Warszawa, 04.02.2025

KUŹNIA OLIMPIJSKA

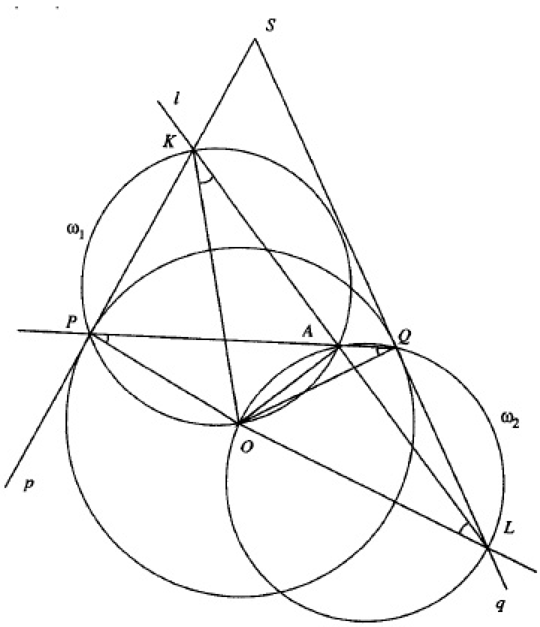
Rozwiązania Kontestu 2 – mini PreOM 2025

Zadanie 1. Dany jest okrąg o środku O, punkt A wewnątrz tego okręgu oraz cięciwa PQ, nie będąca średnicą, przechodząca przez A. Proste p i q są styczne do rozważanego okręgu odpowiednio w punktach P i Q. Prosta l przechodząca przez punkt A i prostopadła do OA przecina proste p i q odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $|AK| = |AL|$.

Źródło: XLV OM etap I, zadanie 4 link

Rozwiązanie 1. Rozpoczynamy od spostrzeżenia, że punkty P i K leżą po jednej stronie prostej OA, a punkty Q i L leżą po drugiej jej stronie (niezależnie od tego, czy punkt A leży na odcinku PQ bliżej końca P czy końca Q). Cięciwa PQ danego okręgu nie jest jego średnicą, więc proste styczne p i q przecinają się. Oznaczmy punkt przecięcia przez S.

Na trójkącie OAK opisujemy okrąg ω_1. Na trójkącie OAL opisujemy okrąg ω_2. Kąty OAK i OAL są z założenia proste, więc średnicami tych okręgów są (odpowiednio) odcinki OK i OL (rysunek 1).
Proste p i q, styczne do danego okręgu, są prostopadłe do jego promieni OP i OQ; kąty OPK i OQL są więc proste. Zatem okrąg ω_1 przechodzi przez punkt P, a okrąg ω_2 przechodzi przez punkt Q. (W szczególnym przypadku, gdy punkt A jest środkiem cięciwy PQ i w konsekwencji punkty K i L pokrywają się, odpowiednio, z punktami P i Q – nie można wprawdzie mówić o kątach OPK i OQL, ale konkluzja, że $P \in \omega_1$, $Q \in \omega_2$, jest oczywiście nadal słuszna.)



Rys. 1

Kąty OPA i OKA są kątami wpisanymi w okrąg ω_1, opartymi na wspólnym łuku OA (korzystamy tu z wcześniejszego spostrzeżenia, że punkty P i K leżą po tej samej stronie prostej OA). Mają więc te kąty jednakową rozwartość: $|\measuredangle OPA| = |\measuredangle OKA|$; podobnie $|\measuredangle OQA| = |\measuredangle OLA|$ (kąty wpisane w okrąg ω_2, oparte na wspólnym łuku OA). Zauważmy wreszcie, że:

$$|\measuredangle OPA| = |\measuredangle OPQ| = |\measuredangle OQP| = |\measuredangle OQA|,$$

bowiem trójkąt POQ jest równoramienny.

Z uzyskanych równości kątów wynika, że:

$$|\measuredangle OKA| = |\measuredangle OLA|.$$

Wobec tego trójkąty prostokątne OAK i OAL są przystające i otrzymujemy żądaną równość odcinków $|AK| = |AL|$.

Źródło: XLV OM etap I, zadanie 4 link

Zadanie 2. W domu znajduje się parzysta liczba lamp rozmieszczonych w pokojach w taki sposób, że w każdym pokoju są co najmniej trzy lampy. Każda lampa współdzieli włącznik dokładnie z jedną inną lampą, przy czym niekoniecznie z tego samego pokoju. Każda zmiana stanu włącznika wspólnego dla dwóch lamp powoduje jednoczesną zmianę ich stanów. Udowodnij, że dla każdego początkowego ustawienia lamp istnieje taka sekwencja zmian włączników, że na końcu w każdym pokoju znajdują się zarówno włączone, jak i wyłączone lampy.

Źródło: IMO Shortlist 2005, zadanie C1 link

Rozwiązanie 2. Pokój nazwiemy **ekonomicznym**, jeśli niektóre z jego lamp są włączone, a inne wyłączone. Dwie lampy wspóldzielące włącznik nazwiemy **bliźniaczymi**. Bliźniacza lampa lampy l zostanie oznaczona jako $\overline{l}$.

Załóżmy, że osiągnęliśmy stan z minimalną możliwą liczbą **nieekonomicznych** pokoi i że ta liczba jest dodatnia. Wybierzmy dowolny nieekonomiczny pokój, nazwijmy go R_0, i lampę l_0 w nim. Niech l_0 znajduje się w pokoju R_1. Włączając l_0, sprawiamy, że pokój R_0 staje się ekonomiczny; tym samym, ponieważ liczba nieekonomicznych pokoi nie może się zmniejszyć, zmiana ta musi sprawić, że pokój R_1 stanie się nieekonomiczny.

Następnie wybieramy lampę l_1 w R_1, której bliźniacza lampa $\overline{l_1}$ znajduje się w pokoju R_2. Włączając l_1, sprawiamy, że pokój R_1 staje się ekonomiczny, a tym samym pokój R_2 musi stać się nieekonomiczny. Kontynuując w ten sposób, otrzymujemy sekwencję lamp $l_0, l_1, \ldots$, gdzie każda lampa l_i znajduje się w pokoju R_i i $\overline{l_i} \neq l_{i+1}$ w R_{i+1} dla każdego i.

Włączniki lamp $l_0, l_1, \ldots$ są naciskane w tej kolejności. Sekwencja ta ma własność, że włączenie l_i i $\overline{l_i}$ sprawia, że pokój R_i staje się ekonomiczny, a pokój R_{i+1} nieekonomiczny.

Niech $R_m = R_k$ dla pewnych $m > k$ będzie pierwszym powtórzeniem w sekwencji (R_i). Zatrzymajmy się na przełączaniu lampy l_{m-1}. Pokój R_k był nieekonomiczny przed włączeniem l_k. Następnie włączamy lampy l_k i $\overline{l_{m-1}}$ w R_k, ale ponieważ te dwie lampy są różne (a ich bliźniacze lampy $\overline{l_k}$ i $\overline{l_{m-1}}$ również są różne), pokój R_k staje się ekonomiczny, podobnie jak pokoje $R_0, R_1, \ldots, R_{m-1}$. Powoduje to zmniejszenie liczby nieekonomicznych pokoi, co przeczy naszej początkowej hipotezie.

Źródło: IMO Shortlist 2005, zadanie C1 link

Zadanie 3. Dane są liczby całkowite dodatnie $n_1 < n_2 < \ldots < n_{2000} < 10^{100}$. Dowieść, że ze zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$ można wybrać niepuste rozłączne podzbiory A i B mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.

Rozwiązanie 3. Dla zbioru $X \subseteq \{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$ niech $s_0(X)$, $s_1(X)$ i $s_2(X)$ oznaczają odpowiednio liczbę elementów, sumę elementów i sumę kwadratów elementów zbioru X.

Wystarczy udowodnić, że istnieją takie dwa różne podzbiory C i D zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$, dla których $s_i(C) = s_i(D)$ dla $i = 0, 1, 2$. Wówczas zbiory $A = C \setminus D$ oraz $B = D \setminus C$ są niepuste i spełniają warunki zadania.

Dla dowolnego podzbioru X zbioru $\{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$ mamy:

$$s_0(X) < 10^4,\ \ s_1(X) < 2000 \cdot 10^{100} < 10^{104}, s_2(X) < 2000 \cdot 10^{200} < 10^{204}. \qquad (1)$$

Oznaczając $S(X) = s_0(X) + 10^4 s_1(X) + 10^{108} s_2(X)$ uzyskujemy:

$$S(X) < 10^{313} < (10^3)^{105} < 2^{1050} < 2^{2000}.$$

Stąd istnieją takie dwa różne podzbiory C, D zbioru $\{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$, że $S(C) = S(D)$.

Z nierówności (1) wynika, że $s_i(C) = s_i(D)$ dla $i = 0, 1, 2$, co kończy rozwiązanie zadania.

Źródło: LII OM etap III, zadanie 6 link

Zadanie 4. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite $n > 1$ takie, że istnieje dokładnie jedna liczba całkowita a spełniająca $0 < a \leqslant n!$ taka, że $a^n + 1$ jest podzielne przez $n!$.

Źródło: IMO Shortlist 2005, zadanie N4 link

Rozwiązanie 4. Pokażemy, że n ma żądaną własność wtedy i tylko wtedy, gdy jest liczbą pierwszą. Dla $n = 2$ możemy przyjąć tylko $a = 1$.

Dla parzystego $n > 2$ wiemy, ze $4 \mid n!$, ale $a^n + 1 \equiv 1 \pmod 4$ lub $a^n + 1 \equiv 2 \pmod 4$, co jest niemożliwe.

Zakładamy więc, że n jest liczbą nieparzystą. Oczywiście:

$$(n! - 1)^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod{n!}.$$

Jeśli n jest liczbą złożoną i d jest jej dzielnikiem pierwszym, to $n \geqslant 2d$, a zatem $d^2 \mid n!$. Wówczas:

$$\left(\frac{n!}{d} - 1\right)^n + 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!^k}{d^k}.$$

gdzie każdy składnik jest podzielny przez $n!$, ponieważ $d^2 \mid n!$. Zatem $n!$ dzieli $\left(\frac{n!}{d} - 1\right)^n + 1$, tym samym wszystkie liczby złożone są wykluczone.

Pozostaje wykazać, że jeśli n jest liczbą pierwszą i $n! \mid a^n + 1$, to $n! \mid a + 1$, a zatem $a = n! - 1$ jest jedyną wartością dla której $n! \mid a^n + 1$.

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą $p \leqslant n$. Jeśli

$$p \mid \frac{a^n + 1}{a + 1} = a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots - a + 1,$$

to również:

$$p \mid (a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots - a + 1)(-a - 1) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j a^j - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} a^i = (-a)^n - 1,$$

a z Małego Twierdzenia Fermata $p \mid (-a)^{p-1} - 1$. Stąd $p \mid (-a)^{NWD(n,p-1)} - 1$, z czego wynika, że $a \equiv -1 \pmod{p}$. Wtedy:

$$\frac{a^n + 1}{a + 1} = a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots - a + 1 \equiv n \pmod{p},$$

co implikuje, że $p = n$. Wynika stąd, że dla $p < n$ pierwszych, p nie dzieli $\frac{a^n+1}{a+1}$, więc $\frac{a^n+1}{a+1}$ jest względnie pierwsze z $(n-1)!$, a zatem $(n-1)!$ dzieli $a+1$.

Ponadto, $a^n \equiv a \pmod{n}$, więc n musi dzielić $a+1$, ponieważ $n \mid a^n+1$. Tym samym $n! \mid a+1$, co kończy dowód.

Źródło: IMO Shortlist 2005, zadanie N4 link