PreOM 2024 - Dzień 1

Rozwiązania

Zadanie 1. Punkt płaszczyzny nazywamy kratowym jeśli obie jego współrzędne są całkowite. Rozstrzygnij, czy istnieje koło zawierające dokładnie *2014* punktów kratowych.

Rozwiązanie: Weźmy $P = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Jeśli dwa punkty kratowe $X = (a_1, b_1), Y = (a_2, b_2)$ są równo odległe od P to zachodzą poniższe równości:

$$\sqrt{(a_1 - \sqrt{2})^2 + (b_1 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{(a_2 - \sqrt{2})^2 + (b_2 - \sqrt{3})^2}$$

$$(a_1 - \sqrt{2})^2 + (b_1 - \sqrt{3})^2 = (a_2 - \sqrt{2})^2 + (b_2 - \sqrt{3})^2$$

$$a_1^2 - 2a_1\sqrt{2} + 2 + b_1^2 - 2b_1\sqrt{3} + 3 = a_2^2 - 2a_2\sqrt{2} + 2 + b_2^2 - 2b_2\sqrt{3} + 3$$

$$a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = -2a_2\sqrt{2} - 2b_2\sqrt{3} + 2a_1\sqrt{2} + 2b_1\sqrt{3}$$

$$a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = (2a_1 - 2a_2)\sqrt{2} + (2b_1 - 2b_2)\sqrt{3}$$

Lewa strona jest całkowita. Prawa strona jest całkowita wtedy i tylko wtedy gdy $X = Y$, więc dla dowolnych dwóch różnych punktów kratowych X, Y odległości X oraz Y od P są różne. Wystarczy więc dobrać odpowiedni promień koła o środku w P (powiększając promień od zera aż nie natrafimy na równo 2014 punktów). ■

Zadanie 2. Dany jest wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są trójkątami. Wierzchołki tego wielościanu kolorujemy trzema kolorami. Udowodnić, że liczba ścian mających wierzchołki wszystkich trzech kolorów jest parzysta.

Źródło zadania: XLIV OM – III – Zadanie 4

Rozwiązanie: Dla czworościanu teza zachodzi: liczba ścian o wierzchołkach trzech różnych kolorów wynosi 0 lub 2 (łatwe ćwiczenie).

Weźmy teraz pod uwagę dowolny wielościan W mający n trójkątnych ścian (i wierzchołki pokolorowane trzema kolorami). Obierzmy wewnątrz W dowolny punkt P. Każda ściana wielościanu W jest podstawą ostrosłupa o wierzchołku P, a cały wielościan W jest sumą tak otrzymanych ostrosłupów (czworościanów): $W = T_1 \cup \ldots \cup T_n$.

Będziemy rozważali wszystkie ściany wszystkich tych czworościanów (niektóre z nich są jednocześnie ścianami wielościanu W). Kolorujemy punkt P jednym z trzech kolorów (dowolnie wybranym). Ścianę nazwiemy trójkolorową, jeśli jest trójkątem mającym wierzchołki wszystkich trzech kolorów.

Niech k_i będzie liczbą trójkolorowych ścian czworościanu T_i; jak zauważyliśmy na wstępie, $k_i = 0$ lub $k_i = 2$. Zatem suma $k_1 + \ldots + k_n$ jest liczbą parzystą.

Trójkąty leżące wewnątrz wielościanu W są w tej sumie liczone dwukrotnie, bo każdy z nich jest wspólną ścianą dwóch przyległych czworościanów T_i. Oznaczając liczbę tych trójkątów przez m widzimy, że łączna liczba trójkolorowych ścian (wszystkich czworościanów T_i), które nie leżą wewnątrz W - czyli po prostu liczba trójkolorowych ścian wielościanu W - wynosi $k_1 + \ldots + k_n - 2m$. Jest więc liczbą parzystą. ■

Zadanie 3. Niech $ABCD$ będzie trapezem o podstawach AB i CD, takich, że $AB > CD$. Punkty K, L leżą na odcinkach AB i CD odpowiednio oraz spełniają:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}.$$

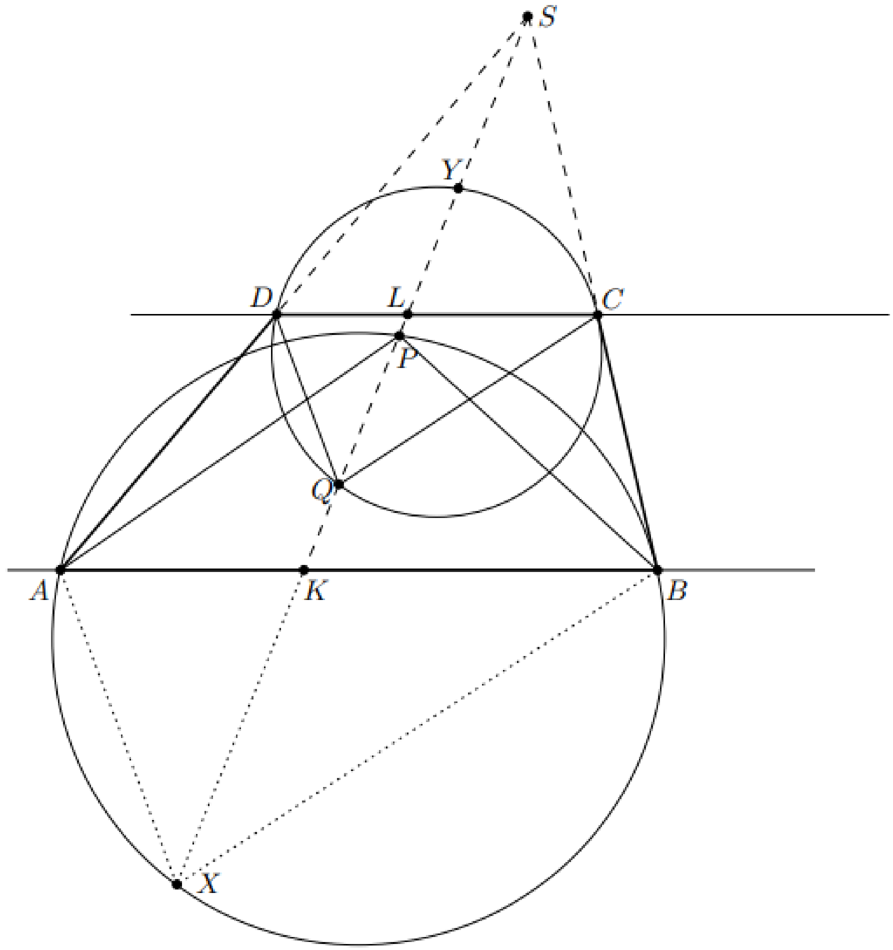
Załóżmy, że istnieją takie punkty P, Q leżące na odcinku KL, że spełnione są następujące własności:

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle BCD, \quad \sphericalangle CQD = \sphericalangle ABC.$$

Udowodnij, że punkty P, Q, B, C leżą na jednym okręgu.

Źródło zadania: 2006 IMO Shortlist Problems/G2

Rozwiązanie: Ponieważ AB i CD są równoległe oraz $AK/KB = DL/LC$ wiemy, że proste AD, BC i KL są współpękowe, nazwijmy wspólny punkt S.



Rozważmy drugie przecięcia okręgów opisanych na ABP i CDQ z prostą SK, nazwijmy je X oraz Y odpowiednio.

Ponieważ $APBX$ jest cykliczny oraz $AB \parallel CD$, to zachodzą następujące równości miar kątów:

$$\sphericalangle AXB = 180^\circ - \sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC.$$

Dostajemy więc, że BC jest styczne do okręgu opisanego na ABP w B.

Tak samo BC jest więc też styczne do okręgu opisanego na trójkącie CDQ w C. Z potęgi punktu dostajemy: $SP \cdot SX = SB^2$ oraz $SQ \cdot SY = SC^2$.

Niech h będzie jednokładnością o środku S i skali SC/SB. Ponieważ $h(B) = C$, powyższe obserwacje dają, że h przeprowadza okrąg opisany na ABP na okrąg opisany na CDQ oraz odcinek AB na CD. Dostajemy $h(P) = Y, h(X) = Q$, co daje $SP/SY = SB/SC = SX/SQ$.

Równości $SP \cdot SX = SB^2$ oraz $SQ/SX = SC/SB$ prowadzą do $SP \cdot SQ = SB \cdot SC$, co daje tezę, czyli P, Q, B, C leżą na jednym okręgu. ■

Zadanie 4. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z, spełniające zależność $x^2+y^2+z^2+9 = 4(x+y+z)$. Dowieść, że:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27$$

oraz rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

Źródło zadania: III MEMO – Zadanie 5

Rozwiązanie:
Sposób 1: Na mocy założenia, po dodaniu $6(x^2 + y^2 + z^2 + 9)$ do lewej strony, zaś $24(x + y + z)$ do prawej strony nierówności, otrzymujemy równoważną nierówność

$$x^4 + y^4 + z^4 + 22(x^2 + y^2 + z^2) + 27 \geqslant 8(x^3 + y^3 + z^3) + 24(x + y + z).$$

Nietrudno sprawdzić, że jest ona równoważna

$$(x - 1)^2(x - 3)^2 + (y - 1)^2(y - 3)^2 + (z - 1)^2(z - 3)^2 \geqslant 0,$$

co jest oczywiście prawdą. Tym samym dowiedliśmy tezy.

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x, y, x \in \{1, 3\}$. ■

Sposób 2: Przy założeniu $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$ można po prostych przekształceniach zapisać nierówności z zadania równoważnie jako

$$(x - 2)^4 + (y - 2)^4 + (z - 2)^4 \geqslant 3,$$

zaś samo założenie jako

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 3.$$

Korzystając z nierówności między średnią kwadratową a średnia arytmetyczną dla liczb $a = (x - 2)^2$, $b = (y - 2)^2$, $c = (z - 2)^2$, otrzymujemy

$$\sqrt[3]{\frac{(x-2)^4+(y-2)^4+(z-2)^4}{3}} = \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{a+b+c}{3} = \frac{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}{3},$$

a stąd otrzymujemy tezę.

Wiadomo, że w powyższej nierówności między średnimi równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b=c$, więc równość otrzymujemy tylko gdy $(x-2)^2=(y-2)^2=(z-2)^2$. Zatem w tezie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|x-2|=|y-2|=|z-2|=1$, lub równoważnie $x,y,x \in \{1,3\}$. ■