

Kombinatoryka

1 Triki

1. **Spójrz na małe przykłady.** Najważniejszy trik w całej kombinatoryce. Spójrz na małe przykłady. Zgadnij odpowiedź lub metodę dowodu. Udowodnij.
2. Indukcja. Bardzo często używa się jej wraz z poprzednim trikiem (ale przydaje się też w wielu innych przypadkach), jako że aby użyć indukcji trzeba znać odpowiedź.
3. Zasada ekstremum (w tym nieskończone schodzenie). Spójrz na maksymalny/minimalny z rozważanych obiektów. Udowodnij, że istnieje większy/mniejszy.
4. Zasada szufladkowa Dirichleta.
5. Niezmienniki i półniezmienniki. Niezmienniki często pełnią rolę pomocniczą w trudnych zadaniach. Półniezmienników bardzo często używa się w połączeniu z zasadą ekstremum.
 - Jednym z częstszych niezmienników może być parzystość. Taki niezmiennik może być wykorzystany np. za pomocą lematu o uściskach dłoni: jeśli pewna liczba par wśród n osób uściśnęła sobie dłonie, to liczba osób, które uściśnęły nieparzystą liczbę dłoni jest parzysta
6. Algorytm. Czasami można udowodnić, że jakieś obiekty istnieją poprzez opisanie ich konstrukcji lub podanie algorytmu, który je generuje.
7. Teoria grafów. Często można wyrazić treść zadania w języku teorii grafów, a następnie użyć metod grafowych do jego rozwiązania, zwłaszcza definiując różne podzbiory wierzchołków i szukając relacji między nimi.
8. Naśladowanie przeciwnika. W zadaniach z teorii gier strategią wygrywającą często jest naśladowanie ruchów przeciwnika.
 - Inną strategią, która czasami pojawia się w zadaniach jest nieprzegrywanie tj. niewykonywanie ruchu, który natychmiast kończy grę naszą przegraną, o ile tylko jest to możliwe.
9. Podwójne zliczanie. Często aby udowodnić jakąś równość wystarczy udowodnić, że jej lewa strona to liczba elementów pewnego zbioru A (policzonych pierwszym sposobem), a jej prawa strona to liczba elementów zbioru A policzona innym sposobem. Podwójnym zliczaniem można też dowodzić nierówności (po jednej stronie pominięto część elementów).
10. Szukanie bijekcji. Jeśli mamy udowodnić, że obiektów typu A i obiektów typu B jest tyle samo, to często można to zrobić poprzez sparowanie wszystkich elementów typu A ze wszystkimi elementami typu B .
11. $a \leq b$ połączone z $a \geq b$ implikuje $a=b$. Często udowodnienie dwóch nierówności jest łatwiejsze niż udowodnienie jednej równości.
12. Równanie $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$ dla $a_i \geq 0$ ma dokładnie $\binom{m+n-1}{n-1}$. Tyle samo rozwiązań ma nierówność $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \leq m$.
13. System binarny. Istnieją zadania, które łatwiej rozwiązać, jeśli korzysta się z innych systemów liczbowych, gdyż niektóre operacje (np. mnożenie przez podstawę systemu) stają się dużo prostsze.
14. Rysunki. Opracuj własny sposób przenoszenia idei rozwiązań na papier i korzystaj z tego. Zapisywanie swoich myśli zdecydowanie ułatwia koncentrację.