PreOM 2024 - Dzień 3

Rozwiązania

Zadanie 1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem cyklicznym którego przecięcie przekątnych to E, a środek boku AB to M. Niech P, Q, R będą rzutami prostopadłymi E na DA, AB, BC odpowiednio. Udowodnij, że M leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR.

Rozwiązanie: Niech X, Y będą środkami AE i BE odpowiednio. Pokażemy podobieństwo trójkątów PXM i MYR. Na początku zauważmy, że $PX = AE/2 = MY$ oraz $RY = BE/2 = MX$. Teraz zauważmy, że:

$$\sphericalangle PXM = \sphericalangle PXE + \sphericalangle EXM = 2\sphericalangle EAD + \pi - \sphericalangle AEB.$$

Podobnie

$$\sphericalangle RYM = \sphericalangle RYE + \sphericalangle EYM = 2\sphericalangle EBC + \pi - \sphericalangle AEB.$$

Z cykliczności $ABCD$ dostajemy równość $\sphericalangle PXM = \sphericalangle RYM$. Dostajemy więc postulowane podobieństwo. Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać $\sphericalangle PQR = \sphericalangle PMR$. Wiemy, że $BQER$ oraz $AQEP$ są cykliczne, więc:

$$\sphericalangle PQR = \sphericalangle PQE + \sphericalangle EQR = 2\sphericalangle CAD.$$

Dostajemy

$$\sphericalangle PMR = \sphericalangle XMY - \sphericalangle PMX - \sphericalangle YMR = \sphericalangle AEB - (\pi - \sphericalangle PXM) = 2\sphericalangle EAD = 2\sphericalangle CAD.$$

■

Zadanie 2. Niech $n > 2$ będzie naturalne oraz $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Załóżmy, że istnieje dodatnia liczba całkowita r o tej własności, że reszta z dzielenia: $\prod_{i \neq k} p_i$ przez p_k jest równa r dla wszystkich $1 \leqslant k \leqslant n$. Udowodnij, że $r \leqslant n - 2$.

Rozwiązanie: Załóżmy, że $r > n - 2$. Niech

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} p_i}{p_k} - r.$$

Zauważmy, że dla każdego k liczba p_k dzieli S , więc $\prod_{i=1}^{n} p_i$ dzieli S. Mamy również $p_k > r$, więc $p_k \geqslant n$ dla każdego k. Mamy więc:

$$\frac{S}{\prod\limits_{i=1}^{n} p_i} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \leqslant 1,$$

co daje sprzeczność, ponieważ lewa strona to dodatnia liczba całkowita. ■

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze liczb wymiernych dodatnich, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające dla wszystkich dodatnich liczb wymiernych warunki

$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad \text{oraz} \quad f(x^3) = (f(x))^3.$$

Źródło zadania: XLIII OM – III – Zadanie 2

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że funkcja f spełnia podane warunki. Wykażemy, że dla każdej liczby wymiernej $u > 0$ oraz każdej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$f(u + k) = f(u) + k.$$

Traktujemy u jako ustalone. Dla $k = 1$ powyższa równość zachodzi na mocy pierwszego z warunków danych w założeniach. Przyjmijmy słuszność tej równości dla pewnego k naturalnego. Wówczas, w myśl tego samego warunku,

$$\begin{aligned} f(u + (k + 1)) &= f((u + k) + 1) = f(u + k) + 1 = \\ &= (f(u) + k) + 1 = f(u) + (k + 1). \end{aligned}$$

Na mocy zasady indukcji uzyskujemy równość dla wszystkich k naturalnych.

Weźmy dowolną dodatnią liczbę wymierną $x = m/n$ (m, n naturalne). Przyjmując w dowiedzionej równości $u = x$, $k = n^2$ mamy

$$f(x + n^2) = f(x) + n^2,$$

i po podniesieniu stronami do trzeciej potęgi:

$$(1) \qquad (f(x + n^2))^3 = (f(x) + n^2)^3.$$

Skorzystajmy teraz z drugiego warunku danego w założeniach, zastępując x przez sumę $x + n^2$:

$$f((x + n^2)^3) = (f(x + n^2))^3.$$

Tak więc lewa strona (1) równa się $(f(x + n^2)^3)$, czyli

$$(2) \qquad f(x^3 + 3n^2x^2 + 3n^4x + n^6).$$

Zauważmy, że $3n^2x^2 + 3n^4x + n^6 = 3m^2 + 3mn^3 + n^6$ jest liczbą naturalną. Przyjmując w pierwszej równości tę właśnie liczbę jako k oraz biorąc $u = x^3$ stwierdzamy, że wartość (2) jest równa

$$(3) \qquad f(x^3) + 3n^2x^2 + 3n^4x + n^6;$$

jak pamiętamy, jest to lewa strona równości (1). Prawa strona (1) równa się

$$\begin{aligned} (4) \qquad (f(x) + n^2)^3 &= (f(x))^3 + 3n^2(f(x))^2 + 3n^4f(x) + n^6 = \\ &= f(x^3) + 3n^2(f(x))^2 + 3n^4f(x) + n^6 \end{aligned}$$

(bo $f(x^3) = (f(x))^3$). Stąd, przez przyrównanie otrzymanych wyrażeń (3) oraz (4), dostajemy równość

$$3n^2(f(x))^2 + 3n^4f(x) + n^6 = 3n^2x^2 + 3n^4x + n^6,$$

czyli

$$(f(x))^2 + n^2f(x) = x^2 + n^2x,$$

co daje

$$(f(x) - x)(f(x) + x) + n^2f(x) - n^2x = 0,$$

czyli jeszcze inaczej

$$(f(x) - x)(f(x) + x + n^2) = 0.$$

Suma w drugim nawiasie jest dodatnia. Stąd $f(x) = x$.

Liczba x (wymierna, dodatnia) była wybrana dowolnie. A wobec tego f musi być funkcją identycznościową:

$$(5) \qquad f(x) = x \quad \text{dla wszystkich } x \text{ wymiernych, dodatnich.}$$

Sprawdzenie, że funkcja (5) spełnia podane w zadaniu warunki, jest natychmiastowe. Jest więc ona jedynym rozwiązaniem zadania. ■

Zadanie 4. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich nieprzystających trójkątów prostokątnych, że ich boki mają całkowitą długość oraz liczby wyrażające długości przyprostokątnych tych trójkątów są względnie pierwsze i ich różnica jest równa 7.

Źródło zadania: Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej – Zwardoń 2021 – Zadanie 23

Rozwiązanie: Jeżeli liczby m, $m + 7$ są przyprostokątnymi, a n przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, to trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $3m + 2n + 7$ i $3m + 2n + 14$ ma przeciwprostokątną $4m + 3n + 14$. Jeśli przy tym liczby m i n są względnie pierwsze, to także przyprostokątne nowo utworzonego trójkąta są względnie pierwsze. W ten sposób z jednego trójkąta spełniającego warunki zadania możemy uzyskać nieskończony ciąg takich trójkątów, np. z trójkąta $(5, 12, 13)$ otrzymujemy kolejno $(48, 55, 73)$, $(297, 304, 425)$, $(1748, 1755, 2477)$, ...
■