Autor: Krzysztof Zdon

Prowadzący: Krzysztof Zdon

WIELOMIANY

Bezout i dzielenie z resztą

Twierdzenie 1. Jeżeli $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ jest wielomianem stopnia n i $\alpha \in \mathbb{K}$, to istnieje taki wielomian $g(X) \in \mathbb{K}[X]$, że zachodzi równość:

$$f(X) = (X - \alpha)g(X) + f(\alpha)$$

Niegłupie zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolengo wielomianu $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ i liczb całkowitych a, b zachodzi

$$a - b \mid f(a) - f(b)$$

Twierdzenie 2. (Bezout) Element $\alpha \in \mathbb{K}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $g(X) \in \mathbb{K}[X]$, że

$$f(X) = (X - \alpha)g(X)$$

Twierdzenie 3. Jeżeli $a(X), b(X) \in \mathbb{K}[X]$ i $b(X) \neq 0$, to istnieją takie, jednoznacznie wyznaczone wielomiany $q(X), r(X) \in \mathbb{K}[X]$, że

$$a(X) = q(X)b(X) + r(X) \;\; i \;\; deg\, r(X) < deg\, b(X)$$

Największy wspólny dzielnik dla wielomianów

Def. 1 Niech dane będą dwa niezerowe wielomiany $a(X), b(X) \in \mathbb{K}[X]$. Wielomian $d(X) \in \mathbb{K}[X]$ nazywamy największym wspólnym dzielnikiem wielomianów $a(X)$ i $b(X)$, gdy:
1. $d(X)|a(X)$ oraz $d(X)|b(X)$,
2. jeżeli $e(X)|a(X)$ oraz $e(X)|b(X)$ to $e(X)|d(X)$.
Twierdzenie 1. Jeżeli dane są dwa niezerowe wielomiany $a(X), b(X) \in \mathbb{K}[X]$, to istnieją takkie wielomiany $s(X), t(X) \in \mathbb{K}[X]$, że:

$$NWD(a(X), b(X)) = a(X)s(X) + b(X)t(X)$$

Niegłupie zadanie 2. Udowodnij, że jesli dla wielomianów a, b, przy czym $b \not\equiv 0$ i wielomianów q, r zachodzi równość $a(X) = q(X)b(X) + r(X)$, to $NWD(a, b) = NWD(b, r)$.

Rozkłady wielomianów w $\mathbb{Q}[X]$

Def. 2 Wielomian $a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ nazwiemy wielomianem pierwotnym, jeśli $NWD(a_1, ..., a_n) = 1$.
Def. 3 Jeżeli $f(X) = b_0 + b_1X + ... + b_nX^n \in \mathbb{Q}[X]$ jest niezerowym wielomianem o współczynnikach wymiernych, to zawartością tego wielomianu nazywamy taką liczbę wymierną $C = C(f) > 0$, dla której zachodzi równość:

$$f(X) = C(f)(a_0 + a_1X + ... + a_nX^n) = C(f)a(X),$$

gdzie a jest wielomianem pierwotnym.
Niegłupie zadanie 3. Udowodnij, że niezerowy wielomian a o współczynnikach wymiernych ma dokładnie jedną zawartość.
Niegłupie zadanie 4. Jeżeli $f(X), g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ są dwoma wielomianami pierwotnymi, to $f(X)g(X)$ również jest wielomianem pierwotnym.
Twierdzenie 2. Jeżeli $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ i $f(X) = g(X)h(X)$ jest rozkładem na iloczyn wielomianów o współczynnikach wymiernych, to istnieją takie wielomiany $g'(X)$ oraz $h'(X)$ o współczynnikach całkowitych, że:

$$f(X) = g'(X)h'(X) \text{ oraz istnieją takie } c, d \in \mathbb{Q}, \text{ że } g(X) = dg'(X) \text{ oraz } h(X) = dh'(X).$$

Autor: Krzysztof Zdon
Prowadzący: Krzysztof Zdon

Zadania

Zadanie 1. Niech $P \in \mathbb{Z}[X]$ będzie unormowanym wielomianem. Załóżmy, że $P(q) = 0$ dla pewnej liczby $q \in \mathbb{Q}$. Udwodnij, że $q \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 2. Niech $P \in \mathbb{Z}[X]$ będzie takim wielomianem, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $P(-n) < P(n) < n$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $P(-n) < -n$.

Zadanie 3. Dany mamy wielomian $P \in \mathbb{Z}[X]$ stopnia n, dla którego $P(i) = 2^i$ dla $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Znajdź wartość $P(n+1)$.

Zadanie 4. Załóżmy, że istnieje $P \in \mathbb{Z}[X]$ o stopniu n, gdzie $2 \nmid n$ oraz ciąg $x_1, ..., x_n$ zdefiniowany zastępująco:$x_2 = P(x_1)$, $x_3 = P(x_2), ..., x_1 = P(x_n)$. Udowodnij, że ten ciąg jest w istocie stały.

Zadanie 5. Znajdź wszystkie takie wielomiany $f \in \mathbb{Z}[X]$, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ liczby $f(n)$ oraz $f(2^n)$ są względnie pierwsze.

Zadanie 6. Potężny Kaszub ma wielomian P o współczynnikach całkowitych, który posiada pewną własność: $n|P(2^n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$. Udowodnij, że P jest wielomianem zerowym.

Zadanie 7. Znajdź wszystkie takie wielomiany $P \in \mathbb{Z}[X]$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b $P(a+b)$ jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy $P(a) + P(b)$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 8. Udowodnij, że liczba

$$\sqrt{2012^2+1} + \sqrt{2013^2+1} + ... + \sqrt{2024^2+1}$$

jest niewymierna. *Wskazówka: Warto pomyśleć nad tym, czemu nie jest całkowita*