Indukcja, piękniejsza niż się wydaje (chyba)

Artur Walczak

Prawdopodobnie każdy z Was jest zaznajomiony z konceptem indukcji matematycznej. Jednocześnie pewnie większość z Was nie docenia potęgi tej metody. Ma ona zastosowanie w każdej dziedzinie matematyki i wykorzystywana jest do niezliczenie wielu pięknych dowodów. Zadania w tej broszurze podzielone są na kategorie pod względem tematyki, ale wewnątrz każdej z nich trudność zadań powinna rosnąć. Powodzenia!
PS. Rozwiązania zadań z pliku można dać mi do sprawdzenia. Nie obiecuję, że to zrobię ale istnieje na to szansa więc polecam.

1 Potrzebna Teoria

- **Indukcja słaba**:
  Zasada Indukcji Matematycznej = ZIM: Niech $T(n)$ będzie zdaniem logicznym dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, jeśli:
  - Istnieje takie n_0, że zdanie $T(n_0)$ jest prawdziwe
  - Dla dowolnego $k \geqslant n_0$ zdanie $T(k)$ implikuje $T(k+1)$,

  to dla dowolnego $n \geqslant n_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.
- **Indukcja mocna**:
  Zasada Mocnej Indukcji = ZMI: Niech $T(n)$ będzie zdaniem logicznym dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, jeśli:
  - Istnieje takie n_0, że zdanie $T(n_0)$ jest prawdziwe
  - Dla dowolnego $k \geqslant n_0$ prawdziwość zdań $T(n_0), T(n_0+1), ...T(k)$ implikuje $T(k+1)$,

  To dla dowolnego $n \geqslant n_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.
- **Indukcja Caushy'ego**:
  Niech $T(n)$ będzie zdaniem logicznym dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, jeśli:
  - Istnieje takie n_0, że zdanie $T(n_0)$ jest prawdziwe
  - Dla dowolnego $k > n_0$ prawdziwość zdania $T(k)$ implikuje T(2k),
  - Dla dowolnego $k > n_o$ zdanie $T(k)$ implikuje $T(k-1)$,

  To dla dowolnego $n \geqslant n_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.
- **Indukcja pozaskończona** (*)
  Dobry porządek na zbiorze X - Taki porządek liniowy, że dla każdego niepustego podzbioru X istnieje najmniejszy element tego podzbioru (ze względu na dany porządek). Przykładowo relacja $\leqslant$ na zbiorze $\mathbb{N}$ jest dobrym porządkiem.
  Zasada indukcji pozaskończonej: Niech X będzie zbiorem z dobrym porządkiem: $\succeq$ a T(x) będzie zdaniem logicznym dla $x \in X$. Wtedy, jeśli:
  - Dla każdego $y \in X$, $y \prec x$ prawdziwość zdań $T(y)$ implikuje prawdziwość $T(x)$

  To dla dowolnego $x \in X$ zdanie $T(x)$ jest prawdziwe.

2 Kombinatoryka

1. (Wieże z Hanoi) Dany jest zestaw trzech kołków oraz n krążków, gdzie każdy z krążków jest różnej wielkości. Kołki nazwijmy A, B, C a krążki niech mają numery od 1 dla najmniejszego do n dla największego. Na początku wszystkie dyski są na kołku A, w kolejności malejącej od góry do dołu, tak że dysk n jest na dole a 1 na górze. Celem jest przeniesienie wszystkich n dysków z kołka A na kołek B. Trzeba przestrzegać dwóch reguł.

   - Możesz przenieść tylko jeden dysk w jednym momencie.
   - Żaden dysk nie może zostać na szczycie mniejszego.

   Na przykład, jeśli dysk 3 jest na kołku, wtedy wszystkie dyski poniżej muszą mieć numery większe od 3. Udowodnij, że zadanie da się rozwiązać w conajwyżej 2n-1 ruchach.

2. Nazwijmy kostkę $2 \times 2 \times 2$ z uciętym narożnikiem $1 \times 1 \times 1$ *klockiem*. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}^+$ kostka o wymiarach $2^n \times 2^n \times 2^n$ z której usunięto jedną narożną kostkę $1 \times 1 \times 1$ pole może być pokryta takimi klockami.

3. Na pustyni na drodze w kształcie okręgu jest pewna liczba stacji benzynowych, a na każdej pewna ilość paliwa. Wiadomo, że paliwa na wszystkich stacjach łącznie wystarcza do przejechania drogi naokoło. Udowodnij, że istnieje stacja, taka że samochód startujący z tej stacji jadąc w wybraną stronę przejedzie całą drogę naokoło.

4. (LXXII OM) Jacek ma n kart ponumerowanych kolejno liczbami 1, . . . , n, które układa na stole w rzędzie, w dowolnej wybranej przez siebie kolejności. Jacek będzie zdejmować karty ze stołu w kolejności zgodnej z numeracją kart: wpierw zdejmie kartę o numerze 1, potem kartę o numerze 2, i tak dalej. Zanim Jacek zacznie zdejmować karty, Placek koloruje każdą z kart na czerwono, niebiesko lub żółto. Udowodnić, że Placek może po- kolorować karty w taki sposób, że podczas ich zdejmowania przez Jacka w każdym momencie spełniony będzie następujący warunek: pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajduje się co najmniej jedna karta innej barwy.

5. Wykaż że dowolną grupę liczącą więcej niż 12 osób można podzielić na grupy 4 i 5 osobowe.

6. W pewnym kraju jest $n \geqslant 2$ miast i każde jest połączone z każdym drogą jednokierunkową. Wykaż, że istnieje takie miasto do którego da się dojechać z każdego z pozostałych miast.

7. Dana jest szachownica $n \times n$, dla $n \in \mathbb{N}$. Ile co najmniej wież potrzeba, żeby spełniony był następujący warunek: dla każdych dwóch wież, które nie szachują się nawzajem istnieje wieża, która szachuje je obie.

8. Udowodnij, że jeśli graf G ma n wierzchołków i jest drzewem to ma on maksymalnie n-1 krawędzi.

9. Niech A będzie zbiorem wszystkich punktów kratowych (x, y) spełniających następujące warunki: $0 \leqslant x \leqslant 2022$ i $0 \leqslant y \leqslant 2022$ oraz $(x, y) \neq (0, 0)$. Ile co najmniej prostych, nieprzechodzących przez punkt (0, 0), potrzebujemy, żeby przez każdy punkt należący do A przechodziła co najmniej jedna taka prosta.

10. Dane jest n takich figur wypukłych na płaszczyźnie, że każde trzy z nich mają punkt wspólny. Udowodnij, że wszystkie te figury mają punkt wspólny.

11. Rozważmy wypukły n—kąt taki, że żadne trzy z jego przekątnych nie są współpękowe. Na ile ile części te przekątne dzielą ten n-kąt?

12. Pewną krainę podzielono na regiony rysując na niej okręgi i proste. Udowodnij, że można tak pokolorować te regiony dwoma kolorami, że żadne dwa regiony graniczące ze sobą nie są tego samego koloru.

13. W pięknym mieście Brok każde skrzyżowanie jest między dokładnie trzema ulicami. Każdą z tych ulic kolorujemy jednym z trzech kolorów: czerwony, czarny, zielony, tak żeby z każdego skrzyżowania wychodziły ulice w każdym z tych kolorów. Nazywamy skrzyżowanie *dobrym*, jeśli można wymienić kolory ulic które je tworzą zgodnie z ruchem wskazówek zegara i otrzymać: czerwona, czarna, zielona. Nazwijmy skrzyżowanie *okropnym*, jeśli możemy to zrobić wymieniając kolory przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Udowodnij, że różnica liczby *dobrych* i *okropnych* skrzyżowań jest podzielna przez 4.

14. (IMO 2013 shortlist) Na płaszczyźnie narysowaliśmy 2021 punktów czerwonych i 2022 punktów czarnych, tak że żadne trzy z nich nie są współliniowe. Należy narysować k prostych tak, żeby każdy fragment płaszczyzny ograniczony przez te proste zawierał punkty tylko jednego koloru. Znajdź najmniejsze możliwe k, dla którego to jest możliwe dla dowolnej konfiguracji naszych 4043 punktów.

15. Zbiór M składający się z kwadratów jednostkowych z tablicy $n \times n$ nazywiemy *wygodnym*, jeśli każdy wiersz i każda kolumna tabeli zawiera co najmniej dwa kwadraty należące do tego zbioru. Dls każdego $n \geqslant 5$ określić największe takie $m \in \mathbb{Z}$, dla którego istnieje wygodny zbiór m kwadratów jednostkowych taki, że kiedy usuniemy z niego dowolny kwadrat to otrzymamy zbiór, który nie jest wygodny.

16. Udowodnij, że sześcian S można podzielić na n sześcianów dla $n \geqslant 55$

17. Czy istnieje taki zbiór punktów na płaszczyźnie, że dowolna prosta przechodzi dokładnie przez dwa punkty z tego zbioru? (*)

3 Algebra

1. Niech $x \in R$. Udowodnij, że jeśli x+$\frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, to $x^n + \frac{1}{x^n}$ liczbą całkowitą dla każdego $n \in N$.

2. Niech a_i będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych takich, że $a_1 = \frac{1}{2}$ oraz $a_n^2 \leqslant a_n - a_{n+1}$. Udowodnij, że $a_n < \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in N$

3. Dane jest n dodatnich liczb rzeczywistych o iloczynie 1. Udowodnij, że ich suma jest równa conajmniej n.

4. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ takie, że: $f(1) = \frac{5}{2}$ oraz dla każdego $m, n \in \mathbb{Z}$ zachodzi: $f(m)f(n) = f(m+n) + f(m-n)$.

5. Niech $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$ i $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+$. Udowodnij, że
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

6. Udowodnij nierówność Czebyszewa.

7. Nazwijmy funkcję bardzo wypukłą, jeśli spełnia:
$$f(x) + f(y) \geqslant 2(f(\frac{x+y}{2}) + |x - y|)$$
dla wszystkich rzeczywistych liczb x,y. Udowodnij, że nie istnieje żadna funkcja bardzo wypukła.

8. Za pomocą indukcji Cauchy'ego udowodnij $AM \geqslant GM$.

9. Niech a_n będzie liczbą ciągów o długości n zawierających tylko cyfry 0 i 1, takie że żadne dwie jedynki nie mogą być oddalone od siebie o dokładnie dwa miejsca. Znajdź wzór a_n

10. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takie, że:
$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$$
dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

11. Liczby Bernoulli'ego B_n definiujemy poprzez następującą rekurencję:

$$B_0 = 1; \sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i} B_i = 0.$$

Udowodnij, że

$$1^k + 2^k + ... + (n-1)^k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i}$$

Dla wszystkich nieujemnych n, k. (*)

4 Teoria Liczb

1. Wykaż że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją takie dodatnie dzielniki liczby n!, że ich suma jest równa n!
2. Udowodnij Małe Twierdzenie Fermata.
3. (LXXIII OM) Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy dobrą jeśli istnieje dodatnia liczba całkowita k, dla której n = k(k + 1). Rozstrzygnąć, czy istnieje 2022 parami różnych dobrych liczb, których suma jest również dobrą liczbą.
4. Dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich n, pokaż, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita m, że $n|2^m + m$
5. Udowodnić, że dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich m istnieje liczba całkowita n takie, że $\phi(n) = m!$.
6. Udowodnij, że z dowolnych 2n — 1 liczb można wybrać n liczb, których suma jest podzielna przez n.
7. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieje liczba n-cyfrowa podzielna przez 5^n, której wszystkie cyfry są nieparzyste.

5 Geometria (*)

1. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n > 1$ istnieje 2^n punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe, tak że żadne 2n z nich nie tworzą wielokąta wypukłego.
2. Niech l_1 i l_2 będą dwiema równoległymi prostymi. Punkty A i B leżą na l_1 tak, że $A \neq B$. Używając tylko linijki, podziel odcinek AB na n równych części, gdzie $n \geqslant 2$.
3. Dany jest okrąg ω i n punktów na płaszczyźnie. Skonstruuj n—kąt (dozwolone są samoprzecinające się wielokąty), który jest wpisany w ω taki, że proste wyznaczone przez jego boki przechodzą przez dane w zadaniu punkty. (*)