Potęga punktu i osie potęgowe

Adam Naskręcki

27 września 2023

1 Teoria

Def. 1. *Potęgą punktu P względem okręgu o promieniu r i środku w O nazywamy liczbę $OP^2 - r^2$.*

Twierdzenie 1. *Niech Γ będzie okręgiem, a P punktem. Prosta przechodząca przez P przecina Γ w punktach A i B, a inna prosta przez P przecina Γ w punktach C i D. Wtedy*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Uwaga. *W szczególności jeśli P leży poza Γ i prosta PC jest styczna do Γ, to*

$$PA \cdot PB = PC^2.$$

Twierdzenie 2. *Niech A, B, C, D będą parami różnymi punktami. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Załóżmy, że albo (1) P leży na obu odcinkach AB i CD lub (2) P nie leży na żadnym z nich. Wówczas A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy gdy $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

Twierdzenie 3. *Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg Γ w punktach A, B. Jeśli P leży na zewnątrz Γ, to potęga punktu P względem Γ wynosi*

$$PA \cdot PB.$$

Natomiast jeśli P leży wewnątrz Γ, to potęga P względem Γ wynosi

$$-PA \cdot PB.$$

Def. 2. *Zbiór punktów o równej potędze względem dwóch niekoncentrycznych okręgów Γ_1, Γ_2 nazywamy ich osią potęgową.*

Twierdzenie 4. *Oś potęgowa dwóch niekoncentrycznych okręgów jest prostą prostopadłą do prostej łączącej środki tych okręgów.*

Twierdzenie 5. *Dane są trzy parami niekoncentryczne okręgi. Wówczas ich osie potęgowe są współpękowe (przecinają się w jednym punkcie albo wszystkie są równoległe).*

2 Zadania

1. Niech ω_1 , ω_2 będą dwoma okręgami przecinającymi się w punktach X, Y . Niech wspólna styczna do nich przecina ω_1 w punkcie A i ω_2 w punkcie B. Udowodnić, że wówczas prosta zawierająca odcinek XY przechodzi przez środek odcinka AB.

2. Niech C będzie punktem na półokręgu o średnicy AB i niech D będzie środkiem łuku AC. Niech E będzie rzutem punktu D na prostą zawierającą BC, a F punktem przecięcia AE z półokręgiem. Pokazać, że prosta zawierająca BF przechodzi przez środek odcinka DE.

3. W okrąg wpisano czworokąt $ABCD$. M jest punktem przecięcia prostych AB i CD, a N punktem przecięcia prostych BC i AD. Niech E jest punktem przecięcia danego okręgu z okręgiem opisanym na trójkącie BMN, różnym od B. Wykaż, że prosta ED dzieli odcinek MN na połowy.

4. Dwa okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach M i N . Niech ℓ będzie wspólną styczną do ω_1, ω_2 i przyjmijmy, że punkt M leży bliżej ℓ niż punkt N. Załóżmy, że ℓ przecina ω_1 w punkcie A i ω_2 w

punkcie B. Rozważy prostą przechodzącą przez M, równoległą do ℓ, taką że przecina ona drugi raz okręgi ω_1 i ω_2 w punktach C i D odpowiednio. Definiujemy punkty E, P i Q kolejno jako przecięcia prostych zawierających odcinki CA i DB, AN i CD oraz BN i CD. Dowieść, że $EP = EQ$.

5. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Niech prosta prostopadła do AC, przechodząca przez punkt B przecina okrąg o średnicy AC w punktach P i Q. Niech prosta prostopadła do AB, przechodząca przez punkt C przecina okrąg o średnicy AB w punktach R i S. Wykazać, że punkty P, Q, R, S są współokręgowe.

6. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Punkty M i N wybrano na bokach AB and AC, odpowiednio. Okręgi o średnicach BN i CM przecinają się w punktach P i Q. Udowodnić, że P, Q, H są współliniowe.

7. Okręgi ω_1 and ω_2 są koncentryczne, przy czym ω_2 leży wewnątrz ω_1. Punkt A leży na ω_1, a B na ω_2 tak, że AB jest styczna do ω_2 . Punkt C jest drugim punktem przecięcia AB i ω_1, a D jest środkiem AB. Prosta przechodząca przez A przecina ω_2 w E i F w taki sposób, że symetralne DE i CF przecinają się w punkcie M leżącym na AB. Wyznaczyć iloraz $\frac{AM}{MC}$.

8. Punkt P leży na boku CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\angle DBA = \angle CBP$. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D. Wykazać, że $AO = OC$.

9. Parami różne punkty A, B, C, i D leżą na jednej prostej, w tej kolejności. Okręgi o średnicach AC i BD przecinają się w punktach X i Y. Prosta XY przecina BC w punkcie Z. Niech P będzie punktem na XY innym niż Z. Prosta CP przecina okrąg o średnicy AC w punktach C i M, a prosta BP przecina okrąg o średnicy BD w punktach B i N. Udowodnić, że proste AM, DN i XY są współpękowe.