Wielomiany

Artur Wojtuszkiewicz

Warsztaty Matematyczne 2022

W poniższym skrypcie, jeśli nie napisano inaczej, chodzi o liczby rzeczywiste.

1 Teoria

1.1 Podstawy

Def. 1 *Wielomian stopnia n zmiennej x to wyrażenie W postaci:*

$$W = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ gdzie } a_n \neq 0$$

Dozwolony jest też wielomian zerowy $W = 0$. $a_n, \ldots, a_0$ nazywamy ***współczynnikami*** *wielomianu, przy czym a_n nazywamy* ***współczynnikiem wiodącym****, a a_0* ***wyrazem wolnym****. Stopnień wielomianu oznaczamy przez $\deg(W)$.* ***Wielomianem unormowanym*** *nazwiemy taki wielomian, że $a_n = 1$.*

Współczynniki a_k niewystępujące w wielomianie zdefiniujemy jako $a_k = 0$.

Def. 2 ***Wartość*** *wielomianu w punkcie t, oznaczamy jako $W(t)$, otrzymujemy ją przez wstawienie t w miejsce zmiennej.* ***Funkcja wielomianowa*** *to funkcja, przyporządkowująca każdej liczbie wartość wielomianu w danym punkcie. Dla wielomianów o współczynnikach rzeczywistych rozróżnienie wielomianu i jego funkcji nie jest jednak istotne.* ***Pierwiastkiem*** *wielomianu nazywamy liczbę t taką, że $W(t) = 0$.*

Na wielomianach możemy też wykonywać pewne operacje, wyglądają one dokładnie tak jak byśmy się spodziewali, jednak definiujemy je, jako że x nie jest liczbą. Poniżej $A = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $B = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$:

- $A = B$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_i = b_i$ dla wszystkich i naturalnych
- $A + B = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i)\, x^i$
- $A \cdot B = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) x^i$
- $-A = \sum_{i=0}^{n} -a_i x^i$
- $A \circ B$ (złożenie) równe jest wielomianowi otrzymanemu przez wstawienie w miejsce zmiennej wielomianu A, kopii wielomianu B oraz rozpisanie według powyższych definicji

Tak zdefiniowane operacje zachowują się analogicznie do operacji na liczbach całkowitych (dodawanie i mnożenie są łączne i przemienne, mnożenie jest rozdzielne na dodawanie, itp.). Dla $t \in \mathbb{R}$ zachodzi również oczywiście $(A + B)(t) = A(t) + B(t)$, $(A \cdot B)(t) = A(t) \cdot B(t)$, $(-A)(t) = -A(t)$, $(A \circ B)(t) = A(B(t))$, ale jest jeszcze jedna podobna własność, która ma nieco mniej trywialny dowód:

Twierdzenie 1 *$A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A(t) = B(t)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych t.*

Operacje mają też przewidywalny wpływ na stopień wielomianu:

Twierdzenie 2 *Zachodzi:*

- $\deg(A + B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$
- $\deg(A \cdot B) = \deg(A) + \deg(B)$
- $\deg(A \circ B) = \deg(A) \cdot \deg(B)$

przy czym $\deg(0)$ *definiujemy tutaj jako $-\infty$.*

1.2 Dzielenie a pierwiastki

Wielomianów nie można w ogólności dzielić[1]. Możliwe jest jednak dzielenie z resztą.

Twierdzenie 3 (Twierdzenie o dzieleniu wielomianów z resztą) *Dla wielomianów W, D ($D \neq 0$) istnieją jednoznacznie wyznaczone wielomiany Q, R, takie że $W = D \cdot Q + R$ oraz $\deg(R) < \deg(D)$.*

Dzielenie wielomianów z resztą możemy wykonywać analogicznie do dzielenia pisemnego.

Def. 3 (Podzielność) *Wielomian W nazywamy podzielnym przez D, jeśli istnieje wielomian Q taki, że $W = D \cdot Q$. Dla $D \neq 0$ jest to równoważne temu, że W daje resztę 0 w dzieleniu przez D.*

Twierdzenie 4 (Równość Bézouta) *Reszta z dzielenia wielomianu W przez $x - a$, wynosi $W(a)$.*

Z powyższego twierdzenia płynie bardzo ważny wniosek: a jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy kiedy ten wielomian jest podzielny przez $x - a$. Można więc dowolny wielomian zapisać w postaci $W = (x-r_1)^{k_1} \cdot (x-r_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-r_t)^{k_t} \cdot Q$, dla pewnego wielomianu Q, gdzie $r_1, r_2, \ldots, r_t$ są pierwiastkami wielomianu, a $k_1, k_2, \ldots, k_t$ liczbami całkowitymi dodatnimi, nazywanymi krotnościami.

Def. 4 (Krotność pierwiastka) *Dla danego pierwiastka r, jest to największa liczba całkowita k taka, że $(x - r)^k$ dzieli dany wielomian.*

Twierdzenie 5 (Twierdzenie Lagrange'a) *Suma krotności pierwiastków niezerowego wielomianu nie przekracza jego stopnia.*

Istotnym wnioskiem z tego twierdzenia jest fakt, że jeśli wielomian ma nieskończenie wiele pierwiastków, to jest on wielomianem zerowym (każdy inny wielomian na stopień będący liczbą naturalną).

Przykład 1 *Udowodnij, że jeśli funkcja f jest okresowa i nie jest stała, to nie istnieje wielomian W, taki że $W(t) = f(t)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.*

Rozwiązanie: Przyjmijmy że istnieje taki wielomian. Niech τ będzie okresem funkcji f. Wtedy wielomian $W - f(0)$ ma pierwiastki $k\tau$ dla k całkowitych, czyli jest ich nieskończenie wiele. Nie jest to jednak wielomian zerowy, ponieważ wtedy f byłaby stała, co daje sprzeczność.

Ćwiczenie 1 *Udowodnij, że dla dowolnych wielomianów A, B z następujących warunków wynika $A = B$:*

1. *istnieje nieskończenie wiele parami różnych liczb x_i takich, że $A(x_i) = B(x_i)$,*
2. *istnieją parami różne liczby $x_1, x_2, \ldots, x_k$ takie, że $deg(A), deg(B) < k$ oraz $A(x_i) = B(x_i)$.*

1.3 Rozkład

Def. 5 (Wielomian nierozkładalny) *To taki wielomian W, że dla dowolnych wielomianów A, B, spełniających $A \cdot B = W$, dokładnie jeden spośród A, B jest wielomianem stałym.*

Twierdzenie 6 (Jednoznaczność rozkładu) *Każdy niezerowy wielomian można jednoznacznie (co do kolejności) przedstawić jako iloczyn unormowanych wielomianów nierozkładalnych i stałej.*

Podobnie jak w liczbach całkowitych wymnożenie liczby przez -1 nie zmienia zbioru liczb które się przez nią dzielą, tak w wielomianach przemnożenie przez (niezerową) stałą również na to nie wpływa, stąd w powyższym twierdzeniu wymagamy unormowania wielomianów, na które rozkładamy.

Dzięki jednoznaczności rozkładu możemy zdefiniować też NWD i względną pierwszość. NWD wielomianów jest zdefiniowane jednoznacznie co do stałej i jest ich wspólnym dzielnikiem o największym stopniu. Każdy wspólny dzielnik danych wielomianów dzieli ich NWD. Możemy je obliczać algorytmem Euklidesa.

Twierdzenie 7 *Każdy (niezerowy) wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na iloczyn wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopni 1 i 2 (i stałą).*

[1] Ale można przekształcić równanie w następujący sposób: $A \cdot D = B \cdot D \implies A \cdot D - B \cdot D = 0 \implies (A - B) \cdot D = 0$, co oznacza że co najmniej jeden z wielomianów $A - B$, D jest zerowy, więc jeśli wiemy że $D \neq 0$, to $A = B$

1.4 Wielomiany o współczynnikach wymiernych

Cała powyższa teoria, poza twierdzeniem 7, działa również kiedy zapomnimy o istnieniu liczb rzeczywistych i ograniczymy się jedynie do wymiernych.

1.5 Znajdowanie pierwiastków (czasem niestety trzeba)

Twierdzenie 8 *Wielomian $ax^2 + bx + c$ ma pierwiastki $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Jeśli wyrażenie pod pierwiastkiem jest ujemne, wielomian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych.*

Twierdzenie 9 (Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu całkowitego) *Jeśli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych $W = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, to $q \mid a_n$, $p \mid a_0$.*

Dla danego wielomianu o współczynnikach całkowitych istnieje więc skończona lista możliwych pierwiastków wymiernych. Nie jest jednak gwarantowane że będzie miał jakikolwiek pierwiastek wymierny. Kiedy wielomian ma współczynniki wymierne, możemy na potrzeby szukania pierwiastków przemnożyć go przez stałą tak, aby miał współczynniki całkowite, gdyż nie zmienia to pierwiastków wielomianu.

Zazwyczaj warto też najpierw sprawdzić czy 0 lub 1 jest pierwiastkiem, jako że jest to dość łatwe.

Czasem zdarza się, że wielomian jest złożeniem dwóch wielomianów. Gdy $W = A \circ B$, można znaleźć pierwiastki A, i dla każdego z nich (r_i) znaleźć pierwiastki $B - r_i$. Przydatne są również oczywiście wzory skróconego mnożenia, czy też zauważenie różnych innych zależności między współczynnikami.

Przykład 2 (Pałowanie) *Znajdź pierwiastki wielomianu $W = 3x^7 - 13x^5 + 7x^3 - x$.*

Rozwiązanie: Zauważamy że $W = x \cdot \big(Q(x^2)\big)$, gdzie $Q = 3x^3 - 13x^2 + 7x - 1$. Dla Q znajdujemy pierwiastek wymierny $\frac{1}{3}$, otrzymując $Q = 3 \cdot (x^2 - 4x + 1) \cdot \big(x - \frac{1}{3}\big)$, wielomian $x^2 - 4x + 1$ możemy rozłożyć na $\big(x - \big(2 - \sqrt{3}\big)\big) \cdot \big(x - \big(2 + \sqrt{3}\big)\big)$. Otrzymujemy pierwiastki: 0, $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\pm\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1.6 Inne ważne fakty

1. Jeśli wielomian W ma współczynniki całkowite, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$, $a - b \mid W(a) - W(b)$
2. **(Wzory Viete'a)** Jeśli wielomian n-tego stopnia, ma n pierwiastków $r_1, r_2, \ldots, r_n$, to:

$$\begin{cases} -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_i r_i \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{i \neq j} r_i \cdot r_j \\ \vdots \\ (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \end{cases}$$

2 Zadania

1. (Interpolacja) Znajdź sposób na znalezienie unikalnego wielomianu W stopnia mniejszego od k, takiego że $W(x_i) = y_i$, dla parami różnych $x_1, x_2, \ldots, x_k$ i danych $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

2. Znajdź wszystkie wielomiany W spełniające $x \cdot W(x-1) = (x-2)W(x)$.

3. Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, n będzie liczbą naturalną nieparzystą, a t taką liczbą całkowitą, że $(W(W(\overset{n \text{ razy}}{\ldots} (W(t))\ldots) = t$. Udowodnij, że $W(t) = t$.

4. Wiedząc, że

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 13 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 38 \end{cases}$$

   wyznacz $x^4 + y^4 + z^4$.

5. Wyznacz wszystkie wielomiany W takie, że $W(x^2) = W(x)^2$.

6. Udowodnij, że dla wielomianów A, B istnieją wielomiany X, Y takie, że $AX + BY = NWD(A, B)$.

7. (Lemat Gaussa) Dane są wielomiany o współczynnikach całkowitych A, B, takie że NWD współczynników każdego z nich wynosi 1. Udowodnij, że :

   (a) NWD współczynników $A \cdot B$ wynosi 1.

   (b) A jest rozkładalny na wielomiany o współnikach całkowitych, wtedy i tylko wtedy gdy jest rozkładalny na wielomiany o współczynnikach wymiernych.

8. Dane są wielomiany A, B, C, przy czym jeden z nich jest stopnia 2, a pozostałe są stopnia 3, oraz zachodzi $A^2 + B^2 = C^2$. Udowodnij, że co najmniej jeden z wielomianów 3 stopnia ma trzy pierwiastki rzeczywiste.

9. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c różne od zera. Wyznacz wartość $\frac{1}{a^{2137}} + \frac{1}{b^{2137}} + \frac{1}{c^{2137}}$ wiedząc, że $a + b + c = 2137$ oraz $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2137}$.

10. (OM) Wielomiany P, Q spełniają $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, $P - Q$ dzieli $(P(P(\overset{n \text{ razy}}{\ldots} (P(x))\ldots) - (Q(Q(\overset{n \text{ razy}}{\ldots} (Q(x))\ldots)$

11. Znajdź wszystkie wielomiany P, Q spełniające $P \mid Q^2 - 1$, $Q \mid P^2 - 1$, $P + Q - 1 \mid P^2Q^2 - 1$ (znak "|" odnosi się w tym przypadku do podzielności wielomianów).

12. (Twierdzenie Schura) Udowodnij, że dla wielomianu W o współczynnikach całkowitych istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, dla których istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $W(n)$ jest podzielne przez daną liczbę pierwszą i $W(n) \neq 0$.