



# Algebra I – II etap

## Nierówności

### Średnie

Dla liczb dodatnich  $a_1, a_2, \dots, a_n$  zachodzi:

$$A \geq G \geq H,$$

gdzie

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \quad G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \quad H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

**Definicja 1** (Średnia potęgowa). Dla danego ciągu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oraz  $t \in \mathbb{R}$ , mówimy, że

$$P_t(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} \left( \frac{\sum_{i=1}^n a_i^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}} & t \neq 0 \\ \sqrt[t]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} & t = 0 \end{cases}$$

Wówczas mamy, dla  $x < y$  nierówność  $P_x \leq P_y$ .

1.

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \sqrt{8abc}$$

2.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

3. Udowodnij, że dla dodatnich  $a, b, c$  zachodzi

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a+b+x) \geq 9$$

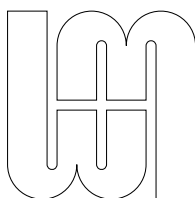
### Nierówność Cauchy-Schwarza

Dla liczb rzeczywistych  $a_i, b_i$  zachodzi:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

*Dowód.* Rozważmy następującą funkcję kwadratową:

$$f(x) = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2.$$



Poręba Wielka, 12.01.2025

Autor: Igor Staszekiewicz

Prowadzący: Igor Staszekiewicz

Ponieważ  $f(x) \geq 0$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$ , wynika stąd, że wyróżnik wielomianu  $f(x)$  jest niedodatni, tj.:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0.$$

W ten sposób uzyskujemy upragnioną nierówność. ■

Istnieją również dwie inne odmiany nierówności Cauchy-Schwarza:

- I postać Engel'a. Dla  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $b_i > 0$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}.$$

*Dowód.* Podstawiamy do nierówności Cauchy-Schwarza  $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$  oraz  $\sqrt{b_i}$ . ■

- II postać Engel'a. Dla  $a_i > 0$  oraz  $b_i > 0$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n a_i b_i}.$$

*Dowód.* Podstawiamy do nierówności Cauchy-Schwarza  $\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$  oraz  $\sqrt{a_i b_i}$ . ■

**Definicja 2.** Ciągi monotoniczne

Dla dwóch ciągów rzeczywistych  $A = (a_1, \dots, a_n)$  oraz  $B = (b_1, \dots, b_n)$  wartość wyrażenia

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i$$

przyjmuje swoje maksimum, gdy ciągi  $A$  i  $B$  są jednakowo monotoniczne (oba są rosnące lub oba są malejące). Analogicznie, jeśli ciągi są przeciwnie monotoniczne (jeden jest rosnący, a drugi malejący), powyższe wyrażenie przyjmuje minimum.

*Dowód.* Niech  $i, j$ , t. że  $i < j$ ,  $a_i < a_j$  oraz  $b_i > b_j$ . Wówczas chcemy

$$\begin{aligned} a_i \cdot b_i + a_j \cdot b_j &< a_i \cdot b_j + a_j \cdot b_i \\ a_i \cdot (b_i - b_j) &< a_j \cdot (b_i - b_j) \\ a_i &< a_j \end{aligned}$$

Co oczywiście wynika z założeń. Uzyskaliśmy zatem upragnioną nierówność. ■



Poręba Wielka, 12.01.2025

Autor: Igor Staszekiewicz

Prowadzący: Igor Staszekiewicz

1. Uzasadnij, że dla liczb dodatnich  $a, b$  zachodzi nierówność

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2.$$

*Czy i dlaczego warunek dodatniości liczb  $a, b$  jest potrzebny?*

2. Uzasadnij, że dla liczb dodatnich  $a, b$  zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

3. Udowodnij, że dla liczb dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{a\sqrt{a}}{a+b} + \frac{b\sqrt{b}}{b+c} + \frac{c\sqrt{c}}{c+a}$$

4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{a\sqrt{b}}{a+b}$$

5. Wykaż tzw. Nierówność Nesbitt'a, czyli dla dodatnich  $a, b, c$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

## Wielomiany

Wielomiany są nierozłączną częścią kompendium olimpijskiego, a przede wszystkim są ukryte u podstaw wyższych dziedzin matematyki. Każdy olimpijczyk powinien jak najszybciej oswoić się z ich ideą, jak i również umieć sprawnie operować ich własnościami. Poniżej przedstawiamy najważniejsze definicje i twierdzenia, których zastosowanie napotkacie w wielu zadaniach olimpijskich.

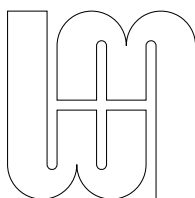
### Podstawowe definicje

- Wyrażenie postaci

$$w(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

nazywamy wielomianem zmiennej  $X$  stopnia  $n$ , stopień oznaczamy jako  $\deg$  (z ang. degree).

- Liczby  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  nazywamy współczynnikami tego wielomianu.
- Współczynniki  $a_n$  oraz  $a_0$  nazywamy odpowiednio współczynnikiem wiodącym i wyrazem wolnym.
- Wielomian o współczynniku wiodącym równym 1 nazywamy unormowanym.



Poręba Wielka, 12.01.2025

Autor: Igor Staszekiewicz

Prowadzący: Igor Staszekiewicz

- Wielomian o wszystkich współczynnikach równych 0 nazywamy wielomianem zerowym, zaś wielomian  $w(X) = a_0$  nazywamy wielomianem stałym.
- Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych i całkowitych oznaczamy odpowiednio jako  $\mathbb{R}[X]$  oraz  $\mathbb{Z}[X]$ .
- Liczbę  $\alpha$ , dla której zachodzi  $w(\alpha) = 0$ , nazywamy pierwiastkiem wielomianu  $w$ .

### Ważne twierdzenia

**Równość Bézouta.** Dla danego wielomianu  $w(X) \in \mathbb{R}[X]$  stopnia  $n$  oraz  $\beta \in \mathbb{R}$  istnieje dokładnie jeden wielomian  $h(X) \in \mathbb{R}[X]$ , dla którego zachodzi równość

$$w(X) = (X - \beta)h(X) + w(\beta),$$

ponadto  $\deg h(X) = n - 1$ , a wielomiany  $w$  i  $h$  mają ten sam współczynnik wiodący.

**Wniosek (Twierdzenie Bézouta).** Element  $\alpha \in \mathbb{R}$  jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu  $w(X) \in \mathbb{R}[X]$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian  $h(X) \in \mathbb{R}[X]$ , że

$$w(X) = (X - \alpha)h(X),$$

przy czym  $\deg h(X) = \deg w(X) - 1$ .

**Dzielenie z resztą.** Dla danych wielomianów  $a(X), b(X) \in \mathbb{R}[X]$ , gdzie  $b \neq 0$ , istnieją jednoznacznie wyznaczone wielomiany  $q(X)$  i  $r(X)$ , takie że

$$a(X) = q(X)b(X) + r(X), \quad \text{gdzie } \deg r(X) < \deg b(X).$$

**Twierdzenie Lagrange'a.** Wielomian stopnia  $n - 1$  o współczynnikach z  $\mathbb{R}$  ma co najwyżej  $n$  pierwiastków w  $\mathbb{R}$ .

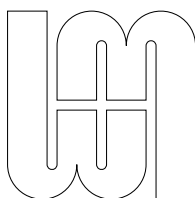
**Twierdzenie o jednoznaczności.** Istnieje dokładnie jeden wielomian z  $\mathbb{R}[X]$  stopnia  $n$ , przechodzący przez dane  $n + 1$  punktów.

**Wzory Viete'a.** Wielomian

$$w(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

mogący mieć  $n$  pierwiastków  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , można przedstawić w postaci

$$w(X) = a_n (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n).$$



## Równania funkcyjne

Zadania tego pokroju wymagają od nas, żebyśmy określili wszystkie funkcje spełniające podane równanie.

Takimi zadaniami są na przykład

### Przykład 1.

$$f(x+y) = f(f(x)) + y$$

### Przykład 2.

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$

### Przykład 3.

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

jest spełnione tylko przez funkcję  $f(x) = x + c$ .

### Oznaczenia

- Jeśli funkcja przyjmuje elementy ze zbioru  $A$  i zwraca elementy ze zbioru  $B$ , oznaczamy ten fakt jako  $f : A \rightarrow B$ . Zbiór  $A$  nazywamy *dziedzina*, a zbiór  $B$  *przeciwdziedzina*.

- Jeśli  $f(x)$  spełnia implikację

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

mówimy wówczas, że  $f$  jest *różnowartościowa* (ew.  $f$  jest *iniekcją*).

- Jeśli  $f : A \rightarrow B$  spełnia

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$$

mówimy wówczas, że  $f$  jest *na* (ew.  $f$  jest *surjekcją*).

- Jeśli  $f$  jest jednoznacznie różnowartościowa i "na", wówczas mówimy że  $f$  jest *bijekcją*.
- Jeśli dla danej  $f : A \rightarrow B$  istnieje  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , że  $f^{-1}(f(x)) = x$ . Taka funkcja istnieje wtedy i tylko wtedy gdy funkcja  $f$  jest bijekcją.
- Jeśli mamy funkcję  $f : A \rightarrow B$  oraz  $g : B \rightarrow C$  to funkcję  $(g \circ f) : A \rightarrow C$  zadaną wzorem  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  nazywamy *złożeniem*  $g$  i  $f$ .

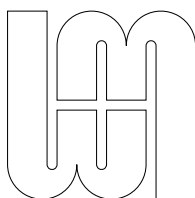
### Klasyczne tricki

Nigdy nie ma odpowiedzi na wszystkie pytania. natomiast czasami bywają odpowiedzi na pytania, które są zadane.

Tutaj mamy kilka dobrych strategii na podejście do równań funkcyjnych.

- Stosowanie podstawień pod pewne wartości. Najczęściej  $x = 0$  lub  $x = 1$ , ew. inne kombinacje jeśli mamy więcej zmiennych. Daje pewne własności funkcji z którymi można więcej działać.





Poręba Wielka, 12.01.2025

Autor: Igor Staszekiewicz

Prowadzący: Igor Staszekiewicz

- Stosowanie podstawień pod inne wartości. Takie podstawienia to często  $x' = \frac{1}{x}$ ,  $x' = -x$ ,  $x' = k \cdot x$
- Jeśli mamy wiele zmiennych, możemy określić na nie jakieś relacje jak choćby  $y = x$ ,  $y = f(x)$ ,  $y = -x$ ,  $y = \frac{1}{x}$
- Niekiedy warto też przyjrzeć się wielokrotnym złożeniom funkcji samej ze sobą.
- Jeśli mamy dziedzinę liczb naturalnych lub inne podstawy, należy rozważyć indukcję.

## Zadania

1. Uzasadnij, że jeżeli  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  oraz  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ , to

$$n \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) > (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Użyj tej nierówności, by udowodnić nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową, ale uważaj na założenia.

2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b$  zachodzi

$$2a^2b^2 \leq a^3b + b^3a \leq a^4 + b^4.$$

3.  $a, b, c$  są dodatnie. Wykaż

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

4. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c, d$  zachodzi

$$a^2b + b^2c + c^2d + d^2a \leq a^3 + b^3 + c^3 + d^3.$$

5. Niech w trójkącie  $ABC$  liczby  $h_a, h_b, h_c$  oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości  $a, b, c$  odpowiednio. Uzasadnij, że:

$$(a + b + c)(h_a + h_b + h_c) > 18P_{ABC}.$$

6.  $a, b, c$  są liczbami dodatnimi. Wykaż, że

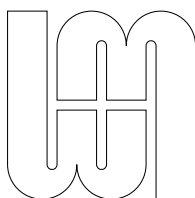
$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}$$

7.

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 4 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right)$$

8. Dla  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  zachodzi  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , udowodnij:

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1) \geq 2^n$$



Poręba Wielka, 12.01.2025

Autor: Igor Staszekiewicz

Prowadzący: Igor Staszekiewicz

9. Wiedząc, że

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

wyznacz  $x^4 + y^4 + z^4$

10. Niech wielomian  $w(x)$  będzie  $n$ -tego stopnia, oraz dla wszystkich całkowitych  $k$  spełniających  $0 \leq k \leq n$

$$w(k) = 2^{k+1}$$

Podaj wartość  $w(n+1)$

11. Niech  $w(x) \in \mathbb{Z}[x]$  będzie unormowany oraz dla  $q \in \mathbb{Q}$  zachodzi  $w(q) = 0$ . Wykaż, że  $q$  jest całkowite.

12. Wykaż, że dla bijekcji  $f$  zachodzi  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

13. Dana jest  $f$  ciągła, że  $f(1000) = 999$  oraz  $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ . Znajdź  $f(500)$ .

14. Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że

$$f(x)f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1$$