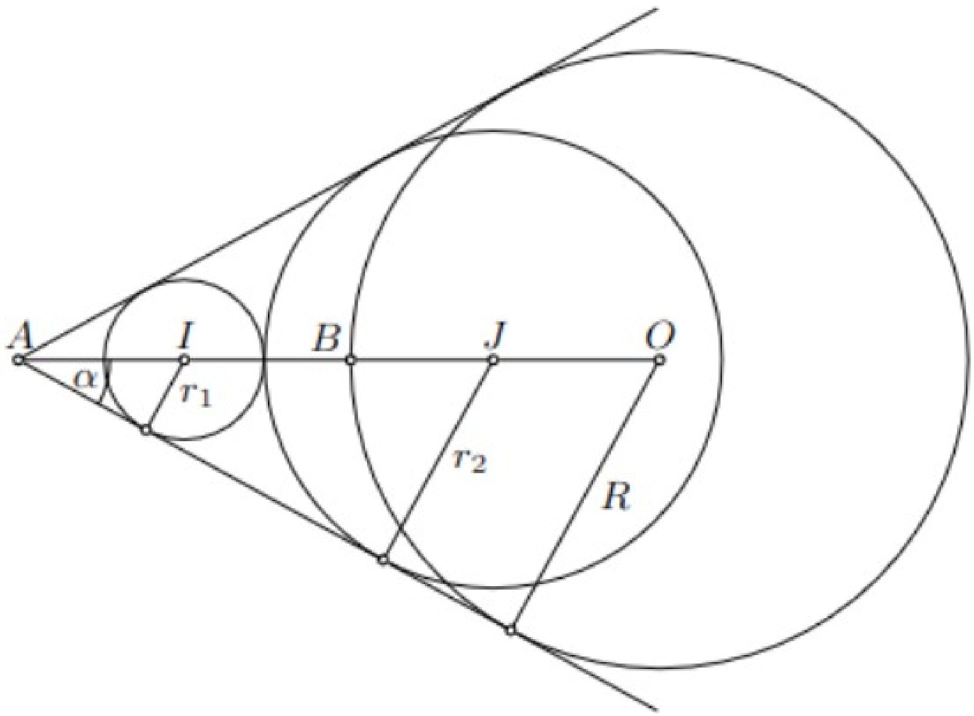
Kontest 2 - 27.09.2023

Rozwiązania Starsi

Zadanie 1. Dane są 3 okręgi ω_1, ω_2 oraz Ω o promieniach kolejno r_1, r_2 oraz $r_1 + r_2$ wpisane w ten sam kąt o wierzchołku w A. I jest środkiem ω_1, J jest środkiem ω_2 oraz O jest środkiem Ω. $r_1 < r_2$ oraz ω_1 i ω_2 są styczne. Ω przecina prostą IJ w punkcie B. Wykaż, że $IB = IA$.

Dowód. Niech $R = r_1 + r_2$ będzie promieniem Ω. Zauważamy na początek, że $IJ = r_1 + r_2 = R = BO$. Zatem $IB = JO$ i wystarczy wówczas wykazać, że $AI = JO$. Niech α będzie miarą kąta, tak jak zaznaczono na rysunku.



Wówczas $AI = \frac{r_1}{\sin(\alpha)}$ oraz

$$JO = OA - JA = \frac{R}{\sin(\alpha)} - \frac{r_2}{\sin(\alpha)} = \frac{r_1}{\sin(\alpha)}$$

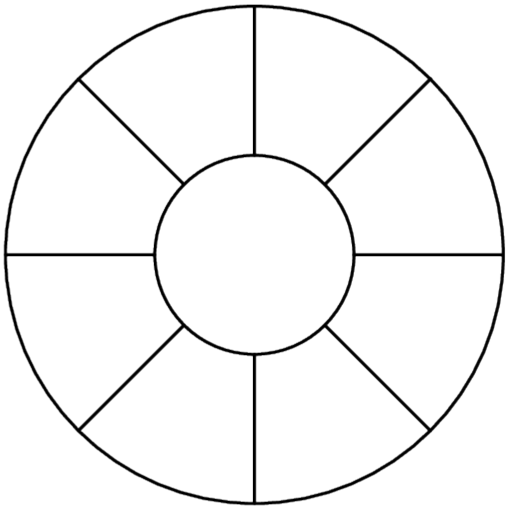
Zatem $JO = \frac{r_1}{\sin(\alpha)} = AI$. ■

Zadanie 2. Wykaż, że istnieje taka liczba $n > 1$, że trzy ostatnie cyfry liczby 7^n to 007.

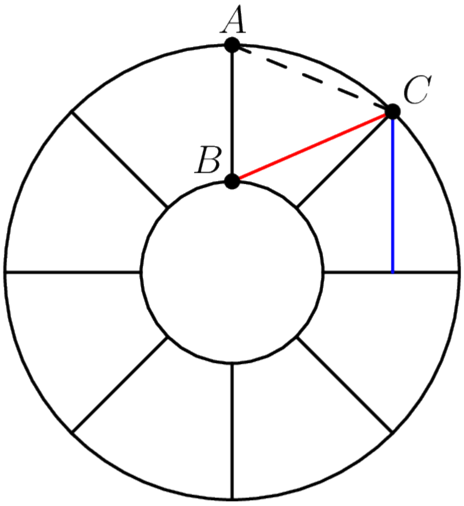
Dowód. Zauważmy, że z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją różne liczby 7^k i 7^n o tej samej reszcie z dzielenia przez 1000. Wtedy $1000|7^k(7^{n-k}-1)$, i skoro $1000 \perp 7$, to $7^{n-k} \equiv 1 \pmod{1000}$, czyli kończy się na 001.Z tego otrzymujemy, że 7^{n-k+1} na 007. ■

Zadanie 3. Udowodnij, że wśród dowolnych 10 punktów wybranych z koła o średnicy 5 bez brzegu istnieją co najmniej dwa punkty, których odległość jest mniejsza niż 2.

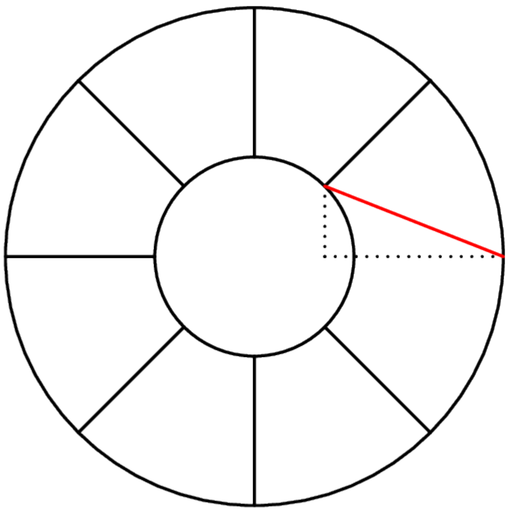
Dowód. Dzielimy koło na 9 obszarów jak na rysunku.



Koło w środku ma średnicę 2 i nie zawiera swojego brzegu. Na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, w którymś obszarze muszą się znaleźć co najmniej 2 punkty.
Jeśli 2 punkty znajdują się w kole o średnicy 2, to ich odległość musi wynosić mniej niż 2, bo koło zdefiniowaliśmy tak, aby nie zawierało swojego brzegu.



Obliczmy teraz maksymalny dystans pomiędzy dwoma punktami w którymś z zewnętrznych obszarów. Największy dystans będzie osiągnięty wtedy, gdy punkty będą znajdować się w rogach A, C albo w punktach B, C (gdzie te punkty są ustalone jak na rysunku). Długość niebieskiego odcinka wynosi $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, czyli $\frac{5\sqrt{2}}{4} > \frac{7}{4}$. Tymczasem współrzędna y punktu B wynosi 1, a punktu A wynosi $\frac{5}{2}$. Zatem C ma większy dystans do punktu B niż do punktu A.



Długość odcinka BC liczymy twierdzeniem Pitagorasa jak na rysunku. Krótsza przyprostokątna ma długość $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a dłuższa ma długość $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5-\sqrt{2}}{2}$, zatem długość BC wynosi $\frac{\sqrt{29-10\sqrt{2}}}{2}$.

$$\frac{\sqrt{29 - 10\sqrt{2}}}{2} < 2 \iff 29 - 10\sqrt{2} < 4^2$$

$$29 - 10\sqrt{2} < 16 \iff 13 < 10\sqrt{2}$$
$$13^2 = 169 < 200 = 10^2\sqrt{2}^2$$

■

Zadanie 4. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające nierówność

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

dla wszystkich rzeczywistych x i y.

Dowód. Podstawiając do nierówności z zadania $x = y = 0$ otrzymujemy

$$0 \leqslant -(f(0))^2$$

zatem $f(0) = 0$. Teraz, podstawiając $y = 0$, otrzymujemy

$$f(x^2) \leqslant xf(x)$$

natomiast podstawiając $x = 0$, otrzymujemy

$$-f(y^2) \leqslant -yf(y)$$

Zatem $f(x^2) = xf(x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Stosując tą równość możemy zauważyć, że $-xf(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = xf(x)$, więc dla $x \neq 0$ mamy $f(x) = -f(-x)$. Łącząc to z faktem, że $f(0) = 0$ zauważamy, że funkcja f jest nieparzysta. Zamieniając w nierówności z zadania x na y oraz y na $-x$ i korzystając z nieparzystości mamy

$$f(y^2) - f(x^2) \leqslant (f(y) - x)(y + f(x))$$

Po połączeniu tej nierówności z nierównością z treści zadania widzimy, że

$$f(x^2) - f(y^2) = (f(x) + y)(x - f(y))$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y. Łącząc to z faktem, że $f(x^2) = xf(x)$ otrzymujemy

$$xf(x) - yf(y) = (f(x) + y)(x - f(y)),$$

co po przekształceniach daje nam

$$0 = xy - f(x)f(y)$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y Po podstawieniu $y = 1$ dostajemy $x = f(x)f(1)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wybranie $x = 1$ pokazuje, że $f(1) = \pm 1$. Zatem jedynymi rozwiązaniami mogą być funkcje $f(x) = x$ oraz $f(x) = -x$. Sprawdzamy i widzimy, że obie te funkcje są rozwiązaniami. ■