Potęga punktu, osie potęgowe i nie tylko

Teoria

Podstawowe definicje

Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg ω w punktach A i B. Wówczas wartość iloczynu $|PA| \cdot |PB|$ nie zależy od wyboru prostej. Iloczyn ten nazywamy **potęgą punktu** P względem okręgu ω Wartość tego iloczynu oznaczamy jako $Pot(P, \omega)$ bądź $Pot(P, AB)$.

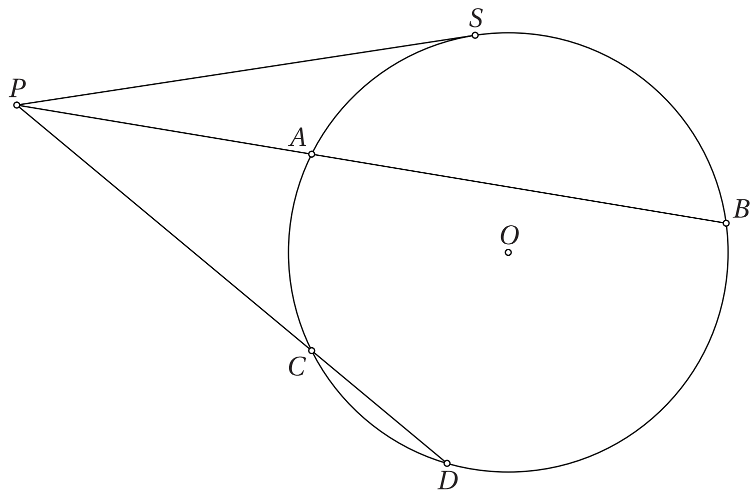
Co ciekawe wartość $|PA| \cdot |PB|$ jest równa $PO^2 - R^2$ gdzie O jest środkiem okręgu ω, a R jego promieniem. Dodatkowo $PO^2 - R^2 = PS^2$ gdzie S jest punktem styczności prostej przechodzącej przez punkt P oraz stycznej do ω.

Dla danych dwóch niewspółśrodkowych okręgów ω_1, ω_2 o środkach O_1, O_2 istnieje prosta p_{ω_1,ω_2} taka, że $\forall_{S \in p_{\omega_1,\omega_2}}\ Pot(S, \omega_1) = Pot(S, \omega_2)$. Nazywamy ją **osią (prostą) potęgową**. Jest ona prostopadła do prostej O_1O_2.

Ważne twierdzenia

Potęgowe kryterium współokręgowości

Jeżeli punkty A, B leżą na prostej przechodzącej przez punkt S, a punkty C, D leżą na i n n e j *prostej przechodzącej przez punkt S, to punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu, wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi równość $Pot(S, AB) = Pot(S, CD)$ równoważnie $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$*



Ciekawostka

Potęgę punktu możemy również definiować dla okręgu zdegenerowanego dla punktu. Choć jest to rzadki motyw, w nieoczywisty sposób może pojawić się w zadaniu. Oczywiście osie potęgowe jak i wszystkie z nimi związane twierdzenia i własności działają (jak np. Tw. Monge'a). Co ciekawe, oś potęgowa dwóch okręgów zdegenerowanych do punktów to po prostu ich symetralna!

Twierdzenie Monge'a

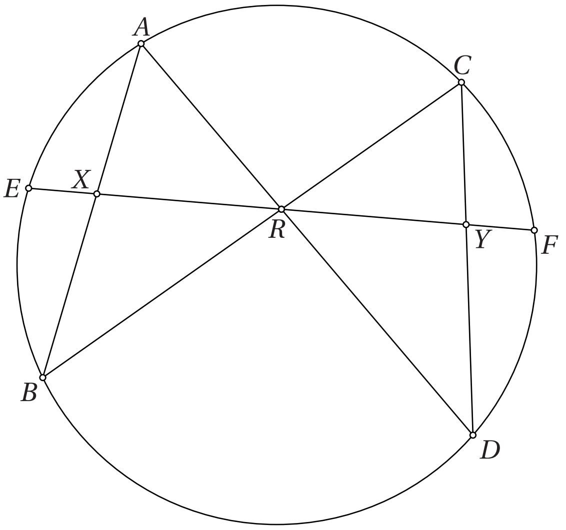
Jeżeli K_1, K_2, K_3 są trzema niewspółśrodkowymi okręgami, to ich proste potęgowe p_{K_1,K_2}, p_{K_2,K_3}, p_{K_3,K_1} przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe. Jeśli punkt ich przecięcia istnieje, nazywamy go ***środkiem potęgowym*** *tych trzech okręgów.*

Twierdzenie o prostej Auberta

Dane są cztery proste ***w położeniu ogólnym*** *(to znaczy, że żadne dwie z nich nie są równoległe i żadne trzy z nich nie przechodzą przez ten sam punkt). Tworzą one* ***czworobok zupełny****. Każda trójka tych prostych wyznacza trójkąt. Wówczas ortocentra tych czterech trójkątów leżą na jednej prostej nazywanej* ***prostą Auberta****.*

Twierdzenie o motylku

Przez środek R cięciwy EF przechodzą jeszcze dwie cięciwy BC, AD danego okręgu. Niech $X = AB \cap EF$ i $X = DC \cap EF$. Wówczas $|XR| = |RY|$



Zadanka

Przydatny fakt 1 Jeżeli okręgi ω_1, ω_2 przecinają się w punktach A, B, to ich prosta potęgowa p_{ω_1,ω_2} jest prostą AB.

Przydatny fakt 2 Jeżeli okręgi ω_1, ω_2 są rozłączne i jeden nie leży wewnątrz drugiego (!), to ich prosta potęgowa przechodzi przez środki odcinków stycznych.

Zad. 1 Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt E jest środkiem cięciwy AC oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED$. Wykazać, że $BE \cdot DE = AE^2$.

Zad. 2 Uzasadnij i wykonaj konstrukcję okręgu stycznego do prostej k oraz przechodzącego przez punkty A i B leżące po tej samej stronie prostej k ($A \notin k, B \notin k$).

Zad. 3 Niech $\triangle ABC$ będzie ostrokątny. Prosta prostopadła do BC przechodząca przez punkt A przecina okrąg o średnicy BC odpowiednio w punktach P, Q, zaś prosta prostopadła do B przechodząca przez AC przecina okrąg o średnicy AC w punktach R, S. Udowodnij, że na punktach P, Q, R, S da się opisać okrąg.

Zad. 4 Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ΔABC. Przez punkt A prowadzimy styczne do okręgu o średnicy BC w punktach P i Q. Wykazać, że punkty P, H, Q leżą na jednej prostej.

Zad. 5 Przez punkt P leżący na zewnątrz okręgu o środku O poprowadzono styczną PC i sieczną przecinającą ten okrąg w punktach A i B (przy czym punkty A, B, C leżą po tej samej stronie prostej PO). Punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą PO. Dowieść, że QC jest dwusieczną kąta $\sphericalangle AQB$.

Zad. 6 Przekątne AC i BD czworokąta wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie P. Okrąg przechodzący przez punkt P, styczny do boku CD w jego środku M, przecina odcinki BD i AC odpowiednio w punktach Q i R. Niech S będzie takim punktem odcinka BD, że $BS = DQ$. Prosta przechodząca przez S równoległa do AB przecina AC w punkcie T. Wykazać, że $AT = CR$.

Zad. 7 Przez punkt P leżący na zewnątrz okręgu o środku O poprowadzono styczną PC i sieczną przecinającą ten okrąg w punktach A i B (przy czym punkty A, B, C leżą po tej samej stronie prostej PO). Punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą PO. Dowieść, że QC jest dwusieczną kąta $\sphericalangle AQB$.

Zad. 8 Punkty A, B, C leżą na okręgu Ω. Styczne w punktach A oraz B przecinają się w punkcie D. Prosta DC przecina ponownie okrąg Ω w E. Wykaż, że AE przecina BD w połowie, jeżeli $AB = BC$.

Zad. 9 **Czewianą** w trójkącie nazwiemy odcinek łączący wierzchołek z przeciwległym bokiem. Dowieść, że ortocentrum trójkąta jest środkiem potęgowym rodziny wszystkich okręgów o średnicach będących **czewianami** tego trójkąta tzn. dla każdej pary okręgów z rodziny leży na ich osi potęgowej.

Zad. 10 Dany jest różnoboczny ΔABC niech punkty D,E,F będą spodkami wysokości opuszczonych z odpowiednio A,B,C. Punkty K,M,N odpowiednio przecięcia prostych AB i DE, BC i EF, AC i DF. Udowodnij, że punkty K, M, N są współliniowe. (Dla ambitnych) Nie trudno pokazać, że jest ona prostopadła do prostej OH, gdzie standardowo O, H to odpowiednio środek okręgu opisanego i ortocentrum ΔABC.

Zad. 11 Dany jest trójkąt ΔABC, w którym $\sphericalangle CAB = 60°$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI, prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 12 W ostrokątnym trójkącie ABC kąt przy B jest większy od C. M jest środkiem BC. Punkty D i C są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z C i B. Niech K i L będą środkami odpowiednio EM oraz DM. Jeżeli KL przecina styczną w punkcie A do okręgu opisanego na ΔAED w punkcie X. Udowodnij, że $XA = XM$

Zad. 13 Okrąg wpisany w trójkąt ΔABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prowadzimy trzy proste: przez środki odcinków AE i AF, przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE. Dowieść, że środek okręgu opisanego na trójkącie wyznaczonym przez te trzy proste pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ΔABC.

Zad. 14 (IMO 2000) Dwa okręgi T_1, T_2 przecinają się w dwóch punktach M, N. Niech l będzie wspólną styczną do tych dwóch okręgów taką, że M jest bliżej do l niż N. Punkty styczności tej prostej do okręgów T_1 oraz T_2 to odpowiednio A i B. Prosta równoległa do l przechodząca przez M przecina okręgi T_1, T_2 ponownie odpowiednio w C i D. Proste CA i BD przecinają się w punkcie E. $BN \cap CD = P$, $AM \cap CD = Q$ Udowodnij, że $EP = EQ$

Zad. 15 W trójkącie ΔABC punkt DH jest ortocentrum, a D środkiem boku BC. Prosta prostopadła do DH przechodząca przez H tnie AB i AC w punktach X i Y . Dowieść, że $DX = DY$.

Zad. 16 W trójkącie ΔABC punkt H jest ortocentrum, a D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ΔABC. Prosta prostopadła do OD przechodząca przez D tnie AB w punkcie X. Dowieść, że $\sphericalangle XHD = \sphericalangle CBA$.

Zad. 17 Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt $\sphericalangle DAB$ jest ostry. Punkty A, P, B, D leżą w tej kolejności na jednym okręgu. Proste AP i CD przecinają się w punkcie Q. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ΔCPQ. Wykazać, że jeśli $D \neq O$, to proste AD i DO są prostopadłe.

Zad. 18 (73 OM III) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Punkt M jest środkiem boku BC. Punkt P leży na odcinku AB, przy czym $AP > PB$. Punkt Q leży na odcinku AC, przy czym $\sphericalangle MPA = \sphericalangle AQM$. Symetralne odcinków BC i PQ przecinają się w punkcie S. Udowodnić, że $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QSP = \sphericalangle QMP$.

Dowody

Dowód potęgi punktu Wpierw pokażemy, że dla dwóch siecznych z punktu P przecinających okrąg odpowiednio w punktach A, B i C, D zachodzi $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$. Popatrzmy na trójkąty ΔPAC oraz ΔPDB. Kąt $\sphericalangle DPB$ jest ten sam co $\sphericalangle APC$. Oprócz tego z kątów na okręgów $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PDB$ czyli te trójkąty są podobne (k, k, k). Stąd równość stosunków $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ co jest równoważne powyższej równości iloczynów. W przypadku styczności wystarczy skorzystać z tw. o kącie między styczną i cięciwą, które daje $\sphericalangle PSA = \sphericalangle PBS$ co daje podobieństwo $\Delta PSA \sim \Delta PBS$ skąd stosunek $\frac{PA}{PS} = \frac{PS}{PB} \implies PS^2 = PA \cdot PB$. Oczywiście z tw. pitagorasa $PS^2 = PO^2 - R^2$.
Dowód istnienia osi potęgowej UWAGA! Dowód jest a n a l ityczny, więc zaleca się zarzyć mocniejsze środki odurzające przed jego przeczytaniem. Niech r_1, r_2 oznaczają odpowiednie promienie okręgów z zadania. BSO umieśćmy osie układu współrzędnych tak aby punkty miały odpowiednio współrzędne $O_1 = (-a, 0)$ oraz $O_2 = (0, a)$. Niech $S = (x, y)$ będzie punktem spełniającym $Pot(S, \omega_1) = Pot(S, \omega_2)$. Z definicji mamy:

$$|O_1S|^2 - r_1^2 = |O_2S|^2 - r_2^2 \iff (x+a)^2 + y^2 - r_1^2 = (x-a)^2 + y^2 - r_2^2 \iff x = \frac{1}{4a}(r_1^2 - r_2^2)$$

Jest to równanie prostej równoległej do osi y, czyli prostopadłej do prostej O_1O_2 (osi x) co chcieliśmy wykazać.

Dowód potęgowego kryterium współokręgowości Wystarczy odwrócić myślenie jak w dowodzie potęgi punktu. Najpierw dowodzimy podobieństw $\Delta PAC \sim \Delta PDB$ (b, k, b), skąd dostajemy współokręgowość punktów A, B, C, D.
Dowód Twierdzenia Monge'a Załóżmy zatem że osie potęgowe pewnych dwóch par okręgów przecinają się w punkcie P, w przeciwnym razie wszystkie osie są do siebie równoległe nie istnieje taka para osi.
b.s.o załóżmy, że te pary to K_1, K_2 oraz K_1, K_3 , zauważmy że $Pot(P, K_1) = Pot(P, K_2)$ oraz $Pot(P, K_1) = Pot(P, K_3)$ (definicji osi potęgowych na których leży punkt P)
zatem uzyskujemy $Pot(P, K_2) = Pot(P, K_1) = Pot(P, K_3)$ czyli punkt P leży również na osi potęgowej okręgów K_2, K_3.
Dowód prostej Auberta DYGRESJA Niech dany będzie czworokąt $ABCD$. Figurę składającą się z prostych AB, BC, CD, DA nazwiemy **czworobokiem zupełnym**, zaś same te proste, **bokami** tego czworoboku. Zakładamy (chwilowo), że czworokąt $ABCD$ n i e j e s t trapezem i oznaczamy $E = AB \cap CD$ $F = BC \cap DA$. A, B, C, D, E, F nazywamy jego **wierzchołkami**, a odcinki AC, BD, EF jego **przekątnymi.**
Rozważmy trzy okręgi K_{AC}, K_{BD}, K_{EF} o tych właśnie średnicach. Zauważmy, że odcinki AC, BD, EF są czewianami k a ż d e g o z trójkątów $\Delta ABF, \Delta ADE, \Delta BCE, \Delta CDF$. Z zadania 3. wiemy, że ortocentrum każdego z tych trójkątów jest środkiem potęgowym tych trzech okręgów (istnieje!). Nietrudno zauważyć, że gdy trzy okręgi mają więcej niż jeden środek potęgowy, to mają one jedną oś potęgową. Jest nią właśnie prosta Auberta, na którą te środki (ortocentra) leżą.

Dowód twierdzenia o motylku Oznaczenia jak w ważnych twierdzeniach

Niech X' oraz X" będą spodkami punktu X opuszczonymi odpowiednio na AR oraz RB. Dalej niech Y' oraz Y" będą spodkami punktu Y opuszczonymi odpowiednio na RC oraz DR. Ze względu na podobieństwo trójkątów uzyskujemy stosunki odpowiednio z:

$\Delta RXX' \sim \Delta RYY'$ (k,k,k) $\Rightarrow \frac{RX}{RY} = \frac{XX'}{YY'}$

$\Delta RXX'' \sim \Delta RYY''$ (k,k,k) $\Rightarrow \frac{RX}{RY} = \frac{XX''}{YY''}$

$\Delta AXX' \sim \Delta DYY$" (k,k,k) $\Rightarrow \frac{XX'}{YY''} = \frac{AX}{DY}$

$\Delta BXX' \sim \Delta CYY$" (k,k,k) $\Rightarrow \frac{XX''}{YY'} = \frac{BX}{CY}$

$(\frac{RX}{RY})^2 = \frac{XX' \cdot XX''}{YY' \cdot YY''}$,

$= \frac{AX \cdot BX}{DY \cdot CY}$,

$= \frac{EX \cdot XF}{EY \cdot YF}$,(z potegi punktu X oraz Y wzgledem okregu)

$= \frac{(ER - XR) \cdot (RX + YF)}{(ER + RY) \cdot (RF - RY)}$

wiemy z założeń ,że $ER = RF$ zatem:

$(\frac{RX}{RY})^2 = \frac{ER^2 - RX^2}{RF^2 - RY^2}$

przekształcając uzyskujemy

$RX^2 \cdot ER^2 = RY^2 \cdot RF^2$

zatem oczywiście:

$MX = MY$