Dla formalności: operujemy w skrypcie na liczbach rzeczywistych, chyba że zostało zaznaczone inaczej.

1 Definicje

Jednomian - wyrażenie będące iloczynem liczby oraz zmiennych. Np. $5x^2$, $18xy$, $7z$.
Wielomian - suma skończenie wielu jednomianów. Np. $2+4x$, $100x^{18}-\sqrt{18}x^7+x-\pi$. W ogólności jest to wyrażenie postaci $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$, gdzie a_i są liczbami dla $0 \le i \le n$.
Współczynniki wielomianu - elementy a_i wielomianu $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$.
Funkcja wielomianowa - dla wielomianu $f = a_0+\ldots+a_nx^n$ funkcją wielomianową jest $f(s) = a_0+a_1s+\ldots+a_ns^n$.
Poboczna notatka: formalnie funkcja wielomianowa jest czymś innym niż wielomian. Nieformalnie bywa przyjmowane, że to jest taki sam twór i tak będzie w dalszej części skryptu.
Pierwiastki wielomianu - argumenty, dla których funkcja wielomianowa przyjmuje wartość 0 ($f(x)=0$).
Wielomian zerowy - taki wielomian, że $f=0$.
Stopień wielomianu (oznaczany $\deg(f)$) - największe n, dla którego współczynnik przy x^n wielomianu jest niezerowy.
Funkcja kwadratowa - funkcja wielomianowa drugiego stopnia.

2 Wzory skróconego mnożenia

Niech $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}x^ny^0$$

W szczególności: $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$, $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, $(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^0y^{n-1})$$

Jeśli n jest nieparzyste, to $x^n+y^n = (x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-x^{n-4}y^3+\ldots+x^2y^{n-3}-xy^{n-2}+y^{n-1})$.

3 Pierwiastki wielomianu

Wielomian stopnia n ma nie więcej niż n różnych pierwiastków.
Jeśli wielomian stopnia n ($a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$) ma n pierwiastków: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = a_n \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \ldots \cdot (x-x_n).$$

3.1 Pierwiastki funkcji kwadratowej

Dla funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2+bx+c$ pierwiastki są równe $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Co jeśli $b^2-4ac<0$? Co jeśli $b^2-4ac=0$?

4 Wzory Viete'a

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą pierwiastkami wielomianu $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

5 Zadania

Zadanie 1. *Liczby a, b spełniają warunek $2a + a^2 = 2b + b^2$. Wykaż, że jeżeli liczba a jest całkowita, to liczba b także jest całkowita.*

Zadanie 2. *Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych różnych od 0, dla których*

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (1+a)(1+b)(1+c)$$

Zadanie 3. *Dany jest wielomian $P(x)$, stopnia n, spełniający $P(k) = \frac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Określ wartość $P(n+1)$.*

Zadanie 4. *Niech $f(t) = t^3 + t$. Czy istnieją $x, y \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, że $xy = 3$ oraz*

$$\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{m\ razy}(x))\ldots)) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n\ razy}(x))\ldots))?$$