Kontest 3 - 30.09.2022

Rozwiązania Pierwszaki

Zadanie 1. Chcemy zaplanować turniej badmintona, w którym każdych dwóch zawodników zagra dokłandie jeden mecz, czerwoną lub niebieską lotką.

(a) Wykaż, że jeśli w turnieju bierze udział pięć osób, to można zaplanować rozgrywki tak, że w meczach rozegranych w obrębie dowolnej trójki wystąpią obydwa kolory lotek.

(b) Wykaż, że jeśli w turnieju bierze udział sześć osób, to nie można zaplanować tak rozgrywek, że w meczach rozegranych w obrębie dowolnej trójki wystąpią obydwa kolory lotek.

Rozwiązanie:

(a) Boki pieciokąta czerwone, przekątne niebieskie.

(b) Jeśli w turnieju bierze udział sześć osób, to każdy rozegra przynajmniej trzy mecze w tym samym kolorze. Rozważmy dowolnego zawodnika, przypuśćmy, że rozegrał trzy czerwone mecze. Jeśli pewni dwaj jego przeciwnicy (czerwoni) grali czerwoną lotką, to wraz z nim tworzą czerwony trójkąt. W przeciwnym wypadku wszystkie trzy mecze między czerwonymi przeciwnikami byłyby niebieskie.

■

Zadanie 2. Na stole leży 100 monet, przy czym widać 50 orłów i 50 reszek. Po odwróceniu wszystkich monet do góry nogami znowu widać 50 orłów i 50 reszek.
Ale nie wszystkie monety są prawdziwe …Moneta może mieć też z obu stron to samo (orły albo reszki).
Wykaż, że monety można podzielić w pary tak, że w każdej parze są dwie reszki i dwa orły.
Rozwiązanie: Oznaczmy przez rr liczbę fałszywych monet z reszkami po obu stronach, przez oo liczbę fałszywych monet z orłami po obu stronach, przez ro, or liczby prawdziwych monet, na których przed odwróceniem widać reszkę i orła odpowiednio. Wówczas warunki zadania można zapisać jako:

$$rr + oo + ro + or = 100$$

$$rr + ro = 50$$

$$rr + or = 50$$

Skąd: $ro = or = 25 - oo = 25 - rr$. W szczególności $oo = rr$ oraz $ro = or$, zatem fałszywe monety z reszkami można sparować z fałszywymi z orłami, a prawdziwe z początkowo widoczną reszką z prawdziwymi z początkowo widocznym orłem.

■

Zadanie 3. Udowodnij, że dla każdego dodatniego całkowitego n istnieje n-cyfrowa liczba podzielna przez 5^n składająca się tylko z nieparzystych cyfr.
Rozwiązanie: Indukcja po n. Dla $n = 1$ mamy 5. Dalej, przyjmując, że M jest n-cyfrową liczbą spełniającą założenia zadania, dokładnie jedna spośród

$$N_1 = 10^n + M$$

$$N_1 = 3 \cdot 10^n + M$$

$$N_1 = 5 \cdot 10^n + M$$

$$N_1 = 7 \cdot 10^n + M$$

$$N_1 = 9 \cdot 10^n + M$$

jest podzielna przez 5^{n+1}, ponieważ wszystkie są podzielne przez 5^n oraz wszystkie $\frac{N_k}{5^n}$ są różne.

■

Zadanie 4. Niech A, B, C, D będą czterema różnymi punktami na prostej, leżącymi w tej kolejności. Okręgi o średnicach AC i BD przecinają się w X i Y, przy czym $X \neq Y$. Prosta XY przecina BC w Z. Niech P będzie punktem na prostej XY różnym od Z.
Prosta CP przecina okrąg o średnicy AC w punktach C i M. Prosta BP przecina okrąg o średnicy BD w B i N.
Udowodnij, że AM, DN i XY są współpękowe.
Rozwiązanie: Zauważmy, że odcinek XY jest zawarty w osi potęgowej okręgów o średnicach AC, BD, a skoro punkt P należy do tego odcinka to leży też na osi. Mamy zatem:

$\text{pow}(P, \omega_{AC}) = \text{pow}(P, \omega_{BD}) \Leftrightarrow |PN| \cdot |PB| = |PM| \cdot |PC|$, gdzie ω_{AC} i ω_{BD} to okręgi o średnicach AC, BD odpowiednio.

Z twierdzenia o współokręgowości dostajemy, że czworokąt $MNBC$ jest cykliczny. Punkt M jest wierzchołkiem trójkąta opartego na średnicy, stąd $\angle AMC = 90 \Rightarrow \angle MCA = 90 - \angle MAC$. Z cykliczności $MNBC$: $\angle BNM = \angle MCA$, zatem $\angle MND = 180 - \angle MAC \Rightarrow AMND$ jest cykliczny. Oś potęgowa $(AMND)$ i okręgów o średnicach AC i BD to proste AM i DN odpowiednio. Wiemy, że środki okręgów ω_{AC}, ω_{BD} i $(AMND)$ nie są współliniowe, zatem ich osie potęgowe AM, DN, XY przecinają się w jednym punkcie.

■