Autor: Kajetan Ramsza

Prowadzący: Kajetan Ramsza

Dwustosunek perspektywiczny

Płaszczyzna rzutowa

Płaszczyzna rzutowa jest zwykłą płaszczyzną rozszerzoną o punkty w nieskończoności

Stwierdzenie 1. Punkty w nieskończoności na płaszczyźnie rzutowej są współliniowe

Stwierdzenie 2. Każda prosta ma dokładnie jeden punkt w nieskończoności oznaczamy go P_∞

Stwierdzenie 3. Proste równoległe przecinają się w punkcie w nieskończoności wspólnym dla obu prostych

Zawsze działając w geometrii rzutowej (w szczególności w całym poniższym skrypcie) będziemy operować na płaszczyźnie rzutowej

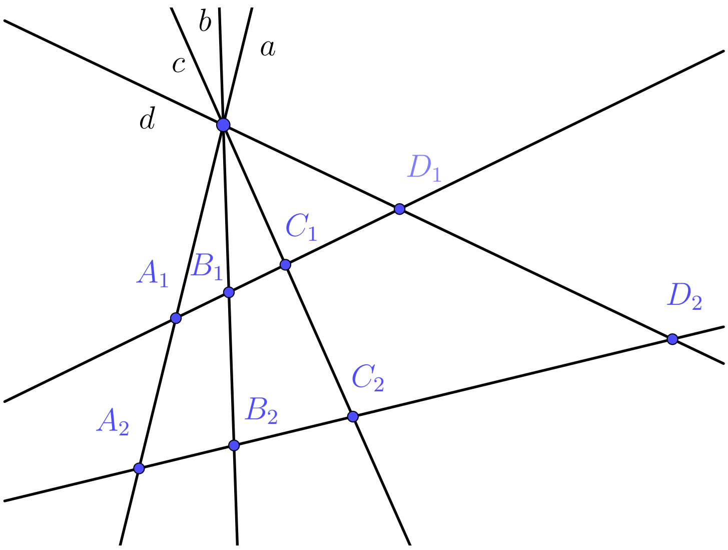
Dwustosunek

Definicja. Dwustosunek współliniowych punktów A, B, C, D (mogą być punktami w nieskończoności) definiujemy jako

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{AD} \div \frac{BC}{BD}$$

Uwaga. Odcinki w powyższej definicji są skierowane tzn. jeśli punkt B leży na prawo od punktu A to $AB = |AB|$ w przeciwnym wypadku $AB = -|AB|$ (nie ma znaczenie które prawo wybierzemy, istotne jest tylko żeby za każdym razem to samo)

Dwustosunek prostych



$$(a, b; c, d) = (A_1, B_1; C_1, D_1) = (A_2, B_2; C_2, D_2) = \pm \frac{\sin \sphericalangle(c, a)}{\sin \sphericalangle(d, a)} \div \frac{\sin \sphericalangle(c, b)}{\sin \sphericalangle(d, b)}$$

Przykłady

1. Udowodnij, że

$$(A, B; X, Y) = (B, A; X, Y)^{-1} = (A, B; Y, X)^{-1} = (X, Y; A, B)$$

2. Dane są współliniowe parami różne punkty A, B, C oraz rzeczywista liczba k. Udowodnij, że istnieje dokładnie jeden taki punkt D na tej samej prostej (możliwe że w nieskończoności), że $(A, B; C, D) = k$

3. Dane są współliniowe punkty A, B, C oraz P_∞ leżący na ich wspólnej prostej. Ile wynosi $(A, B; C, P_\infty)$?

Czwórka harmoniczna

Definicja Jest to taka czwórka współliniowych punktów, że

$$(A, B; C, D) = -1$$

Twierdzenie 1. Niech M to środek odcinka AB, wtedy $(A, B; M, P_\infty) = -1$

Własności

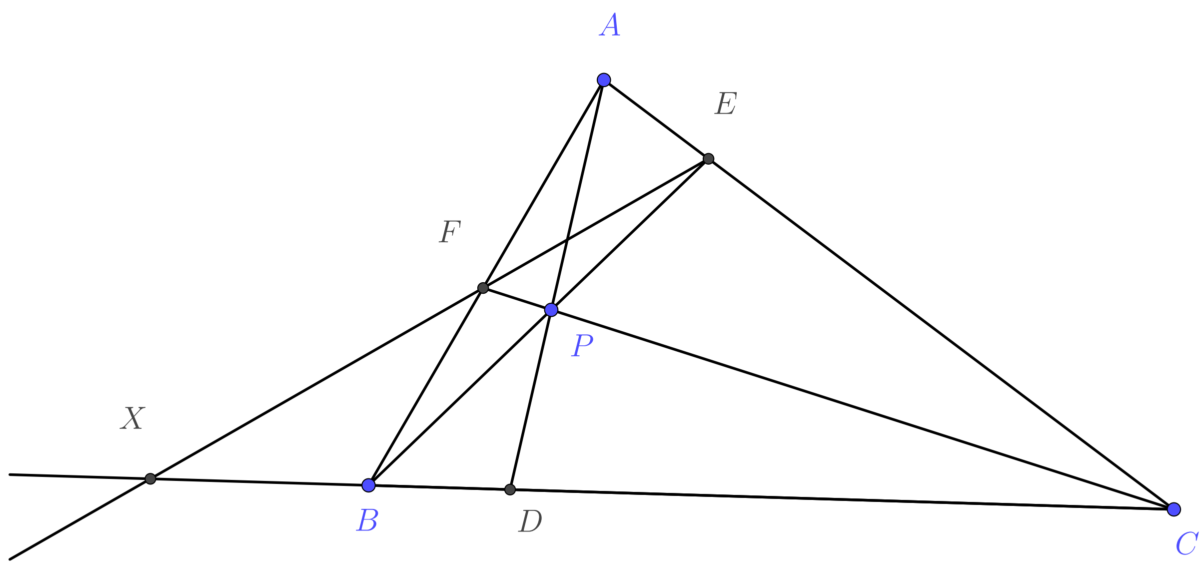
Okrąg Apoloniusza

Niech XY to średnica okręgu Apoloniusza $o(A, B, k)$, wtedy $(A, B; X, Y) = -1$

Inwersja

Dane są współliniowe punkty A, B, P. Niech P^* to obraz punktu P w inwersji względem okręgu o średnicy AB. Wtedy $(A, B; P, P^*) = -1$

Ceviany

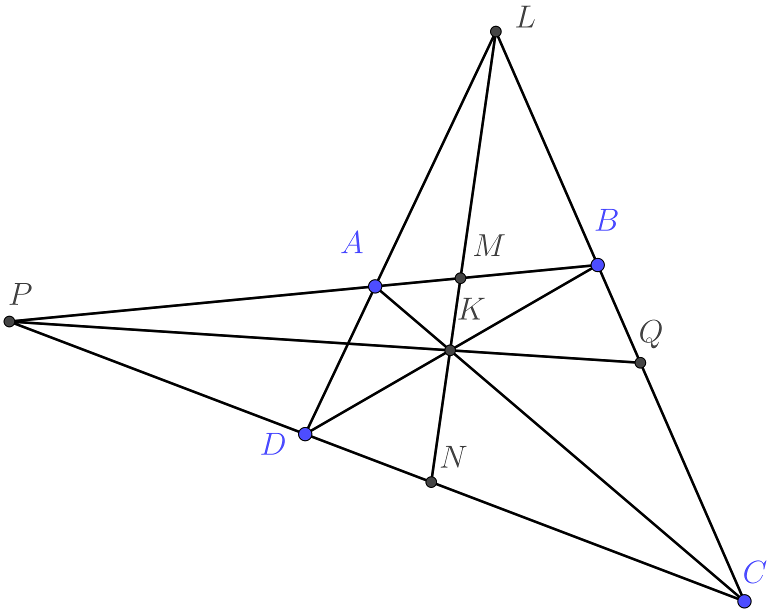


Dany jest trójkąt ABC, oraz ceviany AD, BE oraz CF przecinające się w jednym punkcie. Niech $X = \overline{BC} \cap \overline{EF}$, wtedy $(B, C; D, X) = -1$

Rzut przez punkt

Jak zauważyliśmy w sekcji o dwustosunku prostych, dwustosunek punktów leżacych na pęku prostej jest stały, zatem również, jeżeli jedna czwórka punktów na pęku będzie czwórką harmoniczną to wszystkie będą takową

Czworokąt zupełny



Niech $ABCD$ to czworokąt wypukły oraz $L = \overline{AD} \cap \overline{BC}$, $K = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ i $M = \overline{LK} \cap \overline{AB}$, $N = \overline{KL} \cap \overline{CD}$. Wtedy $(L, K; M, N) = -1$

Zadania

1. Dany jest trójkąt ABC, I środek okręgu wpisanego, I_A środek okręgu dopisanego do boku BC oraz D spodek dwusiecznej z wierzchołka A. Udowodnij, że punkty A, D, I, I_A tworzą czwórkę harmoniczną.
2. Dany jest trójkąt ABC, ortocentrum trójkąta H oraz spodki odpowiednich wysokości D, E, F. Dane są takie P i Q należące do odcinka EF, że $AP \perp EF$ oraz $HQ \perp EF$. Niech R to przecięcie prostej HQ z prostą PD. Udowodnij, że $QH = HR$.
3. Dany jest trójkąt ABC. Niech D będzie spodkiem wysokości z wierzchołka A, P jest dowolnym punktem na odcinku AD. Proste BP oraz CP przecinają AC oraz AB odpowiednio w punktach E i F. Udowodnij, że $\sphericalangle EDP = \sphericalangle FDP$.

Rzut perspektywiczny

Rzut perspektywiczny $f_{O,\pi'} : \pi \to \pi'$, jest to taka funkcja, że

$$f_{O,\pi'}(X) = \overline{OX} \cap \pi'$$

Autor: Kajetan Ramsza Prowadzący: Kajetan Ramsza

Własności

Co zachowuje?

- proste
- dwustosunek współliniowych punktów
- krzywe stożkowe
- przecięcia

Unikalne przekształcenia

- Dowolne punkty A, B, C, D (żadne trzy niewspółliniowe) na dowolne punkty A', B', C', D' (żadne trzy niewspółliniowe)
- Zachowanie okręgu oraz dowolny punkt P wewnątrz okręgu na dowolny punkt Q wewnątrz okręgu
- Zachowanie okręgu oraz dowolna prosta poza okręgiem na prostą w nieskończoności

Zadania

1. Dany jest czworokąt $ABCD$, niech $P = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $Q = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ oraz $R = \overline{AC} \cap \overline{BD}$. Niech punkty X_1, X_2, Y_1, Y_2 to odpowiednio $\overline{PR} \cap \overline{AD}, \overline{PR} \cap \overline{BC}, \overline{QR} \cap \overline{AB}, \overline{QR} \cap \overline{CD}$. Udowodnij, że proste X_1Y_1, X_2Y_2 i PQ są współpękowe
2. **Twierdzenie o motylku** Niech AB, CD oraz PQ to cięciwy okręgu przechodzące przez punkt M. Niech $X = \overline{PQ} \cap \overline{AD}$ oraz $Y = \overline{PQ} \cap \overline{BC}$. Jeśli $PM = QM$ to $MX = MY$.
3. **Twierdzenie Desargeusa** Dane są dwa trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ takie, że proste AA', BB' i CC' są współpękowe. Wówczas punkty $\overline{AB} \cap \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cap \overline{B'C'}$, $\overline{CA} \cap \overline{C'A'}$ są współliniowe.
4. **Twierdzenie o nożycach** Dane są punkty P oraz Q. Przez punkt P prowadzimy proste a, b i c, a przez punkt Q proste k oraz l. Prosta a przecina prostą k w punkcie A_k analogicznie definiujemy punkty A_l, B_k, B_l, C_k, C_l. Wówczas punkty Q, $\overline{A_kB_l} \cap \overline{A_lB_k}$ i $\overline{B_kC_l} \cap \overline{B_lC_k}$ są współliniowe.
5. **Twierdzenie Pappusa** Trójka punktów A_1, B_1, C_1 leży na prostej k, a trójka punktów A_2, B_2, C_2 leży na prostej $l \neq k$. Oznaczmy $X = \overline{B_1C_2} \cap \overline{B_2C_1}$, $Y = \overline{A_1C_2} \cap \overline{A_2C_1}$ i $Z = \overline{A_1B_2} \cap \overline{A_2B_1}$. Wykazać, że punkty X, Y, Z są współliniowe.