# Równania i nierówności

Jerzy Szempliński

27 września 2023

## Powtórka z teorii

- Dla liczb **dodatnich** $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$ zachodzą **nierówności między średnią kwadratową, arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną**:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

- Dla dowolnych liczb **rzeczywistych** $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$, $b_1$, $b_2$, $\ldots$, $b_n$ zachodzi **nierówność Cauchy'ego-Schwarza**:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$$

Inne jej sformułowania prawdziwe dla liczb **dodatnich**:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) \geqslant \left(\sqrt{a_1b_1}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}\right)^2$$

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

- Jeżeli **ciągi** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ liczb **rzeczywistych** są **zgodnie uporządkowane** (jednomonotoniczne) (np. oba są rosnące), to zachodzi:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geqslant a_1b_1'+a_2b_2'+\ldots+a_nb_n' \geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$$

gdzie ciąg $(b_1', b_2', \ldots, b_n')$ to **dowolna** permutacja ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

## Zadania z równań

1. Rozwiąż liczbach całkowitych $x, y, z$ równanie
$$x^3 = 2y^3 + 4z^3.$$

2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $m, n$, które spełniają równanie
$$3^m - 2^n = 1.$$

3. Funkcja $f$ określona na zbiorze wszystkich liczb całkowitych przyjmuje tylko wartości dodatnie i spełnia warunek:
$$f(n) \geqslant \frac{1}{2}(f(n-1)+f(n+1)) \quad \text{dla } n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$$
Dowieść, że funkcja $f$ jest stała.

4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$, $y$ spełniona jest równość

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

5. Dana jest funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki:

$$f(1000) = 999, \quad f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}.$$

Obliczyć $f(500)$.

# Zadania z nierówności

1. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich $a, b$ zachodzi nierówność

$$a^a + b^b > ab.$$

2. Udowodnić, że dla dowolnej dodatniej liczby $a$ zachodzi nierówność

$$a^{a^2} + a^{2a} > 1.$$

3. Wykazać, że dla $a, b, c > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{\frac{a}{a+2b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{2a+b+2c}} + \sqrt{\frac{c}{2a+2b+c}} \geqslant 1$$

.

4. Udowodnij, że dla dodatnich liczb $a, b, c$ oraz liczby całkowitej $n > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}.$$

5. Dowieść, że dla liczby dodatknich $a, b, c$ oraz liczby całkowitej $n > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geqslant \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b}\right)\sqrt{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}n$$

6. Jeśli $a, b, c$ są liczbami dodatnimi, udowodnij, że

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

7. Pokaż, że dla dodatnich i rzeczywistych liczb $a, b, c$ zachodzi

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

8. Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych $a, b, c$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

9. Niech $a$,$b$,$c$ będą dodatnimi liczbami, które spełniają $abc = 1$. Wykaż, że

$$\frac{a}{(a+1)(b+1} + \frac{b}{(b+1)(c+1} + \frac{c}{(c+1)(a+1} \geqslant \frac{3}{4}.$$

10. Niech $a_1$, $a_2$,$\ldots$,$a_n$ będą liczbami dodatnimi spełniającymi $a_1 + a_2 + \ldots a_n < 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)} \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}.$$