Autor: Daniela Spurtacz
Prowadzący: Daniela Spurtacz

Vieta jumping

Wytłumaczenie

Vieta jumping polega na generowaniu kolejnych rozwiązań równania kwadratowego w celu 1) dojścia do sprzeczności przez nieskończone schodzenie lub 2) udowodnienia, że jest nieskończenie wiele rozwiązań.

Alternatywnie, część rozwiązań można sformułować przez metodę ekstremum. "Weźmy najmniejsze liczby całkowite dodatnie spełniające założenia i nie spełniające tezy i dojdźmy do sprzeczności".

Zadania

1. Dane są dodatnie liczby całkowite taki, że $ab+1 \mid a^2+b^2$. Udowodnij, że $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.
2. Dane są liczby dodatnie całkowite a, b takie, że $ab \mid a^2+b^2+1$. Udowodnij, że $a^2+b^2+1=3ab$.
3. Udowodnij, że dla każdego naturalnego N istnieje rozwiązanie równania
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2$$
w liczbach całkowitych większych niż N.
4. Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$. Udowodnij, że $a=b$.
5. Znajź najmniejszą liczbę dodatnią całkowitą n lub udowodnij, że nie ma takiej liczby, dla której zachodzi poniższe:
Jest nieskończenie wiele różnych $n-$tek liczb dodatnich wymiernych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takich że
$$a_1+a_2+\cdots+a_n \quad oraz \quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$
są obie liczbami całkowitymi.
6. Udowodnić, że jeśli dla pewnych liczb całkowitych dodatnich a, b liczby $ab+1$ oraz $ab+a+1$ są kwadratami pewnych liczb całkowitych, to $8(2b+1)|a$.
7. Znajdź wszystkie pary liczb dodatnich całkowitych (a,b) spełniających $a \mid b^2+b+1$ oraz $b \mid a^2+a+1$.