Stereometria

Tymoteusz Kucharek

27 września 2023

1 Teoria

1. **Najmocniejsze twierdzenie stereometrii** Rozważmy sferę ω i prostą AB zeń rozłączną. Niech X, Y będą takimi punktami ze sfery ω, że płaszczyzny ABX i ABY są doń styczne. Wówczas trójkąty ABX i ABY są przystające.

2. **Wzór Eulera** W dowolnym wielościanie wypukłym zachodzi równość $w + s = k + 2$

3. **Siatka** Każdy czworościan można rozłożyć na siatkę.

4. **Nierówność czworościanu** Miary kątów płaskich przy wierzchołku czworościanu spełniają $\alpha+\beta > \gamma$.

5. **Prosta prostopadła do płaszczyzny** Prosta k jest prostopadła do wszystkich prostych z płaczczyzny P wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do pewnych dwóch nierównoległych prostych z P.

6. **Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych** Prosta l jest rzutem prostopadłym prostej k na płaszczyznę A, a prosta $m \in A$. $m \perp l \iff m \perp k$.

7. **Twierdzenie sinusów dla kąta trójściennego** Jeśli prosta l tworzy kąty α, β, γ z trzema parami prostopadłymi prostymi, to wtedy $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

2 Zadania

1. Rozstrzygnij czy w czworościanie wysokości muszą się przecinać.

2. Udowodnij, że jeśli przekrój czworościanu foremnego o krawędzi 1 jest czworokątem, to jego obwód wynosi co najmniej 2.

3. Rozstrzygnij czy istnieje czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami prostokątnymi.

4. Udowodnij, że przekrój sześcianu może być sześciokątem foremnym.

5. Udowodnij, że jeśli suma kątów płaskich przy wierzchołku S ostrosłupa $SA_1A_2 \dots A_n$ $(n \geq 3)$ jest większa od $180°$, to krawędź boczna tego ostrosłupa jest krótsza od połowy obwodu jego podstawy.

6. Udowodnij, że środki okręgów opisanych na ścianach czworościanu nie są współliniowe.

7. Dany jest czworościaqn $ABCD$, w którym $AB = CD$ oraz $\angle BAD + \angle BCD = 180°$. Udowodnij, że $\angle BAD > \angle ADC$.

8. Udowodnij, że jeśli punkt przecięcia wysokości czworościanu jest środkiem sfery wpisanej, to czworościan ten jest foremny.

9. Rozstrzygnij czy istnieje na płaszczyźnie niepusty zbiór okręgów o rozłącznych wnętrzach takich, że każdy jest styczny do dokładnie pięciu pozostałych.

10. Udowodnij, że jeśli w czworościanie $ABCD$ wysokości opuszczone z A i B się przecinają, to wysokości opuszczone z C i D się przecinają.

3 Trzeci problem Hilberta

Czy mając dwa wielościany równej objętości można zawsze jeden tak pociąć na kawałki i je poskładać tak, aby otrzymać drugi wielościan?

Twierdzenie 1 (Birkenmajer, Dehn) *Odpowiedź na trzeci problem Hilberta jest negatywna.*

Def. 1 (Niezmiennik Dehna) *Niech* $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ *będzie dowolną funkcją, taką że* $f(\pi) = 0$ *i* $f(x) + f(y) = f(x + y)$. *Dla dowolnego wielościanu* $\mathscr{W}$ *wartość:*

$$\sum_{v \in \mathscr{W}} |v| \cdot f(\alpha(v)) \tag{1}$$

nazywamy niezmiennikiem Dehna, gdzie $\alpha(v)$ *oznacza kąt dwuścienny przy krawędzi* v.

Twierdzenie 2 (Dehn) *Jeśli jeden wielościan można przekształcić w drugi, rozcinając i sklejając, to muszą one mieć równe niezmienniki Dehna, dla dowolnego* f. *Można wybrać takie* f, *że niezmiennik Dehna czworościanu formenego jest różny od niezmiennika sześcianu.*

Twierdzenie 3 (Sydler) *Dwa wielościany można przekształcić w siebie, wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą objętość i te same niezmienniki Dehna dla każdego* f.