Grafy

Warsztaty Matematyczne

25.09.2022

1 Trochę teorii i definicji

Uwaga. *Tutaj będziemy operowali jedynie na grafach o skończonej liczbie wierzchołków i krawędzi.*

Graf (często oznaczany jako G) składa się z *wierzchołków* ($V(G)$) i *krawędzi* ($E(G)$). Jeśli się nie miało styczności z takimi pojęciami, można wyobrazić sobie, że wierzchołek to człowiek, a krawędź to relacja znajomości. Z tego mogą powstawać zadania typu:

Przykład 1. *W grupie 5 osób każdy ma dokładnie dwóch znajomych. Czy wynika z tego, że tych 5 osób może usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każdy usiadł pomiędzy swoimi znajomymi?*

Zazwyczaj wierzchołki są oznaczane jako punkty, a krawędzie jako odcinki je łączące.

1.1 Definicje

- **Stopień wierzchołka -** liczba krawędzi wychodzących z wierzchołka (oznaczana jako $\deg(v)$).
- **Ścieżka -** ciąg wierzchołków $v_1, \ldots, v_n$ takich, że istnieje krawędź między v_i, v_{i+1} dla $1 \leq i \leq n-1$.
- **Cykl -** ścieżka, której pierwszy i ostatni element są połączone.
- **Sąsiad -** dwa wierzchołki są sąsiadami, jeśli istnieje krawędź je łącząca.
- **Graf pełny (klika) -** graf, w którym każde dwa różne wierzchołki są połączone krawędzią.
- **Graf spójny -** graf, w którym istnieje ścieżka łącząca dowolne dwa wierzchołki.
- **Graf dwudzielny -** graf, którego wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne zbiory takie, że wewnątrz zbioru nie istnieją dwa różne wierzchołki, które są ze sobą połączone krawędzią.
- **Pętla -** wierzchołek, który jest oboma końcami krawędzi.
- **Krawędź wielokrotna -** między dwoma wierzchołkami jest więcej niż jedna krawędź.
- **Graf prosty -** graf w którym nie ma pętli, ani krawędzi wielokrotnych.
- **Graf planarny -** graf, który można narysować na płaszczyźnie w taki sposób, aby żadne dwie krawędzie nie przecinały się.
- **Drzewo -** graf spójny, w którym nie ma cykli.
- **Cykl Eulera -** cykl przechodzący przez każdą krawędź w grafie dokładnie raz.
- **Cykl Hamiltona -** cykl przechodzący przez każdy wierzchołek w grafie dokładnie raz.
- **Skojarzenie -** podzbiór krawędzi grafu taki, że każdy wierzchołek jest końcem co najwyżej jednej krawędzi.
- **Skojarzenie pełne (doskonałe) -** podzbiór krawędzi grafu taki, że każdy wierzchołek jest końcem dokładnie jednej krawędzi.

Uwaga. *Więcej pojęć dotyczących grafów znajdziesz na stronie Wikipedii* ***Graf (matematyka)*** *pod* *nagłówkiem **Pojęcia służące do opisu grafów**.*

1.2 Graf skierowany

Powyżej został opisany *graf nieskierowany.* W nim krawędź nie rozróżnia wierzchołków (informuje jedynie, że dwa konkretne wierzchołki są połączone). Chcielibyśmy przedstawić wyniki (kto z kim wygrał) tenisistów w zawodach. Wtedy tenisista jest wierzchołkiem. Krawędź odpowiada grze, w której zagrali zawodnicy odpowiadający wierzchołkom. Krawędź z wierzchołka v do w (*skierowana* - wierzchołki v i w są rozróżnialne) oznacza, że zawodnik v pokonał zawodnika w. W *grafie skierowanym* krawędzie są *skierowane.*

Trochę inne spojrzenie: W grafie nieskierowanym krawędź jest traktowana jako zbiór dwuelementowy. W grafie skierowanym krawędź jest uporządkowaną parą.

Przykład 2. *W pewnym turnieju wzięło udział n zawodników. Każdych dwóch rozegrało ze sobą dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Wykażd, że można wszystkich ustawić w kolejce w taki sposób, aby każdy (oprócz ostatniego) wygrał z zawodnikiem stojącym bezpośrednio za nim.*

1.3 Pytania kontrolne

Ćwiczenie 1. *Ile krawędzi ma ścieżka/cykl/graf pełny/drzewo o n wierzchołkach?*

Ćwiczenie 2. *Ile co najwyżej krawędzi ma graf dwudzielny?*

Ćwiczenie 3. *Czy każda ścieżka jest drzewem? Czy każde drzewo jest ścieżką?*

Ćwiczenie 4. *Ile wynosi największe n takie, że zawsze jest prawdziwe stwierdzenie: drzewo o n wierzchołkach jest ścieżką?*

Ćwiczenie 5. *Udowodnij, że suma wszystkich stopni wierzchołków w grafie jest parzysta.*

2 Twierdzenia

Twierdzenie 1 (Cykl Eulera)**.** *Spójny graf, którego każdy wierzchołek ma parzysty stopień, posiada cykl przechodzący przez każdą krawędź dokładnie raz.*

Twierdzenie 2 (Twierdzenie Orego)**.** *Jeżeli w grafie o $n > 2$ wierzchołkach zachodzi $\deg(v)+\deg(u) \geq n$ dla każdej pary wierzchołków u, v, które nie są ze sobą połączone krawędzią, to dany graf posiada cykl Hamiltona.*

Twierdzenie 3 (Twierdzenie o czterech barwach)**.** *Wierzchołki każdego grafu planarnego można pokolorować z użyciem co najwyżej czterech różnych kolorów w taki sposób, że każde dwa połączone ze sobą wierzchołki krawędzią są innego koloru.*

Uwaga. *Twierdzenie o czterech barwach ma trudny dowód (chyba nie znam nikogo, kto go zna) i nie ma ono dużo zastosowań w matematyce olimpijskiej, ale jest bardzo znane.*

Twierdzenie 4 (Twierdzenie Halla (o kojarzeniu małżeństw))**.** *Niech $G = (V(G), E(G))$ będzie grafem dwudzielnym i niech V_1, V_2 spełniają:*

$$V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset, (v_i, u_i \in V_i \Rightarrow \{v_i, u_i\} \notin E(G)), \|V_1\| = \|V_2\|$$

Gdy dla dowolnego pozbioru $U \subseteq V_1$ zbiór sąsiadów wszystkich wierzchołków należących do U ma przynajmniej $\|U\|$ wierzchołków, to istnieje pełne skojarzenie w G.

Twierdzenie 5 (Lemat o uściskach dłoni)**.** *Suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie jest równa dwukrotności liczby wszystkich krawędzi w grafie.*

Twierdzenie 6 (Twierdzenie Turána)**.** *Jeśli graf o n wierzchołkach nie ma w sobie $(r+1)$-wierzchołkowej kliki, to ma co najwyżej $\frac{(r-1)n^2}{2r}$ krawędzi.*

3 Zadania

Zadanie 1. *Czy może się zdarzyć, że w pewnym turnieju każdy zagra inną liczbę meczów, jeśli*

(a) dopuszczamy, aby dwie osoby grały ze sobą więcej niż raz?

(b) każda para zawodników może rozegrać co najwyżej jeden mecz?

Zadanie 2. *Na przyjęciu spotkało się 99 osób. Okazało się, że pośród dowolnych trzech spośród nich można wskazać jedną, która zna pozostałe dwie. Wykaż, że na tym przyjęciu istnieje osoba znająca wszystkich pozostałych.*

Zadanie 3. *Udowodnij, że jeśli graf prosty o n wierzchołkach ma co najmniej $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ krawędzi, to ma cykl Hamiltona.*

Zadanie 4. *Udowodnij, że graf o n wierzchołkach i k krawędziach ma co najmniej $\frac{k(4k-n^2)}{3n}$ trójkątów (zbiorów 3 wierzchołków takich, że każde 2 z 3 wierzchołków są ze sobą połączone krawędzią).*

Zadanie 5. *Graf ma $5n$ wierzchołków i $10n^2+1$ krawędzi. Każdą krawędź pokolorowano na jeden z dwóch różnych kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt, którego boki są tego samego koloru.*

Zadanie 6. *Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Tablica $n \times n$ jest wypełniona liczbami 0 i 1 w ten sposób, że każdy podzbiór n pól, z których żadne 2 nie leżą w jednej kolumnie ani w jednym wierszu zawiera co najmniej jedno pole z liczbą 1. Dowieść, że można wybrać i wierszy i j kolumn w taki sposób, że $i + j \geq n + 1$ oraz że na przecięciu każdego wybranego wiersza i każdej wybranej kolumny jest liczba 1.*

Zadanie 7. *Smakosz Jan porównywał n restauracji, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każdą parę restauracji porównał w dwóch kategoriach: smaczności posiłku oraz jakości obsługi. W przypadku niektórych par Jan nie mógł się zdecydować, którą uważa za lepszą w którejś kategorii, ale w żadnej parze nie zdarzyło się to w obu kategoriach. Ponadto, jeśli Jan uznał, że restauracja A jest lepsza od restauracji B w którejś kategorii, oraz stwierdził, że restauracja B jest lepsza od restauracji C w tej samej kategorii, to uznał również, że A jest lepsza od C w tej kategorii. Udowodnić, że istnieje taka restauracja R, że każda inna restauracja została uznana za gorszą od R w chociaż jednej kategorii.*

Literatura

[1] Łukasz Bożyk *Kombinatoryka i teoria grafów*

[2] 68. Olimpiada Matematyczna