Autor: Mikołaj Znamierowski Prowadzący: Mikołaj Znamierowski

Zastosowania Wypukłości – Finaliści

Teoria

Definicja 1 (Wypukłość)**.** Zbiór $X \subseteq \mathbb{R}^n$ jest **wypukły**, jeśli dla każdych dwóch punktów $A, B \in X$ odcinek łączący A z B jest zawarty w X.

Zastosowania w Nierównościach

Definicja 2 (Funkcja wypukła)**.** Mówimy, że funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest **wypukła**, gdy wypukły jest zbiór $X = \{(x,y) : y \geqslant f(x)\}$.

Twierdzenie 1 (Nierówność Jensena)**.** Dana jest funkcja wypukła $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, nieujemne wagi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ o sumie 1 oraz argumenty $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$. Wówczas

$$\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)$$

Jeśli funkcja jest wklęsła, nierówność zachodzi w drugą stronę.

Dowód. Dla $n = 2$ jest to definicja wypukłości. Dla n ok, dla $n+1$: pierwsze n wyrazów dzielimy przez $1 - \lambda_{n+1}$ i stosujemy założenie dla nich. Potem stosujemy przypadek dwóch liczb z wagami $1 - \lambda_{n+1}$ oraz λ_{n+1}. Dla wklęsłej analogicznie. ■

Stwierdzenie 1. Funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna. Wówczas f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \geqslant 0$ oraz wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \leqslant 0$.

Twierdzenie 2 (Nierówność Höldera)**.** Dane są większe od 1 liczby rzeczywiste p i q, przy czym $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Niech $x_1, \ldots, x_n$ oraz $y_1, \ldots, y_n$ będą liczbami nieujemnymi. Wówczas zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Dowód. Bso przyjmijmy $x_i > 0$ oraz $y_i > 0$. Oznaczmy $X = \sum_{i=1}^{n} (x_i^p)^{\frac{1}{p}}$ oraz $Y = \sum_{i=1}^{n} (y_i^q)^{\frac{1}{q}}$. Oznaczmy $0 < \frac{x_i^p}{X^p} = e^{a_i}$ oraz $0 < \frac{y_i^q}{Y^q} = e^{b_i}$. Wówczas z wypukłości funkcji e^x mamy $\frac{x_i y_i}{XY} = e^{\frac{a_i}{p} + \frac{b_i}{q}} \leqslant \frac{e^{a_i}}{p} + \frac{e^{b_i}}{q}$. Sumując po wszystkich i dostajemy poszukiwaną nierówność (po wykorzystaniu definicji a_i oraz b_i). ■

Zastosowania w Geometrii Kombinatorycznej

Twierdzenie 3 (Helly)**.** W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dane jest $N > n$ zbiorów wypukłych, przy czym dowolne $n+1$ z nich ma niepuste przecięcie. Wówczas wszystkie N ma niepuste przecięcie.

Przykład 1. Niech c i r będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi o następującej własności: dowolny trójkąt o obwodzie nie większym niż c można pokryć kołem o promieniu r. Udowodnij, że wówczas dowolny wielokąt o obwodzie nie większym niż c da się pokryć kołem o promieniu r.

Autor: Mikołaj Znamierowski Prowadzący: Mikołaj Znamierowski

Rozwiązanie przykładu (1)**.** Rozpatrzmy koła o środkach w wierzchołkach wielokąta i promieniach r (jest ich skończenie wiele). Wówczas każde trzy się przecinają, gdyż dowolne trzy wierzchołki takiego wielokąta tworzą trójkąt o obwodzie nie większym niż c, więc istnieje środek koła pokrywającego te trzy punkty. Z twierdzenia Helly'ego istnieje zatem punkt wspólny wszystkich tych kół. Koło o tym środku i promieniu r pokrywa cały wielokąt.

Zastosowania w Teorii Liczb

Definicja 3 (Krata, punkty kratowe, równoległobok bazowy)**.** Przez **kratę** na płaszczyźnie rozpiętą przez wektory $v, w \in \mathbb{R}^2$ (gdzie $\forall_{k\in\mathbb{R}}\ wk \neq v$) rozumiemy zbiór $L = \mathbb{Z}w + \mathbb{Z}v = \{kw + lv : k, l \in \mathbb{Z}\}$. Elementy kraty nazywamy **punktami kratowymi**. Przez **równoległobok bazowy** rozumiemy równoległobok rozpięty przez v, w.

Twierdzenie 4 (Minkowski)**.** Na płaszczyźnie dany jest zbiór $\mathcal{F}$, który jest wypukły, ograniczony, domknięty, symetryczny względem $(0, 0)$ o polu nie mniejszym niż $4P$, gdzie P to pole równoległoboku bazowego w danej kracie. Wówczas w $\mathcal{F}$ istnieje niezerowy punkt kratowy (a więc przynajmniej dwa). Jeśli pole jest mniejsze niż $4P$, to możemy wyrzucić założenie o domkniętości.

Dowód. Rozpatrujemy jednokładność o środku w $(0, 0)$ i skali $\frac{1}{2}$. Wówczas obraz $\mathcal{F}$ ma pole nie mniejsze niż P, więc tnąc go wzdłuż kraty i nakładając wszystkie części na bazowy równoległobok przynajmniej dwa punkty się pokrywają. Stąd istnieją w $\mathcal{F}$ punkty x, y, że $\frac{x}{2} - \frac{y}{2}$ jest punktem kratowym. Mamy $x \in \mathcal{F}$ oraz $-y \in \mathcal{F}$ (z symetrii), więc z wypukłości $\frac{x}{2} + \frac{-y}{2} \in \mathcal{F}$, czyli teza. ■

Przykład 2 (LIX OM, III etap, zadanie 6)**.** Liczba pierwsza p daje resztę 3 z dzielenia przez 4, przy czym istnieją takie względnie pierwsze liczby całkowite s i t, że $p|s^2 + 5t^2$. Udowodnij, że wówczas $2p = x^2 + 5y^2$ dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych x i y.

Rozwiązanie przykładu (2)**.** Jeśli $p|t$, to $p|s$, co przeczy względnej pierwszości. Mamy więc $(st^{-1})^2 \equiv -5 \pmod p$. Przyjmując $a = st^{-1}$ weźmy kratę rozpiętą przez wektory $u = (a, 1)$ oraz $v = (p, 0)$. Pole równoległoboku bazowego to $p \cdot 1 = p$. Niech $E = \{(x, y) : x^2 + 5y^2 \leqslant c\}$ dla pewnego c, które doprecyzujemy później - jest to elipsa z wypełnieniem o półosiach $\sqrt{c}$ oraz $\sqrt{c/5}$, więc jej pole wynosi $\frac{\pi c}{\sqrt{5}}$. Chcemy mieć $\frac{\pi c}{\sqrt{5}} \geqslant 4p$, czyli dobieramy stałą $c = 4\sqrt{5}\pi^{-1}p$. Z Minkowskiego wnioskujemy więc, że istnieje w E niezerowy punkt kratowy, tzn punkt $(0, 0) \neq (x, y) = ku + lv = (ka + lp, k)$. Z definicji E mamy $0 < x^2 + 5y^2 \leqslant c = 4\sqrt{5}\pi^{-1}p < 3p$, zaś z definicji a mamy $x^2 + 5y^2 = (ka + lp)^2 + 5k^2 = p \cdot \text{coś} + k^2(a^2 + 5) \equiv 0 \pmod p$. Stąd, $x^2 + 5y^2 = p$ lub $x^2 + 5y^2 = 2p$. Druga opcja to teza, a pierwszą odrzucamy z $p \equiv 3 \pmod 4$.

Zadania

Zadanie 1. Dany jest trójkąt, w którym kąty wewnętrzne wynoszą α, β, γ. Wykaż, że:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 2. Dany jest trójkąt, w którym kąty wewnętrzne wynoszą α, β, γ. Wykaż, że:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$$

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi:

$$(a^4 + b^4 + c^4)(a + b + c)^2 \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)^3$$

Zadanie 4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi:

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}\right)^{a+b+c} \geqslant a^a b^b c^c \geqslant \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^{a+b+c}$$

Zadanie 5. Udowodnij, że dla nieujemnych liczb x, y, z o sumie 3 zachodzi:

$$\frac{x}{y^2 + y + 1} + \frac{y}{z^2 + z + 1} + \frac{z}{x^2 + x + 1} \geqslant 1$$

Zadanie 6. Czy twierdzenie Helly'ego jest prawdziwe w przypadku, gdy rozpatrywanych zbiorów jest nieskończenie wiele? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7. (Twierdzenie Klee, "Tłusty Helly") Dana jest liczba dodatnia r oraz skończony zbiór $\mathcal{A}$ wielokątów wypukłych na płaszczyźnie, o której wiadomo, że w przecięcie dowolnych trzech wielokątów ze zbioru $\mathcal{A}$ da się zmieścić okrąg o promieniu r. Udowodnij, że w przecięcie wszystkich wielokątów ze zbioru $\mathcal{A}$ da się zmieścić taki okrąg.

Zadanie 8. Dane jest n punktów płaszczyzny takie, że dowolne dwa są odległe od siebie o nie więcej niż 1. Udowodnij, że wszystkie te punkty można pokryć kołem o promieniu $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Zadanie 9. Na płaszczyźnie leży n prostokątów o bokach równoległych do osi OX i OY o tej własności, że dowolne dwa mają punkt wspólny. Pokaż, ze wszystkie prostokąty mają punkt wspólny.

Zadanie 10. Płaszczyzna pokryta jest przez 2025 półpłaszczyzn otwartych (tzn. bez brzegów). Udowodnij, że można spośród nich wybrać takie trzy, które pokrywają całą płaszczyznę.

Zadanie 11. Sfera pokryta jest przez 2025 półsfer otwartych. Udowodnij, że pewne cztery z nich pokrywają całą sferę.

Zadanie 12. Na płaszczyźnie położona jest dowolna skończona rodzina wielokątów (niekoniecznie wypukłych) o tej własności, że dowolne dwa wielokąty mają punkt wspólny. Pokaż, że dla dowolnego punktu na płaszczyźnie istnieje okrąg o środku w tym punkcie mający punkt wspólny z każdym elementem rozważanej rodziny wielokątów.

Zadanie 13. Na płaszczyźnie w każdym punkcie o obydwu współrzędnych całkowitych rosną identyczne drzewa, których pnie mają promienie $r < \frac{1}{2}$. Wycinamy drzewo z punktu $(0, 0)$ i stajemy centralnie na pieńku. Udowodnij, że nie zobaczymy niczego, co stoi w odległości większej lub równej $\frac{1}{r}$.

Zadanie 14. (Aproksymacja Dirichleta) Dane są $\alpha \in (0, 1)$ oraz $N \in \mathbb{Z}_{>0}$. Udowodnij, że istnieje taka para $n, m \in \mathbb{Z}$, że $0 < m \leqslant N$, $0 \leqslant n$ oraz $|\alpha - \frac{n}{m}| < \frac{1}{mN}$.

Zadanie 15. (ŚTF - Średnie/Świąteczne Twierdzenie Fermata) Udowodnij, że liczby pierwsze postaci $x^2 + y^2$ dla liczb całkowitych x, y to dokładnie te liczby p, które nie dają reszty 3 z dzielenia przez 4.

Zadanie 16. (tw Krasnosielskiego) Na płaszczyźnie dany jest zbiór $\mathcal{F}$. Powiemy, że punkt $A \in \mathcal{F}$ widać z punktu $B \in \mathcal{F}$, jeśli odcinek AB jest w całości zawarty w $\mathcal{F}$. Wiadomo, że dowolne trzy punkty $A, B, C \in \mathcal{F}$ widać z pewnego punktu $W_{A,B,C} \in \mathcal{F}$. Udowodnij, że istnieje w $\mathcal{F}$ punkt, z którego widać każdy punkt zbioru $\mathcal{F}$.

Autor: Mikołaj Znamierowski Prowadzący: Mikołaj Znamierowski

Rozwiązania

Rozwiązanie (1)**.** Bierzemy wklęsłą $f(x) = \sin x$, wagi równe $\frac{1}{3}$, argumenty α, β, γ.

Rozwiązanie (2)**.** Bierzemy wklęsłą $f(x) = \ln \cos x$, wagi równe $\frac{1}{3}$, argumenty α, β, γ.

Rozwiązanie (3)**.** Bierzemy wypukłą $f(x) = x^3$ oraz wagi $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$ do argumentów a, b, c.

Rozwiązanie (4)**.** Najpierw logarytmujemy wszystko i dowodzimy dwóch oddzielnie. Do pierwszej nierówności bierzemy wklęsłą $f(x) = \ln x$, wagi równe $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$ i $\frac{c}{a+b+c}$ dla argumentów odpowiednio a, b, c. Do drugiej bierzemy wypukłą $f(x) = x \ln x$, wagi $\frac{1}{3}$ do argumentów a, b, c.

Rozwiązanie (5)**.** Weźmy $f(t) = (t^2 + t + 1)^{-1}$, wtedy $f''(t) = 6(t^2 + t + 1)^{-3}(t^2 + t)$, co jest nieujemne dla nieujemnych t. Stusujemy Jensena z wagami $\frac{x}{3}$, $\frac{y}{3}$, $\frac{z}{3}$. Po przemnożeniu przez 3 dostajemy $LHS \geqslant 3f(\frac{w}{3})$, gdzie $w = xy + yz + zx$. Trzeba zatem pokazać, że $f(\frac{w}{3}) \geqslant \frac{1}{3}$. Łatwo widać, że $w \leqslant x^2 + y^2 + z^2$, więc $3w = w + 2w \leqslant (x + y + z)^2 = 9$, czyli $\frac{w}{3} \leqslant 1$. Ponadto, f jest malejąca i $f(1) = \frac{1}{3}$, więc teza.

Rozwiązanie (6)**.** W ogólności nie - można rozpatrzeć rodzinę zbiorów $A_n = (0, \frac{1}{n})$ na prostej - każde dwa się tną, ale przecięcie wszystkich jest puste. Jeśli jednak dołożymy założenie o domkniętości, jest już ok dla przeliczalnie wielu zbiorów, o ile przynajmniej jeden jest ograniczony. Dla nieprzeliczalnie wielu potrzeba ograniczoności każdego z nich.

Rozwiązanie (7)**.** Dla danego wielokąta wypukłego F rozpatrujemy zbiór F^* możliwych środków okręgów o promieniach r zawartych w F. Każdy taki zbiór jest wielokątem wypukłym (inaczej, gdyby punkt odcinka znalazł się w źakazanej strefie", moglibyśmy go przesunąć o r dostając odcinek wychodzący poza F). Każde trzy takie zbiory się przecinają, więc z Helly'ego wszystkie się tną, co daje tezę.

Rozwiązanie (8)**.** Na podstawie poprzedniego, wystarczy pokazać, że działa to dla $n = 3$. Jeśli punkty są współliniowe lub tworzą trójkąt nieostrokątny, to bierzemy środek najdłuższego boku i koło o tym środku jest ok. Dla ostrokątnego bierzemy O jako środek okręgu opisanego. Bso $\sphericalangle ABC$ jest największy, więc nie mniejszy niż $60°$. Niech P to rzut O na AC. Wówczas, jeśli $\sphericalangle AOP = \alpha$, to $AP \leqslant \frac{1}{2}$ oraz $\alpha \geqslant 60°$, więc $AO = \frac{AP}{\sin \alpha} \leqslant \frac{1}{2 \sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie (9)**.** Rzutujemy prostokąty na osie i korzystamy dwukrotnie z jednowymiarowego Helly'ego.

Rozwiązanie (10)**.** Załóżmy przeciwnie. Wówczas dopełnienia tych półpłaszczyzn spełniają założenia tw Helly'ego, więc istnieje punkt wspólny wszystkich. Wtedy jednak, byłby to punkt niepokryty przez żadną z 2024 półpłaszczyzn, co jest sprzeczne.

Rozwiązanie (11)**.** Podobnie, jak powyżej, ale w trójwymiarze.

Rozwiązanie (12)**.** Niech A będzie dowolnym punktem płaszczyzny, a k dowolną półprostą o początku w A. Dla danego wielokąta bierzemy jego punkt najbliższy i najdalszy od A, a następnie odkładamy te odległości na k. W ten sposób wielokąt jest śpłaszczony"do odcinka na k. Dowolone dwa takie odcinki się przecinają, więc wszystkie się przecinają w pewnym punktcie T. Okrąg o środku w A i promieniu AT jest dobry.

Rozwiązanie (13)**.** Niech $O = (0, 0)$ oraz P to taki punkt, że $OP \geqslant \frac{1}{r}$. Rozpatrujemy prostokąt symetryczny względem O, którego boki są równoległe lub prostopadłe do OP, żeby P leżał na środku boku prostopadłego do OP i by bok ten miał długość $2r$. Pole tego prostokąta to $2r \cdot 2OP \geqslant 4$, więc w jego wnętrzu (lub na brzegu) jest punkt kratowy. Wówczas drzewo w tym środku zasłania nam punkt P.

Rozwiązanie (14)**.** Rozważamy kratę wyznaczoną przez $[0, 1]$ i $[1, 0]$ (dla której $|P| = 1$) oraz równoległobok $R = \{(x, y) : |x| \leqslant N + \frac{1}{2}, |y - \alpha x| < \frac{1}{N}\}$. R jest oczywiście ograniczony, symetryczny, wypukły i jego pole wynosi $|R| = \frac{2(2N+1)}{N} > 4|P|$. Stosując Minkowskiego mamy niezerowy punkt $(m, n) \in \mathbb{Z}^{\not{2}} \cap R$. Gdyby $m = 0$, to z definicji R mamy $|n| < \frac{1}{N}$, co nie jest możliwe dla $n \neq 0$. Z symetrii równoległoboku, możemy więc wziąć $m > 0$. Jeżeli wówczas $n < 0$, to możemy wziąć $n = 0$. Jeśli zaś $n \geqslant 0$, to teza z definicji R.

Rozwiązanie (15)**.** Mamy $2 = 1^2 + 1^2$. Z reszt kwadratowych wiemy, że $p \not\equiv 3 \pmod 4$. Dla $p \equiv 1 \pmod 4$ istnieje takie a, że $a^2 \equiv -1 \pmod p$. Rozpatrujemy kratę zadaną przez wektory $u = (p, 0)$ oraz $v = (a, 1)$. Pole równoległoboku bazowego to p. Rozpatrzmy okrąg o środku w $(0, 0)$ i promieniu $\sqrt{\frac{4p}{\pi}}$. Wówczas pole to $\pi(\sqrt{\frac{4p}{\pi}})^2 = 4p$, więc z Minkowskiego jest w tym kole niezerowy punkt kratowy $(x, y) = ku + lv = (kp + la, l)$. Wówczas z definicji koła mamy $0 < x^2 + y^2 \leqslant \frac{4p}{\pi} < 2p$, zaś z definicji a mamy $x^2 + y^2 = (kp + la)^2 + l^2 = p \cdot \text{coś} + l^2(a^2 + 1) \equiv 0 \pmod p$. Ostatecznie więc $x^2 + y^2 = p$.

Rozwiązanie (16)**.** Wymaga nieskończonego tw. Helly'ego.