Zasada szufladkowa Dirichleta i metoda ekstremum

Teoria

Twierdzenie 1 (Zasada szufladkowa Dirichleta)**.** *Do k szufladek włożono $m > k$ kamieni. Wówczas istnieje szufladka, która zawiera co najmniej 2 kamienie.*

Możemy łatwo uogólnić powyższą zasadę:

Twierdzenie 2 (Uogólniona zasada szufladkowa)**.** *Do k szufladek włożono $m > k$ kamieni. Wówczas istnieje szufladka, która zawiera co najmniej $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ kamienie.*

Przykłady

1. Wykazać, że wśród 27 uczniów danej klasy co najmniej trzech urodziło się w tym samym miesiącu.
2. Zbiór S zawiera $n + 1$ liczb całkowitych. Udowodnij, że istnieją różne liczby całkowite $a, b \in S$ takie, że $a - b$ jest wielokrotnością n.
3. Uzasadnić, że spośród dowolnych n liczb całkowitych niepodzielnych przez n można wybrać dwie, których różnica dzieli się przez n.
4. Wykazać, że wśród dowolnych $n + 2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

Metoda ekstremum.

Przy rozwiązywaniu zadań warto zastanowić się nad tym, co się dzieje w krańcowych przypadkach. Takie rozumowanie może nam pomóc w udowodnieniu tezy np. poprzez sprzeczność. Najczęściej będziemy wtedy wybierać największą/najmniejszą wartość, liczbę itp.

Przykłady

1. $\sqrt{7}$ jest liczbą niewymierną.
2. Na płaszczyźnie jest $2n$ punktów, żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Pokolorujemy n punktów na biało i n na czarno. Dowieść, że można narysować n nieprzecinających się odcinków takich, że każdy ma jeden koniec biały i drugi czarny.
3. Udowodnij, że jeśli wielomian f nie jest zerowy i spełnia $f(x)f(x + 3) = f(x^2 + x + 3)$, to nie ma pierwiastków rzeczywistych.
4. Na Balu Staszica przybyło C chłopców i D dziewczyn ($C, D \geqslant 2$). Okazało się, że żaden chłopak nie był wystarczająco odważny i nie zatańczył ze wszystkimi dziewczynami, ale każdej dziewczynie udało się zatańczyć z co najmniej jednym chłopakiem. Udowodnij, że istnieją 2 chłopacy (Bonawentura i Donato) i 2 dziewczyny (Henryka i Brunhilda) takie, że Bonawentura zatańczył z Henryką, ale nie z Brunhildą oraz Donato zatańczył z Brunhildą, ale nie z Henryką.

Zadania

1. Udowodnij, że wśród dowolnych 17 podzbiorów zbioru pięcioelementowej zawsze znajdą się dwa podzbiory rozłączne.
2. Udowodnij, że istnieje potęga trójki kończąca się cyframi 001.
3. Mamy skończony zbiór monet o różnych promieniach na stole w taki sposób, że żadne 2 nie pokrywają się. Dowieść, że istnieje moneta, która jest styczna do co najwyżej 5 monet.
4. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych
$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$
5. Dane są 5 punktów kratowych (współrzędne x i y są całkowite). Wykazać, że można wybrać 2 punkty takie, że odcinek z tymi końcami zawiera jakiś punkt kratowy.
6. Wewnątrz trójkata równobocznego o boku 1 wybrano 2017 punktów. Udowodnić, że są wśród nich 2 odległe o co najwyżej $\frac{1}{44}$.
7. Liczby całkowite od 1 do n^2 $(n > 1)$ wpisano w pola szachownicy $n \times n$ (bez powtórzeń). Udowodnij, że istnieje para sąsiednich pól takie, że ich różnica liczb jest co najmniej $n + 1$.
8. Mamy nieskończoną szachownicę, gdzie napisano w każde pole dodatnią liczbę całkowitą, w taki sposób, że każda liczba w danym polu jest średnią arytmetyczną 4 liczb sąsiednich pól. Wykaż, że wszystkie wartości są równe.
9. Na toru biegowym leży n powiększonych zestawów Drwala (różne wielkości). Suma ich "wartości" wystarcza Bożydarowi na przejście całego toru (odległość przebyta jest propocjonalna do wielkości zestawu). Udowodnij, że Bożydar może zacząć od pewnego Drwala (zaczyna głodny) w taki sposób, że może przejść cały tor bez trudu.
10. Dane jest 6 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Odcinek między każdymi dwoma pokolorowano na różowo i fioletowo. Dowieść, że można z nich wybrać trójkąt o bokach jednokolorowych.
11. Dane jest 17 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Odcinek między każdymi dwoma pokolorowano na czerwono, zielono i niebiesko. Wykazać, że można z nich wybrać trójkąt o bokach jednokolorowych.
12. Na okręgu obrano $2n$ punktów. Narysowano $n^2 + 1$ cięciw o końcach w tych punktach. Udowodnij, że istnieje trójkąt złożony z tych cięciw.
13. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Wykaż, że istnieje taki ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$ nie złożony z samych zer, że
$$2022 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{11}x_{11}.$$
14. Trójką remisową nazwiemy takich trzech zawodników x, y, z, że x wygrał z y, y wygrał z z, zaś z wygrał z x. Dowieść, że jeżeli w turnieju (każdy gra z każdym i nie ma remisów) nie ma trójek remisowych, to wszystkich zawodników można ustawić w taki ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że każdy zawodnik przegrał ze wszystkimi stojącymi po nim w ciągu. Innym słowy, jeżeli $i < j$ to a_i przegrał a_j.
15. Dane są takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 23\}$, że dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant k$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma co najwyżej trzy elementy. Wykazać, że $k \leqslant 2018$.