Autor: Miron Hunia
Prowadzący: Miron Hunia

Nierówność Jensena.

Wypukłość i wklęsłość

Funkcja f jest **wypukła na przedziale** P, jeśli:

1. Dla dowolnych punktów A, B na wykresie funkcji f których współrzędne x zawierają się w przedziale P, odcinek AB jest powyżej bądź styczny do wykresu funkcji. Jeśli odcinek AB nigdy nie jest styczny do wykresu w ani jednym punkcie, to f nazywamy **ściśle wypukłą**.
2. Wykres f na przedziale P przypomina kształtem literę U. Działa jako uzasadnienie tylko w przypadku bardzo prostych i znanych funkcji.
3. Dla dowolnego $0 < t < 1$ i $a \neq b \in P$:

$$f\left(ta + (1-t)b\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

   Jeśli zachodzi nierówność ostra, to f jest ściśle wypukła.
4. f jest ciągła i dla dowolnych $a \neq b \in P$:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

   Jeśli zachodzi nierówność ostra, to f jest ściśle wypukła.
5. Dla dowolnego $x \in P : f''(x) \geq 0$. Jeśli zachodzi nierówność ostra, to f jest ściśle wypukła.
6. Jeśli iloraz $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ jest dla każdego x ściśle rosnący względem y.

Jeśli $-f$ jest wypukła to mówimy, że f jest **wklęsła**.

Niektóre operacje pozwalają otrzymywać funkcje wypukłe z innych funkcji wypukłych. Jedną z metod dowodu, że funkcja jest wypukła jest pokazanie, że można ją otrzymać z prostszych funkcji wypukłych przy użyciu tych operacji. Funkcje zadane poniższymi wzorami są wypukłe na P.

1. $f(x) = \omega_1 g_1(x) + \omega_2 g_2(x) + \cdots + \omega_n g_n(x)$, gdzie $\omega_1, \ldots, \omega_n > 0$ i $g_1, \ldots, g_n$ są wypukłe na P. Jeśli przynajmniej jedna z funkcji g jest ściśle wypukła, to f jest ściśle wypukła.
2. $f(x) = h(g(x))$, gdzie $g : P \mapsto L$ - **wypukłe** na P i $h-$ **niemalejące** i wypukłe na L. Jeśli g jest ściśle wypukła i h jest rosnąca, to f jest ściśle wypukła.
3. $f(x) = h(g(x))$, gdzie $g : P \mapsto L$ - **wklęsłe** na P i $h-$ **nierosnące** i wypukłe na L.
4. $f(x) = g(x)h(x)$, gdzie $g, h-$ wypukłe, nieujemne i mają tą samą monotoniczność na P.
5. $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, gdzie $g-$ **wklęsłe** i nieujemne na P.
6. $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, gdzie $h-$ nieujemne, wypukłe, **nierosnące** na P i $g-$ nieujemne, wklęsłe, **niemalejące** na P.
7. $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, gdzie $h-$ nieujemne, wypukłe, **niemalejące** i $g-$ nieujemne, wklęsłe, **nierosnące**.

Poniższe popularne funkcje są wypukłe.

- $x^n, n > 1$ na liczbach dodatnich. Jeśli n jest parzyste, to jest wypukła dla wszystkich liczb rzeczywistych.
- $a^x, a > 1$
- $-\log_a x, a > 1$
- $\frac{1}{x}$ na liczbach dodatnich
- $-\sqrt[a]{x}$ na liczbach dodatnich, $a > 1$.
- $\sqrt{x^2+a}$ na całej swojej dziedzinie, $a \geq 0$ (dla $a \leq 0$ jest wklęsła).
- $-\sin(x)$ na przedziale $[0, \pi]$.
- $\tan(x)$ na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$.
- $x \log_a x$ na liczbach dodatnych, $a > 1$.

Nierówność Jensena

Twierdzenie 1 (Jensen)**.** Funkcja f wypukła na przedziale P spełnia dla dowolnych argumentów $x_1, \ldots, x_n \in P$ i dla dowolnie dobranych dodatnich liczb rzeczywistych $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (zwanych wagami) następującą nierówność:

$$f\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_n\omega_n}{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}\right) \leq \frac{\omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \cdots + \omega_n f(x_n)}{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}$$

Istnieje równoważne sformułowanie nierówności Jensena, które często łatwiej zauważyć w zadaniach.

Twierdzenie 2 (Jensen, sformułowanie alternatywne)**.** Funkcja f wypukła na przedziale P spełnia dla dowolnych argumentów $x_1, \ldots, x_n \in P$ i dla dowolnie dobranych dodatnich liczb rzeczywistych $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (zwanych wagami) spełniających $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$ następującą nierówność:

$$f\left(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_n\omega_n\right) \leq \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \cdots + \omega_n f(x_n)$$

W obu wersjach równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ lub gdy $f(x)$ jest funkcją liniową na przedziale zawierającym $x_1, \ldots, x_n$. Jeżeli f jest ściśle wypukła to równość może zajść tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Dla funkcji wklęsłych nierówność Jensena zachodzi w drugą stronę.

- Przykład. Udowodnij dla wszystkich liczb naturalnych n nierówność

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \geq \frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}$$

  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ jest formy $\sqrt{x^2+a}$, a zatem jest wypukła na liczbach dodatnich. Dobieramy $x_i = i$ oraz $\omega_i = \frac{1}{n}$. Na mocy nierówności Jensena:

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \geq \sqrt{(\frac{1+\cdots+n}{n})^2 + 1}$$

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \geq \sqrt{(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n})^2 + 1} = \sqrt{(\frac{n+1}{2})^2 + 1} = \sqrt{\frac{n^2+2n+5}{4}}$$

Autor: Miron Hunia

Prowadzący: Miron Hunia

Zadania

Jeżeli masz problem z zastosowaniem nierówności Jensena, spójrz na sugestie z drugiej strony z tym jakiej funkcji $f(x)$ zastosować w danym zadaniu.

1. Liczby x_i, y_i są dodatnie i $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$. Wykaż, że
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i + y_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2}$$
2. (Nierówność Nesbitta) Dla dodatnich a, b, c wykaż, że
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$
3. Wykaż, że w trójkącie ABC o kątach α, β, γ zachodzi nierówność $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
4. (Nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną) Dla dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wykaż, że
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$
5. (Nierówność między średnimi potęgowymi) Dla dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ i $k > l > 0$ wykaż, że
$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + \cdots + a_n^k}{n}} \geq \sqrt[l]{\frac{a_1^l + \cdots + a_n^l}{n}}$$
6. Dla dodatnich a, b, c takich, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$ znajdź maksymalną wartość
$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+b+a)^2}$$
7. Dla dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ wykaż, że
$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^{x_1 + \cdots + x_n} \leq x_1^{x_1} \ldots x_n^{x_n}$$
8. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c. Wykaż, że
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$
9. n jest liczbą naturalną i a, b, c to parami różne dodatnie liczby rzeczywiste spełniające $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Wykaż, że
$$\frac{a^n - b^n}{a^{n+1} - b^{n+1}} + \frac{b^n - c^n}{b^{n+1} - c^{n+1}} + \frac{c^n - a^n}{c^{n+1} - a^{n+1}} < \frac{n}{n+1}$$
10. Dane są liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie mniejsze niż 1. Udowodnij, że
$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+r_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} + 1}$$

SPOJLERY DO ZADAŃ

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$
2. $f(x) = \frac{1}{a+b+c-x}$ lub $f(x) = \frac{x}{a+b+c-x}$
3. $f(x) = \sin(x)$
4. $f(x) = \log(x)$
5. $f(x) = x^{\frac{k}{l}}$
6. $f(x) = \left(\frac{1}{a+b+c+x}\right)^2$
7. $f(x) = x \log x$
8. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ lub $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^3+abc}}$
9. $f(x) = \frac{x-1}{x^n-1}$
10. $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

Autor: Miron Hunia

Prowadzący: Miron Hunia

Dla kozaków

Inne nierówności na funkcjach wypukłych

Twierdzenie 3 (Popoviciu)**.** f jest funkcją wypukłą na przedziale P. Wówczas dla dowolnych $x, y, z \in P$ zachodzi

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq \frac{2}{3}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right)\right)$$

Mówimy, że ciąg nierosnący (x) majoryzuje ciąg nierosnący (y), gdy dla $k = 1, \ldots, n$ zachodzą warunki $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i$ oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$ Relację tą zapisujemy $x \succ y$

Twierdzenie 4 (Karamata)**.** Dla wypukłej na przedziale P funkcji f i nierosnących ciągów $x_1 \geq \cdots \geq x_n, y_1 \geq \ldots y_n \in P$ takich, że $x \succ y$ zachodzi

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n)$$

Przepychanie Jensena dla funkcji niewypukłych, czyli trik ze styczną

Powiedzmy, że mamy funkcję f, która nie jest wypukła, ale jest temu bliska. Wówczas czasami będzie się dało oszacować $f(x)$ od dołu przez funkcję liniową $g(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$, gdzie a jest ustalone, i napisać (dla $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \omega_k g(x_k) = g\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k\right)$$

Chcemy dobrać stałą a i wagi (ω) tak, aby równość zachodziła w tych samych warunkach.

Autor: Miron Hunia

Prowadzący: Miron Hunia

Zadanka z technik dla kozaków

1. Udowodnij nierówność Popoviciu.

2. Udowodnij nierówność Karamaty.

3. a, b, c są bokami trójkąta. Udowodnij nierówność

4. Niech $a + b + c = 3$, udowodnij, że

$$18\left(\frac{1}{(3-a)(4-a)}+\frac{1}{(3-b)(4-b)}+\frac{1}{(3-c)(4-c)}\right)+2(ab+bc+ca)\geq 15$$

5. Niech $a + b + c = 3$, udowodnij, że

$$\frac{a}{2a^2+a+1}+\frac{b}{2b^2+b+1}+\frac{c}{2c^2+c+1}\leq\frac{3}{4}$$

6. Niech $n \geq 3$ jest liczbą całkowitą i $x_1, \dots, x_n$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x_1 + \dots + x_n = 2$. Znajdź minimum wyrażenia

$$\frac{x_1}{x_2^2+1}+\frac{x_2}{x_3^2+1}+\dots+\frac{x_n}{x_1^2+1}$$

7. Znajdź minimalną wartość wyrażenia

$$\frac{x_1}{x_2^3+4}+\frac{x_2}{x_3^3+4}+\frac{x_3}{x_4^3+4}+\frac{x_4}{x_1^3+4}$$

8. Dla $x_1, \dots, x_n \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ udowodnij, że

$$\cos(2x_1-x_2)+\cos(2x_2-x_3)+\dots+\cos(2x_n-x_1)\leq\cos x_1+\dots+\cos x_n$$

9. Dla dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n$ udowodnij nierówność

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\leq\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)$$