Autor: Jeremi Hyska Prowadzący: Jeremi Hyska

Kombi-Geo – Finaliści

Metody

- Ekstemum!!! Rozważaj punkty które są najbliżej siebie, punkty które mają najmniejszą/największą którąś współrzędną itp.
- Indukcja!
- Otoczka wypukła zbioru punktów S to najmniejszy wielokąt wypukły taki że każdy z punktów z S leży wewnątrz lub na brzegu tego wielokąta. Wierzchołkami otoczki wypukłej są punkty z S. Jeśli punktom z S odpowiadają liczby zespolone $v_1, v_2, ..., v_n$, to otoczka wypukła to zbiór wszystkich punktów postaci $a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n$, gdzie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ są liczbami nieujemnymi takimi że $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$.
- Dany jest n-kąt foremny. Jego triangulacją nazwiemy zbiór $n-3$ jego przekątnych, z których żadne dwie się nie przecinają poza wierzchołkami wielokąta. Triangulacja dzieli wielokąt na $n-2$ trójkąty.
- Twierdzenie Sylvestra-Gallai: Wśród n punktów na płaszczyźnie takich że nie wszystkie są współliniowe, istnieje prosta która przechodzi przez dokładnie 2 z nich.
- Wzór Picka: Niech P będzie wielokątem bez samoprzecięć, którego wszystkie wierzchołki są punktami kratowymi. Niech W będzie liczbą punktów kratowych wewnątrz wielokąta, a B będzie liczbą punktów kratowych na jego brzegach. Wtedy pole tego wielokąta jest równe $W + \frac{B}{2} - 1$.
- Twierdzenie Helly'ego: W przestrzeni $\mathbb{R}^d$ dane jest $n > d$ zbiorów wypukłych $X_1, X_2, ..., X_n$. Jeśli każdy podzbiór $d+1$ z nich ma niepuste przecięcie, to przecięcie wszystkich tych zbiorów też jest niepuste.

Zadania

Zadanie 1. Dane jest 5 punktów płaszczyzny, żadne 3 nie są współlniowe. Udowodnij że pewne 4 z nich tworzą wielokąt wypukły.

Zadanie 2. (Mszana '23) Danych jest $n \geqslant 2$ punktów na płaszczyźnie. Załóżmy, że dla każdego punktu X, istnieje dokładnie jeden punkt $N(X)$, który jest bliżej X niż wszystkie pozostałe punkty. Dla każdego punktu X, rysujemy z niego odcinek do $N(X)$ oraz kolorujemy $N(X)$ na czerwono. Załóżmy, że na koniec każde dwa z danych punktów są połączone łamaną. Udowodnić, że jest co najmniej $\frac{n-2}{4}$ czerwonych punktów.

Zadanie 3. (Mszana '22)Niech $P = A_1A_2A_3 \ldots A_{180}$ będzie 180–kątem foremnym. Niech X będzie punktem we wnętrzu P. Udowodnić, że istnieją takie indeksy $i \neq j$, że $179° < \sphericalangle A_iXA_j \leqslant 180°$.

Zadanie 4. Na płaszczyźnie dany jest wielokąt o obwodzie równym 4. Udowodnij że da się go przykryć kołem o promieniu 1.

Autor: Jeremi Hyska Prowadzący: Jeremi Hyska

Zadanie 5. (Mszana '24) Czy istnieje 777-kąt wypukły którego zbiór długości boków to $\{1, 2, ..., 777\}$, a wszystkie jego kąty mają równe miary?

Zadanie 6. (Mszana '22) Punktem kratowym nazwiemy punkt na płaszczyźnie o obu współrzędnych całkowitych. Dany jest skończony zbiór S punktów kratowych. Wykazać, że można wykonać jedynie skończenie wiele operacji następującej postaci: dla czterech różnych punktów kratowych A, B, C, D, przy czym punkty A, B należą do S, a punkty C, D nie należą do S, $AB > CD$ oraz $ACBD$ jest równoległobokiem, punkty A, B usuwamy z S, zaś punkty C, D dodajemy do S.

Zadanie 7. (Mszana '22) Na płaszczyźnie danych jest n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Wykazać, że wśród części, na które rozcinają one płaszczyznę, jest co najmniej $n - 2$ trójkątów.

Zadanie 8. Dany jest skończony zbiór kartek o sumarycznym polu 4. Udowodnij że za ich pomocą da się przykryć kwadrat o boku długości 1. (Kartki mogą na siebie nachodzić).

Zadanie 9. (RMO '03) Dany jest wielokąt wypukły na płaszczyźnie. Udowodnij że istnieje co najwyżej jedna jego triangulacja taka, że każdy powstały w niej trójkąt jest ostrokątny.

Zadanie 10. (IGO '21) Dany jest wypukły 2024-kąt $A_1A_2...A_{2024}$. Udowodnij że istnieją takie 2 jego wierzchołki A_i, A_j, że koło o średnicy A_iA_j zawiera co najmniej 674 pozostałych wierzchołków.

Zadanie 11. (Chiny '08) Znajdź wszystkie takie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że istnieje n-kąt wypukły ze wszystkimi wierzchołkami w punktach kratowych, którego wszystkie długości boków są różnymi liczbami całkowitymi nieparzystymi.