



Kontest 4 – II etap

Zadanie 1. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że:

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq a+b+c.$$

Zadanie 2. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, a a_1, a_2, \dots, a_p oraz b_1, b_2, \dots, b_p permutacjami liczb $1, 2, \dots, p$. Udowodnij, że pewne dwie spośród liczb $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_pb_p$ dają tę samą resztę z dzielenia przez p

Zadanie 3. Dany jest wielokąt wypukły o obwodzie 4. Wykazać, że wielokąt ten można pokryć kołem o promieniu 1.

Zadanie 4. Dominika i Stefan grają w grę. Na początku Dominika pisze na tablicy dodatnią liczbę całkowitą, następnie Dominika i Stefan na zmianę wykonują ruchy. Stefan zaczyna. W każdym swoim ruchu Stefan zamienia liczbę n znajdującą się na tablicy na liczbę postaci $n - a^2$ dla pewnego całkowitego a . W każdym swoim ruchu Dominika zmienia liczbę n znajdującą się na tablicy na pewną jej całkowitą potęgę n^k . Stefan wygrywa jeśli w pewnym momencie na tablicy pojawi się liczba 0. Czy Stefan ma strategię wygrywającą?