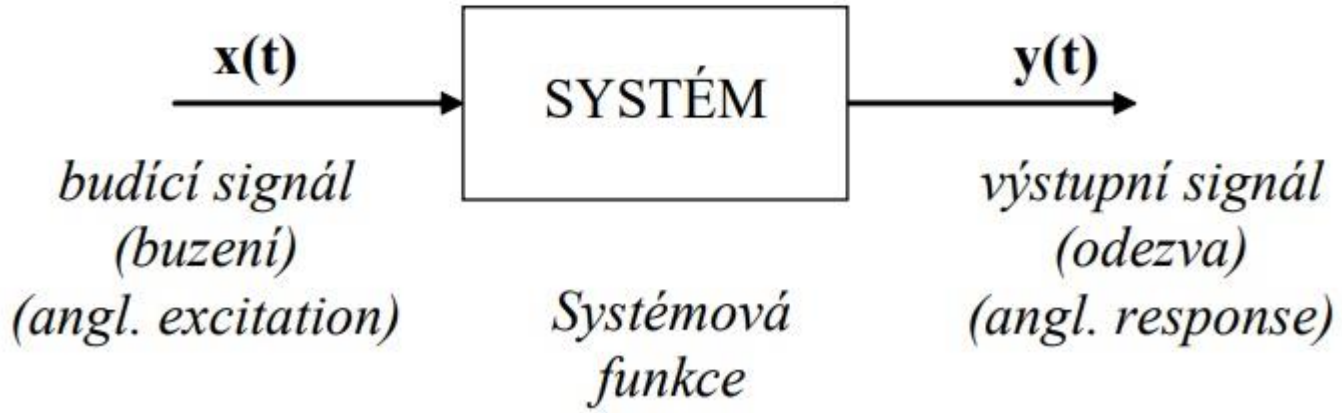
Signály a informace

8. cvičení

LTI systémy


x(t)
SYSTÉM
y(t)
budící signál
(buzení)
(angl. excitation)
Systémová
funkce
výstupní signál
(odezva)
(angl. response)

LTI systémy

LTI – Linear Time Invariant

$$\text{Linearita} - \begin{cases} \text{Homogenita} \rightarrow f(a \cdot x) = a \cdot f(x) \\ \text{Aditivita} \rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$$

x^2	$\lvert x \rvert$
$(2x)^2 \neq 2(x)^2$	$-2\lvert x \rvert \neq \lvert -2x \rvert$
$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$	$\lvert x+y \rvert \neq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$

LTI systémy

LTI – Linear Time Invariant

$$+5$$

$$\text{Linearita} - \begin{cases} \text{Homogenita} \rightarrow f(a \cdot x) = a \cdot f(x) \\ \text{Aditivita} \rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$$

$$2x + 5 \neq 2(x+5)$$

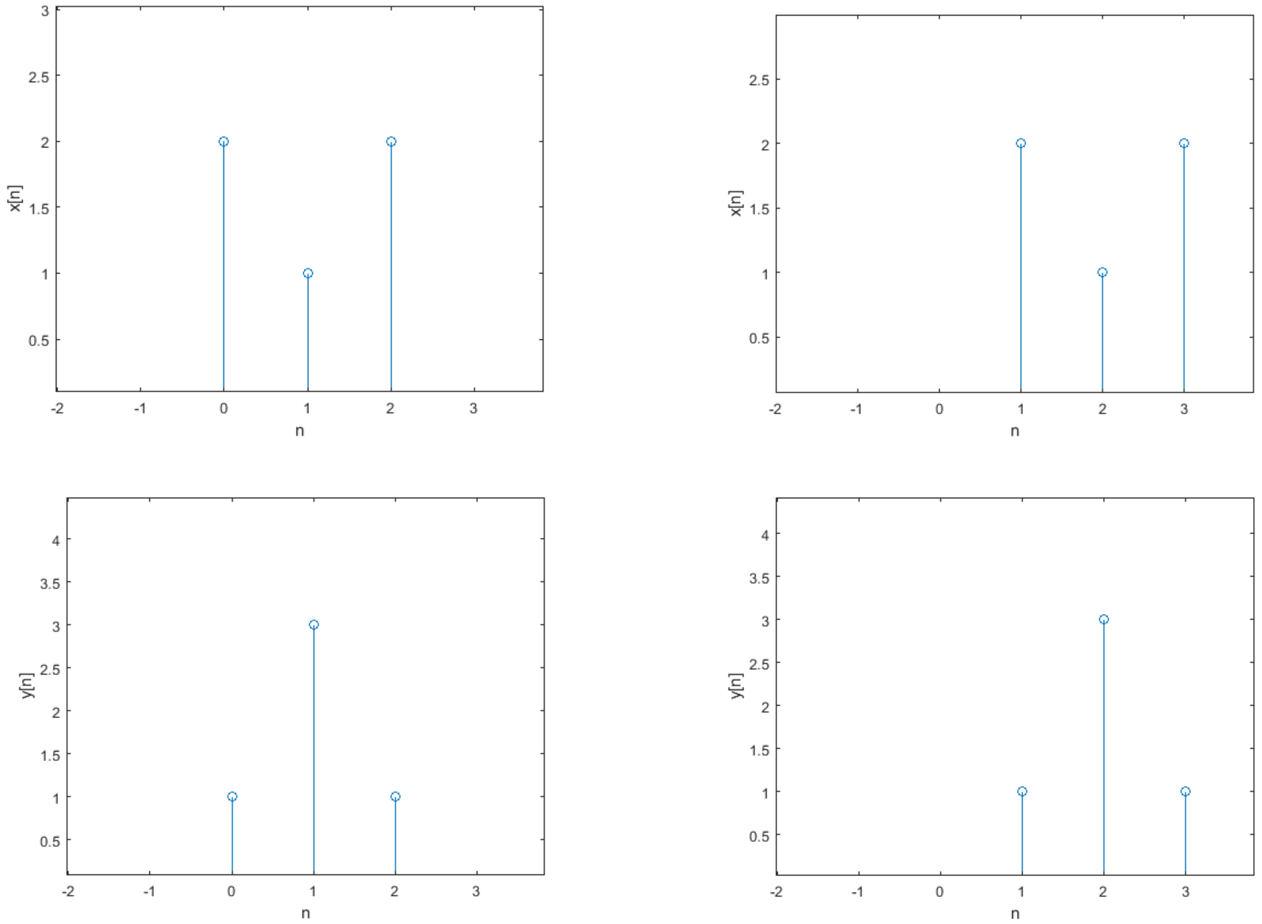
$$(x+y) + 5 \neq (\mathrm{x}+5) + (\mathrm{y}+5)$$

LTI systémy

LTI – Linear Time Invariant

$$\text{Linearita} - \begin{cases} \text{Homogenita} \rightarrow f(a \cdot x) = a \cdot f(x) \\ \text{Aditivita} \rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$$

Časově nezávislý - $f(x(t - t_0) = y(t - t_0)$



LTI systémy

LTI – Linear Time Invariant

$$\text{Linearita} - \begin{cases} \text{Homogenita} \to f(a \cdot x) = a \cdot f(x) \\ \text{Aditivita} \to f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$$

$$y(t) = t \cdot x(t) \qquad\qquad y(t) = x(2t)$$

Časově nezávislý - $f(x(t-t_0)) = y(t-t_0)$

$$t \cdot x(t-5) \neq (t-5)x(t-5) \qquad x(2(t-1)) \neq x(2t-1)$$

LTI systémy – Časová invariance - příklad

$$y[n] = n \cdot x[n]$$

Pro náhodně zadaný signál *x* dostáváme výstup *y*

$x[\mathrm{n}] = [1, 2, 3, 4]$ $\quad\rightarrow\quad$ $y[n] = [0, 2, 6, 12]$

$n = [0, 1, 2, 3]$

Pokud výstup *y* zpozdíme o jeden vzorek dostáváme

$$y[n-1] = (n-1) \cdot x[n-1] = [0, 0, 2, 6, 12]$$

Pokud ale zpozdíme signál *x* o jeden vzorek, dostáváme úplně jiný výstup *y*

$x[n-1] = [0, 1, 2, 3, 4]$ $\quad\rightarrow\quad$ $y[n] = [0, 1, 4, 9, 16]$

$n = [0, 1, 2, 3, 4]$

Ten nedopovídá zpoždění původního výstupu *y*, systém tak není časově invariantní

LTI systémy – Časová invariance - příklad

$y[n] = x[2n]$

Pro náhodně zadaný signál *x* dostáváme výstup *y*

$x[\mathrm{n}] = [1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5] \quad \rightarrow \quad y[n] = [1, 1, 1, 1]$

$n = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$

Pokud výstup *y* zpozdíme o jeden vzorek dostáváme

$y[n-1] = x[2(n-1)] = [0, 1, 1, 1, 1]$

Pokud ale zpozdíme signál *x* o jeden vzorek, dostáváme úplně jiný výstup *y*

$x[n-1] = [0, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5] \quad \rightarrow \quad y[n] = [0, 2, 3, 4]$

$n = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$

Ten nedopovídá zpoždění původního výstupu *y*, systém tak není časově invariantní

LTI systémy – Diferenční rovnice

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M]$$

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M] + \cdots - a_1 y[n-1] + \cdots - a_N y[n-N]$$

$$a_0 = 1$$

LTI systémy – Diferenční rovnice

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M]$$

IIR: $y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M] + \cdots - a_1 y[n-1] + \cdots - a_N y[n-N]$

$a_0 = 1$

FIR: $y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M]$

LTI systémy – FIR – Příklad

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

$$x[n] = [1, 0, 2]$$

Nulové počáteční podmínky

$$x[-1] = 0$$
$$x[-2] = 0$$

$$x[n] = [0, 0, \mathbf{1}, 0, 2, 0, 0, 0, \ldots]$$

$$n = [-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots]$$

LTI systémy – FIR – Příklad

Nulové počáteční podmínky

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) \qquad x[n] = [\mathbf{1}, 0, 2]$$

$$x[-1] = 0$$
$$x[-2] = 0$$

$$y[0] = \frac{1}{3}(\mathrm{x}[0] + \mathrm{x}[-1] + \mathrm{x}[-2]) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}$$

$$y[1] = \frac{1}{3}(\mathrm{x}[1] + \mathrm{x}[0] + \mathrm{x}[-1]) = \frac{1}{3}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{3}$$

$$y[2] = \frac{1}{3}(\mathrm{x}[2] + \mathrm{x}[1] + \mathrm{x}[0]) = \frac{1}{3}(2 + 0 + 1) = 1$$

$$y[3] = \frac{1}{3}(\mathrm{x}[3] + \mathrm{x}[2] + \mathrm{x}[1]) = \frac{1}{3}(0 + 2 + 0) = \frac{2}{3}$$

$$y[4] = \frac{1}{3}(\mathrm{x}[4] + \mathrm{x}[3] + \mathrm{x}[2]) = \frac{1}{3}(0 + 0 + 2) = \frac{2}{3}$$

$$y[5] = \frac{1}{3}(\mathrm{x}[5] + \mathrm{x}[4] + \mathrm{x}[3]) = \frac{1}{3}(0 + 0 + 0) = 0$$

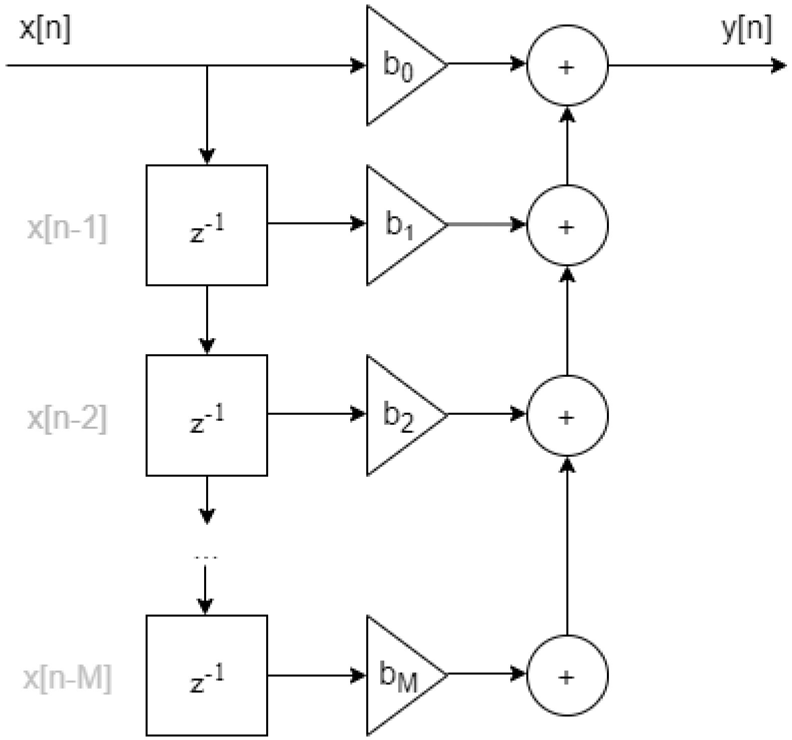
$$y[n] = [\mathbf{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$$

LTI systémy – Blokové schéma

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \cdots + b_Mx[n-M] + \cdots - a_1y[n-1] + \cdots - a_Ny[n-N]$$

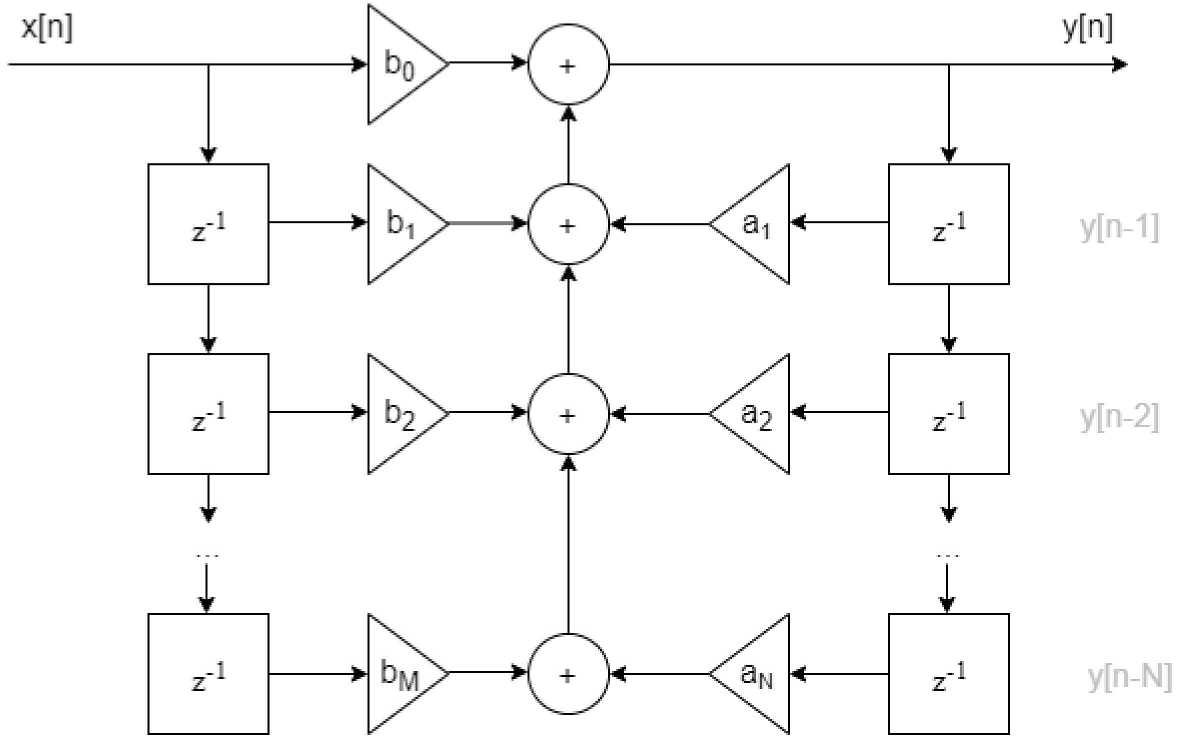
LTI systémy – Blokové schéma FIR

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M]$$



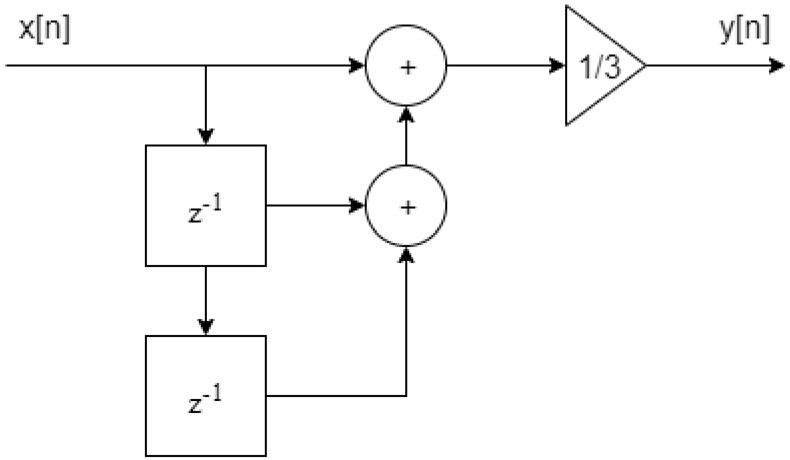
LTI systémy – Blokové schéma IIR

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M] + \cdots - a_1 y[n-1] + \cdots - a_N y[n-N]$$



LTI systémy – Blokové schéma – Příklad

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$



LTI systémy – Impulsní odezva

Odezva systému na jednotkový impuls $x[n] = [1]$

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

$$h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$$

Výstup systému je dán konvolucí vstupu a impulsní odezvy

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Délka výstupního signálu = délka *x* + délka *h - 1*

Konvoluce

$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

Komutativní: $f * g = g * f$

Asociativní: $f * (g * h) = (f * g) * h$

Distributivní: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

Asociativní při násobení skalárem: $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$

Existence jednotky: $f * \delta = \delta * f = f$

Konvoluce – Metoda posuvných proužků

$x[n] = [1, 0, 2]$ $h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$y[n] =$

Konvoluce – Metoda posuvných proužků

$x[n] = [1, 0, 2]$

$h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array}$$

$y[n] = [\frac{1}{3},$

Konvoluce – Metoda posuvných proužků

$x[n] = [1, 0, 2]$ $h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 0 & 2 \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array}$$

$y[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3},$

Konvoluce – Metoda posuvných proužků

$x[n] = [1, 0, 2]$ $\qquad\qquad$ $h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 0 & 2 \\
 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}
\end{array}$$

$y[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1,$

Konvoluce – Metoda posuvných proužků

$x[n] = [1, 0, 2]$

$h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

		1	0	2	
			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	

$y[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3},$

Konvoluce – Metoda posuvných proužků

$x[n] = [1, 0, 2]$ $h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

		1	0	2		
				$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0	$\frac{2}{3}$		

$y[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

Konvoluce – Metoda posuvných proužků

$x[n] = [1, 0, 2]$ $h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

		1	0	2			
					$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0	0			

$y[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

Konvoluce – Metoda superpozice

$x[n] = [1, 0, 2]$ $\quad$ $h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ $\quad$ $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2]$

$x[0] * h[n]$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$x[1] * h[n]$		0	0	0	
$x[2] * h[n]$			$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

$y[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

Konvoluce – Metoda superpozice

$x[n] = [1, 0, 2]$ $\quad$ $h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ $\quad$ $h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-1])$

$h[0] * x[n]$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$		
$h[1] * x[n]$		$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
$h[2] * x[n]$			$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

$y[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

Konvoluce – Metoda násobení polynomů

$x[n] = [1, 0, 2]$

$h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$x = 1x^0 + 2x^{-2}$

$h = \frac{1}{3}x^0 + \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-2}$

$$\mathrm{x} \cdot h = (1 + 2x^{-2}) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^{-1} \frac{1}{3}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-3} \frac{2}{3}x^{-4} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^{-1} + 1x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-3} + \frac{2}{3}x^{-4}$$

$y[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

Konvoluce periodického signálu

$\tilde{x}[n] = [1, 0, 2]$

$h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$\tilde{x}[n] = [1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, \dots]$

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\
\hline
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}
\end{array}
$$

Konvoluce periodického signálu

$\tilde{x}[n] = [1, 0, 2]$ $\qquad h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ $\qquad \tilde{x}[n] = [1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, \dots]$

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$						
			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$			
						$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Konvoluce periodického signálu

$\tilde{x}[n] = [1, 0, 2]$

$h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$\tilde{x}[n] = [1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, \dots]$

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
	0	0	0	0	0	0	
		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$			
			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
			1	1	1		

Konvoluce periodického signálu

$\tilde{x}[n] = [1, 0, 2]$ $\qquad$ $h[n] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ $\qquad$ $\tilde{x}[n] = [1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, \dots]$

	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
		0	0	0	0	0	0	
			$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$			
				$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\tilde{y}[n] =$				$[1$	1	$1]$		

Perioda výstupního signálu je stejná jako perioda vstupního signálu

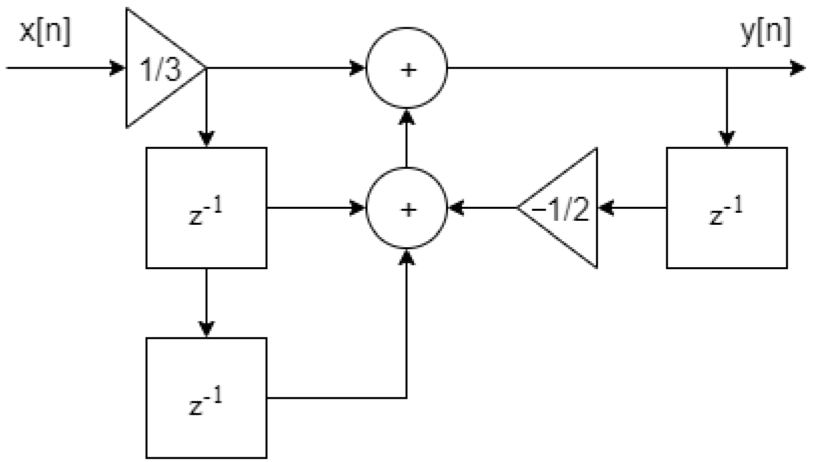
LTI systémy – IIR - Příklad

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) - \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$x[n] = [1, 0, 2]$$

Nulové počáteční podmínky

$$x[-1] = 0$$
$$x[-2] = 0$$
$$y[-1] = 0$$



LTI systémy – IIR - Příklad

Nulové počáteční podmínky

$$y[n] = \tfrac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) - \tfrac{1}{2}y[n-1]$$

$$x[n] = [1, 0, 2]$$

$$x[-1] = 0$$
$$x[-2] = 0$$
$$y[-1] = 0$$

$$y[0] = \frac{1}{3}(x[0] + x[-1] + x[-2]) - \frac{1}{2}y[-1] = \frac{1}{3}(1 + 0 + 0) - 0 = \frac{1}{3}$$

$$y[1] = \frac{1}{3}(0 + 1 + 0) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$y[2] = \frac{1}{3}(2 + 0 + 1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$y[3] = \frac{1}{3}(0 + 2 + 0) - \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{12} = \frac{2}{3} - \frac{11}{24} = \frac{5}{24}$$

$$y[4] = \frac{1}{3}(0 + 0 + 2) - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{24} = \frac{2}{3} - \frac{5}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$$

$$y[5] = 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16} = -\frac{9}{32}$$

$$y[6] = -\frac{1}{2}\cdot -\frac{9}{32} = \frac{9}{64}$$

$$y[7] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{64} = -\frac{9}{128}$$

$$y[8] = -\frac{1}{2}\cdot -\frac{9}{128} = \frac{9}{256}$$

…

LTI systémy – IIR – Impulsní odezva

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) - \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$x[n] = [1]$$

Nulové počáteční podmínky

$$x[-1] = 0$$
$$x[-2] = 0$$
$$y[-1] = 0$$

$$h[0] = \frac{1}{3}(1 + 0 + 0) - 0 = \frac{1}{3}$$

$$h[1] = \frac{1}{3}(0 + 1 + 0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$h[2] = \frac{1}{3}(0 + 0 + 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$h[3] = 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$h[4] = 0 - \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

…

Impulsní odezva IIR systému je nekonečná, nelze ji vyjádřit pomocí vzorků.

LTI systémy - Kauzalita

Kauzální systém

- Závisí pouze na současných a minulých hodnotách (realizovatelné on-line)

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

Nekauzální systém

- Závisí i na budoucích hodnotách (realizovatelné pouze v off-line režimu)

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$$

Úloha k odevzdání

Stáhněte si z e-learningu podklady pro 8. cvičení.

V souboru cv8.m si vyzkoušejte různé typy ozvěn a různé poměry hlasitosti původního signálu a ozvěny.

Implementujte vlastní funkci konvoluce dle vzorce:

$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

Vhodně vyřešte hranice sumy.

Na CC odevzdejte pouze vaši funkci konvoluce.