Równania funkcyjne

Łukasz Skiba

27 września 2022

1 Wstęp

Ten typ zadań zazwyczaj wymaga od nas znalezienia wszystkich funkcji spełniających dane równanie. Dla wielu zadań rozwiązania wydają się oczywiste, ale trudniej udowodnić, że są jedyne. Najważeniejszą metodą w trakcie rozwiązywania jest podstawianie pod zmienne szczególnych przypadków. To dzięki nim otrzymujemy nowe własności, które prowadzą do rozwiązania.

Standardowymi podstawieniami są oczywiście:

- $x = 0$, $x = 1$,
- $x := kx$, $x := -x$, $x := f(x)$, $x := \frac{1}{x}$,
- $y := x$, $y := -x$, $y := f(x)$.

1. Znajdź wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$f(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{x}{x + 1}$$

$$f(x)^2 \cdot f\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) = x$$

$$f(x + y) = f(f(x)) + y$$

$$f(x + y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$

Jeżeli uda nam się dostać rozwiązanie to się cieszymy. Trzeba pamiętać, aby na końcu **SPRAWDZIĆ CZY DANE ROZWIĄZANIE DZIAŁA**. Bez tego to nie jest w pełni skończone zadanie. Jeżeli się nie uda to przechodzimy do trików.

2 Teoria

2.1 Bijekcja

Def. 1 *Funkcja f jest iniekcją, jeżeli zachodzi impikacja: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.*

Def. 2 *Funkcja $f : A \to B$ jest surjekcją, jeżeli $\forall_{x \in B} \exists_{u \in A}\ f(u) = x$. W szególności, jeśli $f(x) = g(y)$ i f jest surjekcją to również g jest surjekcją.*

Def. 3 *Funkcja f jest bijekcją, jeśli jest zarówno iniekcją i surjekcją.*

Ćwiczenie 1 *Udowodnij, że funkcja f spełniająca równanie $f(f(x)) = x$ jest bijekcją.*

1. Znajdź wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$f(yf(x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y)$$

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2$$

2.2 Triki Chena

- Kiedy mamy doczynienia z dużym syfem, starajmy się wykonać podstawienie, które pozwoli nam zredukować jakieś wyrazy. Przykładowo dla
$$f\left(\frac{e^{x^2}+x^2-cosx}{sinx^2}+2y\right)=f\left(2^{-17\lfloor x\rfloor+nwd(4444,\lceil x^2\rceil)}+y\right)+1$$
możemy wykonać odpowiednie podstawienie pod y, otrzymując $0=1$.

- Jeżeli gdzieś w równaniu pojawi nam się wyrażenie $...f(f(x))...$ to warto wykonać podstawienie $x:=f(x)$.

- Warto poszukiwać pewnego rodzaju symetryczności. Przykładowo gdy mamy $f(x)=x+y$ to również zamieniając zmienne dostajemy $x+y=f(y)$ więc f musiałaby być stała, co prowadzi do sprzeczności.

- Trzeba zawsze uważać na dziedzinę! Jeżeli mamy funkcję $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ nie możemy, podstawiając, otrzymać $f(0)=c$.

- Dla funkcji w wartościach całkowitych warto pomyśleć o indukcji.

- Równanie $f(x)^2=x^2$ wcale nie oznacza, że $f(x)=x$ lub $f(x)=-x$, tylko dla niektórych argumentów może być taka, a dla drugich taka.

3 Zadania

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające
$$f(x)f(y)-xy=f(x)+f(y)-1$$

2. (69/II/1) Wyznaczyć wszystkie funkcje f okreslone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, które spełniają oba warunki:
   - $f(x)+f(y)\leq xy$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x,y,
   - dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y, że $f(x)+f(y)=xy$.

3. (63/I/8) Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające
$$f(x+f(x+y))=f(x-y)+f(x)^2$$

4. (63/II/4) Wyznaczyć wszystkie takie pary funkcji $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że
$$g(f(x)-y)=f(g(y))+x$$

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające
$$f(x^2-y^2)=xf(x)-yf(y)$$

6. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$, że dla dowolnych $a,b\in\mathbb{Z}_+$ liczba $a^2+f(a)f(b)$ jest podzielna przez liczbę $f(a)+b$.

7. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające
$$xf(x)+y^2+f(xy)=f(x+y)^2-f(x)f(y)$$

8. (EGMO 2012/6) Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające
$$f(y^2+2xf(y)+f(x)^2)=(y+f(x))(x+f(y))$$