Autor: Jerzy Szempliński

Prowadzący: Jerzy Szempliński

Kombinatoryka II – II etap

Grafy

Teoria

Definicja 1 (Graf)**.** Grafem $G = (V, E)$ nazwiemy zbiór wierzchołków V oraz zbiór krawędzi E, określających, które dwa wierzchołki są połączone.

Definicja 2 (Graf skierowany)**.** Gdy krawędzie są skierowane, tzn. może istnieć krawędź z v do w, ale nie z w do v nazywamy grafem skierowanym.

Definicja 3 (Stopień wierzchołka)**.** Liczbę krawędzi wychodzących z danego wierzchołka v nazywamy stopniem i oznaczamy $deg(v)$.

Definicja 4 (Ścieżka)**.** Ciąg wierzchołków, z których dla każdych kolejnych dwóch wierzchołków v i w istnieje krawędź $v \to w$. Długością ścieżki nazwiemy liczbę wierzchołków minus jeden. Ścieżkę nazwiemy prostą, gdy nie powtarzają się w niej wierzchołki.

Definicja 5 (Cykl)**.** Ścieżkę, która ma ten sam początkowy i końcowy wierzchołek nazwiemy cyklem. Gdy ścieżka jest prosta, taki cykl nazwiemy prostym.

Definicja 6 (Graf spójny)**.** Gdy pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami w grafie istnieje ścieżka, nazywamy go grafem spójnym.

Definicja 7 (Drzewo)**.** Graf, który jest spójny i nie ma cykli nazywamy drzewem. Lasem nazywamy zbiór drzew, bądź równoważnie graf bez cykli (ale być może niespójny).

Definicja 8 (Klika)**.** Gdy dowolne dwa wierzchołki w grafie są połączone krawędzią, taki graf nazywamy kliką lub grafem pełnym.

Definicja 9 (Graf dwudzielny)**.** Gdy wierzchołki grafu możemy podzielić na dwa takie zbiory, że żadna krawędź nie łączy dwóch wierzchołków w jednym zbiorze, nazywamy grafem dwudzielnym. Gdy każdy wierzchołek jest połączony ze wszystkimi wierzchołkami z drugiej grupy taki graf nazywamy pełnym grafem dwudzielnym.

Definicja 10 (Cykl i ścieżka Hamiltona/Eulera)**.** Cykl nazywamy cyklem Hamiltona, gdy zawiera każdy wierzchołek grafu, oraz cyklem Eulera, gdy zawiera każdą krawędź grafu. Analogicznie definiujemy ścieżkę Hamiltona i Eulera.

Przykład 1. W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników, każdy z każdym rozgrywa jedną partią, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Udowodnić, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

Rozwiązanie 1. Wybierzmy jednego z zawodników, nazwijmy go Z_1. Ma on do rozegrania 65 partii, a więc (z zasady szufladkowej) co najmniej 17 partii rozgrywa w jednym mieście. Oznaczmy to miasto symbolem M_1. Weźmy pod uwagę przeciwników Z_1 w spotkaniach rozgrywanych w M_1. Jest ich nie mniej niż 17. Jeśli istnieje wśród nich para rozgrywająca partię między sobą także w M_1, to wespół z zawodnikiem Z_1 tworzą oni trójkę grającą „trójkąt spotkań” w jednym mieście i twierdzenie jest udowodnione.

© 2024 Kuźnia Olimpijska s.c.

Załóżmy wobec tego, że cała ta grupa 17 (lub więcej) szachistów gra wszystkie mecze między sobą w pozostałych trzech miastach. Wybierzmy jednego z tej grupy i nazwijmy go Z_2. Ma on w tej grupie co najmniej 16 przeciwników, a więc (ponownie z zasady szufladkowej) z co najmniej 6 z nich musi grać w jednym mieście, które oznaczymy symbolem M_2. Jeśli któraś para wśród nich rozgrywa swoją partię także w M_2, daje to „trójkąt spotkań" w M_2.

Przypuśćmy więc, że tak nie jest; znaczy to, że rozważana grupa 6 (lub więcej) szachistów rozgrywa partie między sobą w pozostałych dwóch miastach. Powtarzamy więc jeszcze raz to samo rozumowanie. Wybieramy z tej grupy jednego zawodnika Z_3 i zauważamy, że mając w tej grupie co najmniej 5 przeciwników, musi (z zasady szufladkowej) z co najmniej 3 z nich grać w jednym mieście M_3. Jeśli jest wśród nich para rozgrywająca swoją partię w M_3, to wraz z zawodnikiem Z_3 tworzą oni trójkę grającą „trójkąt spotkań" w M_3. W przeciwnym razie cała ta grupa 3 (lub więcej) szachistów rozgrywa spotkania między sobą w ostatnim pozostałym mieście M_4.

© 2024 Kuźnia Olimpijska s.c.

Autor: Jerzy Szempliński

Prowadzący: Jerzy Szempliński

Zadania

1. Dany jest graf mający $n \geqslant 3$ wierzchołków i co najmniej n krawędzi. Udowodnij, że w tym grafie istnieje cykl.

2. Pokaż, że jeżeli graf nie zawiera cyklu nieparzystej długości, to jest grafem dwudzielnym.

3. Na wyspie Sodor znajduje się n miast. Każde z nich połączone jest torami wąskimi albo szerokimi. Udowodnij, że Gruby Zawiadowca może wybrać się w podróż pomiędzy dowolnymi dwoma miastami przejeżdżając tylko pociągami szerokotorowymi albo tylko wąskotorowymi.

4. W pewnym klubie siatkarskim każdy z graczy nie lubi co najwyżej trzech ze osób (z wzajemnością). Udowodnij, że trener może ich podzielić na dwie, niekoniecznie równe, drużyny, w których każdy z siatkarzy nie lubi co najwyżej jednego innego z zawodników.

5. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło n zawodników, nie było remisów. Udowodnij, że zawodników można ustawić w rzędzie, tak, że każdy wygrał z zawodnikiem stojącym przed nim.

6. Smakosz Jan porównywał n restauracji, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każdą parę restauracji porównał w dwóch kategoriach: smaczności posiłku oraz jakości obsługi. W przypadku niektórych par Jan nie mógł się zdecydować, którą uważa za lepszą w którejś kategorii, ale w żadnej parze nie zdarzyło się to w obu kategoriach. Ponadto, jeśli Jan uznał, że restauracja A jest lepsza od restauracji B w którejś kategorii, oraz stwierdził, że restauracja B jest lepsza od restauracji C w tej samej kategorii, to uznał również, że A jest lepsza od C w tej kategorii. Udowodnić, że istnieje taka restauracja R, że każda inna restauracja została uznana za gorszą od R w chociaż jednej kategorii.

7. W pewnej grupie jest $2n$ osób. Wśród nich nie ma takich trzech osób, że każde dwie z nich się znają. Ile maksymalnie może być par osób, które się znają?

8. Pewien klub brydżowy ma specjalną zasadę, zgodnie z którą czterech członków może zagrać partię tylko jeśli żadnych dwoje nie było wcześniej partnerami. Pewnego razu spotkało się 14 graczy, z których każdy wcześniej był partnerem czwórki przybyłych. Zagrano sześć partii, po czym zgodnie z zasadami klubu rozgrywki zostały zatrzymane. Gdy zamierzano rozwiązać zgromadzenie do klubu przyszedł nowy członek, z którym nikt jeszcze nie grał. Pokazać, że w tej sytuacji można rozegrać kolejną partię.

9. W grupie ludzi nie wszyscy się znają. Każdego dnia jeden człowiek zaprasza na obiad wszystkich swoich znajomych i zaznajamia każdego z każdym. Po tym, jak każdy zapraszał przynajmniej raz istnieje dwóch ludzi, którzy jeszcze się nie znają. Wykaż, że po kolejnym obiedzie dalej nie będą się znali.

10. Danych jest 17 liczb całkowitych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 9 liczb, których suma jest podzielna przez 9.

11. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Bartek i Staś grają w grę na mapie kraju składającego się z n wysp. Na dokładnie 2 wyspach znajdują się fabryki. Początkowo w całym kraju nie ma żadnego mostu. Bartek i Staś na zmianę wybierają 2 wyspy I_1 i I_2, takie że:

© 2024 Kuźnia Olimpijska s.c.

- nie ma mostu łączącego I_1 i I_2,
- do co najmniej jednej z wysp I_1, I_2 da się dojść pieszo z wyspy z fabryką.

Między wybranymi wyspami zostaje natychmiast zbudowany most. Gracz przegrywa, jeśli po jego ruchu istnieje ścieżka pomiędzy fabrykami. Bartek zaczyna. Kto ma strategię wygrywającą?

12. Do obrad przy okrągłym stole zasiadła parzysta liczba osób. Po przerwie obiadowej uczestnicy zajęli miejsca przy stole w sposób dowolny. Udowodnić, że istnieją dwie osoby przedzielone tą samą, co przed przerwą, liczbą osób.

13. W grafie o 14 wierzchołkach każde dwa wierzchołki są połączone szarą albo burą krawędzią. Wykaż, że można wybrać takie trzy wierzchołki, że każde dwa są połączone szarą krawędzią lub takich pięć wierzchołków, że każde dwa są połączone burą krawędzią.

14. Dowolna grupa może być podzielona na dwie części tak, że co najmniej połowa znajomych danej osoby jest w grupie, do której ta osoba nie należy.

15. (Twierdzenie Diraca) Jeśli każda osoba zna przynajmniej połowę osób w grupie, to można posadzić grupę przy stole tak, że każdy siedzi między dwoma znajomymi.

16. W grafie pełnym każdą krawędź narysowano na żółto lub na niebiesko. Wykaż, że liczba jednokolorowych trójkątów jest nie mniejsza niż
$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

17. (Formuła Goodmana) Udowodnij, że w grafie pełnym o n wierzchołkach, w którym pokolorowano krawędzie na dwa kolory, liczba jednokolorowych trójkątów to
$$\frac{1}{2}\left(\sum_v \binom{\deg(v)}{2} + \sum_v \binom{n-1-\deg(v)}{2} - \binom{n}{3}\right).$$

18. (Lemat Zarankiewicza) Jeżeli G jest grafem niezawierającym k-wierzchołkowej kliki, to istnieje wierzchołek G, którego stopień nie przekracza
$$\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor.$$

19. Duży prostokąt podzielono na mniejsze prostokąty, z których każdy ma co najmniej jedną parę boków o całkowitej długości. Pokaż, że duży prostokąt również ma co najmniej jedną parę boków o całkowitej długości.

20. W balu uczestniczyło 20 kawalerów i 20 dam. W każdym z 99 tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, ze istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, ze każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.

21. Dane są takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 23\}$, że dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant k$ zachodzi $|A_i \cap A_j| \leqslant 3$. Wykazać, że $k \leqslant 2025$.

© 2024 Kuźnia Olimpijska s.c.

22. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 2^{2014} można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3 lub 5.

23. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 2^{2014} można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3, 5 lub 7.

24. Rozstrzygnij, czy prostokąt o wymiarach $10^{2014} \times 3^{2014}$ można pociąć na prostokąty o wymiarach 5×6.

25. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 28 można pociąć na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×10 lub 1×11.

26. Dwóch magików pokazuje sztuczkę: jeden losuje 5 kart ze zwykłej talii 52 kart, ogląda je, wybiera jedną i chowa, a pozostałe 4 pokazuje koledze w wybranej kolejności. Drugi magik zgaduje, jaką kartę kolega schował. Rozstrzygnąć, czy da się tę sztuczkę przeprowadzić zgodnie z opisem, bez nieuczciwego przekazywania dodatkowych wiadomości.

27. Bank Kapsztadzki emituje monety o nominałach $\frac{1}{n}$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n. Dany jest zestaw skończenie wielu takich monet (o niekoniecznie różnych nominałach) o sumarycznej wartości nie większej niż $99 + \frac{1}{2}$. Wykazać, że ten zestaw można podzielić na co najwyżej 100 grup w taki sposób, by sumaryczna wartość monet w każdej grupie nie przekraczała 1.

© 2024 Kuźnia Olimpijska s.c.