Autor: Dominika Piętka

Prowadzący: Dominika Piętka

Geometria Posejdona

Teoria

- kąty w okręgu
- punkty w trójkącie: H, g, O, I, I_A
- okrąg opisany na trójkącie prostokątnym
- czworokąt wpisany w okrąg
- twierdzenie o trójliściu i trójzębie
- twierdzenie Talesa

Zadania

1. Punkt H jest ortocentrum $\triangle ABC$. Wykaż, że ortocentrum $\triangle BHC$ znajduje się na okręgu opisanym na ABC.
2. Wykazać, że punkty symetryczne do punktu H względem prostych AB, BC, CA leżą na okręgu opisanym na $\triangle ABC$.
3. Dany jest trójkąt ABC, oraz punkty P, Q na boku AB, takie że $BC = AP = PQ = QB = \frac{1}{3}AB$. Punkt M jest środkiem boku AC. Udowodnij, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$
4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB przy czym $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC, \sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$ Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta DEF pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.
5. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Prosta AH przecina prostą BC w punkcie D, zaś okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $K \neq A$. Udowodnij, że DH = DK.
6. Sformułować i udowodnić twierdzenie o trójzębie dla dwusiecznej kąta zewnętrznego.
7. Czworokąt ABCD jest wpisany w okrąg ω. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, prosta AI przecina okrąg ω w punkcie $M \neq A$. Punkt J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ADC, prosa AJ przecina okrąg ω w punkcie $N \neq A$. Wykaż, że jeśli $MI = NJ$, to $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$
8. Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH, który zawiera punkt H. Wyznaczyć miarę kąta BAC, jeśli spełniona jest równość $|AH| = |AS|$.
9. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.