Metoda ekstremum

Warsztaty Matematyczne

29.09.2022

1 Wstęp

Rozwiązując zadania, warto zastanowić się nad tym, co się dzieje w krańcowych przypadkach. Takie rozumowanie jest przydane w tworzeniu dowodów przez sprzeczność. Często zdarza się, że teza, którą chcemy obalić, pociąga za sobą istnienie przypadku (lub przypadków), które mają jakiejś cechy najwięcej. Jeśli wybierzemy taki przypadek, może się okazać, że jednak umiemy za jego pomocą znaleźć przypadek o jeszcze większej cesze. Kilka teoretycznych przykładów:

1. Wybieramy hipotetyczne rozwiązanie układu równań w liczbach naturalnych takie, że suma wartości jest najmniejsza.

2. Rozpatrujemy graf, w którym jest najmniejsza liczba krawędzi. Następnie dowodzimy, że generujemy z niego graf o mniejszej liczbie krawędzi, który spełnia warunki z treści zadania, więc dochodzimy do sprzeczności.

Nieraz warto (w szczególności: w zadaniach z algebry) wybrać jakąś zmienną i przyjąć bez straty ogólności (jeśli jest to możliwe), że jest największe lub najmniejsze. Nie trzeba wtedy wielu przypadków rozpatrywać i takie założenie daje nowe własności, które można wykorzystać w rozwiązaniu. Kilka teoretycznych przykładów:

1. W nierówności lub układzie równań wybieramy zmienną, która jest największa (nie trzeba rozpatrywać wielu przypadków). Dodaje ona nowe nierówności (np. jeśli a jest największą ze zmiennych a, b, c, d, to $a \geq b, c, d$ - trywialne, ale okazuje się bardzo przydatne).

2. Wybieramy w grafie wierzchołek o największym (lub najmniejszym) stopniu.

2 Kilka prostych przykładów

Przykład 1. *Liczby całkowite mogą być dowolnie duże.*

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy musi istnieć największa liczba całkowita. Oznaczmy ją x. Ale jednak $x+1$ również jest liczbą całkowitą i $x+1 > x$, więc x nie jest największą liczbą całkowitą, więc sprzeczność. □

Uwaga. *Identyczne rozumowanie nie zadziałałoby dla liczb wymiernych lub rzeczywistych. Wśród ich ograniczonego zbioru (np. wszystkie liczby mniejsze od 5) nie zawsze da się znaleźć element o największej wartości.*

Przykład 2. $\sqrt{3}$ *jest liczbą niewymierną.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną. Wybierzmy takie liczby całkowite p, q, że $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ oraz spośród wszystkich p, q, spełniających wcześniej wspomnianą równość, wybierzmy dowolne te, których wartość bezwzględna sumy jest najmniejsza. Zauważmy, że $p^2 = 3q^2$, więc $3 \mid p$. Niech $p_2 = \frac{p}{3}$. Wtedy $3q^2 = p^2 = 9p_2^2 \Rightarrow q^2 = 3p_2^2 \Rightarrow 3 \mid q$. Niech $q_2 = \frac{q}{3}$. $\frac{p_2}{q_2} = \frac{p}{q} = \sqrt{3}$ oraz $|p_2 + q_2| = \frac{|p+q|}{3} < |p+q|$ ($p + q \neq 0$, bo $\frac{p}{q} = \sqrt{3} \neq -1$). Otrzymaliśmy w ten sposób, że wartość bezwzględna sumy p, q spełniających $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$ nie jest najmniejsza. □

Przykład 3. *Udowodnij, że*

$$0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Dowód. Bez straty ogólności: $a \geq b, c$. Wtedy

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a+b+c}{bc+1} =$$

$$= \frac{(a-1)-(1-b)(1-c)+bc+2}{bc+1} = \frac{(a-1)-(1-b)(1-c)-bc}{bc+1} + 2 \leq 2$$

□

3 Ćwiczenia na rozgrzewkę

Ćwiczenie 1. *Udowodnij, że istnieje w każdym wielokącie, który nie jest trójkątem, przekątna.*

Ćwiczenie 2. *Udowodnij, że nie istnieje czworościan, w którym każda krawędź jest ramieniem pewnego kąta rozwartego jednej ze ścian.*

Ćwiczenie 3. *Udowodnij, że jeśli wielomian f nie jest zerowy i spełnia $f(x) \cdot f(x+3) = f(x^2+x+3)$, to nie ma pierwiastków rzeczywistych.*

Ćwiczenie 4. *Udowodnij, że $a_1^{22} + a_2^{22} + \ldots + a_{22}^{22} = 23b^{22}$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.*

4 Zadania

Zadanie 1. *Czy istnieje czworościan, w którym każda krawędź jest ramieniem pewnego kąta rozwartego jednej ze ścian?*

Zadanie 2. *Czy istnieje wielościan wypukły, w którym każde dwie ściany mają inną liczbę boków?*

Zadanie 3. *Na płaszczyźnie jest $2n$ punktów (żadne 3 nie są na jednej prostej): n białych, n czarnych. Udowodnij, że można narysować n nieprzecinających się odcinków takich, że każdy ma jeden koniec biały, drugi czarny.*

Zadanie 4. *Rozwiąż w liczbach rzeczywistych*

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

Zadanie 5. *Graf ma $2n$ wierzchołków i $n^2 + 1$ krawędzi. Udowodnij, że istnieje w nim trójkąt (3-klika).*

Zadanie 6. *Jeżeli w grafie o $n > 2$ wierzchołkach zachodzi $\deg(v) + \deg(u) \geq n$ dla każdej pary wierzchołków u, v, które nie są ze sobą połączone krawędzią, to dany graf posiada cykl Hamiltona.*

Zadanie 7. *W pewnym turnieju wzięło udział n zawodników. Każdych dwóch rozegrało ze sobą dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Wykaż, że można wszystkich ustawić w kolejce w taki sposób, aby każdy (oprócz ostatniego) wygrał z zawodnikiem stojącym bezpośrednio za nim.*

Zadanie 8. *Dana jest dodatnia liczba całkowita k oraz skończony zbiór nieparzystych liczb pierwszych S. Udowodnić, że istnieje co najwyżej jeden sposób (z dokładnością do obrotu oraz symetrii) rozmieszczenia elementów zbioru S na okręgu o tej własności, że iloczyn każdych dwóch sąsiednich elementów jest postaci $x^2 + x + k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej x.*

Literatura

[1] Łukasz Bożyk *Kombinatoryka i teoria grafów*

[2] Michał Kieza *Ekstremalność jako narzędzie do rozwiązywania zadań z matematyki*

[3] Obóz Naukowy OMJ Poziom OMJ (2017)

[4] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna (2022)