Autor: Miron Hunia

Prowadzący: Miron Hunia

Powtórzenie z liczb zespolonych

Liczba zespolona $z \in \mathbb{R}[i]$ jest postaci $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, gdzie $i^2 = -1$. Liczby x i y nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną liczby z i zapisujemy je również odpowiednio jako $\Re(z)$ i $\Im(z)$. Liczbę $x + yi$ możemy interpretować geometrycznie jako punkt na płaszczyźnie o współrzędnych (x, y). Na liczbach zespolonych określamy arytmetykę:

1. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
2. $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
3. $\overline{a + bi} = a - bi$. Liczbę $\overline{z}$ nazywamy sprzężeniem zespolonym liczby z.
   - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
   - $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
   - $\overline{\overline{z}} = z$
4. Każdą liczbę zespoloną $z = a + bi$ można zapisać w postaci $r\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$ (postać biegunowa) dla $r \in \mathbb{R}, \alpha \in [0, 2\pi)$. Liczbę r zapisujemy $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i nazywamy modułem liczby z. Liczbę α zapisujemy $\arg(z)$ i nazywamy argumentem liczby z.
   - $|zw| = |z| \cdot |w|$
   - $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \bmod 2\pi$
5. $|z|^2 = z\overline{z}$
6. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
7. $\left(r\left(\cos\left(\alpha\right) + i\sin\left(\alpha\right)\right)\right)^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$
8. $z^n = 1 \Leftrightarrow z = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n})$ dla $k = 0, 1, \ldots n - 1$

Jak widać, liczby zespolone pozwalają nam płynnie przechodzić pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i biegunowymi, wykorzystując zalety obu podejść.
Zazwyczaj chcemy unikać operowania bezpośrednio na części rzeczywistej i urojonej liczby. Lepiej jest zapisać je z użyciem sprzężenia:

$$\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$
$$\Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$$

bo sprzężenie ma bardzo wygodne własności arytmetyczne. W szczególności wygodne w praktyce są warunki

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$$

Autor: Miron Hunia

Prowadzący: Miron Hunia

Trochę geometrii

Liczby zespolone pozwalają nam na wygodne zapisywanie przekształceń geometrycznych.

1. Przesunięcie o wektor z to to $x \mapsto x + z$
2. Podobieństwo spiralne względem $O = 0$ (czyli złożenie jednokładności skali $r = |z|$ z obrotem o kąt $\alpha = \arg z$) to $x \mapsto zx$.
3. Odbicie z względem prostej OX to $\overline{z}$.
4. Inwersja z względem okręgu jednostkowego to $z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$.

Składając te przekształcenia możemy prostym wzorem zapisywać przekształcenia geometryczne, które w innych formach pałowania wymagałyby bardziej złożonych obliczeń. Na przykład, odbicie z względem prostej przechodzącej przez a, b dane jest jako

$$\overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)}(b-a) + a = \frac{(b-a)\overline{z} - b\overline{a} + a\overline{b}}{\overline{b} - \overline{a}}$$

Współliniowość

Punkty a, b, c są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$, co prawie zawsze chcemy sprawdzać jako

$$\frac{b-a}{c-a} = \overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)}$$

Prostopadłość

Proste AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{b-a}{c-d} \in i\mathbb{R}$, co prawie zawsze chcemy sprawdzać jako

$$\frac{b-a}{c-d} = -\overline{\left(\frac{b-a}{c-d}\right)}$$

Cykliczność

Punkty a, b, c, d są cykliczne wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$, co sprawdzamy jako

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \overline{\left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}\right)}$$

Równość kątów

Kąty skierowane ABC i DEF są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a-c}{b-c} : \frac{d-e}{f-e} \in \mathbb{R}$, co sprawdzamy jako

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{d-e}{f-e} = \overline{\left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{d-e}{f-e}\right)}$$

Podobieństwo trójkątów

Trójkąty ABC i DEF są podobne w tej samej orientacji, jeśli

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{d-e}{f-e}$$

Autor: Miron Hunia

Prowadzący: Miron Hunia

Konstrukcje

W geometrii na płaszczyźnie zespolonej, okrąg jednostkowy (o środku w 0 i promieniu 1) jest kluczowy, bo jeśli $|z| = 1$, to $\overline{z} = \frac{1}{z}$, co znacznie ułatwia wiele obliczeń i wzorów.
Uzasadnij, że

1. $\frac{a+b}{2}$ jest środkiem odcinka AB
2. $\frac{(b-a)\overline{z}-b\overline{a}+a\overline{b}}{\overline{b}-\overline{a}}$ jest odbiciem Z względem AB
3. $\frac{z\overline{b}+\overline{z}b-z\overline{a}-\overline{z}a+a\overline{b}-\overline{a}b}{2(\overline{b}-\overline{a})}$ jest spodkiem wysokości z Z na AB. Na okręgu jednostowym, upraszcza się do $\frac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$
4. $z = a + b - ab\overline{z}$ jeśli Z leży na prostej AB i A, B **leżą na okręgu jednostkowym**. Można podstawić $a = b$ by dostać równanie stycznej.
5. $z = \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$, jeśli Z jest przecięciem AB i CD oraz $ABCD$ jest **opisane na okręgu jednostkowym**. W szczególności można wstawić $a = b$ i/lub $c = d$ by uzyskać styczne.
6. $i(z - w) + w$ jest obrotem z o $90°$ wokół w.
7. $\frac{a+b+c}{3}$ jest środkiem ciężkości ABC.
8. $a + b + c$ jest ortocentrum ABC, jeśli ABC jest **opisane na okręgu jednostkowym**.
9. $\frac{a+b+c}{2}$ jest środkiem okręgu dziewięciu punktów, jeśli ABC jest **opisane na okręgu jednostkowym**.
10. $-xy - yz - zx$ jest środkiem okręgu wpisanego w ABC oraz $xy + yz - zx, xy - yz + zx, -xy + yz + zx$ są środkami okręgów dopisanych, jeśli $x^2 = a, y^2 = b, z^2 = c$ i ABC jest opisane na okręgu jednostkowym.
11. $\frac{(\overline{a}b-a\overline{b})(c-d)-(a-b)(\overline{c}d-c\overline{d})}{(\overline{a}-\overline{b})(c-d)-(a-b)(\overline{c}-\overline{d}))}$ jest przecięciem prostych AB i CD. Jak widać, jest to okropnie paskudny wzór i chcemy unikać korzystania z niego jak to tylko możliwe.
12. $a(\overline{b}-\overline{c}) - \overline{a}(b-c) + (b\overline{c} - \overline{b}c) = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$ jest polem trójkąta ABC. W szczególności jest równe 0 wtedy i tylko wtedy, gdy A, B, C są współliniowe.
13. $\dfrac{\begin{vmatrix} a & a\overline{a} & 1 \\ b & b\overline{b} & 1 \\ c & c\overline{c} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}}$ jest środkiem okręgu opisanego na ABC.

Zadanka

1. Niech H_{XYZ} oznacza ortocentrum trójkąta XYZ. Pokaż, że jeśli $ABCD$ są cykliczne, to H_{ABC}, H_{ABD}, H_{ACD}, H_{BCD} są cykliczne, a proste AH_{BCD}, BH_{ACD}, CH_{ABD}, DH_{ABC} są współpękowe.

2. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Dopisujemy do boków AC i BC kwadraty $ACEF$ i $BCGH$ wychodzące na zewnątrz trójkąta. Udowodnij, że proste AG, BE, FH są współpękowe.

3. Niech $ABCD$ to czworokąt opisany na okręgu ω. Udowodnij, że środek odcinka AC, środek odcinka BD i środek ω są współliniowe.

4. Punkty A, B, C, D, E, F leżą na okręgu o promieniu R w tej kolejności, przy czym $AB = CD = EF = R$. Udowodnić, że środki odcinków BC, DE i FA tworzą trójkąt równoboczny.

5. Niech ABC będzie trójkątem z środkiem okręgu opisanego O. Załóżmy, że punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC, tak że punkt O leży na prostej DE. Niech M i N będą środkami odcinków CD i BE odpowiednio. Udowodnij, że $\sphericalangle MON = \sphericalangle BAC$.

6. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC. Niech punkty D, E, F leżą na okręgu opisanym trójkąta ABC w taki sposób, że $AD \parallel BE \parallel CF$. Niech S, T, U oznaczają odpowiednio odbicia punktów D, E, F względem boków BC, CA, AB. Udowodnij, że punkty S, T, U i H są współokręgowe.

7. Niech Γ będzie okręgiem opisanym trójkąta ABC. Załóżmy, że AA', BB', CC' to średnice okręgu Γ. Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC, a D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P na boki BC, CA, AB odpowiednio. Niech X będzie odbiciem punktu A' względem punktu D; punkty Y i Z definiujemy w sposób analogiczny. Udowodnij, że trójkąt XYZ jest podobny do trójkąta ABC.

8. W trójkącie ABC z wpisanym okręgiem o środku I, okrąg wpisany jest styczny do boków CA i AB odpowiednio w punktach E i F. Odbicia punktów E i F względem I to punkty G i H. Niech Q będzie punktem przecięcia prostych GH i BC, a M środkiem odcinka BC. Udowodnij, że proste IQ i IM są prostopadłe.

9. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Oznaczmy przez O oraz H odpowiednio środek okręgu opisanego oraz ortocentrum trójkąta ABC. Załóżmy, że okrąg opisany trójkąta AHC przecina ponownie prostą AB w punkcie M, a okrąg opisany trójkąta AHB przecina ponownie prostą AC w punkcie N. Udowodnij, że środek okręgu opisanego trójkąta MNH leży na prostej OH.

10. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Niech M będzie takim punktem, że $MC \perp BC$ oraz $MA \perp AD$. Proste BM i OA przecinają się w punkcie P. Wykazać, że okrąg o środku P i przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC.

11. Niech P będzie punktem w płaszczyźnie trójkąta ABC, a γ prostą przechodzącą przez punkt P. Niech A', B', C' będą punktami przecięcia odbić prostych PA, PB, PC względem prostej γ z prostymi odpowiednio BC, AC, AB. Udowodnij, że punkty A', B', C' są współliniowe.

12. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt X w jego wnętrzu nieleżący na przekątnej AC i spełniający równości $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD = 90°$. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie AXC przez Ω. Punkty E i F leżą na Ω w taki sposób, że EF jest średnicą Ω, punkty E, X, B nie są współliniowe oraz punkty F, X, D nie są współliniowe. Załóżmy, że okręgi opisane na trójkątach BXE i DXF przecinają się w punkcie $K \neq X$ oraz że $L \neq X$ jest takim punktem na Ω, że $\sphericalangle KXL = 90°$. Udowodnić, że $KL = AB$.