Kontest 3 - 30.09.2022

Starsi

Zadanie 1. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takie, że dla m, n naturalnych zachodzi:

$$m^2 + f(n) \quad | \quad mf(m) + n$$

Zbiór liczb $\mathbb{N}$ nie zawiera 0 w tym zadaniu.

Zadanie 2. Na płaszczyźnie danych jest n punktów białych i n punktów czarnych, przy czym żadne 3 z tych $2n$ punktów nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że można wybrać n odcinków rozłącznych tak, aby każdy odcinek miał końce dwóch kolorów.

Zadanie 3. Niech M, N, P będą punktami styczności okręgu wpisanego z bokami AB, BC, CA odpowiednio. Udowodnij, że ortocentrum trójkąta MNP, środek okręgu wpisanego trójkata ABC i środek okręgu opianego trójkąta ABC są współliniowe.

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n o następującej własności: w kwadracie $n \times n$ można umieścić nie nachodzące na siebie klocki 1×4 w taki sposób, aby zajęte były wszystkie pola nie leżące przy brzegu (należy wypełnić szczelnie kwadrat $(n-2) \times (n-2)$, a klocki mogą wystawać jedno pole poza ten kwadrat).