

Mini PreOM 2024 - Dzień 4

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 2. Na szachownicy o wymiarach 1000 na 1000 i polach pokolorowanych w zwykły sposób na biało i czarno jest dany zbiór A złożony z 1000 pól. Każde dwa pola zbioru A można połączyć ciągiem pól zbioru A tak, by kolejne pola miały wspólny bok. Dowieść, że w zbiorze A jest co najmniej 250 pól białych.

Zadanie 3. Dane są wielomiany P i Q spełniające $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla każdego x rzeczywistego. Udowodnij, że równanie $P(P(x)) = Q(Q(x))$ ma rozwiązanie rzeczywiste wtedy i tylko wtedy gdy równanie $P(x) = Q(x)$ ma rozwiązanie rzeczywiste.

Zadanie 4. Okręgi s_1 i s_2 przecinają się w różnych punktach A, B . Punkt C leży na s_2 przy czym CA jest styczne do s_1 . Przez A poprowadzono prostą która przecina okręgi s_1 i s_2 w punktach M, N (różnych od A). Punkty P i Q są środkami AC i MN odpowiednio. Prosta BQ przecina s_1 w punkcie S różnym od B . Udowodnij, że $AS \parallel PQ$.