

Kontest 2 - 27.09.2023

Finaliści

Zadanie 1. Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych $x, y > 1$, zachodzi

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8.$$

Zadanie 2. Niech PQ będzie średnicą półokręgu H . Okrąg O jest wewnętrznie styczny do H i styczny do PQ w C . Niech A będzie punktem na H , a B punktem na PQ , takim, że $AB \perp PQ$ i AB jest styczne do O . Udowodnij, że AC jest dwusieczną $\sphericalangle PAB$.

Zadanie 3. Niech x, y będą liczbami całkowitymi spełniającymi $2 \leq x, y \leq 100$. Udowodnij, że istnieje $n \in \mathbb{N}_+$, takie, że $x^{2^n} + y^{2^n}$ nie jest pierwsze.

Zadanie 4. *Podziałem* liczby n nazywamy przedstawienie liczby n w postaci sumy liczb całkowitych dodatnich, przy czym *podziały* uznajemy za takie same, jeśli da się z jednego uzyskać drugi poprzez zmianę kolejności dodawania.

Udowodnij, że dla naturalnej liczby n liczba podziałów liczby n , z których każda część występuje co najmniej dwa razy jest równa liczbie podziałów n na części, które są podzielne przez 2 lub 3.