Zad. 1

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$$

$$\Delta_{x^3} = 9 - 4(1 - y^4) = 5 + 4y^4 = \square$$

$$5 + \underbrace{(2y^2)^2}_{4} = \underbrace{\square}_{9}$$

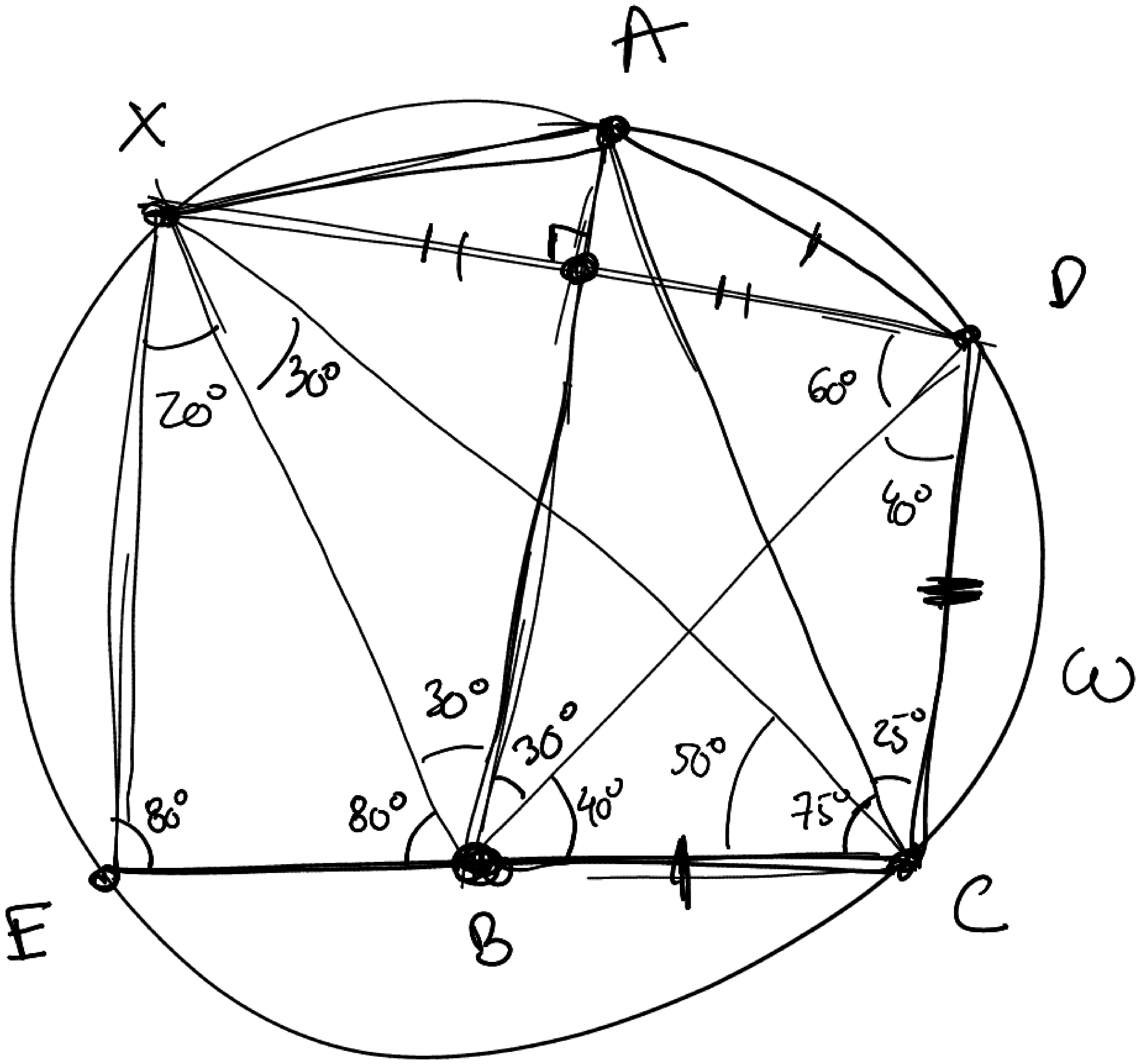
1, 4, 9, 16

$2y^2 = 2 \qquad y = \pm 1$

$x^6 + 3x^3 = 0 \qquad x^3(x^3+3) = 0 \;\to\; x = 0.$

$(x,y) = \{ (0,1), (0,-1)$

Zad. 2



X - odbicie D względem AB

$\Rightarrow$ XBD - równoboczny.

$\Rightarrow$ XA = AD

XB = XD oraz BC = CD

$\Rightarrow$ XC dwusieczna $\measuredangle$ BCD $\Rightarrow$ $\measuredangle$ XCB = 50°

$\Rightarrow$ $\measuredangle$ XCA = 25° = $\measuredangle$ ACD.

$\Rightarrow$ CA - dwusieczna $\measuredangle$ XCD $\Rightarrow$ X leży na ω.

Zauważmy, że $\to$ kąty $\to$ XE // DC $\Rightarrow$ XECD - trapez równoramienny.

$\Rightarrow$ CE = XD = BD.

Zad. 3

Wykorzystamy fajną nierówność

$$a+b \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \quad \forall a,b \geqslant 0$$

Z Cauchy-Schwarza mamy:

$$\left(1 \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + 1 \cdot \sqrt{ab}\right)^2 \leq (1^2+1^2)\left(\frac{a^2+b^2}{2} + ab\right)$$

$$= (a+b)^2$$

$$\Rightarrow a+b \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}.$$

Weźmy $a = x$, $b = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{2}} + \sqrt{x} \leq x+1$$

Czyli $\sqrt{\frac{x^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{y^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{z^2+1}{2}} \leq x+y+z+3-\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}$

Czyli chcemy żeby $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqslant 3$

ale to z AM-GM $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqslant 3(xyz)^{3/2} = 3.$

Zad. 4

$$\frac{3a^2}{b},\ \sqrt{a^2+b} \in \mathbb{Z}.$$

$$a^2+b = (a+c)^2$$

$$a^2+b = a^2+2ac+c^2$$

$$\Rightarrow \quad b = 2ac+c^2$$

$$\Rightarrow \quad 2ac+c^2 \mid 3a^2$$

$$3a^2 = 2ack + c^2k$$

$$c^2k + 2akc - 3a^2 = 0$$

$$c = \frac{-2ak \pm \sqrt{4a^2k^2+12a^2k}}{k} = \frac{-2ak \pm 2a\sqrt{k^2+3k}}{k}$$

$$\Rightarrow k^2+3k = \square \qquad (k+1)^2 = k^2+2k+1 \leq k^2+3k \leq k^2+4k+4 = (k+2)^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k=1}}$$

$$3a^2 = 2ac+c^2 = b$$

$\Rightarrow$ wszystkie pary $(a,b) \to (t, 3t^2)$, $t \in \mathbb{Z}_+$.

Zad. 5

$2023 = 7 \cdot 17 \cdot 71$

więc ma 12 dzielników (razem z ujemnymi)

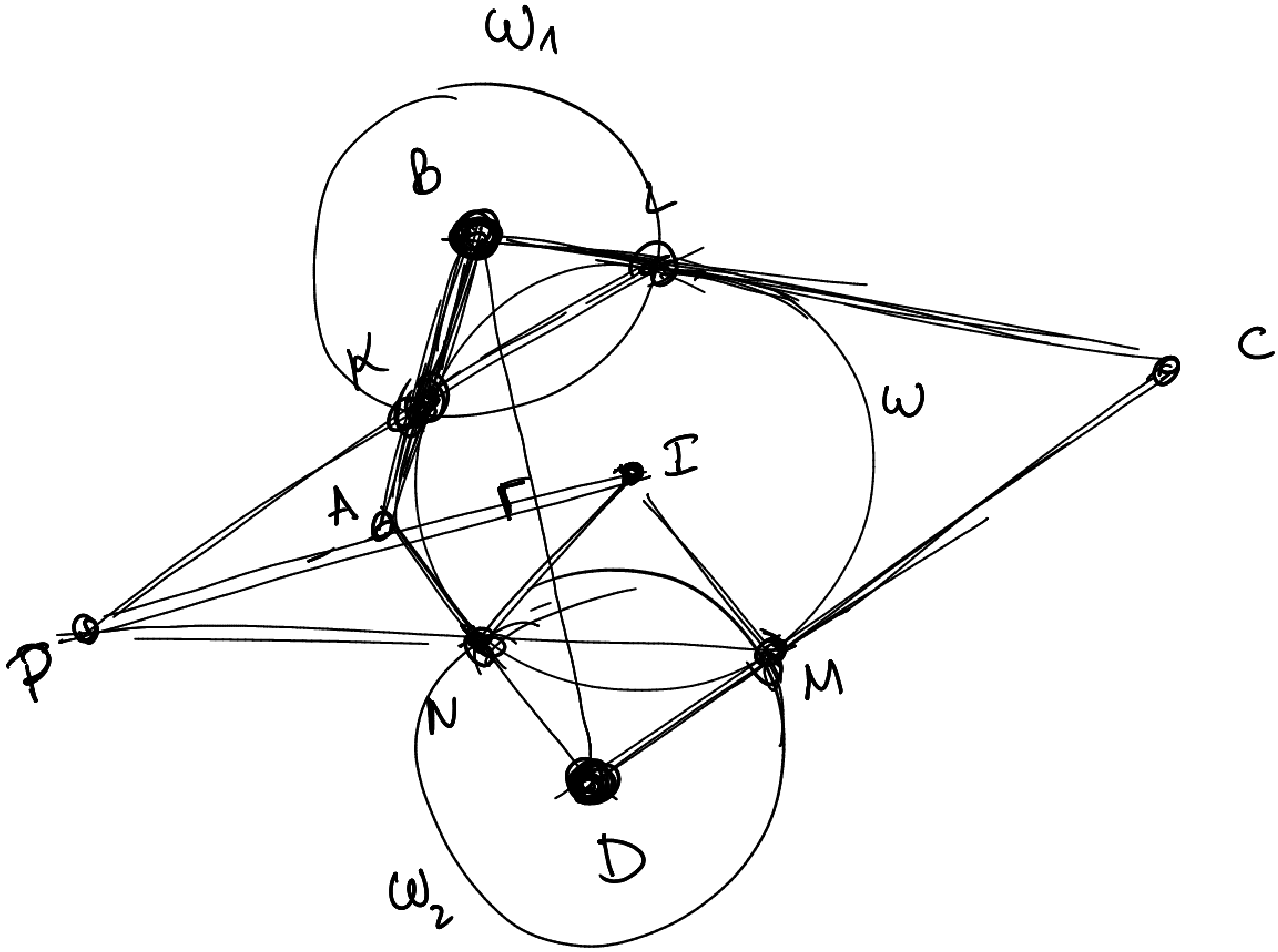
Jeżeli $P(x)Q(x) = 2023$ ma 25 rozwiązań

to $\exists_{k \in D(2023)}$ $P(x) = k$ ma ≥ 3 rozwiązania

więc $\deg P \geq 3$, bo jak nie to P musiała być stałą.

analogicznie dla $Q(x)$.

Zad. 6



ω_1 - okrąg o środku B i promieniu $BK = BL$

ω_2 - okrąg o środku D i promieniu $DM = DN$

$Pot(P, \omega) = PK \cdot PL = PN \cdot PM = Pot(P, \omega_1) = Pot(P, \omega_2)$

$\Rightarrow$ P leży na osi potęgowej ω_1 i ω_2.

$Pot(I, \omega_1) = IK^2 = IN^2 = Pot(I, \omega_2)$

$\Rightarrow$ I leży na osi potęgowej ω_1, ω_2.

PI = oś potęgowa ω_1 i ω_2 $\perp$ prosta łącząca środki ω_1 i ω_2 = BD.

Zad. 7

Takie rozstawienie jest możliwe dla $n \equiv 0, 1 \pmod 4$.

Oznaczmy $a(k)$ i $b(k)$ jako pierwsze i drugie wystąpienie liczby k. $(a(k) < b(k))$

np. 41134232 $a(4)=1$, $b(4)=5$, $a(1)=2$, $b(2)=3$.

Więc $\sum_{k=1}^{n} a(k)+b(k) = 1+2+\ldots+2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$.

wiemy także $b(k)-a(k) = k$

$$\sum_{k=1}^{n} b(k)-a(k) = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$A = \sum_{k=1}^{n} a(k)$, $B = \sum_{k=1}^{n} b(k)$

$A+B = n(2n+1)$, $B-A = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{2n(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(4n^2+2n+n^2+n\right)$$

$$B-n = \frac{n(n+3)}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \mid n(n+3) \Rightarrow n \equiv 0,1 \pmod 4.$$

$2023 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow$ nie da się.

$n \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow$
$n \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow$
} zostawiam jako ćwiczenie dla czytelnika.

Zad. 8