Kontest 2 – mini PreOM 2025

Zadanie 1. Dany jest okrąg o środku O, punkt A wewnątrz tego okręgu oraz cięciwa PQ, nie będąca średnicą, przechodząca przez A. Proste p i q są styczne do rozważanego okręgu odpowiednio w punktach P i Q. Prosta l przechodząca przez punkt A i prostopadła do OA przecina proste p i q odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $|AK| = |AL|$.

Zadanie 2. W domu znajduje się parzysta liczba lamp rozmieszczonych w pokojach w taki sposób, że w każdym pokoju są co najmniej trzy lampy. Każda lampa współdzieli włącznik dokładnie z jedną inną lampą, przy czym niekoniecznie z tego samego pokoju. Każda zmiana stanu włącznika wspólnego dla dwóch lamp powoduje jednoczesną zmianę ich stanów. Udowodnij, że dla każdego początkowego ustawienia lamp istnieje taka sekwencja zmian włączników, że na końcu w każdym pokoju znajdują się zarówno włączone, jak i wyłączone lampy.

Zadanie 3. Dane są liczby całkowite dodatnie $n_1 < n_2 < \ldots < n_{2000} < 10^{100}$. Dowieść, że ze zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$ można wybrać niepuste rozłączne podzbiory A i B mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite $n > 1$ takie, że istnieje dokładnie jedna liczba całkowita a spełniająca $0 < a \leqslant n!$ taka, że $a^n + 1$ jest podzielne przez $n!$.