# Rozwiązania Kontestu 5 – Finaliści

**Zadanie 1.** Rozwiąż równanie w liczbach całkowitych dodatnich:

$$(3x + 4y)(4x + 5y) = 7^z.$$

*Źródło: Zadanie 1 Równania Diofantyczne z Rabka 2019*

**Rozwiązanie 1.** Zachodzi $4x + 5y > 3x + 4y > 1$, więc $3x + 4y = 7^a$ oraz $4x + 5y = 7^b$. Zauważmy, że

$$7^a = 3x + 4y < 4x + 5y = 7^b < 21x + 28y = 7(3x + 4y) = 7^{a+1}.$$

Zatem $b$ nie jest liczbą całkowitą, co prowadzi do sprzeczności. Zatem równanie nie ma rozwiązań.

*Źródło: Rabka 2019*

**Zadanie 2.** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$ i leżący w jego wnętrzu punkt $P$. Niech $A', B', C'$ to odbicia symetryczne punktu $P$ odpowiednio względem boków $BC, CA, AB$. Niech $A'', B'', C''$ to środki odcinków $AA', BB', CC'$ odpowiednio. Udowodnij, że trójkąty $ABC$ i $A''B''C''$ są podobne.

**Rozwiązanie 2.** Niech $O$ będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Niech punkty $K$, $L$, $M$ będą odbiciami symetrycznymi punktu $O$ względem odpowiednio boków $BC$, $CA$, $AB$. Wówczas trójkąt $KLM$ ma boki równoległe i równe do odpowiednich boków trójkąta $ABC$ (wystarczy spojrzeć na jednokładność o środku w $O$ i skali 2, a także na linie środkowe w trójkącie $ABC$). Oznacza to, że odcinki $AK$, $BL$, $CM$ przecinają się w jednym punkcie $Q$, który jest środkiem każdego z tych odcinków (ponieważ każdy z czworokątów $ABKL$, $BCLM$, $CAMK$ jest równoległobokiem).

Stąd wynika, że $A''Q \parallel A'K$, co jest symetryczne do $OP$ względem $BC$, a także $A''Q = \frac{PO}{2}$. Analogiczne zależności zachodzą dla $B''Q$ oraz $C''Q$.

Wówczas punkt $Q$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A''B''C''$, a kąt między $QA''$ i $QB''$ jest taki sam, jak między $A'K$ oraz $B'L$. Ten ostatni jest dwukrotnie większy od kąta między prostymi $AC$ i $BC$ (co wynika ze wspomnianych symetrii). Ostatecznie mamy:

$$\sphericalangle A''B''C'' = \frac{\sphericalangle A''QB''}{2} = \sphericalangle ACB.$$

Analogicznie dowodzimy dwóch pozostałych równości kątów.

Zatem teza wynika z cechy kąt-kąt-kąt.

**Zadanie 3.** Dana jest liczba całkowita $n > 2$ oraz zbiór $S$ skłądający się z $2n$ punktów płaszczyzny o obu współrzędnych ze zbioru $1, 2, \ldots, n$. Udowodnij, że w zbiorze $S$ istnieją 4 punkty będące wierzchołkami niezdegenerowanego równoległoboku.

**Rozwiązanie 3.** Pomalujmy każdy punkt danego $2n$-elementowego zbioru $S$ na zielono albo na czerwono w następujący sposób: punkt malujemy na zielono, jeżeli w układzie współrzędnych punkt ten jest położonym najbardziej na lewo punktem zbioru $S$ na prostej poziomej przechodzącej ten punkt; wszystkie pozostałe punkty zbioru $S$ malujemy na czerwono. Zbiór $S$ jest zawarty w sumie $n$ prostych poziomych, a na każdej z nich znajduje się co najwyżej jeden punkt zielony. To oznacza, że co najwyżej $n$ punktów jest zielonych, a co najmniej $n$ punktów jest czerwonych. Przyporządkujmy każdemu czerwonemu punktowi jego odległość od punktu zielonego leżącego na tej samej prostej poziomej. Odległość ta jest elementem zbioru $1, 2, ..., n-1$. W takim razie możliwych odległości jest mniej niż czerwonych punktów. Wobec tego istnieją dwa różne czerwone punkty jednakowo odległe od zielonych punktów znajdujących się na tych samych prostych poziomych. Te dwa czerwone punkty muszą leżeć na różnych prostych poziomych. Zatem wraz z przyporządkowanymi im dwoma zielonymi punktami tworzą one czworokąt wypukły, w którym dwa przeciwległe boki są poziome i mają jednakową długość. Rozważane cztery punkty są więc wierzchołkami niezdegenerowanego równoległoboku.

**Zadanie 4.** Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n > 1$ o całkowitych współczynnikach, a $k$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Rozważmy wielomian

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x)) \ldots)),$$

gdzie $P$ występuje $k$ razy. Udowodnij, że istnieje co najwyżej $n$ liczb całkowitych $t$, takich że $Q(t) = t$.

*Źródło: Zadanie 5 IMO 2006*

**Rozwiązanie 4.** Twierdzenie jest oczywiste, jeśli każdy całkowity punkt stały $Q$ jest punktem stałym $P$. Załóżmy więc, że tak nie jest. Weźmy dowolne $x_0 \in \mathbb{Z}$ takie, że $Q(x_0) = x_0$, ale $P(x_0) \neq x_0$, i zdefiniujmy indukcyjnie ciąg

$$x_{i+1} = P(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \ldots; \quad \text{wtedy } x_k = x_0.$$

Jest oczywiste, że

$$P(u) - P(v) \text{ jest podzielne przez } u - v \text{ dla różnych } u, v \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

(Rzeczywiście, jeśli $P(x) = \sum a_i x^i$, to każdy składnik $a_i(u^i - v^i)$ jest podzielny przez $u - v$.) Zatem każdy wyraz w ciągu (niezerowych) różnic

$$x_0 - x_1,\ x_1 - x_2,\ \ldots,\ x_{k-1} - x_k,\ x_k - x_{k+1} \tag{2}$$

jest dzielnikiem następnego wyrazu; a ponieważ $x_k - x_{k+1} = x_0 - x_1$, wszystkie te różnice mają tę samą wartość bezwzględną. Dla $x_m = \min(x_1, \ldots, x_k)$ oznacza to, że $x_{m-1} - x_m = -(x_m - x_{m+1})$, czyli $x_{m-1} = x_{m+1} \neq x_m$.

Z tego wynika, że kolejne różnice w ciągu (2) mają przeciwne znaki. W konsekwencji $x_0, x_1, x_2, \ldots$ tworzą naprzemienny ciąg dwóch różnych wartości. Innymi słowy, każdy całkowity punkt stały $Q$ jest punktem stałym wielomianu $P(P(x))$. Naszym zadaniem jest udowodnienie, że takich punktów jest co najwyżej $n$.

Niech $a$ będzie jednym z tych punktów, tak że $b = P(a) \neq a$ (zakładamy, że taki punkt $a$ istnieje); wówczas $a = P(b)$. Weźmy dowolny inny całkowity punkt stały $\alpha$ wielomianu $P(P(x))$ i niech $P(\alpha) = \beta$, tak że $P(\beta) = \alpha$. Liczby $\alpha$ i $\beta$ nie muszą być różne (może się zdarzyć, że $\alpha$ jest punktem stałym $P$), ale każda z liczb $\alpha$, $\beta$ jest różna od $a$ i $b$.

Stosując własność (1) do czterech par liczb całkowitych $(\alpha, a)$, $(\beta, b)$, $(\alpha, b)$, $(\beta, a)$ otrzymujemy, że liczby $\alpha - a$ i $\beta - b$ dzielą się wzajemnie, podobnie jak $\alpha - b$ i $\beta - a$. Wynika stąd

$$\alpha - b = \pm(\beta - a), \quad \alpha - a = \pm(\beta - b). \tag{3}$$

Załóżmy, że oba przypadki mają znak plus: $\alpha - b = \beta - a$ oraz $\alpha - a = \beta - b$. Po odjęciu otrzymujemy $a - b = b - a$, co jest sprzecznością, ponieważ $a \neq b$. Zatem przynajmniej jedna równość w (3) musi mieć znak minus. Dla każdej z nich oznacza to, że $\alpha + \beta = a + b$; równoważnie $a + b - \alpha - P(\alpha) = 0$.

Oznaczmy $a + b$ przez $C$. Pokazaliśmy, że każdy całkowity punkt stały $Q$ różny od $a$ i $b$ jest pierwiastkiem wielomianu $F(x) = C - x - P(x)$. Oczywiście, $a$ i $b$ również są pierwiastkami. Ponieważ $P$ ma stopień $n > 1$, wielomian $F$ ma ten sam stopień, więc może mieć co najwyżej $n$ pierwiastków. Stąd teza.

*Źródło: Zadanie 5 IMO 2006*