# Kontest 3 – mini PreOM 2025

**Zadanie 1.** Wszystkie liczby ze zbioru $1, 2, 3, \ldots, 2000$ połączono w pary

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{1000}, b_{1000})$$

w taki sposób, że każda z liczb $|a_i - b_i|$ jest równa 1 lub 6.

Wyznaczyć wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 10 liczby

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_{1000} - b_{1000}|.$$

**Zadanie 2.** Danych jest $2n$ różnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ oraz szachownica $n \times n$. W pole leżące w $i$-tym wierszu i $j$-tej kolumnie wpisujemy liczbę $a_i + b_j$. Niech $c_i$ będzie iloczynem liczb stojących w $i$-tym wierszu, zaś $d_j$ iloczynem liczb stojących w $j$-tej kolumnie.

Dowieść, że jeżeli $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$, to $d_1 = d_2 = \ldots = d_n$.

**Zadanie 3.** Liczba $a$ jest dodatnia i mniejsza od 1. Dowieść, że dla każdego skończonego, ściśle rosnącego ciągu nieujemnych liczb całkowitych $(k_1, \ldots, k_n)$ zachodzi nierówność:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^2 < \frac{1+a}{1-a} \sum_{i=1}^{n} a^{2k_i}.$$

**Zadanie 4.** Różne punkty $A$, $B$, $C$ leżą na prostej $k$, a punkt $P$ leży poza nią. Punkty $Q$, $R$, $S$ są środkami okręgów opisanych na trójkątach $PAB$, $PBC$, $PCA$. Wykazać, że punkty $P$, $Q$, $R$, $S$ leżą na jednym okręgu.