Mecz młodszych – rozwiązania

Zadanie 1. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

Dowód. Dowód: Podstawiając $x = y = 0$ dostajemy, że $f(0) = 0$. Zamieniając miejscami zmienne y i x dostajemy, że $f(y^2 - x^2) = f(x^2 - y^2)$, więc f jest nieparzysta. Podstawiając $x = 0$ dostajemy, że $f(x^2) = xf(x)$ i stąd $f(x^2 - y^2) + f(y^2) = f(x^2)$, czyli dla dodatnich x, y $f(a - b) = f(a) - f(b)$. Jeśli $a = 2b$ to $2f(b) = f(2b)$. Podstawiając $x = y + 1$ pod równość z treści dostajemy:

$$f(2y + 1) = (y + 1)f(y + 1) - yf(y) = (y + 1)(f(y) + f(1)) - yf(y) = f(y) + (y + 1)f(1)$$

Ponadto z powyższych $f(2y + 1) = 2f(y) + f(1)$, co daje nam $f(y) = yf(1)$, więc możliwe funkcje to $f(x) = kx$, które oczywiście spełniają równanie. ■

Zadanie 2. Niech n będzie nieparzystą liczbą większą niż 1. Niech $c_1, c_2, \ldots, c_n$ będą liczbami całkowitymi. Dla każdej permutacji $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ definiujemy

$$(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i.$$

Udowodnij, że istnieją dwie permutacje a i b zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ takie że $n! \mid S(a) - S(b)$.

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że wszystkie permutacje dają różne reszty modulo $n!$. Dana liczba a pojawia się przy współczynniku c_i w dokładnie $(n-1)!$ permutacjach, więc dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{n!} i \equiv \sum_{a \in S_n} S(a) \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i((n-1)! \cdot (1 + \ldots + n) = n! \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i \equiv 0$$

bo $\frac{n+1}{2}$ jest całkowite. Ale $\sum_{i=1}^{n!} i = \frac{n!(n!+1)}{2}$ co nie jest podzielne przez $n!$. ■

Zadanie 3. Dana jest liczby całkowita dodatnia n oraz liczby rzeczywiste a_1, a_2, $\ldots$,a_n. Pokazać, że istnieją m, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że

$$\left| \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right| \leqslant |a_k|.$$

Dowód. Niech $S_m := \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{i=m+1}^{n} a_i$ i $S_0 := -S_n$. Wtedy $S_m - 2a_m = S_{m-1}$. Rozpatrzmy ciąg $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1, S_0$. Bez szkody możemy założyć, że $S_n > 0$. Wówczas znajdujemy $i \geqslant 1$ takie, że $S_i \geqslant 0 \geqslant S_{i-1}$.

Przypuśćmy, że $S_i = |S_i| > |a_i|$ oraz $-S_{i-1} = |S_{i-1}| > |a_i|$. Ponieważ $S_i - 2a_i = S_{i-1}$, to $-S_i + 2a_i > |a_i|$, więc $2a_i > S_i + |a_i| > 2|a_i|$, co jest niemożliwe. ■

Zadanie 4. Magiczny Bartosz ma 100 kart ponumerowanych od 1 do 100, które wkłada do trzech pudełek. Jedno z nich jest niebieskie, drugie czerwone, a trzecie białe. Bartosz chce zaprezentować pewną sztuczkę przed publicznością - zawiązuje sobie oczy i wybiera jedną osobę z publiczności, następnie każe jej wziąć dwie karty z różnych pudełek oraz oznajmić ich sumę jemu oraz publiczności. Bartosz następne odgaduje, z których pudełek zostały wyjęte karty. Ile jest sposobów włożenia kart do pudełek tak, aby ta sztuczka zawsze działa?

Zadanie 5. Dane jest przyjęcie, na które przyszło 20 osób. Każda z nich ma w kieszeni pewną liczbę monet. Co minutę każda osoba, która ma przynajmniej 19 monet, oddaje po jednej monecie wszystkim pozostałym uczestnikom przyjęcia. Załóżmy że ta impreza trwa wiecznie, czyli że dla każdej liczby naturalnej n istnieje osoba, która odda monety w n-tej minucie. Jaka jest najmniejsza liczba monet, które zostały przyniesione na to przyjęcie?

Zadanie 6. Całkowite dodatnie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są parami różne. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{4} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Dowód. Niech $a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \ldots \leqslant a'_n$ oznaczają posortowany niemalejąco ciąg $a_1, \ldots, a_n$. Zachodzi nierówność $a'_i \geqslant i$, bo liczby $a'_1, \ldots, a'_n$ są parami różne i posortowane. Mamy też nierówności $\frac{1}{1} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n^2}$.

Ciągi $a'_1, \ldots, a'_n$ i $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n^2}$ są przeciwnie monotoniczne, więc z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{2}{4} + \frac{3}{9} + \ldots + \frac{n}{n^2} \leqslant \frac{a'_1}{1} + \frac{a'_2}{4} + \ldots + \frac{a'_n}{n^2} \leqslant \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{4} + \ldots + \frac{a_n}{n^2}$$

bo ciąg $a_1, \ldots, a_n$ jest permutacją ciągu $a'_1, \ldots, a'_n$. ■

Zadanie 7. Niech $\sqrt{3} = 1.b_1b_2b_3\ldots_{(2)}$ będzie zapisem binarnym $\sqrt{3}$. Udowodnij że dla każdej liczby naturalnej n przynajmniej jedna z cyfr $b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{2n}$ jest równa 1.

Zadanie 8. Liczby pierwsze p, q spełniają równanie

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia $q - p$.

Dowód. Przekształćmy równanie odejmując do niego stronami 2

$$\begin{aligned}
\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} &= \frac{2n}{n+2} \\
\frac{p}{p+1} - 1 + \frac{q+1}{q} - 1 &= \frac{2n}{n+2} - 2 \\
-\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q} &= -\frac{4}{n+2} \\
\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q} &= \frac{4}{n+2}
\end{aligned}$$

Oznacza to, że $q > p + 1$. Przekształcając dalej równoważnie otrzymujemy

$$\frac{q-p-1}{q(p+1)} = \frac{4}{n+2}$$
$$q-p-1 = \frac{4q(p+1)}{n+2}.$$

Zauważmy, że $q-p-1 \in \mathbb{N}_+$ i q musi skrócić się z $n+2$ (gdyż $q \nmid (q-p-1) < q$). Oznaczmy $u = \frac{n+2}{2} \in \mathbb{N}_+$. Wtedy

$$q-p-1 = \frac{4q(p+1)}{u}$$
$$uq - u(p+1) = 4(p+1),$$

z czego wynika, że $p+1 \mid uq$, ale $q > p+1$, bo q jest większą liczbą pierwszą niż p, czyli $p+1 \mid u$. Niech $v = \frac{u}{p+1} \in \mathbb{N}_+$. Teraz $q - p = 1 + \frac{4}{v} \in \{2, 3, 5\}$. ■

Zadanie 9. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o środku O. Punkty P i Q znajdują się odpowiednio na odcinkach CA i AB. Załóżmy że K, L i M są środkami odpowiednio odcinków BP, CQ i PQ a okrąg γ jest okręgiem opisanym na KLM. Załóżmy że PQ jest styczne do γ. Należy udowodnić, że $OP = OQ$.

Zadanie 10. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach BC i CA, przy czym proste DE i AB są równoległe. Punkt P leży na odcinku AM. Proste EM i CP przecinają się w punkcie X, a proste DP i CM przecinają się w punkcie Y. Wykazać, że punkty X, Y, B leżą na jednej prostej.

Zadanie 11. Rozstrzygnij, czy istnieje wielościan taki, że rzut tegoż wielościanu na dowolną płaszczyznę jest trójkątem