Autor: Jeremi Hyska

Prowadzący: Jeremi Hyska

Kombi — Grafy

Teoria

- Graf nieskierowany składa się ze zbioru wierzchołków V i zbioru krawędzi, które są parami wierzchołków. Zazwyczaj domyślnie, przez słowo "graf", rozumiemy graf nieskierowany.
- Graf skierowany działa tak samo jak graf nieskierowany, ale krawędzie są jednokierunkowe.
- Mówimy że wierzchołki ze sobą sąsiadują gdy są połączone krawędzią.
- Stopień wierzchołka w grafie to liczba krawędzi które wychodzą z tego wierzchołka.
- Ścieżka w grafie to taki ciąg krawędzi, w którym każde kolejne 2 wierzchołki ze sobą sąsiadują.
- Ścieżka prosta to taka, w której wierzchołki nie powtarzają się.
- Cykl to taka ścieżka, w której pierwszy wierzchołek sąsiaduje z ostatnim wierzchołkiem.
- Cykl Eulera w grafie to taki cykl który przechodzi każdą krawędzią dokładnie raz. Cykl wierzchołek ma parzysty stopień.
- Na ogół zakładamy, że między żadną parą wierzchołków nie może być więcej niż 1 krawędź i że krawędź nie może łączyć wierzchołka z nim samym.
- Odległość między dwoma wierzchołkami to długość najkrótszej ścieżki z pierwszego do drugiego wierzchołka.
- Graf jest spójny, jeśli między każdą parą wierzchołków w tym grafie istnieje ścieżka. Podzbiór wierzchołków grafu który jest spójny w tym grafie się spójną składową.

Typy grafów

- Drzewo to taki graf w którym nie istnieją cykle. Drzewo na n wierzchołkach zawsze ma dokładnie $n-1$ krawędzi. W drzewie między każdą parą wierzchołków istnieje dokładnie jedna ścieżka prosta.
- Las to graf którego wszystkie spójne składowe są drzewami. Równoważna definicja lasu to graf bez cykli.
- Klika to graf w którym między każdą parą wierzchołków istnieje krawędź.
- Turniej to graf skierowany, w którym między każdą parą wierzchołków jest dokładnie jedna krawędź, skierowana w którąś stronę.
- Graf dwudzielny to taki, w którym zbiór wierzchołków można pokolorować na 2 kolory - biały i czarny, tak żeby każda krawędź łączyła wierzchołki w różnych kolorach.
- Gwiazda to graf w którym jeden wierzchołek sąsiaduje ze wszystkimi innymi.
- n-wymiarowa hiperkoskta to graf, w którym wierzchołkami są wszystkie n-elementowe ciągi binarne, a krawędzie są między tymi ciągami, które różnią się na dokładnie jednej pozycji.

Autor: Jeremi Hyska Prowadzący: Jeremi Hyska

Rozgrzewka

1. Udowodnij że każde drzewo jest grafem dwudzielnym.
2. Udowodnij że każda gwiazda jest drzewem.
3. Udowodnij że następujące definicje drzewa są równoważne:
   - Spójny graf o n wierzchołkach i $n-1$ krawędziach.
   - Spójny graf bez cykli.
   - Graf w którym z każdego do każdego wierzchołka istnieje dokładnie jedna ścieżka.
4. Liściem nazywamy wierzchołek grafu który ma stopień 1. Udowodnij, że każde drzewo ma liść.

Zadanka

1. Udowodnij lemat o uściskach dłoni: Suma stopni wszystkich wierzchołków grafu jest równa liczbie krawędzi w tym grafie.
2. Udowodnij, że w każdym grafie dwudzielnym, wszystkie cykle mają parzystą długość. Udowodnij też stwierdzenie odwrotne.
3. Rozegrany został turniej w badmintona, w którym każdy zawodnik zagrał z każdym zawodnikiem jeden mecz, który zakończył się zwycięstwem jednego z nich. Udowodnij, że istnieje zawodnik A, taki że dla każdego innego zawodnika B, A wygrał z B lub istnieje taki C że A wygrał z C i C wygrał z B.
4. Udowodnij że cykl Eulera istnieje wtedy i tylko wtedy gdy każdy wierzchołek w grafie ma parzysty stopień.
5. Udowodnij że w każdym drzewie o n wierzchołkach istnieje wierzchołek, taki, że jak go usuniemy, razem ze wszystkimi jego krawędziami, to nasze drzewo rozpadnie się na części i w każdej części będzie mniej niż $\frac{n}{2}$ wierzchołków.
6. Udowodnij że w każdym grafie, w którym minimalny stopień wierzchołka to d, istnieje cykl długości $d+1$.
7. Mamy drzewo. Mrówka Marysia mieszka w wierzchołku A tego drzewa. Pewnego dnia poszła na spacer i doszła do wierzchołka B takiego, że ścieżka od A do B jest najdłuższą ścieżką wychodzącą z A. Ale było jej jeszcze mało, więc poszłą dalej do wierzchołka C takiego, że ścieżka z B do C jest najdłuższą ścieżką wychodzącą z B. Udowodnij, że ścieżka z B do C jest najdłuższą ścieżką w całym grafie.
8. Udowodnić że w n-wymiarowej hiperkostce istnieje ścieżka Hamiltona z wierzchołka u do wierzchołka v wtedy i tylko wtedy gdy odległość między u a v jest liczbą nieparzystą.
9. Tomek ma graf który jest gridem 16x16 na powierzchni torusa. Każda z 512 krawędzi tego grafu pokolorowana jest na czerwono albo niebiesko. Kolorowanie nazywamy "dobrym"jeśli z każdego wierzchołka wychodzi parzysta liczba czerwonych krawędzi. Ruch polega na wybraniu dowolnego prostokąta złożonego z 4 krawędzi na tym torusie i przemalowaniu wszystkich jego 4 krawędzi na przeciwne kolory. Jaka jest największa taka liczba a, że istnieje zbiór a różnych kolorowań, w którym żadne z nich nie może być osiągnięte z żadnego innego przez sekwencję wyżej opisanych ruchów.
10. Mamy graf z 2019 wierzchołkami, taki że 1010 z nich ma stopień 1009, a 1009 z nich ma stopień 1010. Możemy na nim wykonywać następujący ruch: Wybieramy takie wierzchołki A, B, C, że A sąsiaduje z B i C, ale B nie sąsiaduje z C. Usuwamy krawędzie między A a B i między A a C i dodajemy krawędź między B a C. Udowodnić że możemy tak wykonywać te ruchy, że w końcu, każdy wierzchołek będzie miał stopień co najwyżej 1.