Autor: Stefan Świerczewski

Prowadzący: Stefan Świerczewski

# Indukcja

## Przypomnienie:

Każdy z was pewnie kojarzy indukcję. Dowód indukcyjny zawiera trzy kroki:

- Należy Sformułować hipotezę indukcyjną.
- Dowieść przypadek bazowy (lub przypadki bazowe).
- Udowodnić przypadek ogólny na podstawie sprowadzenia do jednego lub więcej poprzednich przypadków.

## Kilka typów zadań kiedy indukcja może się przydać:

- Wykazywanie równości sum
- Gry, często dowiedzenie, które stany są wygrywające, można zrobić indukcyjnie
- Zadania zawierające rekurencję, bądź ciągi.
- Równania funkcyjne, przykładowo znalezienie wartości $f(nx)$ w liczbach całkowitych jak już znamy $f(x)$
- Zadania z teorii gier. Dowiedzenie, które stany są wygrywające, często wiąże się z indukcją.

## Klasyczne triki:

- Wzmocnienie tezy indukcyjnej
- Wykorzystanie indukcji zupełnej. Nie należy zapominać, że dowodząc prawdziwości $n$ mamy do dyspozycji wszystkie mniejsze przypadki.
- Czasem w zadaniach mamy podaną stałą, a może można dojść do niej indukcyjnie?

### Zadania

1. Z tablicy o wymiarach $2^n \times 2^n$ usunięto jedno pole o wymiarach $1 \times 1$. Udowodnij, że pozostałą część tablicy można pokryć niezachodzącymi na siebie płytkami w kształcie litery $L$, składającymi się z 3 kwadratów.
2. Bartek chce kupić przekąski na Warsztaty Matematyczne za dokładnie $n$ dolarów. Ma nieskończoną liczbę dwuzłotówek oraz nieskończoną liczbę pięciozłotówek. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 4$ będzie w stanie zapłacić za przekąski bez konieczności wydawania reszty.
3. Udowodnij, że $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ jest podzielne przez 7 dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych $n$.
4. Udowodnij nierówność $1 + nx \leq (1 + x)^n$, gdzie $x > -1$
5. Udowodnij nierówność iloczynową Weierstrassa:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \leq 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

dla $0 \leq x_i \leq 1$.

6. Udowodnij, że
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$$
dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych $n$.

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n$ liczba $2^{2^n} - 1$ ma co najmniej $n$ różnych dzielników pierwszych.

8. Dla danego zbioru punktów wewnątrz trójkąta prostokątnego udowodnij, że te punkty można połączyć łamaną, tak aby suma kwadratów długości odcinków w łamanej była mniejsza lub równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej danego trójkąta.

9. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym nierówność $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych $i, j$. Udowodnij, że
$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$
dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$.

10. Każdy wierzchołek skończonego grafu może być pokolorowany na czarno lub na biało. Początkowo wszystkie wierzchołki są czarne. Możemy wybrać wierzchołek $P$ i zmienić kolor $P$ oraz wszystkich jego sąsiadów. Czy zawsze jest możliwe, aby zmienić kolor każdego wierzchołka z czarnego na biały za pomocą ciągu operacji tego typu?

11. Niech $r \geq 2$ będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą, a $F$ nieskończoną rodziną zbiorów, z których każdy ma rozmiar $r$, i żadne dwa z tych zbiorów nie są rozłączne. Udowodnij, że istnieje zbiór o rozmiarze $r-1$, który przecina każdy zbiór z rodziny $F$.

12. Naturalna liczba $a$ jest zawarta w naturalnej liczbie $b$, jeśli możliwe jest otrzymanie $a$ przez usunięcie pewnych cyfr z liczby $b$ (w ich reprezentacjach dziesiętnych). Na przykład, 123 jest zawarte w 901523, ale nie jest zawarte w 3412.

    Czy istnieje nieskończony zbiór liczb naturalnych, taki że żadna liczba w tym zbiorze nie jest zawarta w żadnej innej liczbie z tego zbioru?