Rozwiązania Kontestu 1 – II etap

Zadanie 1. Na czarno-białej szachownicy, która ma 10 rzędów i 14 kolumn umieszczono kamienie. Okazało się, że w każdym rzędzie i każdej kolumnie znajduje się nieparzysta liczba kamieni. Pokaż, że liczba kamieni na czarnych polach jest liczbą parzystą.

Źródło: Zadanie 03.1 z link

Rozwiązanie 1. Zmiana kolejności rzędów lub kolumn nie wpływa na liczbę kamieni w rzędzie, w kolumnie ani na czarnych polach. Dlatego możemy uporządkować rzędy i kolumny w taki sposób, że prostokąty 5×7 w lewym górnym i prawym dolnym rogu będą czarne, a pozostałe dwa prostokąty 5×7 będą białe. Jeśli liczba kamieni na czarnych polach byłaby nieparzysta, to jeden z czarnych prostokątów miałby nieparzystą liczbę kamieni, a drugi parzystą. Ponieważ liczba kamieni jest parzysta, jeden z białych prostokątów miałby nieparzystą liczbę kamieni, a drugi parzystą. Ale to implikowałoby istnienie zestawu pięciu rzędów lub siedmiu kolumn z parzystą liczbą kamieni. Jednak to jest niemożliwe, ponieważ w każdym rzędzie i każdej kolumnie znajduje się nieparzysta liczba kamieni. Zatem liczba kamieni na czarnych polach musi być liczbą parzystą.

Źródło: Zadanie 03.1 z link

Zadanie 2. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takie że

$$f(xy) = f(f(x) + f(y))$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Źródło: link

Rozwiązanie 2. Niech $f(0) = c$. Załóżmy, że istnieje takie a, że $f(a) = f(0)$ podstawiając $y = a$ uzyskujemy:

$$f(ax) = f(f(x) + f(a)) = f(f(x) + f(0)) = f(0) = c.$$

Zatem, jeżeli $a \neq 0$, to ax może przyjąć dowolną wartość, zatem funkcja f jest stała równa c. W przeciwnym wypadku gdy $f(a) = f(0)$ to $a = 0$. Podstawmy $y = 0$ uzyskujemy:

$$c = f(f(x) + f(c)),$$

zatem $f(x) + f(c) = 0$, ponownie f jest stała równa $-f(c)$. Zatem jeżeli f spełnia równanie to musi być stałe. Pozostaje sprawdzić, że funkcje stałe spełniają to równanie, oczywiście jest to prawdą.

Źródło: link

Zadanie 3. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych m istnieje taka liczba całkowita $n > m$, że nm oraz $(n+1)(m+1)$ są kwadratami liczb całkowitych?

Rozwiązanie 3. Dla każdej, wystarczy przyjąć $n = m(4m+3)^2 > m$ i zobaczyć, że zachodzą $m \cdot m(4m+3)^2 = (m(4m+3))^2$ oraz $(m+1)(m(4m+3)^2+1) = ((m+1)(4m+1))^2$.

Zadanie 4. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech D i E to odpowiednio rzuty punktów B i C na dwusieczną kąta BAC. Niech M to środek odcinka BC, zaś H to ortocentrum trójkąta DEM. Udowodnij, że punkty A, O, H są współliniowe.

Źródło: Romantics of Geometry, problem 14784 link

Rozwiązanie 4. Niech X i Y to rzuty D i E na AB i AC odpowiednio, zaś Z to obraz symetryczny punktu A względem O. Przez podobieństwo i Talesa sprawdzamy, że $AB||XY$. Odbijając symetrycznie B względem AD i korzystając z linii środkowej w trójkącie, dostajemy $DM||AC$, czyli E, H i Y leżą na jednej prostej, równoległej do CZ (bo obydwie są prostopadłe do AC). Analogiczne rozważania dla drugiej strony dają łącznie to, że trójkąty XYH oraz BCZ mają równoległe boki (są jednokładne), co daje tezę.

Źródło: Romantics of Geometry, problem 14784 link