Rozwiązania Kontestu 5 – mini PreOM 2025

Zadanie 1. Dane są ciągi $(a_k)_{k=1}^n$, $(b_k)_{k=1}^n$ liczb całkowitych spełniajace:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant n \text{ oraz } 1 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant n.$$

Udowodnij, że istnieją takie niepuste zbiory indeksów $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, że:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j.$$

Źródło: Uogólnienie zadania 5/II/XIX OMJ – Łukasz Bożyk

Rozwiązanie 1. Niech $(A_k)_{k=1}^n$ oraz $(B_k)_{k=1}^n$ będą ciągami sum prefiksowych ciągów (a_k) oraz (b_k), tzn. dla każdego $k \in [n]$ definiujemy

$$A_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \quad B_k := b_1 + b_2 + \cdots + b_k.$$

Z uwagi na symetrię możemy bez straty ogólności założyć, że $A_n \geqslant B_n$, czyli że suma wszystkich wyrazów ciągu (a_k) jest większa od sumy wszystkich wyrazów ciągu (b_k).

Dla każdego $k \in [n]$ zachodzą nierówności $A_n \geqslant B_n \geqslant B_k$, więc zbiór $S_k := \{i \in [n] : A_i \geqslant B_k\}$ jest niepusty. Definiujemy funkcję $f : [n] \to [n]$ następująco:

$$f(k) = \min S_k \quad \text{dla każdego } k \in [n].$$

Rozważmy ciąg $(c_k)_{k=1}^n$ zdefiniowany następująco:

$$c_k = A_{f(k)} - B_k \quad \text{dla każdego } k \in [n].$$

Wprost z definicji funkcji f wynika, że wszystkie wyrazy ciągu (c_k) są nieujemne. Gdyby $c_k \geqslant n$ dla pewnego $k \in [n]$, to $A_{f(k)} - n \geqslant B_k$, skąd w szczególności $f(k) \geqslant 2$ oraz

$$A_{f(k)-1} = A_{f(k)} - a_{f(k)} \geqslant A_{f(k)} - n \geqslant B_k,$$

co jest sprzeczne z minimalnością $f(k)$. Sprzeczność dowodzi, że wszystkie wyrazy ciągu (c_k) są mniejsze od n.

Jeżeli istnieje $k \in [n]$ o tej własności, że $c_k = 0$, to

$$A_{f(k)} = B_k, \quad \text{czyli} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{f(k)} = b_1 + b_2 + \cdots + b_k.$$

W tym wypadku wystarczy więc przyjąć $I = [1, f(k)] \cap \mathbb{N}$ oraz $J = [1, k] \cap \mathbb{N}$.

W przeciwnym przypadku wyrazy ciągu (c_k) mogą przyjmować co najwyżej $n - 1$ różnych wartości (od 1 do $n - 1$) — istnieją więc takie liczby $k, \ell \in [n]$, że $k < \ell$ oraz $c_k = c_\ell$, czyli

$$A_{f(k)} - B_k = A_{f(\ell)} - B_\ell,$$

skąd

$$b_{k+1} + b_{k+2} + \cdots + b_\ell = a_{f(k)+1} + a_{f(k)+2} + \cdots + a_{f(\ell)}.$$

(skoro $B_\ell > B_k$, to $A_{f(\ell)} > A_{f(k)}$ i w konsekwencji $f(\ell) > f(k)$). Tym razem wystarczy przyjąć

$$I = (f(k), f(\ell)] \cap \mathbb{N}, \quad J = (k, \ell] \cap \mathbb{N}.$$

Komentarz

Jak widać, jeśli (a_k) oraz (b_k) są posortowane, to zawsze można znaleźć nawet spójne podciągi o równych sumach. Zadanie można uogólnić jeszcze bardziej — na ciągi o różnych długościach. Powyższe rozumowanie jest zaczerpnięte *stąd*, a inne rozwiązania równoważnych zadań można znaleźć w wolnym dostępie np. *tutaj* oraz *tutaj*.

Źródło: Uogólnienie zadania 5/II/XIX OMJ – Łukasz Bożyk

Zadanie 2. Niech $F(k)$ będzie iloczynem wszystkich dodatnich dzielników liczby całkowitej dodatniej k. Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie m, n, dla których $F(m) = F(n)$.

Źródło: LVIII OM, zadanie 9 link

Rozwiązanie 2. Odpowiedź: Takie liczby m i n nie istnieją.

Niech $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ będą wszystkimi dodatnimi dzielnikami ustalonej liczby całkowitej dodatniej n. Wówczas $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_k}$ także są wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n, zatem możemy napisać:

$$F(n) = d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_k = \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{d_k}.$$

Stąd wynika, że:

$$F(n) = \sqrt{d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_k \cdot \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{d_k}} = \sqrt{n^k} = n^{k/2} = n^{d(n)/2},$$

gdzie $d(n)$ oznacza liczbę wszystkich dodatnich dzielników liczby n.

Przypuśćmy teraz, że dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n zachodzi: $F(m) = F(n)$. Wtedy $m^{d(m)/2} = n^{d(n)/2}$, a więc uzyskujemy zależność $m^{d(m)} = n^{d(n)}$. Zatem (patrz: Uwaga) liczby m, n są potęgami tej samej liczby całkowitej dodatniej: $m = w^c$ i $n = w^b$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich w, b, c.

Załóżmy, że $c < b$. Wtedy m jest potęgą tej samej liczby całkowitej dodatniej co n, ale o mniejszym wykładniku. Stąd wynika, że $m < n$ oraz — ponieważ każdy dzielnik liczby m jest także dzielnikiem liczby n — zachodzi $d(m) \leqslant d(n)$. Wobec tego $m^{d(m)} < n^{d(n)}$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Podobna sprzeczność powstaje przy założeniu $c > b$. Musi więc być $c = b$, skąd otrzymujemy $m = w^c = w^b = n$.

Uwaga

W powyższym rozwiązaniu skorzystaliśmy z następującego faktu: jeżeli liczby całkowite dodatnie k, l, r, s spełniają równość $k^r = l^s$, to k i l są potęgami tej samej liczby całkowitej dodatniej.

Aby to udowodnić, weźmy $a = \mathrm{NWD}(r, s)$ i niech $r = ab$, $s = ac$; liczby całkowite dodatnie b i c są względnie pierwsze. Ponadto z równości $k^r = l^s$ otrzymujemy $k^b = l^c$. Stąd wynika, że jeżeli p jest dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby k oraz t jest taką liczbą całkowitą dodatnią, że k dzieli się przez p^t i nie dzieli się przez p^{t+1}, to liczba k^b dzieli się przez p^{bt} i nie dzieli się przez p^{bt+1}.

Jednakże k^b jest jednocześnie c-tą potęgą liczby całkowitej l, zatem c musi być dzielnikiem iloczynu bt. Skoro zaś b i c są względnie pierwsze, liczba c musi być dzielnikiem liczby t. Tak więc każdy dzielnik pierwszy liczby k wchodzi do jej rozkładu na czynniki pierwsze z wykładnikiem podzielnym przez c, przeto k jest c-tą potęgą liczby całkowitej. Wobec tego z równości $k^b = l^c$ wynika, że $l = (\sqrt[c]{k})^b$, czyli k i l są potęgami liczby całkowitej $\sqrt[c]{k}$.

Źródło: LVIII OM, zadanie 9 link

Zadanie 3. Dany jest równoległobok $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu A odpowiednio na proste BC i CD, a prosta prostopadła do prostej AC i przechodząca przez punkt A przecina prostą BD w punkcie G.

Dowieść, że punkty E, F i G leżą na jednej prostej.

Źródło: Obóz Naukowy OM Mszana 2012 - zawody indywidualne, zadanie 4 link

Rozwiązanie 3. Niech H oraz I będą punktami, w których prosta AG przecina odpowiednio proste BC oraz CD, a J niech będzie punktem przecięcia odcinków AB i EF. Punkty E i F leżą na okręgu o średnicy AC, skąd dostajemy równość:

$$\sphericalangle CEF = \sphericalangle CAF.$$

To wraz z prostopadłościami $AF \perp CI$ i $AC \perp HI$ oraz równoległością $AB \parallel CD$ prowadzi do zależności:

$$\sphericalangle CEF = \sphericalangle CAF = 90^\circ - \sphericalangle ICA = 90^\circ - \sphericalangle CAB = \sphericalangle JAH.$$

W efekcie:

$$\sphericalangle JEH = 180^\circ - \sphericalangle CEF = 180^\circ - \sphericalangle JAH,$$

czyli na czworokącie $AJEH$ można opisać okrąg. Wobec tego:

$$\sphericalangle AJH = \sphericalangle AEH = 90^\circ$$

i w takim razie punkt J jest spodkiem wysokości trójkąta ABH opuszczonej z wierzchołka H.

Jednokładność o środku w punkcie G, która przeprowadza punkt D na B, zachowuje prostą AG oraz odwzorowuje proste AD i CD odpowiednio na proste BC i AB. Zatem przekształca ona trójkąt IDA na trójkąt ABH. Stąd wniosek, że punkty F i J, będące spodkami wysokości trójkątów IDA i ABH opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i H, leżą na prostej przechodzącej przez punkt G. A ponieważ punkt J leży na odcinku EF, więc ostatecznie stwierdzamy, że punkty E, F, G i J leżą na jednej prostej.

Źródło: Obóz Naukowy OM Mszana 2012 - zawody indywidualne, zadanie 4 link

Zadanie 4. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniają nierówności:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \text{ oraz } \prod_{j=1}^{k} b_j \geqslant \prod_{j=1}^{k} a_j \text{ dla każdego } k = 1, 2, \ldots n.$$

Dowieść, że: $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.

Źródło: Obóz Naukowy OM Mszana 2012 - zawody indywidualne, zadanie 31 link

Rozwiązanie 4. Na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną oraz założenia $b_1 b_2 \ldots b_k \geqslant a_1 a_2 \ldots a_k$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{b_1 - a_1}{a_1} + \frac{b_2 - a_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_k - a_k}{a_k} =& \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_k}{a_k} - k \\ \geqslant& k \cdot \sqrt[k]{\frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{a_1 a_2 \ldots a_k}} - k \\ \geqslant& k \cdot 1 - k = 0 \end{aligned}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Określmy $s_0 = 0$ oraz:

$$s_k = \frac{b_1 - a_1}{a_1} + \frac{b_2 - a_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_k - a_k}{a_k} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wówczas liczby $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$ są nieujemne. Ponadto:

$$b_k - a_k = a_k \cdot \frac{b_k - a_k}{a_k} = a_k(s_k - s_{k-1}) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned} (b_1 - a_1) +& (b_2 - a_2) + \ldots + (b_n - a_n) = \\ =& a_1(s_1 - s_0) + a_2(s_2 - s_1) + \ldots + a_n(s_n - s_{n-1}) = \\ =& (a_1 - a_2)s_1 + (a_2 - a_3)s_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)s_{n-1} + a_n s_n. \end{aligned}$$

Z warunku $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ wynika, że wszystkie składniki prawej strony są nieujemne. Zatem także lewa strona jest liczbą nieujemną, skąd uzyskujemy tezę.

Źródło: Obóz Naukowy OM Mszana 2012 - zawody indywidualne, zadanie 31 link