

Liczby Catalana i tw. Ramsey'a

Tw. Ramsey'a

Niech $r, b \geq 1$. Istnieje liczba $R(r, b)$ zależna tylko od r i b mająca następującą własność: dla każdej klikki G mającej $R(r, b)$ wierzchołków, której krawędź jest pokolorowana na czerwono lub na niebiesko istnieje albo: podklikka o r wierzchołkach i krawędziach tylko czerwonych, albo podklikka o b wierzchołkach i krawędziach tylko niebieskich.

Oczywiście $R(r, b)$ to najmniejsza liczba o podanej własności. Ponadto zachodzi:

$$R(r, b) \leq R(r-1, b) + R(r, b-1) \text{ dla } r, b \geq 1, \text{ oraz } R(r, b) \leq \binom{r+b-2}{r-1}$$

Dowód:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po sumie $r + b$. Oczywiście $\forall_{r,b} R(r, 1) = R(1, b) = 1$, ponieważ jednoelementowa podklikka istnieje zawsze gdy mamy chociaż jeden wierzchołek.

Mamy więc bazę indukcyjną: $R(1, 1)$ istnieje oraz spełnia: $R(1, 1) \leq 1 = \binom{0}{0}$.

Krok indukcyjny: bierzemy r, b i zakładamy, że istnieją liczby $R(n, k)$ dla $n + k < r + b$.

Weźmy klikkę K o $R(r-1, b) + R(r, b-1)$ wierzchołkach i wybierzmy jeden wierzchołek v .

Stopień v jest równy $R(r-1, b) + R(r, b-1) - 1$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta wśród sąsiadów v istnieje $R(r, b-1)$ -klikka połączona z v krawędziami niebieskimi albo $R(r-1, b)$ -klikka połączona z v krawędziami czerwonymi. BSO założmy istnienie podklikki K zwanej dalej G rozmiaru $R(r, b-1)$ połączonej z v tylko niebieskimi krawędziami.

Z założenia indukcyjnego G zawiera albo: podklikkę czerwoną rozmiaru r , albo podklikkę niebieską rozmiaru $b-1$, która jest połączona z wierzchołkiem v niebieskimi krawędziami, więc tworzy wraz z nim podklikkę K która jest cała niebieska i ma rozmiar b , co chcieliśmy udowodnić. ■

Tw. Ramsey'a dla zbiorów

Niech $1 \leq k \leq s$, istnieją liczby $R_r(k; s)$ takie, że dla każdego zbioru X o mocy $n \geq R_r(k; s)$, jeśli r kolorami pokolorujemy wszystkie k -elementowe podzbiory X (jest ich $\binom{n}{k}$) to istnieje s -elementowy podzbiór X , który jest k -monochromatyczny, tzn. wszystkie jego k -elementowe podzbiory mają ten sam kolor. $R_r(k; s)$ to najmniejsza liczba o tej własności.

Uwagi:

$R_2(2; s) = R(s, s)$ korzystając z wcześniejszej notacji.

$R_r(k; s) \geq s \geq k$, ponieważ inaczej zbiór nie ma s elementowych podzbiorów.

Dowód:

Podzielimy dowód na dwie części:

1. Redukcja problemu do przypadku $R_2(k; s)$.
2. Dowód istnienia liczb $R_r(k; s)$ dla $r = 2$.

(1) Indukcja po r , pokażemy, że $R_{r+1}(k; s) \leq R_r(k; R_2(k; s))$.

Weźmy zbiór X o $R_r(k; R_2(k; s))$ elementach i pokolorujmy jego k -elementowe podzbiory $r + 1$ kolorami ponumerowanymi od 0 do r .

Potraktujmy kolory 0 i 1 jako jeden kolor, wtedy mamy zbiór mocy $R_r(k; R_2(k; s))$ którego k elementowe podzbiory kolorujemy r kolorami. Z założenia indukcyjnego istnieje podzbiór G , nazwijmy go H o $R_2(k; s)$ elementach, którego wszystkie k -elementowe podzbiory są albo jednego z kolorów $2, 3, \dots, r$, wtedy po prostu $R_2(k; s) \geq s$, albo jego podzbiory są pokolorowane dokładnie dwoma kolorami: 0, 1, wtedy oczywiście z faktu, że $|H| = R_2(k; s)$ otrzymujemy, że istnieje szukane podzbiór mocy s w H , czyli też w X .

(2) Aby rozwiązać przypadek dla dwóch kolorów zdefiniujemy $R(k; r, b)$ dla $2 \leq k \leq r, b$ jako najmniejszą liczbę taką, że jeśli zbiór ma co najmniej $R(k; r, b)$ elementów i pokolorujemy jego k -elementowe podzbiory na dwa kolory: czerwony i niebieski, to powstanie: albo r -elementowy zbiór o wszystkich k -elementowych podzbiorach czerwonych, albo b -elementowy zbiór o wszystkich k -elementowych podzbiorach niebieskich. Oczywiście $R(k; s, s) = R_2(k; s)$.

Pokażemy, że $R(k; r, b)$ są skończone.

Dowód przeprowadzimy poprzez dwie indukcje: pierwsza po k , a druga po $r + b$, przypadkiem bazowym jest oczywiście $R(k; k, b) = b, R(k; r, k) = r$, dla $k = 2$ kolorujemy krawędzi, więc dostajemy po prostu tw. Ramsey'a, które już udowodniliśmy.

Krok indukcyjny udowodnimy dowodząc nierówności:

$$R(k; r, b) \leq R(k-1; R(k, r-1, b), R(k; r, b-1)) + 1, \quad r, b \geq k+1, k \geq 2$$

Rozważmy zbiór $X : |X| = R(k-1; R(k, r-1, b), R(k; r, b-1)) + 1$, pokolorujmy jego k -elementowe podzbiory na czerwono i niebiesko, a następnie wybierzmy jeden element x .

Kolorowanie k -elementowych podzbiorów indukuje kolorowanie $(k-1)$ -elementowych podzbiorów zbioru $X \setminus \{x\}$, poprzez przypisanie zbiorowi A o mocy $k-1$ koloru zbioru $A \cup \{x\}$.

Mamy więc podzbiór X o mocy $R(k-1; R(k, r-1, b), R(k; r, b-1))$ na którym zadane jest kolorowanie $(k-1)$ -elementowych podzbiorów, więc istnieje $R(k, r-1, b)$ -elementowy podzbiór X w którym wszystkie podzbiory $(k-1)$ -elementowe są czerwone, albo $R(k; r, b-1)$ -elementowy podzbiór X w którym wszystkie $(k-1)$ -elementowe podzbiory są niebieskie, BSO możemy założyć pierwszą opcję.

Istnieje $R(k, r-1, b)$ -elementowy podzbiór X w którym wszystkie $(k-1)$ -elementowe podzbiory są czerwone, więc mamy dwie opcje: istnieje szukany b -elementowy zbiór o niebieskich k -podzbiorach, albo istnieje $r-1$ -elementowy zbiór który wraz z x tworzy szukany r -elementowy podzbiór X o czerwonych k -elementowych podzbiorach, co chcieliśmy wykazać. ■

Wersja nieskończona tw. Ramsey'a

W każdej nieskończonej klicie której krawędzi są pokolorowane r kolorami istnieje nieskończona monochromatyczna podklika.

Dowód:

Redukcja z r kolorów do 2 jest identyczna jak dla przypadku skończonego, więc BSO $r = 2$.

Wybermy jeden wierzchołek v_1 i rozważmy zbiór wierzchołków połączonych z nim krawędzią niebieską, jeśli jest on skończony wyrzucmy te wierzchołki, w przeciwnym razie wyrzucmy wszystkie wierzchołki poza v_1 i tymi połączonymi niebieską krawędzią z v_1 .

Otrzymaliśmy nieskończony graf, a procedurę możemy powtarzać, za każdym razem nadając dodatkowo etykietę wierzchołkowi - b jeśli zostawiliśmy jego niebieskich sąsiadów oraz poprzednie v_i , a r jeśli zostawiliśmy jego czerwonych sąsiadów oraz poprzednie v_i .

Dostajemy nieskończony ciąg w którym wierzchołki v_i mają etykiety b i r , co najmniej jeden z zbiorów: wierzchołki etykietowane przez b , wierzchołki etykietowane przez r jest nieskończony, a wszystkie jego krawędzi mają ten sam kolor, co dowodzi tezy. ■

Ciekawostki:

Liczby $R(r, b)$ zwane są liczbami Ramsey'a, istnieje wiele otwartych problemów związanych z oszacowaniami lub wyznaczaniem dokładnych wartości tych liczb.

Liczby $R(k, k)$ są znane tylko dla $k \leq 4$, pytanie o $R(k, k)$ możemy zadać w taki sposób:

jaka jest najmniejsza liczba wierzchołków kliki aby po pokolorowaniu dwoma kolorami wszystkich jej krawędzi musiała powstać podklika monochromatyczna rozmiaru k ?

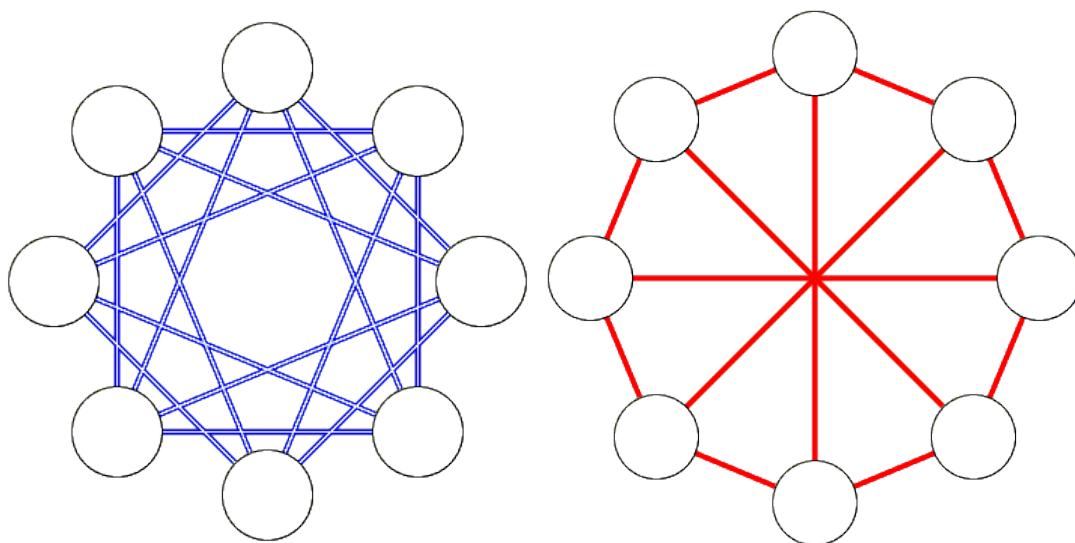
Zadanka:

1. Znajdź $R(3, 3)$ i $R(4, 3)$.
2. Niech $1 \leq r \in \mathbb{N}$. Pokaż, że istnieje $n_0 = n_0(r)$ spełniające następującą własność:
dla każdego $n \geq n_0$ jeśli pokolorujemy wszystkie niepuste podzbiory zbioru $\{1, \dots, n\}$ za pomocą r kolorów, to powstaną niepuste rozłączne podzbiory A i B , takie, że A , B i $A \cup B$ będą tego samego koloru.

Rozwiązania zadań:

1. $R(3, 3) = 6$, ponieważ jeśli weźmiemy pięciokąt foremny i pokolorujemy przekątne na niebiesko, a boki na czerwono, to otrzymujemy kontrprzykład dla 5 wierzchołków.
Dla sześciu wybieramy jeden ustalony wierzchołek x , patrzymy na jego krawędzie, co najmniej trzy z pośród nich są tego samego koloru, a wierzchołki należące do tych krawędzi różne od x muszą albo utworzyć monochromatyczny trójkąt albo domknąć monochromatyczny trójkąt z x krawędziami pomiędzy sobą.

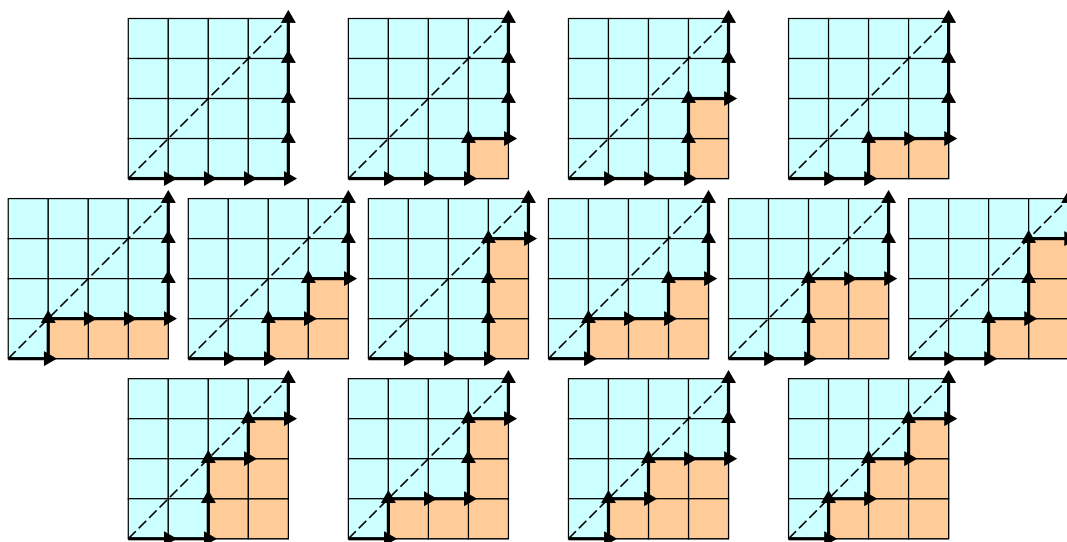
$R(3, 4) = 9$, ponieważ $R(3, 4) \leq R(2, 4) + R(3, 3) - 1 = 9$ ([mocniejsze oszacowanie](#) korzysta z faktu, że obie liczby $R(2, 4)$ i $R(3, 3)$ są parzyste). Kontrprzykład dla 8 wierzchołków:



2. Z tw. Ramsey'a wiemy, że istnieje $n_0(r) = R_r(2; 3)$ takie, że jeśli pokolorujemy krawędzie n -kliki o $n \geq n_0(r)$ używając r kolorów, to powstanie monochromatyczny trójkąt.
Niech $n \geq n_0(r)$ oraz $C_k = \{1, \dots, k\}$, przy czym $C_0 = \emptyset$, dla $k = 0, 1, \dots, n$.
Pokolorujmy pary $\{i, j\}$ dla $i < j$ kolorem $C_j \setminus C_i$. Z definicji $R_r(2; 3)$ istnieją $i < j < k$ dla których $\{i, j\}, \{j, k\}$ i $\{i, k\}$ mają ten sam kolor.
Mamy więc rozłączne $A = \{i + 1, \dots, j\}$ i $B = \{j + 1, \dots, k\}$,
oraz $A \cup B = \{i + 1, \dots, k\}$ ma ten sam kolor.

Liczby Catalana

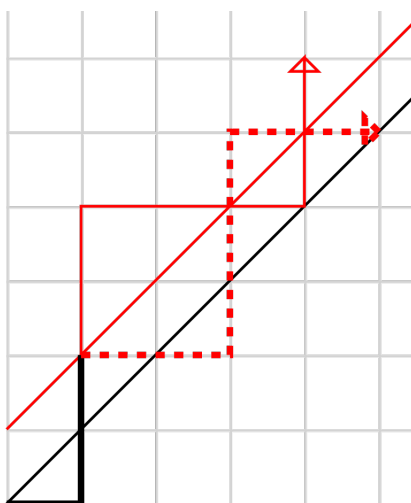
Liczby Catalana (C_n) to szczególny ciąg liczbowy mający liczne zastosowania w kombinatoryce. Na nasze potrzeby zdefiniujemy C_n jako liczbę ścieżek z lewego dolnego rogu kwadratu o wymiarach $n \times n$ do jego prawego górnego rogu, takich, że nie przechodzą one ponad przekątną łączącą te wierzchołki oraz wykorzystują tylko ruchy o 1 w prawo i o 1 w górę. Np. $C_4 = 14$:



Dowód wzoru jawnego:

Wszystkich ścieżek z lewego dolnego do prawego górnego rogu (licząc te przecinające przekątną) jest $\binom{2n}{n}$, ponieważ na tyle sposobów możemy wybrać, w drodze długości $2n$ w których n krokach chcemy iść w prawo. Wystarczy więc policzyć te przechodzące ponad krawędź.

W tym celu weźmy dowolną ścieżkę przechodzącą ponad rozważaną przekątną i po pierwszym przekroczeniu odbijmy ją symetrycznie względem prostej $y + x = -1$, zakładając, że lewy dolny róg to $(x, y) = (0, 0)$, a osi są OX "w prawo" a OY "w górę".



Trafimy oczywiście końcem ścieżki w punkt $(n-1, n+1)$, a każda "zła" ścieżka od $(0, 0)$ do (n, n) da nam dokładnie jedną ścieżkę od $(0, 0)$ do $(n-1, n+1)$.

Pozostało zauważyć, że jest to odwzorowanie bijektywne, każda ścieżka od $(0, 0)$ do $(n-1, n+1)$ po odbiciu fragmentu po pierwszym przejściu jest ścieżką łączącą nasze wierzchołki kwadratu, więc "złych" ścieżek jest $\binom{(n+1)+(n-1)}{n+1} = \binom{2n}{n+1}$. Dobrych ścieżek jest więc:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{((n-1)!)^2 n^2} - \frac{(2n)!}{((n-1)!)^2 n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{((n-1)!)^2 n^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

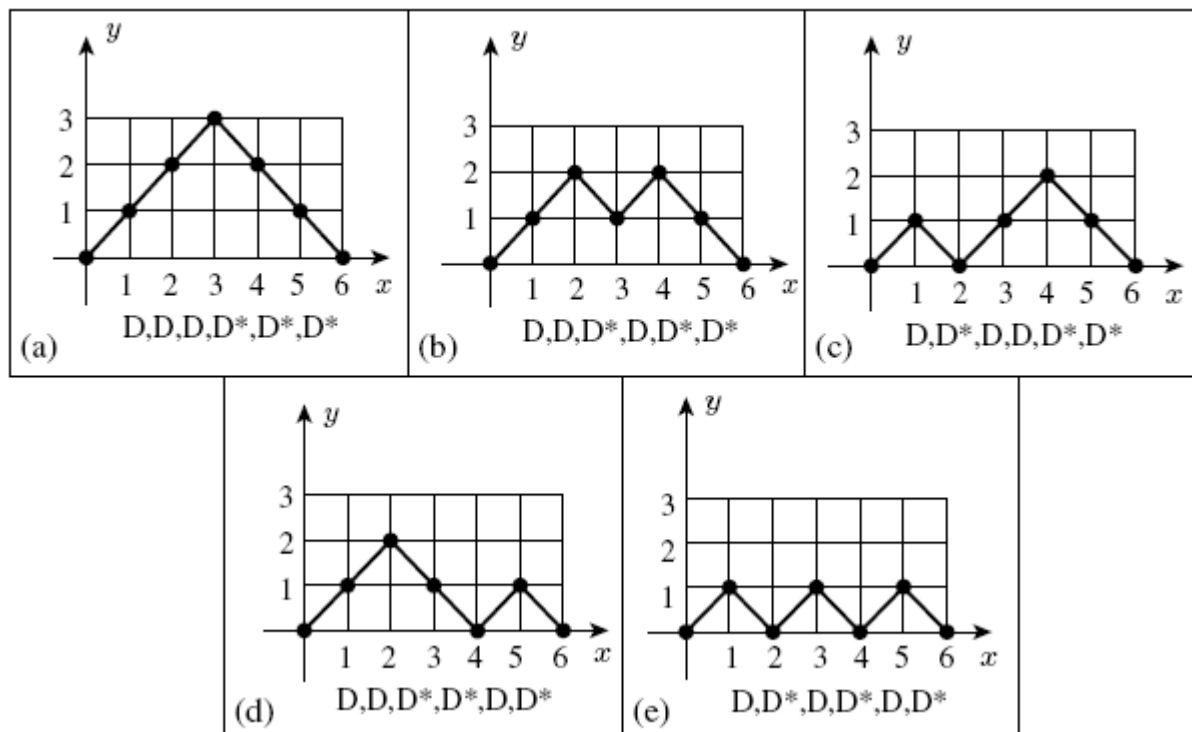
■

Wniosek (wzór rekurencyjny pierwszego stopnia):

$$C_{n+1} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{((n+1)!)^2 (n+2)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)^2} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

Inne interpretacje kombinatoryczne:

Obracając kwadraty $n \times n$ o 135° antyzegarowo natychmiast otrzymujemy, że C_n jest też liczbą dróg z $(0, 0)$ do $(2n, 0)$ znajdujących się w całości w I ćwiartce kartezjańskiego układu współrzędnych, używających tylko przejść postaci $(x, y) \rightarrow (x+1, y-1)$ oraz $(x, y) \rightarrow (x+1, y+1)$.



$n = 0$:	*	1 way
$n = 1$:	()	1 way
$n = 2$:	()(), ()()	2 ways
$n = 3$:	()()(), ()()(), ()()(), ()()(), ((()))	5 ways
$n = 4$:	()()()(), ()()()(), ()()()(), ()()()(), ()((())), () ()()(), ()()(), ()()()(), ((()))(), ()()(), ()()(), ((())()), ((()())), ((()()))	14 ways
$n = 5$:	()()()()(), ((()()()())), ((()()()())), ((()()()())), ((()()()())), (((()()()()))), (((()()()()))))	42 ways

Wzór rekurencyjny:

Mając triangulacje możemy szybko dostać wzór rekurencyjny:

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}, \quad \forall n \geq 0$$

Wynika on z faktu, że możemy ustalić jedną wybraną krawędź i wybrać na n sposobów wierzchołek z którym ta krawędź utworzy trójkąt, a pozostałe trójkąty wybierzemy spośród dwóch wielokątów które zostaną nam do podzielenia na dokładnie $C_i C_{n-i}$ sposobów, gdzie wielokąty które otrzymaliśmy mają $i + 2$ oraz $n - i + 2$ wierzchołki.

Oczywiście dla różnych wyborów wierzchołka dostajemy różne triangulacje, ponieważ różnią się właśnie tym, że wyróżniona krawędź jest w innym trójkącie.

Zadanka:

1. Udowodnij, że liczba sposobów, na jakie możemy podzielić wierzchołki n -kąta foremnego na niepuste zbiory (nie numerujemy zbiorów) tak, aby każdy wierzchołek należał do dokładnie jednego zbioru oraz otoczki wypukłe tych zbiorów były rozłączne jest równa C_n .
2. Udowodnij, że liczba ciągów $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ spełniających $a_i \leq i$ jest równa C_n .
3. Znajdź liczbę ciągów $1 = a_1, a_2, \dots, a_n$ (długości n) takich, że $1 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$.
4. Znajdź liczbę częściowych uporządkowań n nieetykietowanych obiektów.