Twierdzenia Cevy i Menelaosa

Adam Naskręcki

26 września 2022

1 Teoria

Def. 1. *Dla parami różnych punktów A, B, X leżących na jednej prostej definiujemy iloraz wektorów*

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{BX}} = \begin{cases} -\dfrac{AX}{BX}, & \text{jeśli } X \text{ leży na odcinku } AB \\[2ex] \dfrac{AX}{BX}, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \tag{1}$$

Twierdzenie 1. *(Tw. Cevy i doń odwrotne) Dany jest trójkąt ABC i punkty D, E, F na prostych odpowiednio BC, CA, AB, różne od punktów A, B, C. Wówczas proste AD, BE, CF są współpękowe wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}}\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}}\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{AE}} = -1. \tag{2}$$

Twierdzenie 2. *(Tw. Menelaosa i doń odwrotne) Dany jest trójkąt ABC i punkty D, E, F na prostych odpowiednio BC, CA, AB, różne od punktów A, B, C. Wówczas punkty D, E, F są wspóliniowe wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}}\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}}\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{AE}} = 1. \tag{3}$$

Def. 2. *Niech A, B, O będą parami różnymi punktami. Wtedy definiujemy kąt skierowany $\measuredangle AOB$ jako $\sphericalangle AOB$, jeśli idąc od półprostej OA do półprostej OB, wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$, poruszamy się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara oraz jako $-\sphericalangle AOB$, jeśli idąc od półprostej OA do półprostej OB poruszamy się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Powyżej przyjmujemy, że $\sphericalangle AOB$ jest wypukły.*

Twierdzenie 3. *(Trygoceva) Dany jest trójkąt ABC i punkty D, E, F na prostych odpowiednio BC, CA, AB, różne od punktów A, B, C. Wówczas proste AD, BE, CF są współpękowe wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\frac{sin\measuredangle ACF}{sin\measuredangle BCF}\frac{sin\measuredangle BAD}{sin\measuredangle CAD}\frac{sin\measuredangle CBE}{sin\measuredangle ABE} = -1. \tag{4}$$

Twierdzenie 4. *(Trygomenelaos) Dany jest trójkąt ABC i punkty D, E, F na prostych odpowiednio BC, CA, AB, różne od punktów A, B, C. Wówczas punkty D, E, F są wspóliniowe wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\frac{sin\measuredangle ACF}{sin\measuredangle BCF}\frac{sin\measuredangle BAD}{sin\measuredangle CAD}\frac{sin\measuredangle CBE}{sin\measuredangle ABE} = 1. \tag{5}$$

2 Zadania

1. W trójkącie prostokątnym ABC na przeciwprostokątnej AB obrano punkt D taki, że $BD = AC$. Wykaż, że w trójkącie ACD dwusieczna AL, środkowa CM i wysokość DH przecinają się w jednym punkcie.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$ i punkty X, Y na bokach odpowiednio AB, CD. Proste DX i AY przecinają się w punkcie K, a proste BY i CX w punkcie L. Udowodnić, że K, L, O są współliniowe, gdzie O jest środkiem $ABCD$.

3. Niech $ABCDE$ będzie pięciokątem wypukłym takim, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE$ oraz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ADE$. Przekątne BD i CE przecinają się w punkcie P. Wykazać, że prosta AP połowi odcinek CD.

4. Niech ABC będzie trójkątem. Okrąg przechodzący przez A i B przecina odcinki AC i BC w D i E, odpowiednio. Proste AB i DE przecinają się w F, a proste BD i CF przecinają się w M. Udowodnić, że $MF = MC$ wtedy i tylko wtedy gdy $MB \cdot MD = MC^2$.

5. Niech X, Y, Z leżą na bokach trójkąta ABC odpowiednio BC, CA, AB oraz proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie. Analogicznie punkty D, E, F leża odpowiednio na bokach YZ, ZX, XY i proste DX, EY, FZ przecinają się w jednym punkcie. Dowieść, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

6. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB w D, E, F, odpowiednio. X jest punktem wewnątrz trójkąta ABC takim, że okrąg wpisany w trójkąt XBC jest styczny do BC w D i styczny do CX oraz XB w Y i Z, odpowiednio. Pokazać, że E, F, Z, Y leżą na jednym okręgu.

7. Trójkąt ABC jest nierównoramienny. Punkt X jest punktem przecięcia stycznej do okręgu opisanego na trójkącie ABC w A z prostą BC. Analogicznie definiujemy punkty Y, Z. Udowodnić, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

8. Na bokach trójkąta ABC zbudowano po zewnętrznej stronie prostokąty ABY_1X_2, BCZ_1Y_2, CAX_1Z_2. Udowodnić, że symetralne odcinków X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 przecinają się w jednym punkcie.