PreOM 2023 - Dzień 4

Rozwiązania

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie wielomiany P(x) spełniające:

$$P(x^2-2x) = (P(x-2))^2$$

Rozwiązanie:
Udowodnimy, że wielomian spełniający tożsamość $P(x^2) = (P(x))^2$ musi być wielomianem zerowym lub równym x^n. Załóżmy, że dany wielomian ma postać: $P(x) = a_nx^n + ... + a_0$. (przyjmijmy, że a_n jest niezerowy oraz co najmniej jeden z pozostałych współczynników jest niezerowy. Wtedy $P(x^2) = a_nx^{2n} + ... + a_1x^2 + a_0 = (a_nx^n + ... + a_0)^2 = (P(x))^2$. Przyrównując współczynniki przy x^{n+k} otrzymujemy równość $0 = 2 \cdot a_n \cdot a_k$, która przeczy wcześniejszemu założeniu o niezerowości a_n i niezerowności jakiegoś a_k. Ale z warunku $a_nx^{2n} = P(x^2) = (P(x))^2 = a_n^2 \cdot x^{2n}$ otrzymujemy $a_n = 1$. Tak więc $P(x) = x^n$ lub gdy wszystkie współczynniki są zerowe to $P(x) = 0$.

Podstawiając $y = x - 1$ i $Q(y) = P(y-1)$ otrzymamy: $(P(x-2))^2 = (P(y-1))^2 = (Q(y))^2$ $P(x^2-2x) = (P(x-1))^2 = Q(y^2)$ Wobec tego $P(x^2-2x) = (P(x-2))^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(y^2) = (Q(y))^2$, a to na mocy lematu jest równoważne, że $Q(y) = y^n$, czyli $P(x) = (x+1)^n$. ■

Zadanie 2. Niech $n = 4k + 3$. Pokazać, że istnieje $d \mid n - 1$, takie że n nie dzieli $d - a^2$ dla każdego $a \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązanie:
Ponieważ $n = 4k + 3$, to -1 jest nieresztą kwadratową. Iloczyn reszt kwadratowych jest resztą kwadratową. Gdyby wszystkie czynniki pierwsze $n - 1$ były resztami kwadratowymi, to ich iloczyn też by był. Ale ich iloczyn to $n - 1 = -1 \mod n$, nie jest resztą kwadratową.
■

Zadanie 3. 49 uczniów pisze sprawdzian z analizy, który składa się z 3 zadań. Każde jest punktowane w skali od 0 do 7. Udowodnij, że istnieją tacy uczniowie A i B, że A z każdego zadania uzyskał niegorszy wynik punktowy niż B.

Rozwiązanie:
Zdefiniujmy sobie relację $\leqslant$, że $(a, b, c) \leqslant (x, y, z)$, gdy $a \leqslant x, b \leqslant y, c \leqslant z$. Podobnie zdefiniujmy dla par (a, b). Chcemy pokazać, że wśród 49 trójek gdzie liczby są od 0 do 7 jakieś dwie są porównywalne. Jeśli jest dwóch uczniów, którzy uzyskali takie same oceny za zadanie pierwsze i drugie to są porównywalni, zatem załóżmy, że każdy uzyskał inną parę ocen za zadanie pierwsze

i drugie. Rozważmy poniższe łańcuchy:

$$(0,0) \leqslant (0,1) \leqslant (0,2) \leqslant (0,3) \leqslant (0,4) \leqslant (0,5) \leqslant (0,6) \leqslant (0,7) \leqslant \leqslant (1,7) \leqslant (2,7) \leqslant (3,7) \leqslant (4,7) \leqslant (5,7) \leqslant (6,7) \leqslant (7,7)$$

$$(1,0) \leqslant (1,1) \leqslant (1,2) \leqslant (1,3) \leqslant (1,4) \leqslant (1,5) \leqslant (1,6) \leqslant (2,6) \leqslant \leqslant (3,6) \leqslant (4,6) \leqslant (5,6) \leqslant (6,6) \leqslant (7,6)$$

$$(2,0) \leqslant (2,1) \leqslant (2,2) \leqslant (2,3) \leqslant (2,4) \leqslant (2,5) \leqslant (3,5) \leqslant (4,5) \leqslant \leqslant (5,5) \leqslant (6,5) \leqslant (7,5)$$

$$(3,0) \leqslant (3,1) \leqslant (3,2) \leqslant (3,3) \leqslant (3,4) \leqslant (4,4) \leqslant (5,4) \leqslant (6,4) \leqslant (7,4)$$

Każdego ucznia mogę utożsamić z parą ocen za pierwsze i drugie zadanie. W każdym łańcuchu może być maksymalnie 8 uczniów, w przeciwnym wypadku jakiś dwóch uzyskałoby tą samą ocenę za trzecie zadanie, więc byliby porównywalni. Ponadto 16 par nie znajduje się w żadnym łańcuchu. Stąd mogę mieć maksymalnie $4 \cdot 8 + 16 = 48$ uczniów, żeby żadni nie byli porównywalni.

■

Zadanie 4. Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem, w którym kąty $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle BCD$ są równe. Niech M i N będą punktami leżącymi odpowiednio na bokach AB i BC takimi, że prosta MN jest równoległa do prostej AD i $MN = 2AD$. Niech H oznacza ortocentrum trójkąta ABC, a K oznacza środek odcinka MN. Udowodnij, że proste KH i CD są prostopadłe.

Rozwiązanie:
Oznaczmy odbicie punktu M względem A jako T. Możemy zauważyć, że $AK||TN$, ponieważ AK jest linią środkową trójkąta MNT. $AKND$ jest równoległobokiem, więc $DN||AK$. Pokazaliśmy więc, że punkty T, D, N są współliniowe oraz $TD = DN = AK$. Oznaczmy przez C' taki punkt na BC, że $DC||TC'$. Punkt D jest środkiem TN, więc C jest środkiem $C'N$. Korzystając z następującej równości kątów: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle TC'B = 180° - \sphericalangle AMN$ otrzymujemy cykliczność czworokąta $TMNC'$. Wiemy, że CH jest prostopadłe do AB oraz że AH jest prostopadłe do BC. W takim razie KH jest prostopadłe do TC', co należało udowodnić.

■