Autor: Jeremi Hyska

Prowadzący: Jeremi Hyska

Kombi — Dirichlet, bajki

Teoria

- Przez $\binom{n}{k}$, oznaczamy liczbę sposobów, aby wybrać k elementów z n-elementowego zbioru i nazywamy to dwumianem Newtona, albo beczką.
- Mamy wzorek $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Bajki kombinatoryczne to ladny sposob na udowodnienie kombinatorycznych tozsamosci za pomoca historyjek.
- Zasada szufladkowa Dirichleta mowi ze jak wsadzimy n cukierkow do $n-1$ szufladek to 2 cukierki beda w tej samej szufladce.
- Rozszerzony Dirichlet: Jak mamy n cukierkow i k szufladek to $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ cukierkow bedzie w tej samej szufladce.

Rozgrzewka

1. Udowodnij ze wsrod 500 osob istnieja takie 3, ktore urodzily sie w tym samym dniu miesiaca i w tym samym dniu tygodnia.
2. Udowwodnij ze wsrod dowolnych 6 osob, istnieja 3 ktore sie znaja lub 3 takie ktore sie nie znaja.
3. Uzasadnij, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
4. Udowodnij, że $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Zadanka

1. Udowodnij ze w kazdej grupie ludzi sa 2 osoby ktore maja ta sama liczbe znajomych w tej grupie.
2. Zbior A sklada sie z 8 liczb calkowitych od 1 do 15. Udowodnij ze istnieja w nim 3 rozne pary roznych liczb, ktore maja taka sama roznice.
3. Udowodnij: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
4. Udowodnij: $\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$
5. Mamy 5 punktow o wspolrzednych calkowitych. Udowodnic, ze wsrod nich sa takie 2, ze srodek odcinka miedzy nimi, tez ma wspolrzedne calkowite.
6. Udowodnij ze wsrod dowolnych 17 podzbiorow zbioru $1, 2, 3, 4, 5$, sa 2 ktore sa rozlaczne.
7. Wewnatrz trojkata rownobocznego o boku 1 wybrano 2024 punkty. Udowodnij ze wsrod nich sa 2 ktore sa w odleglosci nie wiekszej niz $\frac{1}{44}$.
8. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$. Wykaż, że istnieje taki ciąg $x_1, x_2, \cdots, x_{11}$ o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$ ze $2022 | a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{11}x_{11}$.
9. * Znajdź wzór na $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.
10. **(tw. Erdősa-Szekeresa) Kazdy ciag $ab+1$ roznych liczb rzeczywistych zawiera $a+1-$elementowy podciag malejacy lub $b+1-$elementowy podciag rosnacy.
11. *** Udowodnij $\sum_{k=0}^{n-1}(\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}k!\prod_{i=0}^{n-k}(2i-1)) + \binom{2n}{n}n! = 3^n\prod_{i=1}^{n}(2i-1)$