1. Mamy szachownicę $2^n \times 2^n (n \geqslant 1)$ z wyjętym jednym polem. Udowodnić, że można ją pokryć klockami w kształcie kwadratu 2×2 z wyjętym jednym kwadracikiem.

2. (I-2, MEMO 2016) Na tablicy zapisano $n \geqslant 3$ liczb całkowitych dodatnich. W jednym ruchu możemy wybrać z tablicy 3 liczby a, b, c o tej własności, że istnieje niezdegenerowany trójkąt nierównoboczny o bokach długości a, b, c. Następnie liczby te zmazujemy z tablicy i zastępujemy liczbami $a+b-c$, $b+c-a$ i $c+a-b$. Udowodnij, że nie istnieje nieskończony ciąg ruchów. Uwaga: jedną liczbę można wziąć do jednej trójki co najwyżej tyle razy, ile razy jest zapisana na tablicy.

3. Udowodnij $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

4. (P2, IMO 2014) Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Rozważamy szachownicę o wymiarach $n \times n$ składającą się z n^2 kwadratów jednostkowych. Konfigurację n wież na tej szachownicy nazwiemy dobrą, jeśli każdy wiersz i każda kolumna szachownicy zawiera dokładnie jedną wieżę. Wyznaczyć największą dodatnią liczbę całkowitą k taką, że dla każdej dobrej konfiguracji n wież istnieje kwadrat o wymiarach $k \times k$ składający się z k^2 kwadratów jednostkowych nie zawerających żadnej wieży.

5. (5/II/69OM) Dane są takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, ..., A_k$ zbioru $\{1, 2, ..., 23\}$, że dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant k$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma co najwyżej trzy elementy. Wykazać, że $k \leqslant 2018$.

6. (8/I/64OM) Na planszy o wymiarach $n \times n$ wyróżniono $2n-1$ pól. Dowieść, że można pomalować pewną niezerową liczbę wyróżnionych pól na zielono w taki sposób, że zachodzi jeden z poniższych warunków:

   - w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest parzysta,
   - w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest nieparzysta.

7. (5/II/66OM) Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Wyznaczyć liczbę takich ciągów $a_0, a_1, \ldots, a_n$ o wyrazach w zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, że

$$n = a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^n a_n.$$

8. (3/III/70OM) Na przyjęciu spotkało się $n > 3$ gości, wśród których niektórzy się znają. Okazało się, że na przyjęciu nie istnieje taka czwórka różnych gości a, b, c, d, że w parach $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}$ goście się znają, ale w parach $\{a, c\}, \{b, d\}$ goście się nie znają. Maksymalną kliką na przyjęciu nazwiemy taki niepusty zbiór gości X (być może jednoelementowy), że goście z X się parami znają, ale nie istnieje gość spoza X znający wszystkich gości z X. Dowieść, że na przyjęciu jest co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych maksymalnych klik.

9. (5/II/69OM) Dane są takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, ..., A_k$ zbioru $1, 2, ..., 23$, że dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant k$ zbiór $A_i A_j$ ma co najwyżej trzy elementy. Wykazać, że $k \leqslant 2018$.

10. Smakosz Jan porównywał n restauracji, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każdą parę restauracji porównał w dwóch kategoriach: smaczności posiłku i jakości obsługi. W przypadku niektórych par Jan nie mógł się zdecydować, którą uważa za lepszą w którejś kategorii, ale w żadnej parze nie zdarzyło się to w obu kategoriach. Ponadto, jeśli Jan uznał, że restauracja A jest lepsza od restauracji B w którejś kategorii, oraz stwierdził, że restauracja B jest lepsza od restauracji C w tej samej kategorii, to uznał również, że A jest lepsza od C w tej kategorii. Udowodnić, że istnieje taka restauracja R, że każda inna restauracja została uznana za gorszą od R w chociaż jednej kategorii.