PreOM 2024 - Dzień 2

Rozwiązania

Zadanie 1. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi o iloczynie równym 1. Udowodnij, że:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{a}{a^2b+2} + \frac{b}{b^2c+2} + \frac{c}{c^2a+2}.$$

Rozwiązanie: Przekształćmy czynnik prawej strony nierówności:

$$\frac{a}{a^2b+2} = \frac{1}{ab+\frac{2}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{2}{a}} = \frac{3}{\frac{6}{c}+\frac{6}{c}+\frac{6}{a}}$$

Mamy więc, że:

$$\frac{a}{a^2b+2} + \frac{b}{b^2c+2} + \frac{c}{c^2a+2} = \frac{3}{\frac{6}{c}+\frac{6}{c}+\frac{6}{a}} + \frac{3}{\frac{6}{a}+\frac{6}{a}+\frac{6}{b}} + \frac{3}{\frac{6}{b}+\frac{6}{b}+\frac{6}{c}}$$

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną dostajemy:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{c/4+c/4+a/4}{3} + \frac{a/4+a/4+b/4}{3} + \frac{b/4+b/4+c/4}{3} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{3}{\frac{6}{c}+\frac{6}{c}+\frac{6}{a}} + \frac{3}{\frac{6}{a}+\frac{6}{a}+\frac{6}{b}} + \frac{3}{\frac{6}{b}+\frac{6}{b}+\frac{6}{c}} = \frac{a}{a^2b+2} + \frac{b}{b^2c+2} + \frac{c}{c^2a+2}$$

■

Zadanie 2. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech K będzie środkiem BC. Okrąg o środku M przechodzący przez H przecina linię BC w A_1, A_2. Podobnie niech L będzie środkiem CA oraz M środkiem AB, a okręgi o środkach L i M przechodzące przez H tną CA i AB w B_1, B_2 oraz C_1, C_2. Udowodnij, że A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech ω_A, ω_B, ω_C to dane okręgi naprzeciwko wierzchołków A, B, C odpowiednio. Niech K, L, M to środki boków BC, CA, AB odpowiednio (więc też i środki odpowiednio ω_A, ω_B, ω_C). Pokażemy najpierw, że A_1, A_2, B_1, B_2 leżą na jednym okręgu. Rozpatrzmy drugi punkt X przecięcia okręgów ω_A i ω_B (jeśli są styczne, poniższe rozumowanie się upraszcza). Z symetrii okręgów względem odcinka łączącego środki mamy $HX \perp KL$. Z kolei KL jest linią środkową w ABC, więc $KL||AB$. Skoro H jest ortocentrum, to $AB \perp CH$. Łącząc te trzy własności dostajemy zatem $HX||CH$, więc proste te muszą się pokryć (jako równoległe i przecinające się w H), czyli punkty C, X, H są współliniowe. Patrząc na potęgę punktu mamy więc:

$$CA_1 \cdot CA_2 = Pot(C, \omega_A) = CX \cdot CH = Pot(C, \omega_B) = CB_1 \cdot CB_2$$

(lub krócej: C leży na osi potęgowej HX okręgów ω_A, ω_B, więc $CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$). Z kryterium potęgowego, punkty A_1, A_2, B_1, B_2 leżą więc na jednym okręgu. Niech O to środek tego okręgu. Skoro $KA_1 = KA_2$ oraz $KC = KB$, to symetralna A_1A_2 pokrywa się z symetralną BC. Analogicznie, symetralna B_1B_2 pokrywa się z symetralną AC. Punkt O leżąc na przecięciu symetralnych A_1A_2 i B_1B_2, jest zatem środkiem okręgu opisanego na ABC. Analogicznie dowodzimy, że punkty A_1, A_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu o środku w O. Otrzymane dwa okręgi muszą się więc pokryć, gdyż mają wspólny środek i promień OA_1, co dowodzi tezy. ■

Zadanie 3. Dana jest nieskończona plansza o kwadratowych polach. Na jednym z nich leży żeton. W jednym ruchu możemy zabrać żeton i położyć dwa nowe na polach sąsiadujących bokiem z polem z którego zabieramy, przy czym pole z którego zabieramy jest środkiem odcinka łączącego pola na których kładziemy. Nie można położyć żetonu na polu, na którym już leży żeton. Udowodnić, że da się na początku wskazać skończenie wiele pól, tak aby na każdym etapie gry przynajmniej jedno z wyznaczonych pól zawierało żeton.

Rozwiązanie: Przypiszmy polom planszy w standardowy sposób współrzędne całkowite. Niech pole z żetonem będzie tym o współrzędnych $(0, 0)$. Każdemu polu (x, y) przypiszmy wartość równą $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+|y|}$. Zauważmy, że cała plansza ma wartość (sumujemy kolejne obwody kwadratów k^2 pól ze stałą odległością miejską od pola $(0, 0)$):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = X < \infty$$

Wystarczy więc wybrać tak dużo pól, aby ich suma wartości była większa od $X - 1$, ponieważ każdy ruch nie zmniejsza sumy wartości pól z żetonami, a jest ona na początku równa 1. ■

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-2k}{n-k} \cdot \binom{2k}{k} = 4^n$$

(*) Udowodnij tezę za pomocą bajki kombinatorycznej.

Źródło rozwiązania: Forum Quora, Luke Gustafson

Rozwiązanie: Będziemy zliczać napisy złożone z liter A, B długości $2n$.

Oczywiście prawa strona $4^n = 2^{2n}$ jest liczbą wszystkich napisów długości $2n$ złożonych z liter A i B.

Pozostaje więc zliczyć prawą stronę. O napisach długości $2k$ będziemy mówić, że mają własność prefiksu, jeśli mają dokładnie k liter A oraz k liter B. O napisach długości $2k$ będziemy mówić, że mają własność sufiksu jeśli istnieje litera (A lub B, jest to pierwsza litera słowa) która dominuje (występuje ostro więcej razy od drugiej litery) na każdym (niepustym) prefiksie tego słowa, np. słowa: $AABA, AA, AAAABB$ mają własność prefiksu, a słowa $ABAB, BAAB, AB$ nie mają.

Kluczowa obserwacja: każde słowo długości $2n$ w jednoznaczny sposób dzieli się na lewą część mającą własność prefiksu i prawą mającą własność sufiksu (Po prostu lewa to ostatnie wyrównanie, pozostała część ma własność sufiksu z definicji lewej części, zarówno prawa jak i lewa część mogą być puste).

Oczywiście będziemy zliczać (sumować) po k będącym k z definicji długości lewej części unikalnego podziału (tej posiadającej własność prefiksu). Jasnym jest, że słów o własności prefiksu długości $2k$ jest $\binom{2k}{k}$, należy więc wykazać, że słów o własności sufiksu długości $2n-2k$ jest dokładnie $\binom{2n-2k}{n-k}$, co zakończy dowód.

Niech $m = n - k$, pokażemy, że słów o własności sufiksu długości $2m$ jest $\binom{2m}{m}$ za pomocą argumentu symetrii, podobnego do tego który występuje przy standardowym wyprowadzeniu liczb Catalana.

Rozważmy wszystkie napisy zaczynające się na A. Podzielmy takie napisy na cztery rozłączne grupy:

1. Napisy posiadające własność sufiksu.
2. Liczba liter A jest większa niż liczba liter B oraz istnieje niepusty początek słowa posiadający własność prefiksu.
3. Liczba liter B jest większa niż liczba liter A oraz istnieje niepusty początek słowa posiadający własność prefiksu.
4. Napisy posiadające własność prefiksu.

Oznaczmy liczby słów w grupach przez N_1, N_2, N_3, N_4.

Oczywiście druga i trzecia grupa są równoliczne (zamieniamy wszystkie A i B po podsłowie posiadającym własność prefiksu), własność prefiksu posiada $\binom{2m-1}{m}$ napisów, a wszystkich napisów zaczynających się na A długości $2m$ jest 2^{2m-1}.

Zauważmy, że liczba liter B jest większa od liczby liter A wtedy i tylko wtedy gdy słowo jest trzeciego typu. Możemy więc policzyć liczbę słów trzeciego typu wzorem:

$$N_3 = \sum_{k=1}^{m-1} \binom{2m-1}{m+k}$$

Wiemy, że słów typu drugiego jest tyle samo, więc $N_2 = N_3$.

Finalnie

$$N_1 = 2^{2m-1} - \binom{2m-1}{m} - 2\sum_{k=1}^{m-1} \binom{2m-1}{m+k} = \binom{2m-1}{m-1}$$

Więc szukana liczba słów to $2N_1 = 2 \cdot \binom{2m-1}{m-1} = \binom{2m}{m}$, co kończy dowód. ■