Autor: Krzysztof Zdon

Prowadzący: Krzysztof Zdon

Równania diofantyczne

Zajawka

Na tym wykładzie skupimy się na znajdowaniu rozwiązań równań w liczbach całkowitych. Zwrócimy też uwagę na kilka technik, które pomagają stwierdzić, że takowe rozwiązania nie istnieją.

Zwijanie do kwadratu

Przykład 1. Znajdź wszystkie rozwiązania całkowite x, y równania

$$x^2 + 6xy + 10y^2 - 2y = 0$$

Przykład 2. Znajdź wszystkie rozwiązania całkowite x, y równania

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2$$

Użycie nierówności

Przykład 1. Znajdź wszystkie czwórki (x, y, z, w) liczb całkowitych, które spełniają poniższą równość:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z - 1) + 2y(z + 1) = w^2$$

Dowód: Okazuje się, że

$$(x + y + z \pm 1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z \pm 1) + 2y(z \pm 1) \pm 2z + 1$$

Z tego wprost wynika, że

$$(x + y + z - 1)^2 < w^2 < (x + y + z + 1)^2,$$

z czego z kolei można wywnioskować, że $(x+y+z)^2 = w^2$ oraz $x = y$. Finalnie wszystkie odpowiedzi to czwórki $(m, m, n, 2m + n), m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Przykład 2. Znajdź wszystkie takie trójki liczb całkowitych dodatnich (x, y, z), które spełniają równość

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z}) = 2$$

Rozważania modulo i liczby pierwsze

Pomocne fakciki:

$$a^2 \equiv 0, 1\,(mod\,3), a^2 \equiv 0, 1\,(mod\,4), a^2 \equiv 0, \pm1\,(mod\,5), a^3 \equiv 0, \pm1\,(mod\,7), a^3 \equiv 0, \pm1\,(mod\,9)$$

Przykład 1. Udowodnij, że równanie

$$a^3 + (a + 1)^3 + ... + (a + 6)^3 = b^4 + (b + 1)^4$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych (a, b).

Przykład 2. Udowodnij, że równanie $x^5 - y^2 = 4$ nie ma całkowitych rozwiązań.

Przykład 3. Udowodnij, że $3^m + 3^n + 1$ nie może być kwadratem dla dowolnych m, n naturalnych.

Przykład 4. Znajdź wszystkie całkowite rozwiązania równania

$$(2x + y)(2y + x) = 7$$

Autor: Krzysztof Zdon

Prowadzący: Krzysztof Zdon

Nieskończone schodzenie

Jest to jedna z najważniejszych technik tego wykładu, pomocna w wielu różnorakich zadaniach, nie tylko równaniach diofantycznych. Polega ona na wzięciu (w wybranym przez siebie kontekście) rozwiązania najmniejszego i pokazaniu, że istnieje mniejsze.

Przykład 1. Znajdź wszystkie rozwiązania całkowite nieujemne równania

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

Przykład 2. Znajdź wszystkie takie liczby całkowite nieujemne a, b, że $ab \mid a^n + b$, gdzie $n \in \mathbb{N}_{>1}$ jest stałe
Dowód: Zauważamy, ze a i b mają ten sam zbiór dzielników, oraz że $a = 1$ wtw. gdy $b = 1$. Przyjmijmy więc, że $a, b > 1$ i rozpatrzmy dwójkę o najmniejszej takiej sumie. Niech $p \in \mathbb{P}$ będzie pewną liczbą pierwszą dzielącą a oraz b. Wtedy $p^2 \mid a^n + b$, z czego wprost wynika, że $p^2 \mid b$. Powtarzamy ten trik do momentu, gdy $p^n \mid b$. Niech $a = pa_1$ oraz $b = p^n b_1$. Wtedy

$$a_1 b_1 p^n \mid ab_1 p^n \mid p^n(a_1^n + b_1) \implies a_1 b_1 \mid a_1^n + b_1$$

Wobec minimalności a, b widzimy, że $a_1 = b_1 = 1$, z czego wprost wynika, że $a = p$ oraz $b = p^n$. Podstawiając to do oryginalnej podzielności widzimy, że $p^{n+1} \mid 2p^n \implies p = 2$.

Zadania

Zadanie 1. Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite (x, y, x), że istnieje liczba pierwsz p spełniająca równość

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$$

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, n, że

$$p^n = a^3 + b^3$$

Zadanie 3. Znajdź wszystkie takie liczby całkowite $x, y \in \mathbb{Z}$, że

$$xy = x + y + 3$$

Zadanie 4. Znajdź wszystkie takie liczby całkowite nieujemne x, y, że

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$$

Zadanie 5. Znajdź wszystkie takie całkowite dodatnie m, n, że

$$1! + 2! + ... + n! = m!$$

Zadanie 6. Udowodnij, że równanie $2^x + 1 = xy$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Zadanie 7. Udowodnij, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ równanie

$$x^n + y^n = z^{n-1}$$

Zadanie 8. Znajdź wszystkie takie całkowite a, b, c, że $1 < a < b < c$ i $(a-1)(b-1)(c-1) \mid abc - 1$.