Podstawy kombinatoryki

Jerzy Szempliński

25 września 2023

1 Zasada szufladkowa Dirichleta

1.1 Teoria

Wersja prosta

Do n szufladek włożono co najmniej $n+1$ obiektów. Wtedy w co najmniej jednym z nich znajdują się co najmniej 2 obiekty.

Wersja uogólniona

Do n szufladek włożono co najmniej k obiektów. Wtedy w co najmniej jednym z nich znajduje się co najmniej $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ obiektów.

Wersja nieskończona

Do n szufladek włożono nieskończenie wiele obiektów(np. wszystkie liczby naturalne). Wtedy w co najmniej jednym z nich znajduje się nieskończenie wiele obiektów.

Uwaga: wyrażenia „co najmniej" i „co najwyżej" piszemy ***oddzielnie!***

1.2 Zadania

1. Udowodnij, że wśród dowonlnych 8 liczb całkowitych istnieje para takich, których różnica dzieli się przez 7.

2. Spośród liczb $1, 2, 3, ..., 200$ wybrano 100. Udowodnij, że istnieje wśród nich taka para liczb, że jedna jest dzielnikiem drugiej.

3. Pokaż, że wśród n osób istnieje para takich, która ma tę samą liczbę znajomych. (Jeśli A zna B, to B zna A)

4. Czy dla dowolnych $n + 1$ liczb całkowitych można znaleźć dwie, których różnica podzielna jest przez n?

5. Wykaż, że istnieje taka liczba $n > 1$, że trzy ostatnie cyfry liczby 7^n to 007.

   Zauważmy, że z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją różne liczby 7^k i 7^n o tej samej reszcie z dzielenia przez 1000. Wtedy $1000|7^k(7^{n-k} - 1)$, i skoro $1000 \perp 7$, to $7^{n-k} \equiv 1 \pmod{1000}$, czyli kończy się na 001.Z tego otrzymujemy, że 7^{n-k+1} na 007.

6. Na okręgu zaznaczono 4 punkty. Udowodnij, że co najmniej 3 z nich leżą na tym samym półokręgu.

7. Na sferze zaznaczono 5 punktów. Udowodnij, że co najmniej 4 z nich leżą na tej samej półsferze.

8. W trójkącie równobocznym o boku 10 wybrano 101 punktów. Pokaż, że odległość pomiędzy pewną parą z nich wynosi nie więcej niż 1.

9. Na okręgu zaznaczono 17 różnych punktów. Odcinki pomiędzy każdymi dwoma punktami pomalowano na czerwono, zielono albo niebiesko. Pokaż, że istnieje trójkąt o końcach w punktach na okręgu, którego wszystkie boki mają ten sam kolor.

10. Każdy z punktów płaszczyzny został pomalowany na jeden z 2023 kolorów. rozstrzygnij, czy niezależnie od sposobu kolorowania można znaleźć prostokąt o wierzchołkach jednego koloru.

11. Liczby od 1 do 101 wypisano na tablicy w dowolnej kolejności. Udowodnij, że można wytrzeć 90 z nich w taki sposób, by pozostałe tworzyły ciąg rosnący lub malejący.

12. Bonus: Udowodnij, że w Warszawie istnieje para ludzi, którzy mają tę samą liczbę włosów na głowie. *Istnieją dwa rozwiązania tego zadania!*

2 Grafy

2.1 Teoria

Definicje

- **Graf (prosty) nieskierowany** - para (V, E), gdzie V to zbiór wierzchołków, a E to zbiór krawędzi (nieuporządkowanych par różnych wierzchołków).
- **Graf skierowany** - krawędzie są uporządkowane (skierowane).
- **Stopień wierzchołka**, oznaczany $\deg(v)$ - liczba krawędzi z niego wychodzących
- **Ścieżka** - ciąg wierzchołków w grafie, taki że każde dwa kolejne są połączone krawędzią.
- **Ścieżka prosta** - ścieżka, w której nie powtarzają się wierzchołki.
- **Długość ścieżki** - liczba jej wierzchołków - 1.
- **Cykl** - krawędzie łączące ścieżkę o początku i końcu w tym samym wierzchołku.
- **Cykl prosty** - taki, w którym nie ma powtórzeń wierzchołków.
- **Graf spójny** - graf w którym istnieje ścieżka między każdą parą wierzchołków.
- **Drzewo** - graf spójny bez cykli
- **Klika/graf pełny** - każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią.
- **Drzewo rozpinające*** - drzewo złożone ze wszystkich wierzchołków danego grafu i podzbioru krawędzi.

- **Cykl Eulera*** - cykl, który przechodzi przez wszystkie krawędzie grafu dokładnie raz.
- **Cykl Hamiltona*** - cykl, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki grafu dokładnie raz.

Metody

W zadaniach olimpijskich często można spotkać zadania, które da się przedstawić w formie grafu. Metodami, które są przydatne do ich rozwiązania są:

- **Podwójne zliczanie** - metoda w której liczymy pewne rzeczy na dwa sposoby.

  Lemat o uściskach dłoni Suma stopni wierzchołków w grafie jest parzysta.

  Dowód: Gdy patrzymy na wierzchołki, suma stopni wierzchołków przedstawia się wzorem $\sum_{i=1}^{|V|} \deg(v_i)$. Gdy liczymy tę sumę po krawędziach wynosi ona $\sum_{i=1}^{|E|} 2 = 2|E|$, gdyż każda krawędź zwiększa sumę stopni wierzchołków o 2. Oznacza to, że jest ona parzysta, co dowodzi tezę.

- **Metoda ekstremum** - w teorii grafów jest to najczęściej wybór najdłuższej/najkrótszej ścieżki, albo wierzchołka o największym/najmniejszym stopniu. Pozwala na przeprowadzenie dowodu, w którym jeśli zachodzi jakiś warunek W, to możemy pokazać że element który wzięliśmy na początku nie jest ekstremalny, co oznacza sprzeczność, czyli warunek W musi być nieprawdziwy.
- **Indukcja** - Więcej na ten temat na wykładzie z indukcji ;)

2.2 Zadania

1. Dany jest graf mający $n \geqslant 3$ wierzchołków i co najmniej n krawędzi. Udowodnij, że w tym grafie istnieje cykl.
2. W pewnym klubie siatkarskim każdy z graczy nie lubi co najwyżej trzech ze osób (z wzajemnością). Udowodnij, że trener może ich podzielić na dwie, niekoniecznie równe, drużyny, w których każdy z siatkarzy nie lubi co najwyżej jednego innego z zawodników.
3. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło n zawodników, nie było remisów. Udowodnij, że zawodników można ustawić w rzędzie, tak, że każdy wygrał z zawodnikiem stojącym przed nim.
4. Na płaszczyźnie wybrano 4046 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Następnie 2023 z tych punktów pomalowano na biało, a pozostałe 2023 na czerwono. Pokaż, że można połączyć te punkty za pomocą 2023 odcinków, takich, że końce mają w punktach o różnych kolorach i żadne dwa odcinki się nie przecinają.
5. W pewnej grupie jest $2n$ osób. Wśród nich nie ma takich trzech osób, że każde dwie z nich się znają. Ile maksymalnie może być par osób, które się znają?

6. W grupie ludzi nie wszyscy się znają. Każdego dnia jeden człowiek zaprasza na obiad wszystkich swoich znajomych i zaznajamia każdego z każdym. Po tym, jak każdy zapraszał przynajmniej raz istnieje dwóch ludzi, którzy jeszcze się nie znają. Wykaż, że po kolejnym obiedzie dalej nie będą się znali.

7. W turnieju uczestniczy n graczy i każdych dwóch gra ze sobą co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trójka graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze, to łączna liczba rozegranych meczów jest niewiększa od $\frac{n^2}{4}$.