Autor: Dominika Piętka

Prowadzący: Dominika Piętka

Ceva i Menelaos

Teoria

Tw. Cevy Punkty X, Y, Z leżą na prostych BC, CA, AB i są różne od wierzchołków trójkąta. Proste AX, BY, CZ są współpękowe lub równoległe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

Tw. Menelaosa Punkty X, Y, Z są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

Zauważmy, że w przypadku Twierdzenia Cevy, nieparzysta ilość punktów znajduje się na bokach trójkąta, zaś w przypadku twierdzenia Menelaosa - parzysta.

Zadanka

1. Dany jest trójkąt ABC. Punkty L, Z leżą na boku BC, punkty M, X leżą na boku CA, punkty K, Y leżą na boku AB przy czym $AB||MZ, BC||KX$ oraz $CA||LY$. Udowodnij, że proste KX, MY, LZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{AY}{YK} \cdot \frac{BZ}{ZL} \cdot \frac{CX}{XM} = 1$$

2. Punkty D, E, F leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Proste BC i EF przecinają się w punkcie X, proste CA i DF przecinają się w punkcie Y , a proste AB i DE przecinają się w punkcie Z. Udowodnij, że punkty X, Y, Z są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy proste AD, BE, CF są współpękowe.
3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do prostych BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Proste BC i EF przecinają się w punkcie X, proste CA i DF przecinają się w punkcie Y, proste AB i DE przecinają się w punkcie Z. Dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.
4. Punkty D, E, F leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Punkty K, L, M są środkami boków BC, CA, AB. Punkty X, Y, Z są środkami odcinków AD, BE, CF. Wykazać, że proste KX, LY, MZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
5. **Ceva w 3D** Dany jest czworościan $ABCD$. Sfera s jest styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.