SYMEDIANY

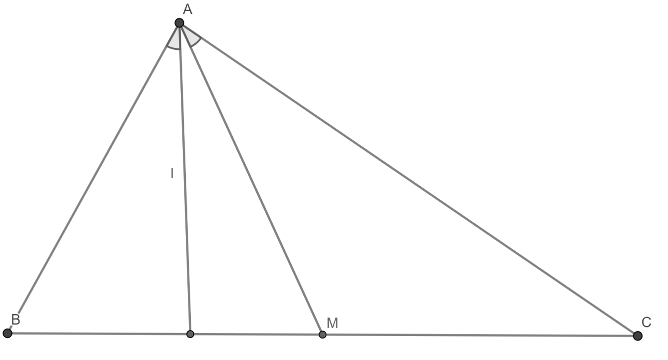
8 marca 2024

Rozdział 1

Teoria

1.1 Podstawy

Twierdzenie 1.1.1. *Dany jest trójkąt ABC. Punkt M jest środkiem boku BC. Prostą symetryczną do prostej AM względem dwusiecznej kąta BAC nazwiemy A-symedianą.*



Twierdzenie 1.1.2. *Prosta ℓ, przechodząca przez wierzchołek A trójkąta ABC, przecina bok BC w punkcie D, a okrąg ω opisany na trójkącie ABC w punktach A i E. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
(i) Prosta ℓ jest symedianą trójkąta ABC
(ii) $\frac{BD}{DC} = \frac{BA^2}{AC^2}$
(iii) Prosta ℓ przechodzi przez punkt przecięcia stycznych do ω w punktach B i C lub te trzy proste są równoległe
(iv) $AB \cdot CE = AC \cdot BE$.

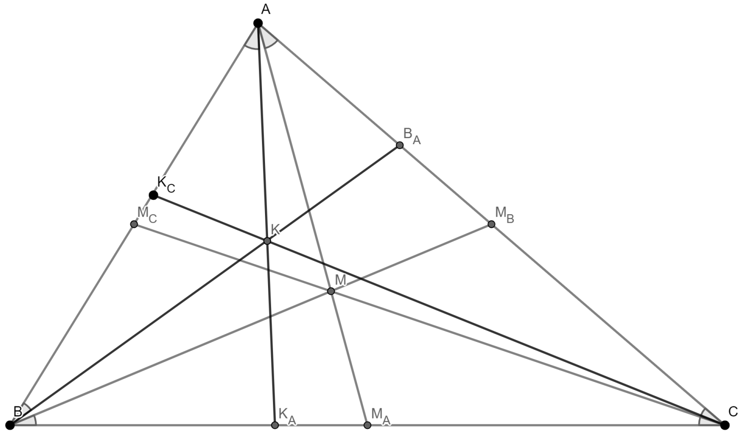
Definicja 1.1.3. Antyrównoległą do boku AB w trójkącie ABC nazywamy prostą przecinającą przeciwległy do kąta A bok pod takim samym kątem, jaki jest przy wierzchołku A oraz bok przeciwległy do wierzchołka B pod takim samym kątem, jaki jest przy wierzchołku B.

Lemat 1.1.4. *Symediana poprowadzona z wierzchołka A trójkąta ABC dzieli antyrównoległe względem boku BC na połowy.*

Lemat 1.1.5. *Punkt P leży na symedianie trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A. Wtedy iloraz odległości punktu P od prostych AB i AC jest równy ilorazowi długości boków AB i AC*

Twierdzenie 1.1.6. *Symediany trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie.*

1.2 Punkty Lemoine'a



Twierdzenie 1.2.1. *Pierwszy okrąg Lemoine'a: poprowadźmy antyrównoległe do każdego z boków trójkąta, przechodzące przez punkt przecięcia symedian. Wtedy punkty przecięcia tych antyrównoległych z bokami trójkąta leżą na jednym okręgu.*

Twierdzenie 1.2.2. *Drugi okrąg Lemoine'a: Rozpatrzmy równoległe do każdego z boków trójkąta, przechodzące przez punkt przecięcia symedian. Wówczas punkty przecięcia tych równoległych z bokami trójkąta leżą na jednym okręgu.*

Twierdzenie 1.2.3. *Trzeci okrąg Lemoine'a: Na każdym z trójkątów: AKB, BKC, CKA opisujemy okręgi. Punkty przecięcia tych okręgów z bokami lub przedłużeniami boków trójkąta leżą również na jednym okręgu, gdzie K jest punktem przecięcia symedian w trójkącie ABC.*

Twierdzenie 1.2.4. *Punkt Lemoine'a w trójkącie ABC jest jednocześnie środkiem ciężkości trójkąta utworzonego poprzez połączenie rzutów punktu Lemoine'a na boki trójkąta ABC, tzw. trójkąta spodkowego Lemoine'a.*

1.3 Punkty Humpty i Dumpty

Twierdzenie 1.3.1. *Punkt A-Humpty: Punkt P_A w trójkącie ABC jest zdefiniowany w następujący sposób: $\angle P_ABC = \angle P_AAB$ i $\angle P_ACB = \angle P_AAC$. Okazuje się, że zachodzą następujące zależności:*
(i) P_A leży na A-środkowej trójkąta ABC
(ii) $\frac{AB}{AC} = \frac{P_AB}{P_AC}$
(iii) Punkty B, P_A, H, C leżą na jednym okręgu, gdzie H to ortocentrum trójkąta ABC
(iv) $HP_A \perp AP_A$

Twierdzenie 1.3.2. *Punkt A-Dumpty: Punkt Q_A jest A-izogonalny do punktu A-Humpty w trójkącie ABC. Wtedy:*
(i) Q_A leży na A-symedianie trójkąta ABC
(ii) Q_A jest środkiem podobieństwa spiralnego dla trójkątów AQ_AC, CQ_AB
(iii) Punkty B, Q_A, O, C leżą na jednym okręgu, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na ABC
(iv) $OQ_A \perp AQ_A$

Rozdział 2

Zadankaaaa

Zadanie 2.0.1. Dany jest czworokąt ABCD wpisany w okrąg ω Udowodnić równoważność następujących warunków:
(1) $AB \cdot CD = BC \cdot DA$,
(2) BD jest symedianą trójkąta ABC,
(3) BD jest symedianą trójkąta CDA,
(4) AC jest symedianą trójkąta DAB,
(5) AC jest symedianą trójkąta BCD,
(6) styczne do ω w punktach A i C oraz prosta BD są współpękowe lub równoległe,
(7) styczne do ω w punktach B i D oraz prosta AC są współpękowe lub równoległe.

Zadanie 2.0.2. Na zewnątrz trójkąta ABC zbudowano kwadraty $ABDE$ oraz $ACFG$. Udowodnić, że punkt przecięcia prostych DE oraz FG leży na symedianie trójkąta ABC.

Zadanie 2.0.3. Dany jest trójkąt ABC. Symediana tego trójkąta wychodząca z wierzchołka A przecina okrąg opisany w punkcie D. Punkt M jest środkiem odcinka AD. Udowodnić, że kąty BMD, DMC oraz BAC mają równe miary.

Zadanie 2.0.4. Punkty P i Q leżą na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym proste BQ i CP są symedianami trójkąta ABC. Niech R i S będą środkami odcinków BQ i CP. Udowodnić, że $\angle CBS = \angle RCB$.

Zadanie 2.0.5. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\angle BAM = \angle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E, że $\angle BEK = \angle BAC$. Udowodnić, że $\angle KEC = \angle BAC$.

Zadanie 2.0.6. W trójkącie ABC mamy $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC tak, że $\angle PAB = \angle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Udowodnić, że $\angle APM + \angle BPC = 180$

Zadanie 2.0.7. W trójkącie ABC punkt X jest środkiem spiralnego podobieństwa przesyłającego punkt B w A oraz A w C. Udowodnić, że
a) X leży na symedianie trójkąta ABC.

b) jeśli AX przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D, to X jest środkiem odcinka AD.
c) obraz punktu D w symetrii względem prostej BC jest punktem izogonalnie sprzężonym do X względem trójkąta ABC.

Zadanie 2.0.8. W trójkącie ABC punkt G jest środkiem ciężkości. Niech P będzie dowolnym punktem boku BC. Punkty Q i R leżą na bokach AC i AB tak, że $PQ \parallel AB$ oraz $PR \parallel AC$. Udowodnić, że przy zmieniającym się punkcie P na odcinku BC , okręgi opisane na trójkątach AQR przecinają się w punkcie X takim, że $\angle BAG = \angle CAX$.

Zadanie 2.0.9. Okręgi ω_1, ω_2 o środkach odpowiednio O_1, O_2 przecinają się w punkcie A. Prosta l jest styczna do ω_1, ω_2 w punktach odpowiednio B i C. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt D jest taki, że A jest środkiem odcinka OD. Punkt M jest środkiem O_1, O_2. Udowodnić, że $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.

Zadanie 2.0.10. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty M, N i P są środkami odpowiednio boków BC, CA i AB. Symetralne boków AB i AC przecinają półprostą AM w punktach D i E, odpowiednio. Proste BD i CE przecinają się w punkcie F. Udowodnić, że A, N, F i P leżą na jednym okręgu.

Zadanie 2.0.11. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ w którym $AB \parallel CD$. Niech E będzie środkiem AC. Oznaczmy przez ω_1, ω_2 okręgi opisane na trójkątach ABE i CDE, odpowiednio. Niech P punktem wspólnym stycznej do ω_1 w punkcie A oraz stycznej do ω_2 w punkcie D. Udowodnić, że PE jest styczna do ω_2 .

Zadanie 2.0.12. Niech H i O to odpowiednio ortocentrum i środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Okrąg o średnicy AO przecina okrąg opisany na trójkącie BOC w punkcie M. Niech X będzie drugim punktem przecięcia okręgu opisanego na BOC z prostą AM. Podobnie niech N będzie punktem przecięcia okręgu o średnicy AH z okręgiem opisanym na BHC , a Y - drugim punktem przecięcia okręgu opisanego na BHC z prostą AN. Udowodnić, że $MN \parallel XY$.

Zadanie 2.0.13. Niech K będzie punktem Lemoine'a trójkąta ABC. Przez punkt K poprowadzono prostą przecinającą odcinki BC i CA w punktach P i Q, przy czym $\angle PQC = \angle CBA$. Przez punkt K poprowadzono też prostą przecinającą odcinki BC i AB w punktach R i S, przy czym $\angle BSR = \angle ACB$. Wykaż, że czworokąt $PRQS$ jest prostokątem.

Zadanie 2.0.14. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK \cdot AD = DL \cdot AB$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\angle DAP = \angle BAC$.

Rozdział 3

Jak tego nie robić, czyli pała na bary (tylko dla odważnych)

Rozważmy sobie $\triangle ABC$ ze standarowymi oznaczeniami.

Twierdzenie 3.0.1. *Niech* V=$(x : y : z)$ *i nie leży na okręgu opisanym. Wtedy sprzężeniem izogonalnym punktu V jest punkt* $(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z})$

Lemat 3.0.2. *Współrzędne wybranych punktów*

- *Punkt Lemoine'a* L=$(a^2 : b^2 : c^2)$
- $AA \cap BB = (a^2 : b^2 : -c^2)$
- *A-symediana* $\cap$ $BC = (0 : b^2 : c^2)$

Twierdzenie 3.0.3. *Równanie okręgu ooopisanego na* $\triangle ABC$

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

Twierdzenie 3.0.4. *Punkty 1,2,3, gdzie* $i = (x_i, y_i, z_i)$ *dla i=1,2,3 są współliniowe* $\iff$ *wyznacznik*

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

równy jest 0

Powyższa teoria powinna wystarczyć do zrobienia poniższego, całkiem łatwego przykładu

Zadanie 3.0.5. Niech dany będzie trójkąt ABC, gdzie AB=AC. Niech D=AA∩BB. Niech E=CD∩(ABC). Wykaż że AE połowi BD