Liga Młodszych - Rozwiązania

Zadanie 1. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wykaż, że:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{3}{2}$$

Rozwiązanie Dla $n=1$ nierówność zachodzi.
Dla $n\geqslant 2$ udowodnimy przez indukcję mocniejszą nierówność

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}$$

Baza indukcyjna $n=2$ działa, bo $1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}<\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{6}{7}$. Zakładamy, że dla n zachodzi podana nierówność i wykażemy, że wówczas dla $n+1$ również zachodzi.

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(n+1)^3}<\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^3+1}=\frac{3}{2}-\frac{n^2-n}{n^3+1}<\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}$$

Ostatnia nierówność zachodzi, bo

$$\frac{3}{2}-\frac{n-n^2}{n^3+1}<\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}\Leftrightarrow\frac{1}{n+2}<\frac{n-n^2}{n^3+1}\Leftrightarrow n^3+1<(n^2-n)(n+2)=n^3+n^2-2n\Leftrightarrow 0\leqslant(n-1)^2$$

■

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach całkowitych, które spełniają warunek: dla dowolnej liczby całkowitej $n\geqslant 1$ liczba $P(n)$ jest pierwsza.
Rozwiązanie Udowodnimy, że jedynymi rozwiązaniami sa wielomiany stałe (równe stale pewnej liczbie pierwszej). Z założenia wiemy, że $P(1)=p$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Z podstawowej własności dla $k\geqslant 1$ mamy teraz

$$pk=(pk+1)-1\mid P(pk+1)-P(1)=P(pk+1)-p.$$

Stąd wynika, że $p\mid P(pk+1)$ dla dowolnej liczby całkowitej $k\geqslant 1$. Z założenia wiemy jednak, że ta liczba jest pierwsza, a więc skoro podzielna przez p, to równa p. A zatem $P(pk+1)=p$ dla dowolnej liczby całkowitej $k\geqslant 1$. Stąd wynika, że wielomian $P(x)-p$ posiada nieskończenie wiele pierwiastków, a więc jest stale równe 0. Czyli wielomian P jest stale równy p i dowód jest zakończony.

■

Zadanie 3. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y spełniające równanie

$$2x^6 + y^7 = 11$$

Rozwiązanie Będziemy chcieli pokazać, że nie ma takich liczb, rozważając to równanie dla pewnego modulo.
W celu wybrania odpowiedniego modulo udowodnimy pewien lemacik:

Dla $p \in \mathbb{P}$, x^a przyjmuje $\frac{p-1}{NWD(p-1,a)} + 1$ różnych wartości $\mod p$.

Dowód: Weźmy generator g modulo p. Każdemu r takiemu, że $1 \leqslant r \leqslant p-1$ możemy wzajemnie jednoznacznie przypisać b spełniające $1 \leqslant b \leqslant p-1$ tak, że $g^b \equiv_p r$. Wtedy $\{1, 2, \dots, p-1\} \equiv_p \{g^{b_1}, g^{b_2}, \dots, g^{b_{p-1}}\} \equiv_p \{g^1, g^2, \dots, g^{p-1}\}$, czyli $\{1^a, 2^a, \dots, (p-1)^a\} \equiv_p \{g^a, g^{2a}, \dots, g^{(p-1)a}\}$. Zachodzi

$$g^{an} \equiv_p g^{am} \iff an \equiv_{p-1} am \iff n \equiv m \mod \frac{p-1}{NWD(a,p-1)}.$$

Wynika z tego, że dla każdego n, spośród liczb $1, 2, \dots, p-1$, istnieje dokładnie $NWD(a, p-1)$ takich m, że $g^n \equiv_p g^m$. Różnych $x^a \mod p$ dla $1 \leqslant x \leqslant p-1$, jest więc $\frac{p-1}{NWD(a,p-1)}$. Oczywiście jest też wartość 0, której tu nie policzyliśmy.

Powyższy lemat pozwala nam określić, jakiego modulo potrzebujemy. Aby zminimalizować ilość wartości x^6 oraz y^7, najlepiej wybrać takie p, że $p-1$ ma jak największe wspólne dzielniki z liczbami 6 i 7. Najlepszym kandydatem jest więc $43 = 6 \cdot 7 + 1$.

Najpierw dla ułatwienia obliczeń znajdziemy generator modulo 43. Modulo 43, x jest generatorem wtedy i tylko wtedy, gdy $x^6 \not\equiv_p 1 \wedge x^{14} \not\equiv_p 1 \wedge x^{21} \not\equiv_p 1$. Generatora będziemy szukać sprawdzając kolejne liczby naturalne nie będące kwadratem liczby całkowitej. Sprawdzamy, że:

$$2^{14} \equiv_p (2^7)^2 \equiv_p 128^2 \equiv_p (-1)^2 \equiv_p 1$$

czyli 2 nie jest generatorem. Następnie testujemy 3:

$$\begin{aligned}
3^6 &\equiv_p 38 \cdot 3 \cdot 3 \equiv_p 28 \cdot 3 \equiv_p -2 \\
3^7 &\equiv_p -2 \cdot 3 = -6 \\
3^{14} &\equiv_p 36 \\
3^{21} &\equiv_p -216 \equiv_p -1
\end{aligned}$$

czyli 3 jest generatorem modulo 43.

Wiedząc że 3 jest generatorem, możemy łatwo wyznaczyć wszystkie wartości x^6 i y^7: wartości x^6 to wartości 3^{6a}, a wartości y^7 to wartości 3^{7a} (i każde z nich może też przyjąć wartość 0). Mnożąc kolejno 3^6 przez siebie, otrzymujemy wartości $-2, 4, -8, 16, -32, 21, 1$, a z 3^7 otrzymujemy wartości $-6, 36, -1, 6, -36, 1$. Zbiór wartości $2x^6$ to więc $\{0, 2, 8, 22, 27, 32, 39, 42\}$, a zbiór wartości $11 - y^7$ to $\{4, 5, 10, 11, 12, 17, 18\}$. Nie istnieje element należący do obu z nich, czyli równanie $2x^6 = 11 - y^7$ nie ma rozwiązań modulo 43, a więc również rozwiązań całkowitych.

■

Zadanie 4. 2021-kąt foremny jest podzielony przekątnymi na trójkąty (żadne dwie przekątne się nie przecinają).
Udowodnij, że co najmniej jeden z tych trójkątów jest ostrokątny.
Rozwiązanie 2021-kąt foremnny da się wpisać w okrąg. Rozważmy środek okręgu opisanego na tym wielokącie. Wiemy, że trójkąt jest ostrokątny $\Leftrightarrow$ gdy środek okręgu opisanego znajduje się wewnątrz tego trójkąta. Żadna przekątna 2021-kąta nie przechodzi przez środek jego okręgu opisanego oraz ten środek leży wewnątrz wielokąta. Zatem po podziale na trójkąty będzie istniał taki, w którym środek tego okręgu będzie leżał w jego wnętrzu, stąd będzie ostrokątny.

■

Zadanie 5. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, c nieprzekraczających $3n^2 + 4n$ istnieją liczby całkowite x, y, z, takie że ich wartość bezwzględna nie przekracza $2n$, nie wszystkie są równe 0 oraz $ax + by + cz = 0$.
Rozwiązanie Załóżmy bez straty ogólności, że a jest największą z tych trzech liczb. Gdy $a = b$ lub $a = c$, to działa odpowiednio $x = 1, y = -1, z = 0$ i $x = 1, y = 0, z = -1$. W takim razie $a > b, c$.
Idea rozwiązania jest następująca: chcemy pokazać, że można wybrać y, z w dozwolonym przedziale takie, że $by + cz$ jest podzielne przez a. Jeżeli uda się takie $by + cz$ znaleźć i okaże się ono stosunkowo małe, tj w przedziale $[-2an, 2an]$, to możemy wybrać $x = -\frac{by+cz}{a}$, co rozwiąże zadanie.
Aby $by+cz$ było w przedziale $[-2an, 2an]$ wystarczy, aby zachodziła nierówność $-2n \leqslant \frac{by+cz}{a} \leqslant 2n$. Ta nierówność na pewno zachodzi, jeśli y, z są przeciwnych znaków. Gdyby udało się zagwarantować, że $-2n - 1 \leqslant x + y \leqslant 2n + 1$, to nierówność by zachodziła również gdy x, y są tych samych znaków, bo $a > b, c$ oraz $\frac{by+cz}{a}$ jest liczbą całkowitą.
Nasz cel to zatem znaleźć y, z takie, że:

1. $-2n \leqslant y, z \leqslant 2n$
2. $a \mid by + cz$
3. $-2n - 1 \leqslant y + z \leqslant 2n + 1$

Warunek 2. można spełnić tak: gdyby istniały $bY + cZ$ i $bY' + cZ'$ dające tą samą resztę z dzielenia przez a, to $b(Y - Y') + c(Z - Z')$ daje resztę 0. Warunki 1. i 3. byłyby spełnione, gdyby zmienne Y, Y', Z, Z' spełniały dodatkowo nierówności $0 \leqslant Y, Z, Y', Z' \leqslant 2n$ i $n \leqslant Y + Z, Y' + Z' \leqslant 3n+1$. Policzmy więc, ile jest y, z spełniających warunki $0 \leqslant y, z \leqslant 2n$ i $n \leqslant y+z \leqslant 3n+1$. Jeśli $y = 0$, to z można wybrać na $n + 1$ sposobów. Jeśli $1 \leqslant y \leqslant n$, to z można wybrać na $n + y + 1$ sposobów. Jeśli $n + 1 \leqslant y \leqslant 2n$, to z można wybrać na $3n + 2 - y$ sposobów. Sumując to otrzymujemy

$$(n+1)+(n+1+1)+(n+1+2)+\ldots+(n+1+n)+(3n+2-n-1)+(3n+2-n-2)+\ldots+(3n+2-n-n)$$
$$= n + 1 + n \cdot (n + 1) + n \cdot (2n + 2) = 3n^2 + 4n + 1$$

Jest to więcej niż $a \leqslant 3n^2 + 4n$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta pewne dwie reszty z dzielenia przez a muszą się powtarzać.

■

Zadanie 6. Na nieskończonej szachownicy jest n^2 kamyczków ułożonych w kwadrat $n \times n$. Kamyczek zajmuje jedno pole tej szachownicy. Andrzej i Bajorek grają w następującą grę: Ruch polega na wybraniu jednego z kamyczków i przeskoczeniu nim nad jednym z jego sąsiednich kamyczków. Kamyczek przeskoczony znika. Skakać można tylko równolegle do osi x i y. Dla jakich n możliwe jest, że gra skończy się z tylko jednym kamyczkiem pozostałym na szachownicy?

Rozwiązanie Udowodnimy, że dla $n = 3k + 1$ i $n = 3k + 2$ możliwa jest taka gra, a dla n podzielnych przez 3 nie.

Zauważmy, że jeśli mamy kamyczki w takiej pozycji zwanej dalej **"L"**:

	$\odot$	$\odot$	$\odot$	
			$\odot$	

to możemy usunąć 3 kamyczki które stoją w linii, skacząc pozostałym czwartym w górę, lewym z linii w prawo, a następnie wracając czwartym kamyczkiem w dół.

Pokażemy indukcyjnie, że dla $n = 3k + 1$ i $n = 3k + 2$ da się grać w sposób prowadzący do pozostanięcia jednego kamyczka. Gdy $n = 1$ od razu mamy oczekiwaną pozycję, dla $n = 2$ skaczemy lewymi w prawo, a następnie dolnym w górę, bazę indukcyjną mamy dowiedzioną ($k = 0$), ustalmy $k > 1$ i załóżmy, że dla mniejszych k teza zachodzi.

Zauważmy, ze dla $n = 3k + 1$ możemy poprzez usunięcie obwódki (zaczynamy z lewego górnego rogu i usuwamy prostokąty 3×1 po obwodzie przejść do przypadku $n = 3(k - 1) + 2$.

Dla $n = 3k + 2$ możemy poprzez usuwanie prostokątów 2×3 (2 linie po 3 kamyki, usuwamy najpierw zewnętrzną potem wewnętrzną) po obwodzie analogicznie do wcześniejszego przypadku, redukujemy w ten sposób do planszy dla $n = 3(k - 1) + 1$ co dowodzi, że da się wykonać takie gry (dla planszy 5×5 wykorzystujemy środkowe pole do usuwania wewnętrznych prostokątów 3×1).

Do udowodnienia postulowanej tezy brakuje nam dowodu, że dla $n = 3k$ nie da się wykonać takiej gry, aby został jeden kamyk.

W tym celu ponumerujmy liczbami całkowitymi wiersze i kolumny, tak aby dolne lewe pole kwadratu $n \times n$ z kamyczkami na początku to było $(1, 1)$ a górne prawe (n, n), reszta kolumn i wierszy jest numerowana w naturalny sposób wynikający z współrzędnych tych dwóch pól. Wreszcie niech pole (x, y) ma przypisaną do siebie liczbę równą $x + y \bmod 3$.

Na planszy $3k \times 3k$ mamy po równo $0, 1, 2$, ponieważ w każdym rzędzie $3k \times 1$ jest dokładnie k pól każdego rodzaju. Dozwolone ruchy nie zaburzają niezmiennika, który mówi, że modulo 2 liczby pól z kamykami o danych numerach $(0, 1, 2)$ są równe, więc na końcu gry też tak musi być, co dowodzi, że dla $n = 3k$ szukana rozgrywka nie istnieje.

■

Zadanie 7. Prosta przechodząca przez środek okręgu wpisanego I trójkąta ABC przecina boki AB i BC w punktach M i N odpowiednio. Punkty K i L wybrane są na boku AC w taki sposób, że $\sphericalangle ILA = \sphericalangle IMB$ oraz $\sphericalangle IKC = \sphericalangle INB$. Jeśli trójkąt BMN jest ostrokątny to udowodnij, że $AM + KL + CN = AC$.

Rozwiązanie Zdefiniujmy punkt M', że leży na boku AC i $AM = AM'$. Ponieważ AI jest dwusieczną to trójkąty MAI i $M'AI$ są przystające (bkb) to $IM = IM'$. Ponadto z równości kątów w zadaniu, dostajemy, że $MALI$ jest cykliczny. Skoro $\angle MAI = \angle LAI$ to $IM = IL$. Analogicznie definiujemy punkt N' i dowodzimy jego własności. Teza zadania równoważna jest z tym, że $KL = M'N'$. Wynika to wprost, że trójkąty KIN' i $M'IL$ są równoramienne.

■