Kontest 2 – PreOM 2025

Zadanie 1. Zbiory $A_0, A_1, \ldots, A_{2023}$ spełniają następujące warunki:

$$A_0 = \{3\}$$

$$A_n = \{x+2 \mid x \in A_{n-1}\} \ \cup \{x(x+1)/2 \mid x \in A_{n-1}\}, \text{ dla każdego } n = 1, 2, \ldots, 2023.$$

Znajdź $|A_{2023}|$.

Zadanie 2. Niech $b, n > 1$ będą liczbami całkowitymi. Załóżmy, że dla każdego $k > 1$ istnieje taka liczba całkowita a_k, że wyrażenie

$$b - a_k^n$$

jest podzielne przez k. Udowodnij, że $b = A^n$ dla pewnej liczby całkowitej A.

Zadanie 3. Niech $ABCD$ będzie kwadratem oraz N punktem na odcinku CD. Ponadto K, L, M niech będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ADN, ABN, BCN. Udowodnij, że K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Zadanie 4. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ $(n \geqslant 2)$. Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \cdot \min\{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\} \leqslant \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$