



Mini PreOM 2023 - Dzień 3

Zadanie 1. Niech X będzie zbiorem liczb całkowitych dodatnich o następującej własności: dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^4 + x$ jest złożona. Wyznacz moc zbioru X .

Zadanie 2. Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f : S \rightarrow S$ spełniających równość $f^{50}(x) = x$ dla wszystkich $x \in S$. Uwaga: $f^{50}(x) = f \circ f \circ \dots \circ f(x)$.

Zadanie 3. W sześcianie o krawędzi 6 umieszczono sześć sześcianów o krawędzi 1. Udowodnij, że w dużym sześcianie można umieścić kulę jednostkową rozłączną ze wszystkimi sześcioma małymi sześcianami.

Przyjmujemy, że sześcian i kula zawierają punkty leżące na ich brzegu.

Zadanie 4. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ taka, że $2p - 1$ oraz $3p - 2$ są pierwsze.

Niech $n = p(2p - 1)(3p - 2)$. Rozstrzygnij, dla których $k \in \mathbb{N}$ zachodzi podzielność: $n \mid k^n - k$.