PreOM 2024 - Dzień 2

Zadanie 1. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi o iloczynie równym 1. Udowodnij, że:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{a}{a^2b+2} + \frac{b}{b^2c+2} + \frac{c}{c^2a+2}.$$

Zadanie 2. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech K będzie środkiem BC. Okrąg o środku M przechodzący przez H przecina linię BC w A_1, A_2. Podobnie niech L będzie środkiem CA oraz M środkiem AB, a okręgi o środkach L i M przechodzące przez H tną CA i AB w B_1, B_2 oraz C_1, C_2. Udowodnij, że A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu.

Zadanie 3. Dana jest nieskończona plansza o kwadratowych polach. Na jednym z nich leży żeton. W jednym ruchu możemy zabrać żeton i położyć dwa nowe na polach sąsiadujących bokiem z polem z którego zabieramy, przy czym pole z którego zabieramy jest środkiem odcinka łączącego pola na których kładziemy. Nie można położyć żetonu na polu, na którym już leży żeton. Udowodnić, że da się na początku wskazać skończenie wiele pól, tak aby na każdym etapie gry przynajmniej jedno z wyznaczonych pól zawierało żeton.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-2k}{n-k} \cdot \binom{2k}{k} = 4^n$$

(*) Udowodnij tezę za pomocą bajki kombinatorycznej.