



## Rozwiązania Kontestu 5 – II etap

**Zadanie 1.** 120 piratów dzieli między sobą 119 złotych monet. Następnie kapitan sprawdza, czy którykolwiek z piratów ma 15 lub więcej złotych monet. Jeśli znajdzie pierwszego takiego pirata, ten musi oddać wszystkie swoje monety innym piratom, przy czym nie może dać żadnemu z nich więcej niż jednej monety. Ta kontrola jest powtarzana, dopóki nie ma żadnego pirata z 15 lub więcej złotymi monetami. Czy ten proces zawsze kończy się po skończonej liczbie kontroli?

*Źródło: Aufgabe 1 z link*

**Rozwiązanie 1.** Ten proces kończy się zawsze po skończonej liczbie kontroli. Ponadto, poza treścią zadania, można udowodnić, że proces zakończy się najpóźniej po 15. kontroli.

Założmy, że istnieje rozdział, w którym przy każdej z 15 kolejnych kontroli spotykany jest pirat z 15 złotymi monetami. Każdy pirat, który zostanie znaleziony przy kontroli z 15 lub więcej złotymi monetami, musi oddać wszystkie swoje złote monety i może po każdej kolejnej kontroli odzyskać najwyżej jedną złotą monetę, więc może być spotkany z 15 lub więcej złotymi monetami najwcześniej po 15 kolejnych kontrolach. Jeśli więc przy 15 kolejnych kontrolach za każdym razem spotykany jest pirat z 15 lub więcej złotymi monetami, żaden pirat nie występuje dwukrotnie.

Ponieważ każdy pirat po każdej kontroli może otrzymać najwyżej jedną złotą monetę, to ten pirat może być spotkany przy kontroli  $K_i$  tylko wtedy, gdy przy kontroli  $K_{i-j}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, i-1$ ) miał co najmniej  $15 - j$  złotych monet, więc przy kontroli  $K_1$  miał co najmniej  $15 - (i-1) = 16 - i$  złotych monet.

Zatem na początku istnieje 15 piratów  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 15$ ), z których każdy ma co najmniej  $16 - i$  złotych monet. Wśród tych 15 piratów rozdzielono co najmniej  $15 + 14 + \dots + 2 + 1 = 120$  złotych monet, co jest więcej niż całkowita liczba rozdzielonych złotych monet, co stanowi sprzeczność.

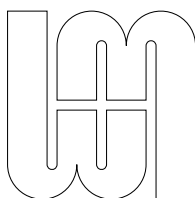
*Źródło: Aufgabe 1 z link*

**Zadanie 2.** Udowodnij, że dla  $n \geq 1$  prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

*Źródło: Analiza Matematyczna 1.1, rok 2020*

**Rozwiązanie 2.** Zaczniemy od lewej nierówności, przeprowadzimy dowód indukcyjny, najpierw



sprawdźmy bazę indukcyjną, przypadek  $n = 1$

$$L = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{2}$$

$$L \leq P$$

Więc nierówność dla  $n = 1$  zachodzi, teraz czas na krok indukcyjny.

Udowodnimy, że lewa strona zwiększa się zawsze o mniejszą wartość niż prawa. Przechodzimy z wyrażen dla  $n$  na  $n + 1$

$$\Delta L = \frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$\Delta P = \frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Pozostało wykazać, że dla  $n \geq 1$  zachodzi  $\Delta L \leq \Delta P$

Teza jest więc równoważna:

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \quad | \cdot (n+1)(4n^2+8n+4)$$

$$4n^3+8n^2+4n \leq 4n^3+8n^2+5n+1 \quad | - (4n^3+8n^2+4n)$$

$$0 \leq n+1$$

Przejdźmy zatem do prawej strony nierówności, tak jak wcześniej przeprowadzimy dowód indukcyjny, najpierw jednak wzmocnimy tezę zmniejszając prawą stronę nierówności do  $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(jest to zmniejszenie, ponieważ funkcja:  $\frac{1}{x}$  jest malejąca a  $2n+1 > 2n$ )

Sprawdźmy bazę indukcyjną, przypadek  $n = 1$

$$L = \frac{1}{2}$$

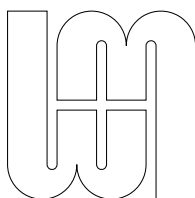
$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Chcemy wykazać  $L \leq P$  czyli:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{3}{9} \quad | \cdot 4$$

$$1 \leq \frac{12}{9}$$



Więc nierówność dla  $n = 1$  zachodzi, teraz czas na krok indukcyjny.

Udowodnimy, że lewa strona zwiększa się zawsze o mniejszą wartość niż prawa. Przechodzimy z wyrażen dla  $n$  na  $n + 1$

$$\Delta L = \frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$\Delta P = \frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}$$

Pozostało wykazać, że dla  $n \geq 1$  zachodzi  $\Delta L \leq \Delta P$

Teza jest więc równoważna:

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}$$

$$\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \leq \frac{2n+1}{2n+3} \quad | \cdot (2n+3)(4n^2+8n+4)$$

$$8n^3+20n^2+14n+3 \leq 8n^3+20n^2+16n+4 \quad | - (8n^3+20n^2+14n+3)$$

$$0 \leq 2n+1$$

Źródło: rozwiązanie autorskie – Jakub Piotrowicz

**Zadanie 3.** Dany jest wielomian  $W(x) = x^2 + ax + b$ , o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:

Dla każdej liczby pierwszej  $p$  istnieje taka liczba całkowita  $k$ , że liczby  $W(k)$  oraz  $W(k+1)$  są podzielne przez  $p$ .

Dowieść, że istnieje liczba całkowita  $m$ , dla której:

$$W(m) = W(m+1) = 0.$$

Źródło: link

**Rozwiązanie 3.** Warunek  $W(m) = W(m+1) = 0$  oznacza, że

$$W(x) = (x-m)(x-m+1),$$

czyli

$$W(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m.$$

Należy zatem wykazać, że istnieje taka liczba całkowita  $m$ , że

$$a = -2m - 1 \quad \text{oraz} \quad b = m^2 + m.$$

Ustalmy liczbę pierwszą  $p$ . Wówczas dla pewnej liczby całkowitej  $k$  liczby

$$A = W(k) = k^2 + ak + b,$$



$$B = W(k + 1) = (k + 2)k + (a + b + 1),$$

są podzielne przez  $p$ . Przez  $p$  dzielią się więc kolejno następujące liczby:

$$C = B - A = 2k + (a + 1),$$

$$D = 2A - kC = (a - 1)k + 2b,$$

$$E = (a - 1)C - 2D = a^2 - 4b - 1.$$

Liczba  $E$  jest wyznaczona przez współczynniki wielomianu  $W$  i nie zależy od  $k$ . Przeprowadzając to rozumowanie dla każdej liczby pierwszej  $p$ , stwierdzamy, że liczba  $E$  jest podzielna przez każdą liczbę pierwszą  $p$  i w konsekwencji  $E = 0$ . Stąd wynika, że liczba  $a$  jest nieparzysta, tzn.

$$a = -2m - 1$$

dla pewnej liczby całkowitej  $m$ , oraz

$$b = \frac{1}{4}(a^2 - 1) = m^2 + m.$$

Źródło: Rozwiązanie ze strony OM: [link](#)

**Zadanie 4.** Niech  $P$  będzie dowolnym punktem na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ . Niech  $K, L, M$  to środki boków  $BC, CA, AB$  odpowiednio. Niech  $k$  to prosta przechodząca przez  $K$  prostopadła do  $AP$ . Niech  $l$  to prosta przechodząca przez  $L$  prostopadła do  $BP$ . Niech  $m$  to prosta przechodząca przez  $M$  prostopadła do  $CP$ . Udowodnij, że proste  $k, l, m$  oraz okrąg opisany na trójkącie  $KLM$  mają punkt wspólny.

Źródło: autorskie

**Rozwiązanie 4.** Niech  $H, O, G$  to ortocentrum, środek okręgu opisanego  $\Omega$  i środek ciężkości trójkąta  $ABC$ . Niech  $P'$  będzie antypodyczny do  $P$  względem  $\Omega$ . Wówczas  $O$  jest środkiem  $PP'$  oraz  $HG = 2 \cdot GO$  przy czym  $G$  leży na odcinku  $HO$ . Stąd  $G$  jest środkiem ciężkości trójkąta  $HPP'$ . Stąd, jeśli  $Q$  to środek odcinka  $PH$ , to  $G$  dzieli odcinek  $P'Q$  w stosunku  $2 : 1$ . Jednokładność o środku w  $G$  i skali  $-\frac{1}{2}$  przenosi wówczas punkty  $A, P'$  na punkty  $K, Q$ . Prosta  $AP'$  przechodzi więc na doń równoległą przez  $K$ , czyli na prostą  $k$  (bo  $P'A \perp PA \perp k$ ). Z drugiej strony  $P'A$  przechodzi na  $QK$ . Stąd  $Q \in k$ . Analogicznie  $Q$  leży na  $l$  oraz  $m$ . Ponadto  $Q$  leży na okręgu dziewięciu punktów trójkąta  $ABC$  (czyli na opisanym na  $KLM$ ) z powodu jednokładności o środku w  $H$  i skali  $\frac{1}{2}$  (bo  $Q$  jest obrazem  $P \in \Omega$ ).

Źródło: autorskie