Trudne zadania z kombinatoryki o zaskakująco eleganckich rozwiązaniach

Artur Walczak

Czasami żeby rozwiązać zadanie trzeba metodycznej pracy i znajomości wielu zagadnień. Innym razem trzeba przebłysku geniuszu. Takie właśnie zadania umieściłem w tym pliku. Omówimy dzisiaj kilka problemów kombinatorycznych, głównie na poziomie zadań 3/6 z IMO, (ale będą też trudniejsze i trochę łatwiejsze). Mimo trudności (prawie) każde z tych zadań ma dosyć krótkie i eleganckie rozwiązanie. Po omówieniu danego zadania będzie trochę czasu na zastanowienie się nad następnymi zadaniami, po czym część z nich omówimy wspólnie. Dostępne są ja również podpowiedzi do każdego zadania z Zadań Wstępnych i z Sekcji Głównej. Zadania Wstępne są trochę prostsze, z Sekcji Głównej trochę trudniejsze natomiast w pracy domowej zadania są ułożone od najprostszych do najtrudniejszych (mniej więcej). Zadania z części głównej i zadania wstępne omówimy na kółku jeśli się wyrobimy, zadania z pracy domowej omówimy tylko jeśli ktoś je rozwiąże.

1 Zadania wstępne

Zadanie 1.1. Dany jest trójkąt równoboczny T o boku $L > 0$. Załóżmy, że n trójkątów równobocznych o długości boku 1, które nie nachodzą na siebie nawzajem są rysowane wewnątrz T, tak że każdy z nich ma boki równoległe do T, ale o przeciwnej orientacji. Udowodnij, że

$$n < \frac{2}{3}L^2$$

Zadanie 1.2. Gra w Samotnika jest rozgrywana C kartami czerwonymi, B kartami białymi i N kartami niebieskimi. Na start wszystkie karty ma w ręce, a w ruchu gracz zagrywa pojedynczą kartę. Z każdym ruchem otrzymuje odpowiednią karę. Jeśli zagra niebieską kartę otrzymuję liczbę punktów karnych równą liczbie białych kart, które nadal ma na ręce. Jeśli zagra białą kartę, to otrzymuje liczbę punktów karnych równą dwukrotności liczby czerwonych kart, które wciąż ma na ręce. Jeśli zagra czerwoną kartę, otrzyma liczbę punków karnych równą trzykrotności liczby niebieskich kart, które wciąż ma na ręce.
Znajdź, jako funkcję C, B i N, minimalną liczbę punktów karnych, jaką gracz może zgromadzić gracz po zagraniu wszystkich kart, oraz sposób osiągnięcia tego minimum.

Zadanie 1.3. Każdemu punktowi na płaszczyźnie przyporządkowana jest liczba rzeczywista. Załóżmy, że dla dowolnego niezdegenerowanego trójkąta liczba w środku okręgu wpisanego w ten trójkąt jest średnią arytmetyczną trzech liczb w jego wierzchołkach. Udowodnij że wszystkie punkty na płaszczyźnie mają równe wartości.

2 Sekcja Główna

Zadanie 2.1. Zbiór linii na płaszczyźnie znajduje się w *położeniu ogólnym*, jeśli żadne dwie z nich nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Zestaw linii w położeniu ogólnym dzieli płaszczyznę na regiony, z których niektóre mają skończony obszar: nazywamy je *skończonymi regionami*. Udowodnij, że dla każdego wystarczająco dużego n dla n linii w pozycji ogólnej można pokolorować co najmniej $\sqrt{n}$ linii na niebiesko w taki sposób, aby żaden ze skończonych regionów nie ma w całości niebieskiego brzegu.

Zadanie 2.2. W konkursie matematycznym niektórzy uczestnicy są przyjaciółmi. Relacja przyjaźni jest symetryczna. Nazwijmy grupę uczestników kliką, jeśli każda para z nich jest przyjaciółmi. Zakładając, że rozmiar największej kliki jest liczbą parzystą, udowodnij że da się umieścić uczestników w dwóch pokojach tak, aby rozmiar największej kliki w jednym z nich był równy rozmiarowi największej kliki w drugim. w jednym pokoju jest taki sam jak największy rozmiar kliki zawartej w drugim pokoju

Zadanie 2.3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Określ najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą k która spełnia następującą własność: możliwe jest zaznaczenie k komórek na planszy $2n \times 2n$ tak, aby istniał unikatowy podział planszy na kostki domina 1×2 i 2×1, tak żeby żadna z nich nie zawierała dwóch spośród oznaczonych komórek.

3 Praca Domowa

Zadanie 3.1. Na kartce papieru narysowano n okręgów w taki sposób, że dowolne dwa okręgi przecinają się w dwóch punktach i żadne trzy okręgi nie przechodzą przez ten sam punkt. Ślimak Bob ślizga się po okręgach w następujący sposób. Początkowo porusza się po jednym z okręgów zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Turbo zawsze przesuwa się wzdłuż okręgu, na którym się znajduje, aż dotrze do przecięcia z innym okręgiem. Następnie kontynuuje swoją podróż po nowym okręgu, ale zmienia kierunku ruchu, tj. z kierunki zgodnego z ruchem wskazówek zegara na kierunek przeciwny lub odwrotnie. Załóżmy, że ścieżka Boba obejmuje wszystkie okręgi. Udowodnij, że n musi być nieparzyste.

Zadanie 3.2. Każdemu bokowi b wypukłego wielokąta P przypisz maksymalne pole trójkąta, którego bokiem jest b i mieści się w P. Pokazać, że suma pól przypisanych do boków P jest co najmniej dwa razy większa niż obszar p.

Zadanie 3.3. W pewnej klasie ludzi niektóre pary uczniów są zaciętymi wrogami. Relacja zaciętych wrogów jest symetryczna. Grupa ludzi nazywana jest nietowarzyską jeśli liczba członków w niej jest nieparzysta i wynosi co najmniej 3 oraz możliwe jest usadzenie wszystkich jej członków przy okrągłym stole, tak że każdy siedzi obok swoich zaciętych wrogów. Biorąc pod uwagę, że w tej klasie są co najwyżej 2022 grupy nietowarzyskie, udowodnij że można podzielić tą klasę na 11 grup tak, aby w żadnej z tych grup nie było pary zaciętych wrogów.

Zadanie 3.4. Udowodnij, że jeśli wielościan wypukły ma tę właściwość, że każdy wierzchołek należy do parzystej liczby krawędzi, to dowolny przekrój określony przez daną płaszczyznę, która nie przechodzi przez żaden z wierzchołków, jest wielokątem o parzystej liczbie boków

Zadanie 3.5. Czy istnieje taki zbiór punktów na płaszczyźnie, że dowolna prosta przechodzi dokładnie przez dwa punkty z tego zbioru? (*)

Zadanie 3.6. W pewnym królestwie są miasta i drogi. Między niektórymi miastami znajduje się dwukierunkowa droga i żadne drogi się nie przecinają. Każda droga jest pokolorowana jednym z $n \geqslant 7$ kolorów. Nie istnieje miasto z którego można by wyjechać i wrócić jadąc $k \geqslant 3$ różnymi drogami tego samego koloru. Udowodnij, że możemy wybrać $n - 7$ kolorów i wszystkie drogi, które są w tych kolorach przefarbować na pozostałe kolory, tak żeby ten warunek dalej zachodził. (***)

4 Podpowiedzi

- 1.1.Spróbuj dorysować coś do każdego trójkąta
  (najlepiej sześciokąt foremny)
- 1.2.Indukcja matematyczna klasycznie, trzeba rozpatrzeć kilka przypadków ale nic trudnego.
  Odpowiedź to $f(C, B, N) = min(BW, 2WR, 3RB)$.
- 1.3.Trapez równoramienny
  Pięciokąt foremny.
- 2.1.Każda z nieniebieskich linii jest bokiem
  jakiegoś skończonego regionu, którego wszystkie pozostałe boki są niebieskim.
- 2.2. Pomyślmy jak działa przenoszenie osób z jednego do drugiego pokoju.
  Dajmy na start 2r osób tworzących klikę do jednego pokoju resztę osób do drugiego.
- 2.3. Odpowiedź to $2n$ i należy zaznaczyć pola $(i, i + 1)$.
  Połączmy na niebiesko pola z tego samego domina
  a na czerwono ich odbicia symetryczne względem którejś przekątnej.