

Liga Starszych

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania:

$$2^x + 3^x + 6^x = x^2$$

Zadanie 2. W grafie o n wierzchołkach istnieje $n - 1$ wierzchołków o parami różnych stopniach. Jaki może być stopień pozostałego wierzchołka.

Zadanie 3. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb $k \geq 1$, że

$$\left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor$$

jest nieparzysta.

Zadanie 4. Niech $PQRS$ będzie czworokątem cyklicznym, gdzie $\angle PSR = 90^\circ$ oraz H i K są rzutami punktu Q na proste PR i PS . Udowodnij, że prosta HK przecina odcinek QS w połowie.

Zadanie 5. Niech a, b, c będą bokami trójkąta. Udowodnij, że

$$\sqrt[3]{(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab)} > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Zadanie 6. Zygzak Michał i Zygzak Jan ścigają się ze sobą na nieskończonej płaszczyźnie podzielonej na kwadraty o równych bokach (w kratę).

Michał zaczyna. Ruch polega na zorientowaniu krawędzi o długości 1, z jednego punktu kratowego do innego. Jeśli w pewnym momencie skierowane segmenty utworzą cykl, to Jan ma tor, na którym może potrenować dojeżdżanie do mety i wygrywa. Czy Jan ma strategię, która zapewni trening dojeżdżania do mety?

Zadanie 7. Jeżeli graf planarny G nie ma cyklu długości 4 oraz j -ściany (ściana o j krawędziach) dla żadnego $5 \leq j \leq 9$, to można pokolorować wierzchołki tego grafu z użyciem 3 kolorów w taki sposób, że wierzchołki połączone krawędzią mają różny kolor.