Grafy

Mateusz Wesołowski

28 maja 2024

1 Definicje

Graf definiujemy przez parę zbiorów $G = (V, E)$, gdzie V to zbiór **wierzchołków**, a E to zbiór **krawędzi**, których końce należą do V. Wierzchołki przedstawia się jako punkty, a krawędzie jako odcinki między nimi. Relacja połączenia wierzchołków krawędzią zwykle jest relacją symetryczną ($\exists_{(u,v)\in E} \Rightarrow \exists_{(v,u)\in E}$ dla $u, v \in V$).

Podgraf grafu G to graf, który możemy otrzymać przez usunięcie niektórych wierzchołków i krawędzi z G.

Graf prosty to graf, który nie ma pętli własnych (krawędzi łączących wierzchołek z nim samym) i krawędzi wielokrotnych (takich, że istnieje wiele krawędzi łączących jedną parę wierzchołków).

Klika (graf pełny) to graf prosty, w którym między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje krawędź. Klikę o n wierzchołkach oznaczamy jako K_n.

Graf skierowany to graf, w którym krawędzie są jednokierunkowe, tj. $\exists_{(u,v)\in E} \not\Rightarrow \exists_{(v,u)\in E}$ dla $u, v \in V$. Skierowanie krawędzi oznaczamy strzałkami.

Stopniem wierzchołka v (oznaczanym jako $deg(v)$) nazywamy ilość krawędzi, które mają w nim koniec. W przypadku grafów skierowanych definiujemy stopień wchodzący i wychodzący (ilość wchodzących i wychodzących z wierzchołka).

Ścieżką nazywamy skończony ciąg wierzchołków $v_0, v_1, ..., v_s$ takich, że każde kolejne 2 są połączone krawędzią i każda krawędź występuje maksymalnie raz.

Graf nazywamy **spójnym** jeśli między dowolnymi jego wierzchołkami istnieje ścieżka.

K-kolorowaniem grafu nazywamy przyporządkowanie wierzchołkom k różnych kolorów. **Właściwe k-kolorowanie** to takie, że żadne 2 wierzchołki połączone krawędzią nie mają tego samego koloru.

Graf dwudzielny to taki graf prosty, w którym istnieje właściwe 2-kolorowanie. O grafie dwudzielnym mówimy, że jest **pełny** jeśli każdy wierzchołek pierwszego koloru jest połączony z każdym wierzchołkiem drugiego koloru. Oznaczamy je jako $K_{a,b}$, gdzie a to liczba wierzchołków w kolorze 1, a b to liczba wierzchołków w kolorze 2.

2 Kilka użytecznych pojęć

2.1 Cykle

Cykl to skończony ciąg wierzchołków $v_0, v_1, ..., v_s$ takich, że każde kolejne 2 są połączone krawędzią, każda krawędź występuje maksymalnie raz i dodatkowo istnieje krawędź między v_0 i v_s.

Cykl Eulera to cykl, który przechodzi przez wszystkie krawędzie grafu.

Twierdzenie o cyklu Eulera: Graf spójny posiada cykl Eulera wtedy i tylko wtedy kiedy dla każdego $v \in V$ zachodzi $2|deg(v)$.

Cykl Hamiltona to cykl, w którym każdy wierzchołek grafu występuje dokładnie raz.

Twierdzenie Diraca: Graf prosty jest grafem hamiltonowskim jeśli $|V| \geqslant 3$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi $deg(v) \geqslant \frac{|V|}{2}$.

2.2 Drzewa

Drzewem nazywamy graf spójny, który:

- nie ma cykli
- ma dokładnie n-1 krawędzi
- pomiędzy dowolnymi 2 jego wierzchołkami istnieje dokładnie 1 ścieżka

2.3 Grafy planarne

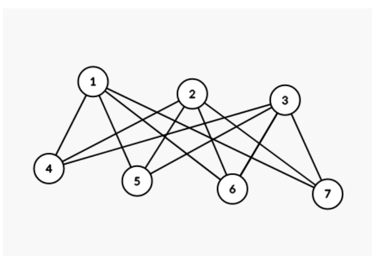
Graf planarny to graf, który można narysować na płaszczyźnie tak, aby żadne 2 krawędzie się nie przecinały.

Wzór Eulera: Dla każdego spójnego grafu planarnego, zachodzi: $|V| - |E| + |S| = 2$ (przez S oznaczamy ilość obszarów ograniczonych krawędziami licząc z nieskończonym obszarem otaczającym graf)

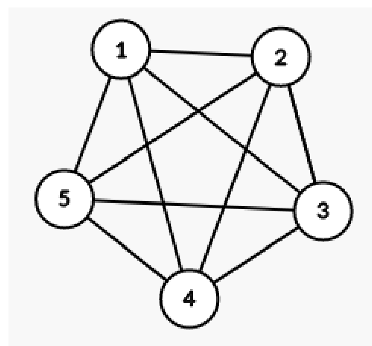
Rozszerzeniem grafu nazywamy "wstawianie wierzchołka do krawędzi", tj. rozerwanie krawędzi między dwoma wierzchołkami, dodanie kolejnego wierzchołka i połączenia wierzchołków.

Kryterium Kuratowskiego: Jeśli graf nie zawiera K_5, $K_{3,3}$ lub grafu z nich rozszerzalnego, to jest planarny.

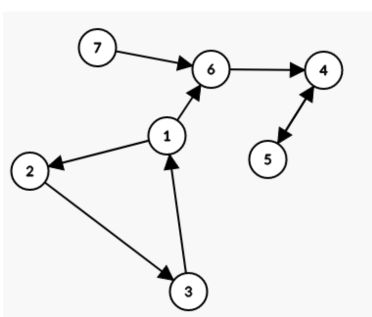
Twierdzenie o czterech barwach: Dla każdego grafu planarnego istnieje właściwe 4-kolorowanie.



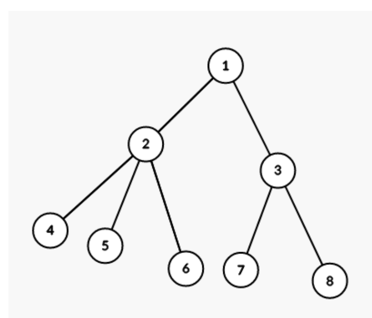
Rysunek 1: $K_{3,4}$



Rysunek 2: K_5



Rysunek 3: Graf skierowany

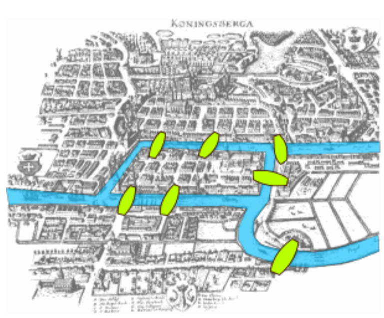


Rysunek 4: Drzewo

3 Zadanka

3.1 Rozgrzewka

1. (Lemat o uściskach dłoni) Udowodnić, że suma stopni wierzchołków w grafie prostym wynosi $2|E|$.
2. (Zagadnienie mostów królewieckich) Mapa Królewca (obecnie Kaliningradu) z 1736 roku wygląda jak na rysunku:



Rysunek 5: Mapa Królewca

Twoim zadaniem jest zaprojektować spacer po mieście tak, że po każdym moście przejdziesz dokładnie raz i wrócisz do tego samego miejsca, z którego zacząłeś spacer.

a) Pokazać, że jest to niemożliwe

b) Udowodnić twierdzenie o cyklu Eulera.

3. Dany jest spójny graf G. Pokazać, że dwie ścieżki (tej samej długości), które są najdłuższymi ścieżkami w grafie (ścieżkami o największej liczbie wierzchołków) mają co najmniej 1 wspólny wierzchołek.
4. Pokazać, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy nie ma cyklu o nieparzystej długości.
5. Udowodnić równoważność warunków na drzewo.
6. Udowodnić, że każde drzewo posiada **centroid** - taki wierzchołek, że po usunięciu go każda z powstałych części grafu ma co najwyżej $\frac{V}{2}$ wierzchołków. Udowodnić, że liczba centroidów w drzewie nie przekracza 2.
7. Czy koń może poruszać się po szachownicy 8×8 w taki sposób, aby każdy możliwy ruch lub jego odwrotność nastąpił dokładnie raz? Odpowiedz na pytanie również dla króla i wieży.
8. W pokoju jest 2n osób, z czego każda osoba ma najwyżej n-1 wrogów. Czy da się usadzić te 2 osób przy stole tak, że żadni dwaj wrogowie nie siedzą obok siebie?
9. Dany jest graf K_n, gdzie n jest naturalną liczbą nieparzystą. Udowodnić, że da się pokolorować wierzchołki i krawędzie n kolorami w taki sposób, że spełnione są jednocześnie następujące warunki:

   a) Żadne 2 wierzchołki nie są pokolorowane tym samym kolorem

   b) Żadne 2 krawędzie w tym samym kolorze nie mają wspólnego końca

   c) Żadna krawędź nie ma końca w wierzchołku tego samego koloru co ona
10. Dane są 2 równoległe proste a i b, na których jest zaznaczone odpowiednio n i m punktów $(n, m \geqslant 3)$. Wszystkie punkty są ze sobą połaczone odcinkami, żadne 3 odcinki nie przecinają się w 1 punkcie. Wyznaczyć wzór na ilość powstałych tak obszarów w zależności od n i m.

3.2 Olimpijskie

1. (LXXIII OM 1 etap) W każdym wierzchołku 2021-kąta foremnego siedzi tresowana pchła. Każdej przekątnej tego wielokąta przypisano numer będący dodatnią liczbą całkowitą, przy czym różnym przekątnym przypisano różne numery. Na sygnał tresera pchły zaczynają skakać wzdłuż przekątnych od wierzchołka do wierzchołka. Przestrzegają one następującej reguły: przed każdym skokiem każda pchła sprawdza, które przekątne mające koniec w jej obecnym położeniu mają większy numer od wszystkich przekątnych wzdłuż których ta pchła dotychczas skoczyła, spośród nich wybiera tę o najniższym numerze i skacze wzdłuż niej; jeśli takich przekątnych nie ma, pchła przestaje skakać. Wykazać, że każda pchła zatrzyma się w innym wierzchołku.
2. Dany jest zbiór prostych na płaszczyźnie taki, że żadne 3 się nie przecinają w jednym punkcie. Tworzy on graf, w którym wierzchołki są przecięcia prostych, jest między nimi krawędź jeśli są kolejnymi wierzchołkami na prostej. Pokazać, że ten graf jest 3-kolorowalny.
3. Polska składa się z pewnej liczby wsi. Niektóre są połączone drogami. O dziwo da się dojechać z dowolnej wsi do każdej innej. Rolnicy mogą zablokować wszystkie drogi wychodzące z pewnej wsi, jednak wówczas z tamtej wsi magicznie wyrastają drogi, które łączą ją z wsiami, z których nie dało się dojechać bezpośrednio jedną drogą. Ustawa o wyższych dotacjach być może zostanie przyjęta jeśli uda się podzielić polskie wsie na dwie rozłączne części. Wyznaczyć najmniejsze N, że rolnicy są w stanie podzielić Polskę blokując co najwyżej N dróg jeśli jest w niej aż 100 dróg.
4. (LXVIII OM 2 etap) Smakosz Jan porównywał n restauracji, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każdą parę restauracji porównał w dwóch kategoriach: smaczności posiłku oraz jakości obsługi. W przypadku niektórych par Jan nie mógł się zdecydować, którą uważa za lepszą w którejś kategorii, ale w żadnej parze nie zdarzyło się to w obu kategoriach. Ponadto, jeśli Jan uznał, że restauracja A jest lepsza od restauracji B w którejś kategorii, oraz stwierdził, że restauracja B jest lepsza od restauracji C w tej samej kategorii, to uznał również, że A jest lepsza od C w tej kategorii. Udowodnić, że istnieje taka restauracja R, że każda inna restauracja została uznana za gorszą od R w chociaż jednej kategorii.
5. Kwadrat 3000 × 3000 jest dowolnie podzielony na kostki domina (tj.prostokąty 1 × 2).

   a) Udowodnić, że kostki domina można pokolorować na 3 kolory, tak aby liczba kostek każdego koloru była równa, a każda kostka domina miała nie więcej niż dwóch sąsiadów w swoim kolorze (kostki domina uważa się za sąsiadujące, jeśli zawierają kwadraty sąsiadujące bokiem).

   b) Udowodnić, że kostki domina można pokolorować na 4 kolory, tak że liczba kostek każdego koloru jest równa i żadna kostka nie ma sąsiadów w swoim kolorze
6. (LXVII OM 2 etap) W przestrzeni danych jest n punktów, przy czym $n > 4$ i żadne cztery punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre odcinki łączące te punkty pomalowano na czerwono. Liczba czerwonych odcinków jest parzysta. Każde dwa różne punkty łączy pewna łamana złożona z czerwonych odcinków. Udowodnić, że czerwone odcinki da się podzielić na takie pary, że odcinki z jednej pary mają wspólny koniec.

7. W Wałbrzychu wszystkie drogi są jednokierunkowe. Każda droga łączy dwie dzielnice i nie przebiega przez inne dzielnice. GUS wyliczył dla każdej dzielnicy całkowitą liczbę mieszkańców dzielnic, z których prowadzą do niej drogi, oraz całkowitą liczbę mieszkańców dzielnic, do których prowadzą z niej drogi. Udowodnić, że dla co najmniej jednej dzielnicy pierwsza liczba jest nie mniejsza od drugiej.

8. Niech b_n oznacza liczbę ponumerowanych drzew o n wierzchołkach (wierzchołki są ponumerowane liczbami od 1 do n). Udowodnić, że:

   $b_n = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\binom{n-2}{k-1}b_k b_{n-k}$

3.3 Olimpijskie, ale fajne (~■_■)

1. (IMO 2020) Dane jest $4n$ kamyków o wagach 1, 2, ..., $4n$. Każdy kamyk jest w jednym z n kolorów i są cztery kamyki każdego koloru. Pokazać, że potrafimy ułożyć kamyki na dwa stosy, spełniając przy tym następujące warunki:

   - sumaryczna waga kamyków na obu stosach jest równa
   - każdy stos zawiera po dwa kamyki każdego koloru

2. (LXVIII OM 3 etap) Ciąg $(a_1, a_2, ..., a_k)$ składający się z parami różnych pól szachownicy o wymiarach nn nazwiemy *cyklem*, jeśli $k > 4$ oraz pola a_i i $a_i + 1$ mają wspólny bok dla wszystkich $i = 1, 2, ..., k$, gdzie $a_k + 1 = a_1$. Podzbiór X pól tej szachownicy nazwiemy *złośliwym*, jeśli każdy cykl na niej zawiera co najmniej jedno pole należące do X. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste C o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej $n > 2$ na szachownicy o wymiarach nn istnieje podzbiór złośliwy składający się z co najwyżej Cn^2 pól.

3. (LXX OM 3 etap) Na przyjęciu spotkało się $n > 3$ gości, wśród których niektórzy się znają. Okazało się, że na przyjęciu nie istnieje taka czwórka różnych gości a, b, c, d, że w parach $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$, $\{d, a\}$ goście się znają, ale w parach $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ goście się nie znają.

   Maksymalną kliką na przyjęciu nazwiemy taki niepusty zbiór gości X (być może jednoelementowy), że goście z X się parami znają, ale nie istnieje gość spoza X znający wszystkich gości z X. Dowieść, że na przyjęciu jest co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych maksymalnych klik

4. (LXXII OM 3 etap) Na okręgu zaznaczono n punktów i narysowano pewną liczbę cięciw o obu końcach w zaznaczonych punktach. Spełniona jest przy tym następująca własność: po wymazaniu dowolnych 2021 z narysowanych cięciw dowolne dwa zaznaczone punkty można połączyć łamaną złożoną z niewymazanych cięciw. Udowodnić, że można wymazać niektóre z cięciw w taki sposób, że na rysunku zostanie co najwyżej 2022n cięciw oraz wyżej opisana własność zostanie zachowana.

5. (IMO Shortlist 2010) W turnieju tenisowym bierze udział $n \geqslant 4$ osób, każdy grał z każdym i nie było remisów. Nazywamy zbiór czterech graczy *złym* jeśli jeden z tych graczy został pokonany przez trzech pozostałych, i ci trzej pozostali tworzą cykliczną trójkę (zbiór A, B, C taki, że A pokonał B, B pokonał C i C pokonał A). Załóżmy, że nie ma złych zbiorów w tym turnieju. Niech w_i i l_i będą kolejno liczbą zwycięstw i porażek i-tego gracza. Pokazać, że $\sum_{i=1}^{n}(w_i - l_i)^3 \geqslant 0$

6. W Nowym Jorku jest 99 synagog. Ze względu na panującą obecnie sytuację polityczną rabini usunęli z synagog wszystkie gaśnice. Zwiększa to jednak zagrożenie pożarowe, dlatego zdecydowali wybudować pod nimi nową sieć dwukierunkowych tuneli. Zgodnie z Pięcioksiągiem Mojżeszowym taka sieć musi spełniać następujące warunki:

   - Jeśli dowolne 2 synagogi są połączone tunelem, to istnieje dokładnie 1 różna od nich synagoga, która jest połączona z nimi tunelami.
   - Jeśli dowolne 2 synagogi nie są połączone tunelem, to istnieją dokładnie 2 różne od nich synagogi, które są z nimi połączone tunelami.
   - W pobliżu synagogi numer 7 musi być **koszerny kebab**.

   Czy uda im się wybudować taką sieć tuneli?