



Geometria III – II etap

Teoria

Twierdzenie 1 (o dwusiecznej). Dany jest trójkąt ABC . Na prostej AB leżą takie punkty D i E , że proste CD i CE są dwusiecznymi kątów wewnętrznego i zewnętrznego przy wierzchołku C . Wówczas $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} = \frac{AE}{EB}$.

Twierdzenie 2 (Menelaosa). Dany jest trójkąt ABC . Punkty D, E, F leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB . Wówczas punkty D, E, F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -1$$

Twierdzenie 3 (Cevy). Dany jest trójkąt ABC . Punkty D, E, F leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB . Wówczas proste AD, BE, CF są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = +1$$

Twierdzenie 4 (trygonometryczne Cevy). Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F w płaszczyźnie tego trójkąta. Wówczas proste AD, BE, CF są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\sin \sphericalangle CAD}{\sin \sphericalangle DAB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ABE}{\sin \sphericalangle EBC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BCF}{\sin \sphericalangle FCA} = +1$$

przy czym każdy z powyższych kątów jest skierowany.

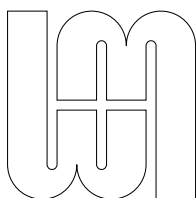
Przykłady

Ćwiczenie 1. Dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C w trójkącie ABC przecinają proste BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Udowodnij, że punkty D, E, F są współliniowe.

Ćwiczenie 2. Wykazać istnienie środka ciężkości, środka okręgu wpisanego, punktu Gergonne'a, punktu Nagela i ortocentrum w trójkącie.

Twierdzenie 5 (Gaussa). Dany jest czworokąt $ABCD$. Niech $E = AB \cap CD$ oraz $F = BC \cap AD$. Wówczas środki odcinków AC, BD i EF są współliniowe.

Twierdzenie 6 (Jacobiiego). Do trójkąta ABC dobudowano trójkąty DBC, ECA, FAB tak, że $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAF, \sphericalangle FBA = \sphericalangle CBD$ oraz $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACE$ (kąty są skierowane). Wówczas, proste AD, BE, CF są współpękowe.



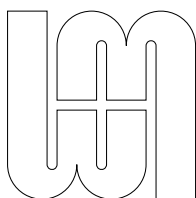
Zadania

1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Dwusieczne kątów ACB , ACD przecinają odcinki AB , AD odpowiednio w punktach P , Q . Dwusieczna kąta zewnętrznego BCD przecina prostą BD w punkcie R . Dowieść, że punkty P , Q , R leżą na jednej prostej.
2. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D leży na boku BC , przy czym $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{3}$. Punkt M jest środkiem boku AB , a punkt F jest środkiem odcinka CM . Proste DF i AC przecinają się w punkcie E . Obliczyć $CE : EA$.
3. Dany jest trójkąt ABC . Prosta k przecina proste BC , CA , AB odpowiednio w punktach X , Y , Z . Niech X' , Y' , Z' będą obrazami symetrycznymi punktów X , Y , Z odpowiednio względem środków boków BC , CA , AB . Dowieść, że punkty X' , Y' , Z' leżą na jednej prostej.
4. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC . Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach BC i CA , w taki sposób, że proste DE i AB są równoległe. Punkt P leży na odcinku AM . Proste EM oraz CP przecinają się w punkcie X , a proste DP oraz CM przecinają się w punkcie Y . Dowieść, że punkty X , Y , B są współliniowe.
5. Punkty D , E , F leżą odpowiednio na bokach BC , CA , AB trójkąta ABC . Punkty K , L , M są odpowiednio środkami boków BC , CA , AB . Punkty X , Y , Z są odpowiednio środkami odcinków AD , BE , CF . Wykazać, że proste KX , LY , MZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy proste AD , BE , CF przecinają się w jednym punkcie.
6. Okrąg dopisany do trójkąta ABC , naprzeciwko A jest styczny do AC w K i do BC w L . Niech M to rzut B na dwusieczną kąta BAC . Udowodnij, że K , L , M są współliniowe.
7. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i AD . Odcinki DK oraz BL przecinają się w punkcie P . Punkt Q został wybrany w taki sposób, że czworokąt $AKQL$ jest równoległobokiem. Dowieść, że punkty P , Q , C leżą na jednej prostej.
8. Dany jest trójkąt ABC . Punkty E , F leżą odpowiednio na bokach AC i BC , przy czym $CE = CF$. Punkt M jest środkiem boku AB . Odcinki CM i EF przecinają się w punkcie P . Dowieść, że

$$\frac{EP}{PF} = \frac{BC}{AC}$$

9. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , o kącie prostym przy wierzchołku C . Kwadraty $BCED$ i $ACFG$ dobudowane zostały na zewnątrz tego trójkąta. Proste AD i BG przecinają się w P . Udowodnij, że CP jest prostopadłe do AB .
10. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ wpisany w okrąg. Udowodnij, że proste AD , BE , CF są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$$



11. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC . Prosta k , równoległa do BC , przecina odcinek AB w punkcie R , zaś prosta symetryczna do k względem BC , przecina proste AC i AM odpowiednio w punktach Q i X . Prosta przechodząca przez X równoległa do AB przecina odcinek BC w punkcie P . Udowodnij, że punkty P , Q i R są współliniowe.
12. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie ABC . Punkty D , E , F leżą na bokach BC , CA , AB odpowiednio, przy czym proste AD , BE , CF są współpękowe. Okrąg styczny do BC w D leżący na zewnątrz ABC jest styczny do Ω w X . Okrąg styczny do CA w E leżący na zewnątrz ABC jest styczny do Ω w Y . Okrąg styczny do AB w F leżący na zewnątrz ABC jest styczny do Ω w Z . Udowodnij, że AX , BY , CZ są współpękowe.
13. Dany jest czworokąt wypukły $AFDE$ nie będący trapezem. Używając jedynie linijki, skonstruować takie punkty B i C , leżące odpowiednio na prostych AF i AE , że punkt D leży na prostej BC , a proste AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie.