



Kontest 3 – Finałiści

Zadanie 1. Dwusieczna kąta wewnętrznego BAC w trójkącie ABC przecina bok BC w punkcie D . Prosta k przechodzi przez punkt D i jest prostopadła do BC . Symetralna odcinka AD przecina AD i k odpowiednio w P i Q . Udowodnij, że punkty B, C, P, Q leżą na jednym okręgu.

Zadanie 2. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią, a $S(n)$ oznacza liczbę permutacji τ zbioru $\{1, \dots, n\}$, takich że $k^4 + (\tau(k))^4$ jest liczbą pierwszą dla każdego $k = 1, \dots, n$. Pokaż, że $S(n)$ jest kwadratem.

Zadanie 3. Funkcję $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ nazywamy gęstą, jeżeli dla dowolnej liczby wymiernej c takiej, że $f(x) < c < f(y)$, dla pewnych całkowitych x, y , istnieje taka liczba całkowita z , że $f(z) = c$.

Znaleźć wszystkie funkcje gęste f spełniające równanie:

$$f(x) + f(y) + f(z) = f(x)f(y)f(z),$$

dla wszystkich liczb całkowitych takich, że $x + y + z = 0$.

Zadanie 4. Niech $m, n \geq 2$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi, oraz niech a_1, a_2, \dots, a_n będą liczbami całkowitymi, z których żadna nie jest wielokrotnością m^{n-1} . Pokaż, że istnieją liczby całkowite e_1, e_2, \dots, e_n , nie wszystkie równe zero, takie że $|e_i| < m$ dla każdego i , oraz wyrażenie $e_1 a_1 + e_2 a_2 + \dots + e_n a_n$ jest wielokrotnością m^n .