Kontest 5 – PreOM 2025

Zadanie 1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt E jest przecięciem przekątnych AC i BD, a M jest środkiem łuku BC. N jest punktem przecięcia prostej ME z okręgiem na łuku AD.

Udowodnij, że dwusieczne kątów $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle AND$ przecinają się na boku AD czworokąta.

Zadanie 2. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1.$$

Udowodnij, że:

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2\left|1 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right|$$

oraz wyznacz wszystkie przypadki równości.

Zadanie 3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Zbiór n różnych prostych dzieli płaszczyznę na różne (być może nieograniczone) obszary. Zbiór prostych nazywamy *„ładnym”*, jeśli żadne trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie.

„Kolorowaniem” nazywamy przypisanie dwóch kolorów do każdego regionu w taki sposób, że:

- pierwszy kolor pochodzi ze zbioru $\{A_1, A_2\}$,
- drugi kolor pochodzi ze zbioru $\{B_1, B_2, B_3\}$.

Dany „ładny” zbiór prostych nazywamy *„kolorowalnym”*, jeśli istnieje takie kolorowanie, że:

1. żadne dwa regiony, które dzielą wspólną krawędź, nie mają przypisanego tego samego koloru,
2. dla każdego $i \in \{1, 2\}$ i $j \in \{1, 2, 3\}$ istnieje przynajmniej jeden region pokolorowany jednocześnie kolorem A_i i B_j.

Wyznacz wszystkie wartości n, dla których każda „ładna” konfiguracja n prostych jest kolorowalna.

Zadanie 4. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych n takich, że największy dzielnik pierwszy liczby $n^4 + n^2 + 1$ jest równy największemu dzielnikowi pierwszemu liczby $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.