



PreOM 2023 - Dzień 1

Zadanie 1. Niech CH będzie wysokością w trójkącie ABC , gdzie $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Dwusieczna $\sphericalangle BAC$ przecina CH i CB w P i M odpowiednio. Dwusieczna $\sphericalangle ABC$ przecina CH i CA w Q i N odpowiednio. Udowodnij, że prosta przechodząca przez środki PM i QN jest równoległa do AB .

Zadanie 2. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające:

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad xf(x+xy) = xf(x) + f(y)f(x^2)$$

Zadanie 3. Niech $x, y \in \mathbb{Z}^+$. Pokaż, że jeśli $\frac{x^2+y^2+x+y-1}{xy-1}$ jest liczbą całkowitą, to jest równe 7.

Zadanie 4. W planszę 2013×2013 wpisujemy kolejno liczby $1, 2, 3, \dots, 2013^2$ (kolejne wiersze wypełniamy od lewej do prawej), następnie usuwamy jednocześnie wszystkie wiersze i kolumny posiadające co najmniej jeden kwadrat $(1, 4, 9, \dots)$ Ile komórek planszy nie zostało usuniętych?

*Rozwiązania należy wysłać na adres solvvy012@gmail.com, najpóźniej dnia:
19.03.2023.*

*Prace powinny być opatrzone numerami zadania oraz kontestu w tytule maila.
Przypominamy o wysyłaniu zadań w osobnych mailach (1 zadanie = 1 mail)*