Podstawowe nierówności

26 września 2023

1 Podstawowe własności nierówności

- dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi $x^2 \geq 0$
- jeśli $L \geq P$ oraz $a > 0$ to $aL \geq aP$
- jeśli $L \geq P \geq 0$ oraz $n > 0$ to $L^n \geq P^n$
- jeśli $L \geq P$ to $-L \leq -P$
- jeśli $L_1 \geq P_1$ oraz $L_2 \geq P_2$ to $L_1 + L_2 \geq P_1 + P_2$
- jeśli $L_1 \geq P_1 \geq 0$ oraz $L_2 \geq P_2 \geq 0$ to $L_1 L_2 \geq P_1 P_2$

2 Nierówności między średnimi

Dla danych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$:

- średnią arytmetyczną nazywamy wartość $AM = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$
- średnią geometryczną nazywamy wartość $GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$
- średnią harmoniczną nazywamy wartość $HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$
- średnią kwadratową naywamy wartość $QM = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$

Wówczas zachodzi nierówność $QM \geq AM \geq GM \geq HM$ oraz równość w którymkolwiek miejscu zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Ćwiczenie 1. *Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x zachodzi*

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

Ćwiczenie 2. *Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b i c zachodzi nierówność*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$$

3 Nierówność Cauchyego-Schwarza

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ zachodzi nierówność

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

Ćwiczenie 3. *(nierówność Cauchyego-Schwarza w formie Engela) Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ zachodzi nierówność*

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}$$

4 Twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych

Liczby $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ oraz $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ są rzeczywiste. Niech $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ będzie permutacją liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Wówczas zachodzi nierówność

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b'_1 + a_2b'_2 + \cdots + a_nb'_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

Ćwiczenie 4. *Rozważmy ciągi $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ oraz $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ oraz ciąg $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, będący permutacją ciągu $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Udowodnij, że*

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2$$

5 Zadania

Zadanie 1. *Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Zadanie 2. *Dane są liczby dodatnie a, b, c. Udowodnij, że zachodzi nierówność*

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geq 1$$

Zadanie 3. *Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność*

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$$

Zadanie 4. *Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że $a_1a_2 \ldots a_n = 1$. Wykazać, że*

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \geq 2^n$$

Zadanie 5. *Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, że $abc = 1$. Wykazać, że*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$$

Zadanie 6. *Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d przy czym $a, c > 1$ i $b, d < 1$. Udowodnić, że*

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > 1$$

Zadanie 7. *Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność*

$$\frac{3+a^4+b^3+c^2}{1+2a^3+3b^2+6c} + \frac{3+b^4+c^3+a^2}{1+2b^3+3c^2+6a} + \frac{3+c^4+a^3+b^2}{1+2c^3+3a^2+6b} \geq \frac{3}{2}$$

Zadanie 8. *Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, dla kttórych $abc = 1$. Udowodnić, że*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Zadanie 9. *Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami, dla których $abc = 1$. Udowodnij, że*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$