



Kontest 2 – II etap

Zadanie 1. Punkty D i E to odpowiednio spodki wysokości opuszczonych z wierzchołków A i B w trójkącie ABC . Okrąg o średnicy AD przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q . Udowodnij, że pola trójkątów DPQ i EPQ są równe.

Zadanie 2. „Delfin” to pionek, który porusza się o jedno pole w górę, w prawo lub ukośnie w dół w lewo. Czy „delfin”, zaczynając od lewego dolnego rogu kwadratowej planszy o boku 8, może przespacerować całą planszę, odwiedzając każde pole dokładnie raz?

Zadanie 3. Dany jest wielomian

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

posiadający n parami różnych pierwiastków. Udowodnij, że $\frac{n-1}{n} > \frac{2a_0a_2}{a_1^2}$ dla $a_1 \neq 0$.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, które spełniają:

- $f(p) > 0$ dla każdej liczby pierwszej p ,
- $p \mid (f(x) + f(p))^{f(p)} - x$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ i każdej liczby pierwszej p .