

Prosimy wypełnić poniższe pola DRUKOWANYMI literami:

Imię i nazwisko

[illegible]

E-mail

[illegible]

Nr telefonu

+	4	8								
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

Klasa

--	--

Test kwalifikacyjny na Warsztaty Matematyczne 2022

Klasy trzecie i czwarte

Test składa się z uporządkowanych w kolejności **losowej** 30 zestawów po 3 pytania. Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić. Test trwa 180 minut.

Zasady punktacji

- Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
- Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.
- Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
- Za zadanie zrobione w całości dobrze dodatkowe **2** punkty.
- Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
- Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** pkt.

Powodzenia!

Uwaga! Przez zbiór liczb naturalnych w zadaniach rozumiemy zbiór liczb całkowitych większych lub równych 0.

1. Czy istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych wśród których:

- ☐ Dokładnie 12 jest liczbami Fibbonacciego?
- ☐ Dokładnie 7 jest liczbami pierwszymi?
- ☐ Dokładnie 7 jest potęgami dwójki o całkowitym wykładniku?

- 2*.** Wielomian $W(x)$ ma współczynniki rzeczywiste oraz $W(8) = 8$, $W(-4) = -8$. Wiadomo, że istnieje wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych taki, że $W(x) = x \cdot P(x^2)$.

- ☐ Na pewno $W(0) = 0$.
- ☐ Na pewno $W(8) + W(-8) = 0$.
- ☐ Na pewno $W(2) = 0$.

- 3*.** Niech $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (3, 0)$, $E = (0, 1)$. Czy

- ☐ $\angle BED = \angle ECA$?
- ☐ $\angle BEC = \angle EDA$?
- ☐ $\angle AEB = \angle EBA$?

- 4.** Rozpatrzmy ciąg $a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$

- ☐ Dla $a = 720$, $b = 7$ są w nim co najmniej 4 liczby pierwsze.
- ☐ Dla $a = 39$, $b = 57$ jest w nim liczba pierwsza.
- ☐ Dla $a = 8953$, $b = 22$ jest w nim co najmniej 5 liczb pierwszych.

5. Niech $d(n)$ oznacza sumę wszystkich dodatnich dzielników liczby naturalnej n i $D(n) = d(1) + d(2) + \dots + d(n)$.

☐ $d(840) \leq 8400$.

☐ $d(1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)) = d(1) \cdot d(3) \cdot \dots \cdot d(2n+1)$.

☐ $D(32) \geq 1024$.

6. W klasie w matematyce są 23 osoby, w tym 2 dziewczyny, 10 uczestników OM i 20 graczy brydża (grupy są niezależne od siebie). Najbardziej prawdopodobne jest, że...

☐ dwójka najlepszych graczy w brydża w klasie jest dziewczynami.

☐ obie dziewczyny startują w OM i wszyscy uczestnicy OM w tej klasie grają w brydża.

☐ pewne dwie osoby obchodzą urodziny tego samego dnia (przyjmij że rok ma 365 dni, lata przestępne nie istnieją i każdy dzień w roku ma równe prawdopodobieństwo bycia dniem urodzin).

- 7*. Niech $e_1 = 2$ i dla $n > 0$ zachodzi $e_{n+1} = e_1 \cdot \dots \cdot e_n + 1$.

☐ Dla $a \neq b : \text{NWD}(e_a, e_b) = 1$.

☐ Ostatnią cyfrą e_{2022} jest 1.

☐ e_{100} ma więcej niż 2^{100} cyfr.

8. Wielomian $P(x) = 3x^5 + x^4 + 7x^3 - 2x - 1$ posiada pierwiastek:

☐ całkowity.

☐ wymierny.

☐ rzeczywisty.

9. Liczba 1000000000601 jest:

☐ kwadratem liczby całkowitej.

☐ sześcianiem liczby całkowitej.

☐ liczbą pierwszą.

10*. Równanie $x^2 + 11y^2 = kz^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dla:

- ☐ $k = 5$.
- ☐ $k = 6$.
- ☐ nieskończenie wiele całkowitych k .

11. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $\angle EFA = \angle FAB = \angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$ i $\angle CFE = \angle FCD$.

- ☐ $ABCDEF$ jest foremny.
- ☐ $AF = BC$.
- ☐ Na $ABCF$ można opisać okrąg.

12. Martyna i Oliwia grają w grę. Ruch polega na zamianie liczby całkowitej n na dowolną liczbę całkowitą z przedziału $[\frac{n}{4}, \frac{n}{2}]$. Przegrywa ta, która nie może wykonać ruchu. Martyna zaczyna.

- ☐ Dla $n = 100$ Martyna ma strategię wygrywającą.
- ☐ Wśród liczb $[1, 1000]$ jest dokładnie 620 dających strategię wygrywającą dla Martyny.
- ☐ Dla $n = 10^6$ Martyna nie ma strategii wygrywającej.

13. Mamy dany trójkąt równoboczny ABC o polu 7. Punkty M i N leżą odpowiednio na bokach AB i AC , że $AN = BM$. Punkt O jest przecięciem BN i CM , a pole BOC jest równe 2.

- ☐ Kąt BOC jest równy 120° .
- ☐ Stosunek $\frac{MB}{AB}$ może być równy $\frac{1}{3}$.
- ☐ Kąt AOB jest równy 150° .

14. Rozważmy ciąg rekurencyjny o wzorze $a_{n+3} = a_{n+2} \cdot a_{n+1} + a_n$ oraz $a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

- ☐ Istnieje taki indeks m , że $a_m = 1000$.
- ☐ Istnieje nieskończenie wiele liczb w tym ciągu podzielnych przez 3.
- ☐ Dla każdej liczby całkowitej n istnieje w tym ciągu liczba będąca wielokrotnością n .

15*. Mamy stosy kamieni. Dwóch graczy na przemian zabiera dowolną liczbę kamieni z najliczniejszego stosu. Wygrywa ten gracz, po którego ruchu stół zostanie pusty. Czy w podanych układach stosów gracz pierwszy może zawsze wygrać, niezależnie od ruchów przeciwnika?

- ☐ 7, 7, 3, 2, 2, 1
- ☐ 6, 6, 6, 6, 6
- ☐ 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1

16. Dane są trzy okręgi o środkach O_1, O_2, O_3 i promieniach odpowiednio 3, 4 i 21, takie że każde dwa z nich są zewnętrznie styczne. W trójkąt $O_1O_2O_3$ wpisano okrąg ω o środku O .

- ☐ Promień ω wynosi 3.
- ☐ Długość odcinka OO_2 jest mniejsza niż $\frac{9}{2}$.
- ☐ Pole trójkąta $O_1O_2O_3$ jest większe od 81.

17. Pokolorujmy wszystkie liczby całkowite dodatnie na 2 kolory. Czy:

- ☐ zawsze istnieje jednokolorowy niestały ciąg arytmetyczny długości 3?
- ☐ istnieje takie kolorowanie, że suma dwóch dowolnych różnych jednokolorowych liczb nie jest potęgą dwójki?
- ☐ zawsze istnieją takie parami różne jednokolorowe liczby x, y, z że $x + y = z$?

18. Dany jest turniej - każdy zawodnik rozgrywa dokładnie jeden mecz z każdym innym i nie ma remisów. Cyklem k -elementowym nazwiemy taki ciąg parami różnych zawodników, że pierwszy wygrywa z drugim, drugi z trzecim itd., aż na końcu k -ty wygrywa z pierwszym. Zawsze prawdą jest, że:
- ☐ jeśli każdy zawodnik zwyciężył z k innymi to istnieje cykl co najmniej $(k + 2)$ -elementowy.
 - ☐ jeśli każdy zawodnik z kimś wygrał i nikt nie wygrał z każdym to zawsze istnieje cykl.
 - ☐ jeśli w turnieju złożonym z $n \geq 3$ zawodników istnieje cykl n -elementowy to istnieje także 3-elementowy.
19. Które z następujących zdań są równoważne zdaniu: "Jeżeli p jest prawdziwe, wtedy q jest fałszywe"?
- ☐ Jeżeli q jest fałszywe, to p jest prawdziwe.
 - ☐ Jeżeli q jest prawdziwe, to p jest fałszywe.
 - ☐ Albo oba p i q są fałszywe, albo dokładnie jedno z nich jest fałszywe.
20. Konstruujemy ciąg a_n , w którym $0 \leq a_1, a_2 < 5$ oraz dla $n \geq 1$ $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n \pmod{10}$. Czy w takim ciągu może wystąpić cyfra:
- ☐ 5?
 - ☐ 7?
 - ☐ 9?
21. Zdefiniujemy ciąg cyfr w taki sposób, że na n -tym miejscu ciągu znajduje się pierwsza cyfra rozwinięcia dziesiętnego liczby 2^n . Czyli początek ciągu to 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, ... Ciąg ten składa się z 9 różnych cyfr. Będziemy rozważać częstotliwość występowania każdej z nich (czyli stosunek wystąpień danej cyfry do określonego miejsca w ciągu do łącznej liczby cyfr do tego miejsca)
- ☐ Dla dostatecznie długiego ciągu wszystkie cyfry będą występować równie często.
 - ☐ Cyfra 2 będzie występować częściej niż cyfra 3.
 - ☐ Cyfra 1 będzie występować ponad dwukrotnie częściej niż cyfra 9.
22. Czy liczba, której przedstawienie w systemie binarnym to 1011000011 jest:
- ☐ podzielna przez 3?
 - ☐ dzielnikiem 10110000111 (system binarny)?
 - ☐ w systemie czwórkowym postaci 23003?

23. Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełnia dla każdej liczby rzeczywistej $f(x) = f(f(x)) + x$, to:

- ☐ f jest różnowartościowa
☐ istnieje $x > 0$, taki że $f(f(x)) = x$
☐ $f^{42}(1) = 1$, przy czym $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$, $f^1(x) = f(x)$

24. Ciąg Fibonacciego to taki ciąg, że $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla n całkowitych nieujemnych. Niech $f(n)$ będzie najmniejszą taką liczbę naturalną, że n dzieli $F_{f(n)}$ oraz $F_{f(n)+1} - 1$, lub równe 0 jeśli nie ma takiej liczby. Wówczas:

- ☐ $f(5) = 10$
☐ $f(66) < f(88)$
☐ istnieje nieskończenie wiele takich n , że $f(n) = 0$

- 25*. Jaś napotkał tablicę z liczbami naturalnymi od 1 do 20 i postanowił zagrać w grę. W każdym ruchu ściera dwie liczby z tablicy i rysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych tych długości, po czym dopisuje do liczb na tablicy długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną. Które z tych nierówności może spełniać otrzymana na końcu liczba?

- ☐ $1 \leq x$
☐ $x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
☐ $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x$

26. Na tablicy napisanych jest 97 liczb postaci $\frac{49}{k}$ dla $1 \leq k \leq 97$. W każdym ruchu pewne dwie liczby a i b zosają zmasane i zastąpione przez liczbę $2ab - a - b + 1$. Jaka liczba może pozostać na tablicy po 96 krokach?

- ☐ $\frac{1}{2}$
☐ 1
☐ 2

27. Pod domem Ani zatrzymują się autobusy linii 1 i 2, pierwszy kursuje co 10 minut zaczynając od 10:05 i jeździ do sklepu z rogalikami o nadzieniu truskawkowym, a drugi co 20 minut od 12:00 i jeździ do sklepu z rogalikami o nadzieniu śliwkowym. Ania codziennie wychodzi na przystanek o losowej porze między 15:00 i 16:00, a następnie wsiada w pierwszy autobus który przyjedzie.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ania będzie czekała nie dłużej niż 5 minut oraz pojedzie do sklepu z rogalikami o nadzieniu truskawkowym?

☐ $\frac{1}{4}$

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{3}{4}$

28. O jaki kąt zgodnie ze wskazówkami zegara należy obrócić parabolę o równaniu $y = x^2$, żeby miała miejsce zerowe dla $x = 2\sqrt{3}$.

☐ 60°

☐ 45°

☐ 30°

29. Ile liczb całkowitych z przedziału $[1, 2022]$ można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych.

☐ więcej niż 1011

☐ więcej niż 1516

☐ więcej niż 2000

- 30*. Liczba $\sqrt{13 + 2\sqrt{12}} - \sqrt{3(7 + \sqrt{48})}$ jest:

☐ ujemna.

☐ całkowita.

☐ niewymierna.