Kontest 2 - 29.09.2022

Starsi

Zadanie 1. Dana jest taka funkcja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x)$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Zadanie 2. Na prostej BC równoległoboku $ABCD$ wybrano punkty E i F (E leży pomiędzy B i F) oraz punkt przecięcia przekątnych AC i BD oznaczono przez O.
Wykaż, że jeśli proste AE i DF są styczne do okręgu opisanego na $\triangle AOD$, to są również styczne do okręgu opisanego na $\triangle EOF$

Zadanie 3. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $abc = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leqslant 1$$

Zadanie 4. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi równość

$$\left[\frac{n-2^0}{2^1}\right] + \left[\frac{n-2^1}{2^2}\right] + \left[\frac{n-2^2}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n-2^{n-1}}{2^n}\right] = 0$$