Rozwiązania Kontestu 4 – Finaliści

Zadanie 1. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz takie liczby całkowite dodatnie a, b, c , że $a+b+c = p+1$ oraz liczba $a^3+b^3+c^3-1$ jest podzielna przez p. Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.

Źródło: Zadanie 7 z I etapu LVII Olimpiady Matematycznej

Rozwiązanie 1. Zauważmy, że

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c+2abc) = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a).$$

Zgodnie z warunkami zadania liczby $a+b+c$ oraz $a^3+b^3+c^3$ dają z dzielenia przez p resztę 1, a więc na mocy powyższej tożsamości liczba

$$3(a+b)(b+c)(c+a)$$

jest podzielna przez p. Skoro p jest liczbą pierwszą różną od 3, to któryś z czynników $a+b$, $b+c$ lub $c+a$ jest podzielny przez p. Przyjmijmy, bez straty ogólności, że $p \mid a+b$.

Liczby a, b, c są całkowite dodatnie, więc $0 < a+b < a+b+c = p+1$. Stąd wynika, że $a+b = p$, czyli $c = 1$.

Źródło: Olimpiada Matematyczna

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, jego ortocentrum H a także jego środek ciężkości G. Przez D i M oznaczmy odpowiednio rzut C na AB i środek AB. Półproste MH i DG przecinają okrąg opisany na ABC w punktach P i Q odpowiednio. Udowodnij, że QM i PD przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na ABC

Źródło: Zadanie G5 BMO shortlist 2017

Rozwiązanie 2. Lemat 1: $AQ \parallel BC$.

Dowód: Niech K będzie punktem na ω, takim że $AK \parallel BC$. Mamy $AK = 2DM$, $AG = 2GM$ oraz $\sphericalangle AKG = \sphericalangle MDG$, więc trójkąty AGK i MDG są podobne. Stąd, $\sphericalangle AGK = \sphericalangle MGD$, więc punkty K, G i D są współliniowe. Oznacza to, że K to punkt Q.

Lemat 2: Czworokąt $APDM$ jest cykliczny.

Dowód: Powszechnie wiadomo, że odbicie punktu H względem punktów M i D leży na okręgu ω. Jeśli S jest odbiciem punktu H względem M, to AS jest średnicą okręgu ω, a więc $\sphericalangle APM = \sphericalangle APS = 90^\circ = \sphericalangle ADM$.

Udowodnimy, że $\sphericalangle MQA + \sphericalangle DPA = 180^\circ$. Mamy, że $\sphericalangle MQA = \sphericalangle MAQ = \sphericalangle AMB$ oraz $\sphericalangle DPA = \sphericalangle AMC$, więc dowód jest zakończony.

Źródło: AoPS

Zadanie 3. Król Jerzy postanowił połączyć 1680 wysp w swoim królestwie mostami. Niestety ruch rebeliantów zniszczy dwa mosty po zbudowaniu wszystkich mostów, ale nie będą to dwa mosty z tej samej wyspy. Jak minimalna liczba mostów, które król musi zbudować, aby zapewnić, że po zniszczeniu dwóch mostów przez rebeliantów, nadal będzie możliwe podróżowanie mostami między każdą parą wysp?

Źródło Problem 4: www.georgmohr.dk

Rozwiązanie 3. Wyspa nie może być połączona tylko jednym mostem, ponieważ ten most mógłby zostać zniszczony. Rozważmy przypadek dwóch wysp, z których każda ma tylko dwa mosty, połączonych jednym mostem. (Nie jest możliwe, aby były one połączone dwoma mostami, ponieważ w takim przypadku byłyby izolowane od innych wysp, niezależnie od wszystkiego.) Jeśli są one również połączone z dwiema oddzielnymi wyspami, wtedy byłyby izolowane, jeśli ruch rebeliantów zniszczy dwa mosty z tych wysp, które nie łączą obu wysp. Tak więc te dwa mosty, które ich nie łączą, muszą prowadzić do tej samej wyspy. Ta trzecia wyspa musi mieć co najmniej dwa inne mosty, w przeciwnym razie ruch rebeliantów mógłby odciąć te trzy wyspy.

Załóżmy, że istnieje para wysp, które są połączone dokładnie dwoma mostami. Z powyższego łatwo widać, że usunięcie tej pary (oraz trzech mostów z nimi połączonych) musi pozostawić zbiór wysp o tych samych właściwościach. Kontynuuj usuwanie takich par, aż nie będzie żadnych. (Zauważ, że zredukowany zbiór wysp może mieć nową taką parę, która również musi zostać usunięta.) Załóżmy, że pozostajemy z n wyspami, a ponieważ dwie wyspy są usuwane naraz, n musi być liczbą parzystą. Z powyższego wynika, że $n \geqslant 4$.

Rozważmy pozostały zbiór wysp i niech x będzie liczbą wysp, które mają dokładnie dwa mosty (które teraz nie są połączone ze sobą). Wtedy $n-x$ wysp ma co najmniej trzy mosty. Niech B_0 będzie liczbą mostów w zredukowanym zbiorze. Teraz $B_0 \geqslant 2x$ i $2B_0 \geqslant 2x+3(n-x) = 3n-x$. Stąd $2B_0 \geqslant \max(4x, 3n-x) \geqslant 4 \cdot \frac{3n}{5}$, a więc $B_0 \geqslant \frac{6n}{5}$.

Teraz niech B będzie liczbą mostów w pierwotnym zbiorze. Wtedy

$$B = B_0 + 3 \cdot \frac{1680-n}{2} \geqslant \frac{6n}{5} + 6 \cdot \frac{1680-n}{4} \geqslant 6 \cdot \frac{1680}{5} = 2016.$$

Można skonstruować przykład z dokładnie 2016 mostami: Weź 672 wyspy i ponumeruj je od 0 do 671. Połącz wyspę numer i z wyspami ponumerowanymi $i-1$, $i+1$ i $i+336$ (modulo 672). Daje to 1008 mostów. Teraz mamy okrężną ścieżkę z 672 mostami: $0-1-2-\cdots-671-0$. Jeśli jeden z tych 672 mostów zostanie zniszczony, wyspy nadal będą połączone. Jeśli dwa z tych mostów zostaną zniszczone, ścieżka zostanie podzielona na dwie części. Niech i będzie wyspą na najkrótszej ścieżce (jeśli mają tę samą długość, wybierz losową). Wtedy wyspa $i+336$ (modulo 672) musi być na drugiej części ścieżki, a most łączący te dwie wyspy połączy dwie części ścieżki. W związku z tym, niezależnie od tego, które dwa mosty zniszczy ruch rebeliantów, możliwe jest podróżowanie pomiędzy dowolnymi z 672 wysp.

Teraz dla każdego z tych 1008 mostów powyżej, zastąp go dwoma mostami z nową wyspą między nimi. Zwiększa to liczbę mostów do 2016, a liczbę wysp do $672 + 1008 = 1680$, kończąc budowę. Ponieważ ruch rebeliantów nie niszczy dwóch mostów z tej samej wyspy, ta sama argumentacja, jak powyżej, pokazuje, że z tą konstrukcją możliwe jest podróżowanie między dowolnymi z 1680 wysp po zniszczeniu dwóch mostów.

Źródło: Problem 4 www.georgmohr.dk

Zadanie 4. Niech $f(n)$ będzie funkcją $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$. Udowodnij, że jeśli

$$f(n+1) > f(f(n)),$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, to $f(n) = n$.

Źródło: Zadanie 6 AoPS 1977 IMO

Rozwiązanie 4. Udowodnimy to przez indukcję. Najpierw udowodnimy, że istnieje takie t, że $f(t) = 1$, a następnie, że $t = 1$ jest jedynym takim rozwiązaniem.

Zdefiniujmy ciąg a_n, gdzie $a_0 > 1$ dla $a_0 \in \mathbb{N}$ oraz $a_k = f(a_{k-1} - 1)$. Z podanej nierówności mamy, że $f(a_n) > f(a_{n+1})$, co pozwala utworzyć łańcuch nierówności malejących liczb całkowitych dodatnich:

$$f(a_0) > f(a_1) > f(a_2) > \dots$$

Z racji zasady opadania nieskończonego, ciąg ten musi się zakończyć, a jedyny sposób, w jaki może to nastąpić, to wprowadzenie do funkcji f czegoś spoza jej zakresu. Może się to zdarzyć tylko wtedy, gdy $a_n = 1$, ponieważ zakres i dziedzina funkcji f to liczby całkowite dodatnie. Ponieważ $a_0 \neq 1$, istnieje takie t (gdzie $a_{n-1} - 1$), że $f(t) = 1$.

Teraz, jeśli $t \neq 1$, to mamy $f(t) = 1 > f(f(t-1))$, co jest niemożliwe, ponieważ $f(f(t-1)) \geqslant 1$ ze względu na zakres funkcji f, więc $t = 1$ jest jedynym przypadkiem, kiedy $f(t) = 1$.

Przechodzimy teraz do kroku indukcyjnego.

Załóżmy, że $f(n) = n$ dla wszystkich $n < k$ i że te wartości występują tylko dla tych liczb. Udowodnimy, że $f(k) = k$ i że to jest jedyny taki przypadek. Zdefiniujmy ciąg a_n podobnie, z tym że $a_0 > k$. Z wcześniejszego rozumowania wiemy, że istnieje takie a_m, że $f(a_m) = 1$. Z założenia indukcyjnego oznacza to, że $a_m = f(a_{m-1} - 1) = 1$, możemy powtórzyć założenie indukcyjne, aby uzyskać $a_{m-k+1} = k$. To implikuje, że $f(a_{m-k} - 1) = k$. Zatem istnieje takie t, że $f(t) = k$.

Teraz, dla tego t, mamy $k > f(f(t-1))$, co oznacza, że $k + 1 > t$ na podstawie założenia indukcyjnego, co implikuje, że $t = k$, ponieważ musimy mieć $t > k - 1$, w przeciwnym razie $f(t) < k$. Zatem $t = k$ jest jedynym przypadkiem, kiedy $f(t) = k$.

Krok indukcyjny jest zakończony. Zatem przez indukcję mamy, że $f(n) = n$ dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich n.

Źródło: Zadanie 6 AoPS 1977 IMO