Autor: Jerzy Szempliński Prowadzący: Jerzy Szempliński

Warsztat nierówności

Teoria

- Dla **dodatnich** liczb rzeczywistych $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ zachodzą następujące **nierówności na średnich**:

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}}_{\text{Średnia harmoniczna}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}_{\text{Średnia geometryczna}} \leq \underbrace{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}_{\text{Średnia arytmetyczna}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}}_{\text{Średnia kwadratowa}}.$$

  Równości zachodzą jedynie, gdy $a_1=a_2=\ldots a_n$.

- Dla dowolnych liczb **rzeczywistych** $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ zachodzi **nierówność Cauchy'ego-Schwarza**:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$$

  Inne jej sformułowania prawdziwe dla liczb **dodatnich**:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)\geq\left(\sqrt{a_1b_1}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}\right)^2$$

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

- Jeżeli **ciągi** $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ i $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ liczb **rzeczywistych** są **zgodnie uporządkowane** (jednomonotoniczne) (np. oba są rosnące), to zachodzi:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geq a_1b_1'+a_2b_2'+\ldots+a_nb_n'\geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$$

  gdzie ciąg $(b_1',b_2',\ldots,b_n')$ to **dowolna** permutacja ciągu $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$.

Zadania

1. Niech $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}.$$

2. Dana jest dodatnia liczba k oraz funkcja $f(x)=\frac{(x+k)^2}{x^2+1}, x\in(-\infty,\infty)$. Pokaż, że $f(x)\leq k^2+1$.

3. Wykaż, że dla $a,b,c>0$ zachodzi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

4. Niech w trójkącie ABC liczby h_a,h_b,h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości a,b,c odpowiednio. Uzasadnij, że

$$(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)\geq 18P_{ABC}.$$

5. Dla dodatnich liczb rzeczywistych $a,b,c>0$ pokaż, że

$$abc(a+b+c)\leq a^3b+b^3c+c^3a.$$

6. Udowodnij, że dla wszystkich dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^{1/2} + \left(\frac{x+z}{x+y+z}\right)^{1/2} + \left(\frac{y+z}{x+y+z}\right)^{1/2} \leq 6^{1/2}.$$

7. Dane są liczby dodatnie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ takie, że $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Udowodnij, że zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \left(p_k + \frac{1}{p_k}\right)^2 \geq n^3 + 2n + \frac{1}{n}.$$

8. Udowodnij, że dla dodatnich liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

9. Niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem liczb rzeczywistych, gdzie dla każdego i istnieje liczba rzeczywista c taka, że $0 \leq a_i \leq c$ oraz

$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j} \text{ dla każdych } i,\ j \text{ gdzie } i \neq j.$$

Udowodnij, że $c \geq 1$.

10. Dany jest trójkąt ABC. Znajdź wszystkie P, dla których wyrażenie

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

jest najmniejsze, jeśli D, E, F są odpowiednio rzutami prostopadłymi P na proste BC, CA, AB.

11. Niech a, b i c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Pokaż, że

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a+b+c)^3.$$

Odpowiedzi

1. By Cauchy-Schwarz, $\left(\sum \frac{a_i^2}{a_i+b_i}\right)\left(\sum a_i + b_i\right) \geq \left(\sum a_i\right)^2$. Since $\sum a_i = \sum b_i$, we get

$$\sum \frac{a_i^2}{a_i+b_i} \geq \frac{\left(\sum a_i\right)^2}{\sum(a_i+b_i)} = \frac{\sum a_i}{2}.$$

2. Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza zachodzi

$$(x \cdot 1)(1 \cdot k) \leq (x^2 + 1^2)(k^2 + 1^2),$$

co po przekształceniu daje tezę.

3.

4. By Cauchy-Schwarz, we have

$$\left(\frac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{c} + \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{a} + \frac{c}{\sqrt{b}}\sqrt{b}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(c+a+b).$$

As such, $(a+b+c) \leq (\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b})$. Multiplying throughout by abc, we obtain the given inequality.

5. Zastosujemy nierówność Cauchy'ego-Schwarza:

$$\left(\sqrt{\frac{x+y}{x+y+z}}+\sqrt{\frac{x+z}{x+y+z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x+y+z}}\right)^2 \leq 3\left(\frac{x+y}{x+y+z}+\frac{x+z}{x+y+z}+\frac{y+z}{x+y+z}\right)$$

Uproszczenie wyrażenia w nawiasie daje:

$$\frac{x+y}{x+y+z}+\frac{x+z}{x+y+z}+\frac{y+z}{x+y+z}=2$$

Stąd:

$$\left(\sqrt{\frac{x+y}{x+y+z}}+\sqrt{\frac{x+z}{x+y+z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x+y+z}}\right)^2 \leq 6$$

Biorąc pierwiastek z obu stron, otrzymujemy ostatecznie:

$$\sqrt{\frac{x+y}{x+y+z}}+\sqrt{\frac{x+z}{x+y+z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x+y+z}} \leq \sqrt{6}$$

co kończy dowód.

6. Nierówność Cauchy'ego-Schwarza mówi, że dla dowolnych dodatnich liczb a_k i b_k:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2.$$

Ustawmy:

$$a_k=\sqrt{p_k}, \quad b_k=\frac{1}{\sqrt{p_k}},$$

czyli $a_k b_k = 1$, zatem:

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n 1\right)^2 = n^2.$$

Ponieważ $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, mamy:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \geq n^2.$$

Rozważmy teraz sumę:

$$\sum_{k=1}^n \left(p_k+\frac{1}{p_k}\right)^2.$$

Rozwiniemy kwadraty:

$$\left(p_k+\frac{1}{p_k}\right)^2 = p_k^2+2+\frac{1}{p_k^2}.$$

Stąd:

$$\sum_{k=1}^n \left(p_k+\frac{1}{p_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^n \left(p_k^2+2+\frac{1}{p_k^2}\right) = \sum_{k=1}^n p_k^2 + 2n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2}.$$

1. **Oszacowanie $\sum_{k=1}^n p_k^2$:**

Z nierówności QM-AM mamy:

$$\frac{p_1^2+p_2^2+\cdots+p_n^2}{n} \geq \left(\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}.$$

Po pomnożeniu obu stron przez n, otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geq \frac{1}{n}.$$

2. **Oszacowanie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^2}$:**

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wiemy, że:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}\right) \geq n^2.$$

Ponieważ $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, mamy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \geq n^2.$$

Stąd, korzystając z nierówności:

$$\left(\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_n^2}\right) \geq \frac{\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)^2}{n},$$

otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^2} \geq \frac{n^4}{n} = n^3.$$

Podstawiając te oszacowania do wyjściowej nierówności, mamy:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(p_k + \frac{1}{p_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + 2n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^2} \geq \frac{1}{n} + 2n + n^3.$$

7. Zastosujemy nierówność Cauchy'ego-Schwarza z $x_1 = \sqrt{\frac{a}{b}}, x_2 = \sqrt{\frac{b}{c}}, x_3 = \sqrt{\frac{c}{a}}, y_1 = \sqrt{ab}, y_2 = \sqrt{bc}, y_3 = \sqrt{ca}$. Wówczas:

$$a + b + c = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

$$= \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} \cdot \sqrt{ab + bc + ca}.$$

8. For some fixed value of n, let σ be the permutation of the first n natural numbers such that $a_{\sigma(1)}, \ldots a_{\sigma(n)}$ is an increasing sequence. Then we have

$$\begin{aligned} a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(1)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left|a_{\sigma(i+1)} - a_{\sigma(i)}\right| \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{1}{\sigma(i+1)+\sigma(i)} \qquad (*) \end{aligned}$$

Now, by the Cauchy-Schwarz Inequality, we have

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{1}{\sigma(i+1)+\sigma(i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(i+1) + \sigma(i)\right) &\geq (n-1)^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{1}{\sigma(i+1)+\sigma(i)} &\geq \tfrac{(n-1)^2}{2\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma_i) - \sigma(1) - \sigma(n)} \\ &\geq \tfrac{(n-1)^2}{n(n+1)-3} \\ &\geq \tfrac{n-1}{n+3}. \end{aligned}$$

Thus for all n, we must have

$c \geq \frac{n-1}{n+3} = 1 - \frac{4}{n+3}$,

and therefore c must be at least 1, Q.E.D. Solution 2

We proceed to $(*)$ as in Solution 1. We now note that by the AM-HM Inequality,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma(i+1)+\sigma(i)} &\geq \frac{(n-1)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}[\sigma(i+1)+\sigma(i)]} \\ &> \frac{(n-1)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}[\sigma(i+1)+\sigma(i)]+\sigma(n)+\sigma(1)} \\ &= \frac{(n-1)^2}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Thus for any n, we have two a_i that differ by more than $\frac{(n-1)^2}{n(n+1)}$. But this becomes arbitrarily close to 1 as n becomes arbitrarily large. Hence if we had $c < 1$, then we could obtain a contradiction, so we conclude that $c \geq 1$, Q.E.D.

9.

10. We note that $BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF$ is twice the triangle's area, i.e., constant. By the Cauchy-Schwarz Inequality,

$$(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF)\left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}\right) \geq (BC + CA + AB)^2,$$

with equality exactly when $PD = PE = PF$, which occurs when P is the triangle's incenter or one of the three excenters. But since we know P is inside $\triangle ABC$, we can say P is the incenter. $\square$

11.

Źródło zadań: Aleksander Kubica i Tomasz Szymczyk, Nierówności dla początkujących olimpijczyków