(a) = 0$, co jest sprzecznością. Przypuśćmy teraz, że istnieje taka liczba całkowita $b$, że $f(b) > 1$. Mamy $f(b) > 1 > f(0)$, czyli na mocy gęstości funkcji $f$ istnieje taka liczba całkowita $c$, że $f(c) = 1$. To jednak nie jest możliwe, gdyż ten przypadek przed chwilą wykluczyliśmy. Analogicznie wykazujemy, że funkcja $f$ nie przyjmuje wartości mniejszych niż $-1$. Podsumowując, dla każdego całkowitego $x$ zachodzi $|f(x)| \leqslant 1$.

Otrzymujemy więc dla każdej liczby całkowitej $x$ nierówność

$$|f(2x)| > |f(2x)(1 - f(x)^2)| = |2f(x)| = 2|f(x)|,$$

co przez indukcję daje nierówności

$$|f(2^k x)| > 2^k |f(x)|$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k$. To natomiast wobec ograniczenia $|f(x)| < 1$ może być prawdziwe tylko jeśli $f(x) = 0$. Otrzymaliśmy więc, że dla każdej liczby całkowitej $x$ zachodzi równość $f(x) = 0$. Bezpośrednio sprawdzamy, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

**Zadanie 4.** Niech $m, n \geqslant 2$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi, oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami całkowitymi, z których żadna nie jest wielokrotnością $m^{n-1}$. Pokaż, że istnieją liczby całkowite $e_1, e_2, \ldots, e_n$, nie wszystkie równe zero, takie że $|e_i| < m$ dla każdego $i$, oraz wyrażenie $e_1 a_1 + e_2 a_2 + \ldots + e_n a_n$ jest wielokrotnością $m^n$.

*Źródło: IMO ShortList 2002, NT5 link*

**Rozwiązanie 4.** Rozważmy $S$ - zbiór $m^n$ krotek $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, gdzie $0 \leqslant e_i < m$. Jeśli dwie z tych krotek są identyczne modulo $m^n$, to zadanie jest rozwiązane. Załóżmy więc, że sumy $\sum e_i a_i$ tworzą pełny system reszt modulo $m^n$. Niech $\zeta$ będzie pierwiastkiem pierwotnym stopnia $m^n$-tego z jedności. Wówczas zachodzi:

$$0 = \sum_{0 \leqslant i < m^n} \zeta^i = \sum_{(e_1, \ldots, e_n) \in S} \zeta^{\sum e_i a_i} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\zeta^{m a_i} - 1}{\zeta - 1}.$$

Stąd wynika, że $\zeta^{m a_i} - 1 = 0$ dla pewnego $i$, co oznacza, że $m^{n-1} \mid a_i$. To jednak stoi w sprzeczności z warunkami zadania.

*Źródło: Użytkownik AoPS starchan: link*