Poręba Wielka 25.09.2024

KUŹNIA OLIMPIJSKA

Autor: Stefan Świerczewski

Prowadzący: Stefan Świerczewski

Niezmienniki

Niezmiennik to pewna własność, która nie ulega zmianie w czasie wykonywania procesu.

Przykład. 1 Mamy 2013 zapałek. W każdym ruchu możemy zabrać lub dołożyć dokładnie dwie zapałki. Czy wykonując pewną liczbę takich ruchów, możemy zabrać wszystkie zapałki?

Przykład. 2 Mamy daną liczbę $2012! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2012$. Obliczamy sumę cyfr tej liczby, następnie sumę cyfr tak otrzymanej liczby i tak dalej. Postępujemy tak, aż uzyskamy liczbę jednocyfrową. Jaka to liczba?

Przykład. 3 Dana jest szachownica 8×8 bez dwóch naprzeciwległych narożnych pól, czy szachownicę da się pokryć klockami domina, w taki sposób aby żadne 2 nie nachodziły na siebie?

Zad. 1 Na tablicy napisano liczby od 1 do 2024. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy różnicę. Postępujemy tak do momentu, gdy zostaniem nam jedna liczba. Czy może nią być liczbą 73?

Zad. 2 Dana jest szachownica 4×4 wypełniona znakami " $+$ " i "$-$ " w taki sposób, ze dokładnie jedno pole zawiera znak " $-$ ". Dozwolone są zmiany wszystkich znaków na przeciwne na dowolnej linii pionowej, poziomej oraz na głównej przekątnej. Czy wykonując takie operacje można otrzymać szachownicę z samymi plusami?

Zad. 3 Na tablicy zapisano dziesięć znaków "+"i piętnaście znaków -". W jednym ruchu ścieramy dwa dowolne znaki i zapisujemy na tablicy "+", gdy znaki były takie same, oraz -", jeśli były różne. Po 24 ruchach zostaje jeden znak, jaki?

Zad. 4 Na narożnym polu szachownicy 8×8 stoi wieża. Wykaż, że nie może ona przejść do przeciwległego rogu, odwiedzając każde pole dokładnie raz (wieża odwiedza każde pole, które mija na swej drodze).

Zad. 5 Na płaszczyźnie narysowano $2n$ punktów, gdzie żadne trzy nie są współliniowe. Wykaż, że da się dobrać n odcinków o końcach w tych punktach, gdzie żadne dwa odcinki nie przecinają się.

Zad. 6 Trzeba przesunąć ciężki fotel o kwadratowej podstawie. Można go obracać wokół dowolnego rogu o $90°$. Czy da się ustawić go obok poprzedniego miejsca, tak by zwrócony był w tę samą stronę?

Zad. 7 Na szachownicy 8×8 ułożono 21 klocków o wymiarach 3×1 tak, aby każdy klocek pokrywał całkowicie 3 pola. Które z pól mogło pozostać wolne?

Zad. 8 Na tablicy zostały zapisane liczby: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{2024}$. W jednym ruchu wybieramy dowolne dwie liczby, oznaczmy je przez a i b, ścieramy je i zamiast nich wpisujemy liczbę równą $a+b+ab$. Jaką liczbę możemy otrzymać po 2023 ruchach?

Zad. 9 W każdym polu szachownicy $m \times n$ zapisano jedną liczbę rzeczywistą. Możemy wykonać następującą operację: zmieniamy znaki wszystkich liczb stojących w jednym, wybranym przez nas wierszu lub w wybranej przez nas kolumnie. Czy za pomocą skończonej liczby ruchów da się doprowadzić do sytuacji, że suma liczb w każdym wierszu i każdej kolumnie jest liczbą dodatnią.

Zad. 10 Na tablicy znajdują się liczby $1, 2, \ldots, n$, gdzie $n > 1$ jest dodatnią liczbą całkowitą. Dopóki na tablicy nie pozostanie jedna liczba, z tablicy wybierane są w kolejnych krokach pewne dwie liczby a i b, następnie liczby te są ścierane i w ich miejscu zapisana jest jedna liczba $\frac{ab}{a+b}$. Udowodnij, że po wykonaniu $n-1$ kroków liczba pozostała na tablicy jest mniejsza od $\frac{n+1}{2n}$.

Zad. 11 Na szachownicy 8×8 ułożono 12 klocków o wymiarach 5×1 tak, aby każdy klocek pokrywał całkowicie 5 pól. Które cztery pola pozostały niepokryte?