Mini PreOM 2023 - Dzień 5

Rozwiązania

Zadanie 1. Niech $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, będą takie, że $a^2 + b^2 = c^2$.
Udowodnij, że liczba $\frac{1}{2}ab$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
BSO możemy założyć, że trójka (a, b, c) jest parami względnie pierwsza, co korzystając ze znanej postaci trójek pitagorejskich daje, dla pewnych $n < m$ względnie pierwszych $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$ Załóżmy nie wprost, że $\frac{1}{2}ab = mn(m^2 - n^2) = mn(m + n)(m - n)$ jest kwadratem liczby całkowitej, a para ab ma minimalny iloczyn spośród trójek o tej własności. Oczywiście liczby $m, n, m + n, m - n$ są parami względnie pierwsze, więc wszystkie cztery są kwadratami liczb całkowitych. Niech $r^2 = m + n, s^2 = m - n$, mamy $u = \frac{r-s}{2}, v = \frac{r+s}{2}$ będące liczbami naturalnymi spełniającymi $v^2+u^2 = \frac{r^2+s^2}{2} = m = x^2$, co najmniej jedna z liczb u, v jest podzielna przez 2, oraz $\frac{uv}{2} = \frac{r^2-s^2}{8} = \frac{n}{4}$ więc dostaliśmy kolejną trójkę pitagorejską spełniającą warunki zadania jednak o mniejszym iloczynie, $\frac{n}{2} = uv < ab = 2(m-n)(m+n)m \cdot n$, dostajemy sprzeczność, co kończy dowód.

■

Zadanie 2. Na zewnątrz trójkąta ABC zbudowano prostokąty $ACDE, BAFG, CBHI$.
Udowodnij, że symetralne odcinków EF, GH i ID są współpękowe.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli $XYZW$ to prostokąt, to zachodzi $|TX|^2 + |TZ|^2 = |TY|^2 + |TW|^2$ dla dowolnego punktu T, z tw. Pitagorasa. Niech S będzie przecięciem symetralnych EF i SG. Dostajemy:

$$|CS|^2+|ES|^2-|DS|^2-|AS|^2+|AS|^2+|GS|^2-|BS|^2-|FS|^2-|CS|^2-|HS|^2+|BS|^2-|IS|^2 = 0$$

z czego wnioskujemy $|DS|^2 = |IS|^2$, czyli S należy do symetralnej EF, co kończy dowód.

■

Zadanie 3. Znajdź największe n naturalne takie, że n^2 jest różnicą sześcianów dwóch kolejnych liczb całkowitych oraz $2n + 79$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Zapiszmy $n^2 = (m + 1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1$, czyli, $(2n + 1)(2n - 1) = 4n^2 - 1 = 3(2m + 1)^2$.

Liczby $2n + 1, 2n - 1$ są nieparzyste i różnią się o 2, więc są względnie pierwsze. Ich iloczyn to potrojony kwadrat, więc jedna z nich jest kwadratem, a druga potrojonym kwadratem. Oczywiście $2n-1$ jest kwadratem, w przeciwnym przypadku $2n+1$ byłoby kwadratem przystającym do 2 modulo 3, co nie jest możliwe.

Niech $2n-1 = b^2$. Z założeń zadania wiemy $2n+79 = a^2$, mamy więc $(a+b)(a-b) = a^2-b^2 = 80$. Liczby $a + b, a - b$ są tej samej parzystości, ich iloczyn jest parzysty, więc obie są parzyste. Aby zmaksymalizować n, wystarczy zmaksymalizować $2b = (a+b)-(a-b)$ pilnując aby m pozostało całkowite. Dostajemy $a + b = 40, a - b = 2$, czyli $a = 21, b = 19$.
Otrzymujemy $n = 181, m = 104$, wynikiem jest więc **181**.

Zadanie 4. Danych jest zbiór S składający się z $n \geqslant 3$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie są współliniowe. Dla każdego wielokąta wypukłego o wierzchołkach w S niech $a(P)$ będzie liczbą jego wierzchołków, a $b(P)$ będzie liczbą punktów z S które leżą ściśle poza P. Udowodnij, że:

$$\sum_{P} \pi^{a(P)}(1-\pi)^{b(P)} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k}$$

Suma iteruje się po wielokątach wypukłych P o wierzchołkach w S o niezerowym polu.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy równość z tezy zamieniając π na zmienną x, mamy więc dwa wielomiany, aby pokazać ich równość w punkcie π pokażemy, że ich wartości są równe dla wszystkich $x \in [0,1]$, czyli, że otrzymane wielomiany są tożsamościowo równe. Ustalmy $x \in [0,1]$. Rozważmy losowy zbiór punktów $A \subseteq S$ taki, że każdy punkt zbioru S należy do niego niezależnie z prawdopodobieństwem x. Niech $w(B)$ będzie zbiorem punktów z S należących do otoczki wypukłej zbioru B. Oczywiście $w(B) \subseteq B$, ponieważ żadne trzy punkty nie są współliniowe. Mamy zatem dla dowolnego wielokąta wypukłego P równość $x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = \mathbb{P}(w(A) = w(P))$, co daje:

$$\begin{aligned}
\sum_{P} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = \sum \mathbb{P}(w(A) = w(P)) = \\
&= \mathbb{P}(w(A) \text{ jest zbiorem wierzchołków wielokąta wypukłego}) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(w(A) \text{ nie jest zbiorem wierzchołków wielokąta wypukłego}) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(|w(A)| \leqslant 2) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(|A| \leqslant 2) = \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(|A| = k) = \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$