Autorzy: Kajetan Ramsza, Jan Gwiazda, Jan Święszkowski

Prowadzący: Kajetan Ramsza

Moving points

Mapa rzutowa

Jest to dowolna bijektywną funkcja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, taka że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{A}$ zachodzi $(a, b; c, d)_{\mathbb{A}} = (f(a), f(b); f(c), f(d))_{\mathbb{B}}$

Za zbiory $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ można przyjąć cokolwiek na czym można zdefiniować dwustosunek. W szczególności może to być:

1. prosta
2. okrąg(dowolna krzywa stożkowa)
3. pęk prostych(wtedy elementem jest prosta z tego pęku)

Stwierdzenie 1. Jeśli $f, g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ są mapami rzutowymi oraz $f(x_1) = g(x_1), f(x_2) = g(x_2), f(x_3) = g(x_3)$, dla $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$ to $f(x) = g(x)$ dla dowolnego x.

Stwierdzenie 2. Złożenie dwóch map rzutowych jest mapą rzutową

Stwierdzenie 3. Punkty w nieskończoności należą do dziedziny

Oznaczenie Dla uproszczenia stosujemy następujące oznaczenie:

$$\mathbb{A}(X) \to \mathbb{B}(Y)$$

Przekształcenia zachowujące dwustosunek

Ważny fakt Wszystkie złożenia, odwrotności i dualne wersje map rzutowych są mapami rzutowymi.

1. Niech f będzie dowolną izometrią, jednokładnością lub rzutem perspektywicznym, a C prostą, pękiem lub stożkową. Wtedy przekształcenie $f : C \to f(C)$ jest mapą rzutową)

2. Mapa biorąca punkt X z prostej k i przyporządkowująca mu prostą PX dla P $\notin$ k jest rzutowa.

3. Dane są stożkowa Γ i punkt P $\in \Gamma$. Mapowanie punktu X na stożkowej w prostą PX jest rzutowe.

4. Dane są stożkowa Γ i punkt P $\notin \Gamma$. Mapowanie punktu X na stożkowej na drugi punkt przecięcia Γ z prostą XP jest rzutowe.

5. Dane są dwie proste k,l oraz punkt P $\notin$ k,l. Mapa przyporządkowująca punktowi X na prostej k punkt PX $\cap$ l jest rzutowa.

6. Dane są punkty P,Q oraz prosta k nieprzechodząca przez te punkty. Mapowanie prostej z pęku w P na prostą w pęku Q, taką, że proste te przecinają się na k jest rzutowe

7. Dane są okrąg/prosta ω przechodząca przez punkt O. Niech Φ_O to dowolna inwersja o środku w O. Wtedy mapa przyporządkowująca punktowi X $\in \omega$ punkt Φ_O(X) $\in \Phi_O(\omega)$ jest rzutowa.

8. Dane są punkty A,B na prostej k. Mapowanie punktu X na punkt X', spełniający (A, B; X, X') $= -1$ jest rzutowe.

9. Dane są dwa punkty A,B oraz prosta k nieprzechodząca przez te punkty. Mapowanie punktu X na drugi punkt przecięcia okręgu opisanego na trójkącie ABX z prostą k jest rzutowe.

Autorzy: Kajetan Ramsza, Jan Gwiazda, Jan Święszkowski

Prowadzący: Kajetan Ramsza

10. Dane są dwie proste k,l przecinające się w punkcie P oraz punkt Q poza tymi prostymi. Mapowanie punktu X $\in$ k na drugi punkt przecięcia okręgu opisanego na trójkącie PQX z prostą l jest rzutowe.

11. Dana jest stożkowa Γ oraz dwa punkty P,Q na niej leżące. Mapa przyporządkowująca prostej p z pęku w P prostą q w pęku w Q taką, że proste te mają wspólny drugi punkt przecięcia z Γ jest rzutowa.

12. Dana jest stożkowa Γ oraz dwie styczne do niej proste k,l. Mapa przenosząca punkt X na prostej k w przecięcie drugiej stycznej z X do Γ z prostą l jest rzutowa.

Metoda Moving Points

Idea rozwiązywania zadań

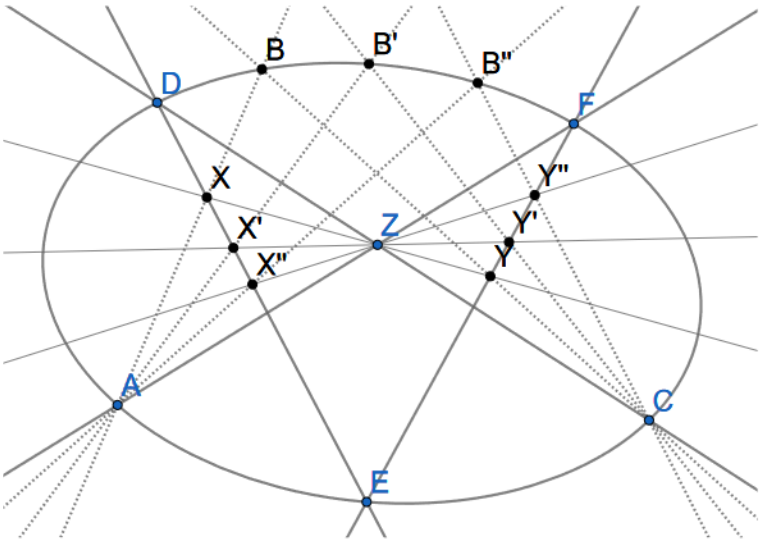
1. Zdefiniuj dwie funkcje f, g zamieniające P z prostej lub okręgu na odpowiednio X, Y. f powinna być skonsktruowana zgodnie z założeniami, a g zgodnie z tezą.
2. Udowodnij, że f i g są mapami rzutowymi, np. pokazując, że są złożeniem map rzutowych.
3. Pokaż, że dla jakiś 3 różnych pozycji P: $X = Y$.

Przykłady

Zadanie 1

Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ wpisany w stożkową o. Udowodnić, że przecięcia jego naprzeciwległych boków $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$, $Z = CD \cap FA$ są współliniowe.

Dowód:



Oderwijmy B. Poruszajmy X po DE.

$$f : DE \mapsto EF = DE(X) \mapsto A(AX) \mapsto o(B) \mapsto C(CB) \mapsto EF(Y_1)$$

$$g : DE \mapsto EF = DE(X) \mapsto Z(ZX) \mapsto EF(Y_2)$$

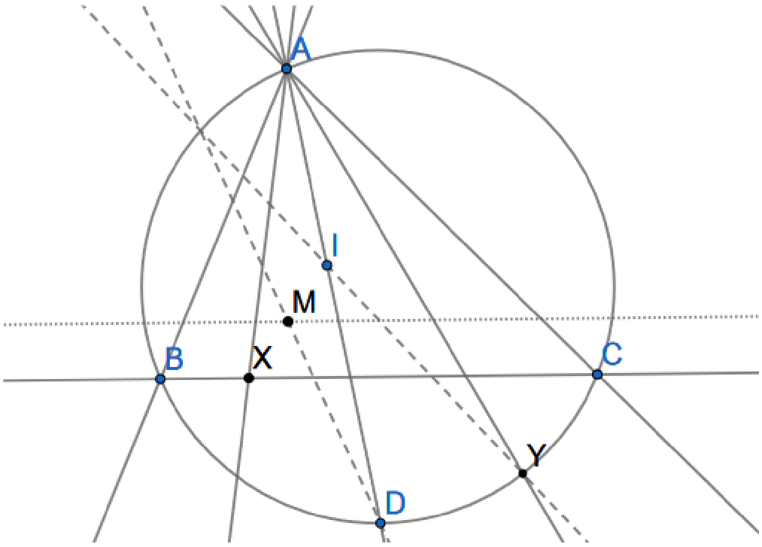
f, g są zatem mapami rzutowymi. Pozostaje tylko udowodnić, że teza zachodzi dla trzech różnych X. Można to zrobić np. dla: $X = D, X = E, X = DE \cap AF$

Autorzy: Kajetan Ramsza, Jan Gwiazda, Jan Święszkowski Prowadzący: Kajetan Ramsza

Zadanie 2

W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, a o to okrąg opisany na tym trójkącie. Prosta AI przecina o po raz drugi w punkcie D. Wybrano punkt X na boku BC oraz punkt Y na łuku BDC spełniający $\sphericalangle BAX = \sphericalangle YAC$. Niech M to środek odcinka XI. Udowodnić, że proste DM oraz YI przecinają się na o.

Dowód:



Ruszamy X po BC.

$$f : BC \mapsto o = BC(X) \mapsto A(AX) \xmapsto{\text{symetria względem } AI} A(AY) \mapsto o(Y) \overset{I}{\mapsto} o(o \cap YI)$$

$$g : BC \mapsto o = BC(X) \xmapsto{\text{jednokładność w } I \text{ skala 1:2}} \phi(M) \mapsto D(DM) \mapsto o(o \cap MD)$$

Gdzie ϕ oznacza obraz BC po jednokładności o środku I w skali 1:2.

Dla:

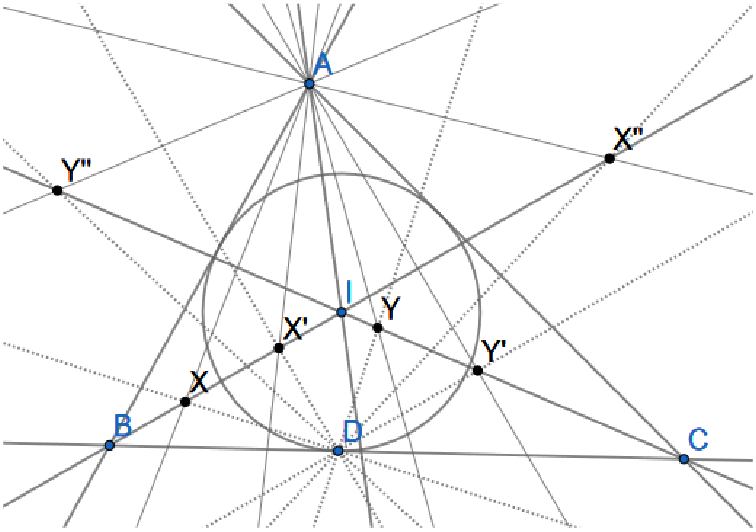
1. $X = B$, $Y = C$, $Z = o \cap IC$, $ZB = ZI$, $DB = DI$, $BDIZ$ jest deltoidem więc $BM = MI$
2. $X = C$ analogicznie
3. $X = BC \cap AI$, $Y = D$, szukany punkt to A

Zadanie 3

Dany jest trójkąt ABC z środkiem okręgu wpisanego I. Niech D to punkt styczności okręgu wpisanego w ABC z prostą BC. Wybrano punkt X na prostej BI. Prosta prostopadła do XD przechodząca przez D przecina CI w punkcie Y . Udowodnić, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle BAI$.

Dowód:

Autorzy: Kajetan Ramsza, Jan Gwiazda, Jan Święszkowski Prowadzący: Kajetan Ramsza



Poruszajmy X po BI.

$$f : BI \mapsto CI = BI(X) \mapsto D(XD) \mapsto D(x) \mapsto CI(Y_1)$$

Gdzie x oznacza prostą DX obróconą o $90°$ wokół D.

$$g : BI \mapsto CI = BI(X) \mapsto A(AX) \mapsto A(x') \mapsto CI(Y_2)$$

Gdzie x' oznacza prostą AX obróconą o $\sphericalangle BAI$ wokół A. f, g są zatem mapami rzutowymi. Pozostaje tylko udowodnić, że teza zachodzi dla trzech różnych X.

1. $X = B$, wtedy $Y_1 = I = Y_2$
2. $X = I$, wtedy $Y_1 = C = Y_2$
3. X środkiem okręgu wpisanego w ABD. Wówczas Y jest środkiem okręgu wpisanego w ADC

Zadania

1. Niech D oznacza spodek wysokości z A w trójkącie ABC. Niech E jest dowolnym punktem na AD. Niech $F = EC \cap AB$ oraz $G = BE \cap AC$. Udowodnij, że $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ADG$.
2. Dana jest cięciwa AB okręgu o środku O. Prosta l przechodząca przez O przecina AB w P. Niech C jest odbiciem symetrycznym B względem l. Udowodnij, że $ACOP$ cykliczny.
3. Niech AB jest średnicą okręgu o. l jest styczną do o w B. Niech $C, D \in l$, takie że B jest pomiędzy C a D. $E = o \cap AC, F = o \cap AD, G = o \cap CF, H = o \cap DE$. Udowodnij, że $AH = AG$.
4. Niech O jest środkiem okręgu o. Prosta prostopadła do prostej l przechodząca przez O przecina o w A, B. Niech $P, Q \in o$. Punkty X_1, X_2, Y_1, Y_2 są zdefiniowane następująco: $X_1 = AP \cap l, X_2 = BP \cap l, Y_1 = AQ \cap l, Y_2 = BQ \cap l$. Udowodnij, że okręgi opisane na ΔAX_1Y_1 i ΔAX_2Y_2 przecinają się na o.