Autor: Miron Hunia

Prowadzący: Stefan Świerczewski

Potęga punktu

Teoria

Poniższe twierdzenie jest łatwym wnioskiem z podobieństwa trójkątów, a jednocześnie jest jednym z najważniejszych twierdzeń olimpijskiej geometrii.

Twierdzenie 1. Niech proste k i ℓ przecinają się w punkcie P. Na k wybieramy punkty A, B, a na ℓ punkty C, D. Wówczas czworokąt $ABCD$ jest cykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Dowód. Podobieństwo trójkątów PAC i PDB. $\square$

Uwaga. $PA \cdot PB$ oznacza iloczyn skalarny, czyli jeśli A i B leżą po przeciwnych stronach punktu P, to iloczyn ma wartość ujemną.

Uwaga. Jeśli $C = D$, to twierdzenie jest nadal prawdziwe jeśli cykliczność $ABCD$ zastąpimy przez styczność ℓ do okręgu opisanego na ABC.

Wniosek. Iloczyn $PA \cdot PB$ jest taki sam, nieważne jak prosta k jest narysowana.

W szczególnym przypadku gdy narysujemy prostą przez środek okręgu to dostajemy $PA \cdot PB = (OP - r) \cdot (OP + r) = |OP|^2 - r^2$. Nazwijmy ten niezmiennik.

Definicja 1 (Potęga punktu)**.** Niech ω jest okręgiem o środku w O o promieniu r. P to dowolny punkt na płaszczyźnie. Wtedy definiujemy *potęgę punktu P względem okręgu ω* jako $\Pi(P, \omega) = |OP|^2 - r^2$

Wniosek. Potęga punktu poza okręgiem jest dodatnia, wewnątrz okręgu jest ujemna, a na okręgu jest zerowa.

Wniosek. $|OA| = |OB|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Pi(A, \omega) = \Pi(B, \omega)$, gdzie ω to dowolny okrąg o środku w O. Możemy zatem używać potęgi punktu do dowodzenia, że dwa odcinki są równe.

Twierdzenie 2 (Oś potęgowa)**.** Dane są okręgi ω_1, ω_2. Zbiór punktów X spełniających równanie $\Pi(X, \omega_1) = \Pi(X, \omega_2)$ jest prostą prostopadłą do linii łączącej środki ω_1 i ω_2. Ta prosta jest nazywana osią potęgową okręgów ω_1 and ω_2.

Dowód. Niech środki ω_1, ω_2 to odpowiednio O_1, O_2, a ich promienie to odpowiednio r_1 i r_2. Z ciągłości istnieje na prostej O_1O_2 punkt X taki, że $\Pi(X, \omega_1) = \Pi(X, \omega_2)$. Wówczas jeśli $XY \perp O_1O_2$, to z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$\Pi(Y, \omega_1) = |YO_1|^2 - r_1^2 = |XO_1|^2 + |XY|^2 - r_1^2 = \Pi(X, \omega_1) + |XY|^2 = \Pi(X, \omega_2) + |XY|^2 = \cdots = \Pi(Y, \omega_2)$$

$\square$

Przydatne. Jeśli okręgi przecinają się w punktach A, B, to ich oś potęgowa to prosta AB.

Twierdzenie 3 (Środek potęgowy)**.** Dane są okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. ℓ_{12} jest osią potęgową ω_1 i ω_2, ℓ_{13} jest osią potęgową ω_1 i ω_3, ℓ_{23} jest osią potęgową ω_2 i ω_3. Wówczas te trzy proste są wszystkie równoległe lub przeciają się w jednym punkcie, nazywanym środkiem potęgowym trójki okręgów.

Dowód. Niech K to przecięcie ℓ_{13} i ℓ_{23}. Wtedy $\Pi(K, \omega_1) = \Pi(K, \omega_3) = \Pi(K, \omega_2)$, czyli $K \in \ell_{12}$. $\square$

Autor: Miron Hunia
Prowadzący: Stefan Świerczewski

Zastosowania

Kiedy należy próbować stosować potęgę punktu? Zawsze. Poniżej zaledwie kilka konkretnych zastosowań.

Zależności między odcinkami

Zastosowanie. Wykazać jakąś zależność między odcinkami.
Metoda. Wypisujemy wszystkie równania wynikające z potęgi punktu i coś z nich wnioskujemy.

Równość odcinków

Zastosowanie. Pokazać, że $|PA| = |PB|$.
Metoda. Sprawdzamy, że $\Pi(A, \omega) = \Pi(B, \omega)$ względem dowolnego okręgu ω o środku w P.

Cykliczność czworokąta

Twierdzenie 1 co prawda zazwyczaj wykorzystujemy jako warunek konieczny cykliczności, ale implikacja w twierdzeniu działa w obie strony, co daje następujące zastosowanie.
Zastosowanie. Pokazać, że punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.
Metoda. Stosujemy Twierdzenie 1 jako wygodny warunek dostateczny na cykliczność czworokąta.

Styczność do okręgu

Jeśli w twierdzeniu 1 bierzemy $C = D$ to dostajemy wygodny warunek konieczny i wystarczający na styczność do okręgu.
Zastosowanie. Pokazać, że prosta PC jest styczna do okręgu ω, gdzie $C \in \omega$.
Metoda. Sprawdzamy, że $\Pi(P, \omega) = PC^2$.
Zastosowanie. Wywnioskować coś, mając dane, że PC jest styczne do ω
Metoda. Zapisujemy $\Pi(P, \omega) = PC^2$ i patrzymy co z tego wynika.

Współliniowość

Z użyciem osi potęgowych możemy dowodzić współliniowości.
Zastosowanie. Pokazać, że A, B, C są współliniowe.
Metoda. Wprowadzamy okręgi ω i Ω i sprawdzamy równości
$\Pi(A, \omega) = \Pi(A, \Omega)$
$\Pi(B, \omega) = \Pi(B, \Omega)$
$\Pi(C, \omega) = \Pi(C, \Omega)$
Zazwyczaj stosujemy tą metodę, gdy dwie spośród tych równości są oczywiste, np. gdy A, B to punkty przecięcia ω i Ω.

Współpękowość

Zastosowanie. Pokazać, że k, ℓ, m są współpękowe.
Metoda. Znaleźć trzy okręgi takie, że te proste to ich osie potęgowe.

Autor: Miron Hunia

Prowadzący: Stefan Świerczewski

Zadania

1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt E jest środkiem cięciwy AC oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED$. Wykazać, że $BE \cdot DE = |AE|^2$.

2. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o średnicy AB przecina wysokość z wierzchołka C w punktach M i N. Okrąg o średnicy AC przecina wysokość z wierzchołka B w punktach P i Q. Pokaż, że $MNPQ$ jest cykliczny.

3. Dany jest trójkąt ABC. Niech P i Q to punkty odpowiednio na bokach AB i AC takie, że $AP = AQ$. Niech S i R to różne punkty na boku BC takie, że S leży pomiędzy B i R, $\sphericalangle BPS = \sphericalangle PRS$, i $\sphericalangle CQR = \sphericalangle QSR$. Wykaż, że P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.

4. Dany jest wypukły sześciokąt $ABCDEF$ taki, że $BC = CD, DE = EF, FA = AB$. Wykaż, że wysokości w trójkątach ABC, CDE, EFA opuszczone odpowiednio z wierzchołków B, D, F przecinają się w jednym punkcie.

5. (USAMO 2009) Niech ω_1 i ω_2 to okręgi o środkach O_1 i O_2. Przecinają się w punktach X i Y. Prosta przechodząca przez O_1 przecina ω_2 w punktach M i N. Prosta przez O_2 przecina ω_1 w punktach P i Q. Punkty M, N, P, Q leżą na okręgu ω_3 o środku O_3. Pokaż, że O_3 leży na prostej XY.

6. (okrąg dziewięciu punktów) W trójkącie ABC oznaczamy jego ortocentrum przez H. Niech H_A, H_B, H_C to spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C. Niech D, E, F to odpowiednio środki boków BC, AC, AB. Niech to odpowiednio P, Q, R środki odcinków HA, HB, HC. Wykaż, że $H_A, H_B, H_C, D, E, F, P, Q, R$ wszystkie leżą na jednym okręgu.

7. (1995 IMO) Cztery parami różne punkty A, B, C, D leżą na jednej prostej w tej kolejności. Okręgu o średnicach AC i BD przecinają się w punktach X i Y. Prosta XY przecina BC w punkcie Z. Niech P to punkt na prostej XY różny od Z. Prosta CP przecina okrąg o średnicy AC w punktach C i M, a prosta BP przecina okrąg o średnicy BD w punktach B i N. Udowodnij, że proste AM, DN, XY są współpękowe.

8. Na trójkącie ABC opisany jest okrag ω. D, E, F to spodki odpowiednio z wierzchołków A, B, C. γ to odbicie symetryczne ω względem prostej AB. Półprosta FE przecina ω w punkcie P.Odcinek FD przecina γ w Q. Wykaż, że P, Q, B są współliniowe.

9. (IMO 2000) Dwa okręgi T_1, T_2 przecinają się w dwóch punktach M, N. Niech l będzie wspólną styczną do tych dwóch okręgów taką, że M jest bliżej do l niż N. Punkty styczności tej prostej do okręgów T_1 oraz T_2 to odpowiednio A i B. Prosta równoległa do l przechodząca przez M przecina okręgi T_1, T_2 ponownie odpowiednio w C i D. Proste CA i BD przecinają się w punkcie E. $BN \cap CD = P$, $AN \cap CD = Q$. Udowodnij, że $EP = EQ$.

10. Dany jest różnoboczny trójkąt ABC, niech punkty D, E, F będą spodkami wysokości opuszczonych z odpowiednio A,B,C. Punkty K,M,N odpowiednio przecięcia prostych AB i DE, BC i EF, AC i DF. Udowodnij, że punkty K, M, N są współliniowe.

11. (Twierdzenie Brianchona) Niech $ABCDEF$ to sześciokąt wpisany w okrąg. Wykaż, że przekątne AD, BE i CF są współpękowe.

12. (IMO 2009) Środek okręgu opisanego na ABC jest w punkcie O. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach AC i AB. K, L, M to środki odpowiednio odcinków BP, CQ, PQ. Niech Γ to okrąg opisany na punktach KLM. Udowodnij, że jeśli Γ jest styczna do PQ, to $OP = OQ$.