# Nierówność Jensena

Miron Hunia

23.09.2022

## 1 Wypukłość i wklęsłość

Funkcja $f$ jest **wypukła na przedziale** $P$, jeśli:

1. Dla dowolnych punktów $A, B$ na wykresie funkcji $f$ których współrzędne $x$ zawierają się w przedziale $P$, odcinek $AB$ jest powyżej bądź styczny do wykresu funkcji. Jeśli odcinek $AB$ nigdy nie jest styczny do wykresu w ani jednym punkcie, to $f$ nazywamy **ściśle wypukłą**.

2. Wykres $f$ na przedziale $P$ przypomina kształtem literę $U$. Działa jako uzasadnienie tylko w przypadku bardzo prostych i znanych funkcji.

3. Dla dowolnego $0 < t < 1$ i $a \neq b \in P$:
$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$
Jeśli zachodzi nierówność ostra, to $f$ jest ściśle wypukła.

4. $f$ jest ciągła i dla dowolnych $a \neq b \in P$:
$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
Jeśli zachodzi nierówność ostra, to $f$ jest ściśle wypukła.

5. * Dla dowolnego $x \in P : f'(x)$ jest niemalejące.

6. * Dla dowolnego $x \in P : f''(x) \geq 0$. Jeśli zachodzi nierówność ostra, to $f$ jest ściśle wypukła.

**Nie przejmuj się jak nie wiesz co to znaczy.*
Jeśli $-f$ jest wypukła to mówimy, że $f$ jest **wklęsła**.

Niektóre operacje pozwalają otrzymywać funkcje wypukłe z innych funkcji wypukłych. Jedną z metod dowodu, że funkcja jest wypukła jest pokazanie, że można ją otrzymać z prostszych funkcji wypukłych przy użyciu tych operacji. Funkcje zadane poniższymi wzorami są wypukłe na $P$.

1. $f(x) = \omega_1 g_1(x) + \omega_2 g_2(x) + \cdots + \omega_n g_n(x)$, gdzie $\omega_1, \ldots, \omega_n > 0$ i $g_1, \ldots, g_n$ są wypukłe na $P$. Jeśli przynajmniej jedna z funkcji $g$ jest ściśle wypukła, to $f$ jest ściśle wypukła.

2. $f(x) = h(g(x))$, gdzie $g : P \mapsto L$ - **wypukłe** na $P$ i $h-$ **niemalejące** i wypukłe na $L$. Jeśli $g$ jest ściśle wypukła i $h$ jest rosnąca, to $f$ jest ściśle wypukła.

3. $f(x) = h(g(x))$, gdzie $g : P \mapsto L$ - **wklęsłe** na $P$ i $h-$ **nierosnące** i wypukłe na $L$.

4. $f(x) = g(x)h(x)$, gdzie $g, h-$ wypukłe, nieujemne i mają tą samą monotoniczność na $P$.

5. $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, gdzie $g-$ **wklęsłe** i nieujemne na $P$.

6. $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, gdzie $h-$ nieujemne, wypukłe, **nierosnące** na $P$ i $g-$ nieujemne, wklęsłe, **niemalejące** na $P$.

7. $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, gdzie $h-$ nieujemne, wypukłe, **niemalejące** i $g-$ nieujemne, wklęsłe, **nierosnące**.

Poniższe popularne funkcje są wypukłe.

- $x^n, n > 1$ na liczbach dodatnich. Jeśli $n$ jest parzyste, to jest wypukła dla wszystkich liczb rzeczywistych.
- $a^x, a > 1$
- $-log_a x, a > 1$
- $\frac{1}{x}$ na liczbach dodatnich
- $-\sqrt[a]{x}$ na liczbach dodatnich, $a > 1$.
- $\sqrt{x^2 + a}$ na całej swojej dziedzinie, $a \geq 0$ (dla $a \leq 0$ jest wklęsła).
- $-sin(x)$ na przedziale $[0, \pi]$.
- $tan(x)$ na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$.
- $xlog_a x$ na liczbach dodatnych, $a > 1$.

## 2 Nierówność Jensena

**Twierdzenie 1 (Jensen)** *Funkcja $f$ wypukła na przedziale $P$ spełnia dla dowolnych argumentów $x_1, \dots, x_n \in P$ i dla dowolnie dobranych dodatnich liczb rzeczywistych $\omega_1, \dots, \omega_n$ (zwanych wagami) następującą nierówność:*

$$f(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_n\omega_n}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}) \leq \frac{\omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \dots + \omega_n f(x_n)}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}$$

Istnieje równoważne sformułowanie nierówności Jensena, które często łatwiej zauważyć w zadaniach.

**Twierdzenie 2 (Jensen, sformułowanie alternatywne)** *Funkcja $f$ wypukła na przedziale $P$ spełnia dla dowolnych argumentów $x_1, \dots, x_n \in P$ i dla dowolnie dobranych dodatnich liczb rzeczywistych $\omega_1, \dots, \omega_n$ (zwanych wagami) spełniających $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1$ następującą nierówność:*

$$f(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_n\omega_n) \leq \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \dots + \omega_n f(x_n)$$

W obu wersjach równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ lub gdy $f(x)$ jest funkcją liniową na przedziale zawierającym $x_1, \dots, x_n$. Jeżeli $f$ jest ściśle wypukła to równość może zajść tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
Dla funkcji wklęsłych nierówność Jensena zachodzi w drugą stronę.

- Przykład. Udowodnij dla wszystkich liczb naturalnych $n$ nierówność

  $$\sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 1} + \dots + \sqrt{n^2 + 1} \geq \frac{n}{2}\sqrt{n^2 + 2n + 5}$$

  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ jest formy $\sqrt{x^2 + a}$, a zatem jest wypukła na liczbach dodatnich. Dobieramy $x_i = i$ oraz $\omega_i = \frac{1}{n}$. Na mocy nierówności Jensena:

  $$\sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 1} + \dots + \sqrt{n^2 + 1} \geq \sqrt{(\frac{1 + \dots + n}{n})^2 + 1}$$

  $$\sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 1} + \dots + \sqrt{n^2 + 1} \geq \sqrt{(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n})^2 + 1} = \sqrt{(\frac{n+1}{2})^2 + 1} = \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 5}{4}}$$

## 3 Zadania

Jeżeli masz problem z zastosowaniem nierówności Jensena, spójrz na sugestie z drugiej strony z tym jakiej funkcji $f(x)$ zastosować w danym zadaniu.

1. Liczby $x_i, y_i$ są dodatnie i $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$. Wykaż, że
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i + y_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2}$$

2. (Nierówność Nesbitta) Dla dodatnich $a, b, c$ wykaż, że
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

3. Wykaż, że w trójkącie $ABC$ o kątach $\alpha, \beta, \gamma$ zachodzi nierówność $sin(\alpha) + sin(\beta) + sin(\gamma) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. (Nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną) Dla dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wykaż, że
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

5. (Nierówność między średnimi potęgowymi) Dla dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ i $k > l > 0$ wykaż, że
$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + \cdots + a_n^k}{n}} \geq \sqrt[l]{\frac{a_1^l + \cdots + a_n^l}{n}}$$

6. Dla dodatnich $a, b, c$ takich, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$ znajdź maksymalną wartość
$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+b+a)^2}$$

7. Dla dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ wykaż, że
$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^{x_1 + \cdots + x_n} \leq x_1^{x_1} \ldots x_n^{x_n}$$

8. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a, b, c$. Wykaż, że
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

9. $n$ jest liczbą naturalną i $a, b, c$ to parami różne dodatnie liczby rzeczywiste spełniające $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Wykaż, że
$$\frac{a^n - b^n}{a^{n+1} - b^{n+1}} + \frac{b^n - c^n}{b^{n+1} - c^{n+1}} + \frac{c^n - a^n}{c^{n+1} - a^{n+1}} < \frac{n}{n+1}$$

10. Dane są liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie mniejsze niż 1. Udowodnij, że
$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+r_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} + 1}$$

# 4 SPOJLERY DO ZADAŃ

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$
2. $f(x) = \frac{1}{a+b+c-x}$ lub $f(x) = \frac{x}{a+b+c-x}$
3. $f(x) = sin(x)$
4. $f(x) = log(x)$
5. $f(x) = x^{\frac{k}{l}}$
6. $f(x) = \left(\frac{1}{a+b+c+x}\right)^2$
7. $f(x) = xlogx$
8. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ lub $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^3+abc}}$
9. $f(x) = \frac{x-1}{x^n-1}$
10. $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

# 5 Dla kozaków

## 5.1 Inne nierówności na funkcjach wypukłych

**Twierdzenie 3 (Popoviciu)** *$f$ jest funkcją wypukłą na przedziale $P$. Wówczas dla dowolnych $x, y, z \in P$ zachodzi*

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq \frac{2}{3}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right)\right)$$

Mówimy, że ciąg nierosnący $(x)$ majoryzuje ciąg nierosnący $(y)$, gdy dla $k = 1, \dots, n$ zachodzą warunki $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i$ oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$ Relację tą zapisujemy $x \succ y$

**Twierdzenie 4 (Karamata)** *Dla wypukłej na przedziale $P$ funkcji $f$ i nierosnących ciągów $x_1 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq \dots y_n \in P$ takich, że $x \succ y$ zachodzi*

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n)$$

## 5.2 Przepychanie Jensena dla funkcji niewypukłych

Powiedzmy, że mamy funkcję $f$, która nie jest wypukła, ale jest temu bliska. Wówczas możemy oszacować $f(x)$ od dołu przez funkcję wypukłą $g(x)$ i napisać (dla $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \omega_k g(x_k) \geq g\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k\right)$$

Dobrym wyborem na funkcję $g$ jest funkcja liniowa, gdyż wówczas druga nierówność przechodzi w równość. Chcemy, aby $g$ było możliwie jak najbliższe $f$ (na przykład było styczne w możliwie wielu punktach), aby oszacowanie było możliwie jak najlepsze. Ponadto chcemy dobrać funkcję $g$ i wagi $(\omega)$ tak, aby równość zachodziła w tych samych warunkach.

## 5.3 Zadanka z technik dla kozaków

1. Niech $n \geq 3$ jest liczbą całkowitą i $x_1, \dots, x_n$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x_1 + \dots + x_n = 2$. Znajdź minimum wyrażenia
$$\frac{x_1}{x_2^2+1} + \frac{x_2}{x_3^2+1} + \dots + \frac{x_n}{x_1^2+1}$$

2. Znajdź minimalną wartość wyrażenia
$$\frac{x_1}{x_2^3+4} + \frac{x_2}{x_3^3+4} + \frac{x_3}{x_4^3+4} + \frac{x_4}{x_1^3+4}$$

3. Dla $x_1, \dots, x_n \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ udowodnij, że
$$cos(2x_1 - x_2) + cos(2x_2 - x_3) + \dots + cos(2x_n - x_1) \leq cosx_1 + \dots + cosx_n$$

4. Dla dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n$ udowodnij nierówność
$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)$$