

Kontest 1 - 26.09.2023

Pierwszaki

Zadanie 1. Mamy danych 17 liczb całkowitych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 9 liczb, których suma jest podzielna przez 9.

Zadanie 2. Dane jest n aut na zapętlonej drodze. Każde z aut ma w sobie pewną ilość benzyny, w sumie benzyny wystarcza na pełne okrążenie drogi. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ można wybrać takie auto początkowe, że zabierając z każdego auta, do którego dojeżdżamy całą benzynę, przejedziemy całe okrążenie.

Zadanie 3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E leżącym na półprostej AB , a proste AD i BC w punkcie F leżącym na półprostej AD . Przypuśćmy, że istnieje okrąg styczny do półprostych BE i DF oraz do odcinków EC i CF . Wykazać, że odcinek stycznej poprowadzonej z punktu B do okręgu wpisanego w trójkąt ABD ma taką samą długość, jak odcinek stycznej poprowadzonej z punktu D do okręgu wpisanego w trójkąt BCD .

Zadanie 4. Rozstrzygnij, czy istnieją dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniające równość:

$$(3 + \sqrt{7})^k \cdot (4 + \sqrt{7})^m = (5 + \sqrt{7})^n.$$