Jakub Straszkiewicz, gr. 5,160199 12-05-2017

Metody Numeryczne

Projekt 3

Temat: Aproksymacja profilu wysokościowego

1.Założenia

Do wykonania obliczeń potrzebne były profile wysokościowe dowolnie wybranych tras. Wybrałem 3 trasy które mają na celu przedstawienie różnych wariantów profili wysokościowych:

- Formacja skalna Uluru: 2 mocne wzniesienia po środku równy teren
- Trasa przejścia z WETI do jednego z akademików: trasa ciągle i łagodnie rosnąca
- Grand Canyon: częste i duże zmiany wysokości

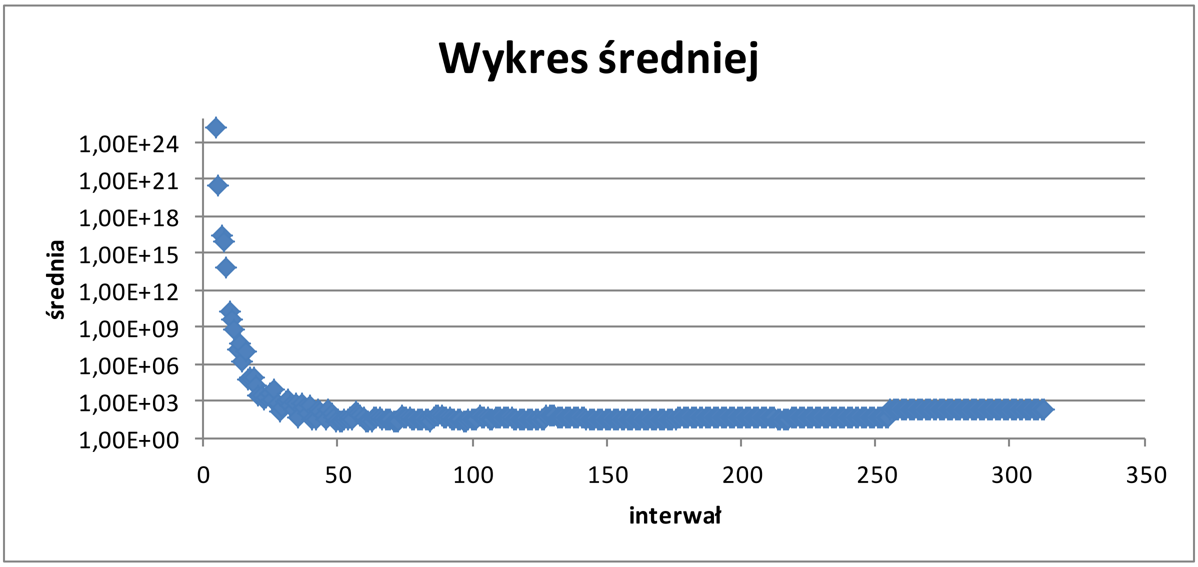
Do wybrania węzłów interpolacji napisałem 3 generatory:

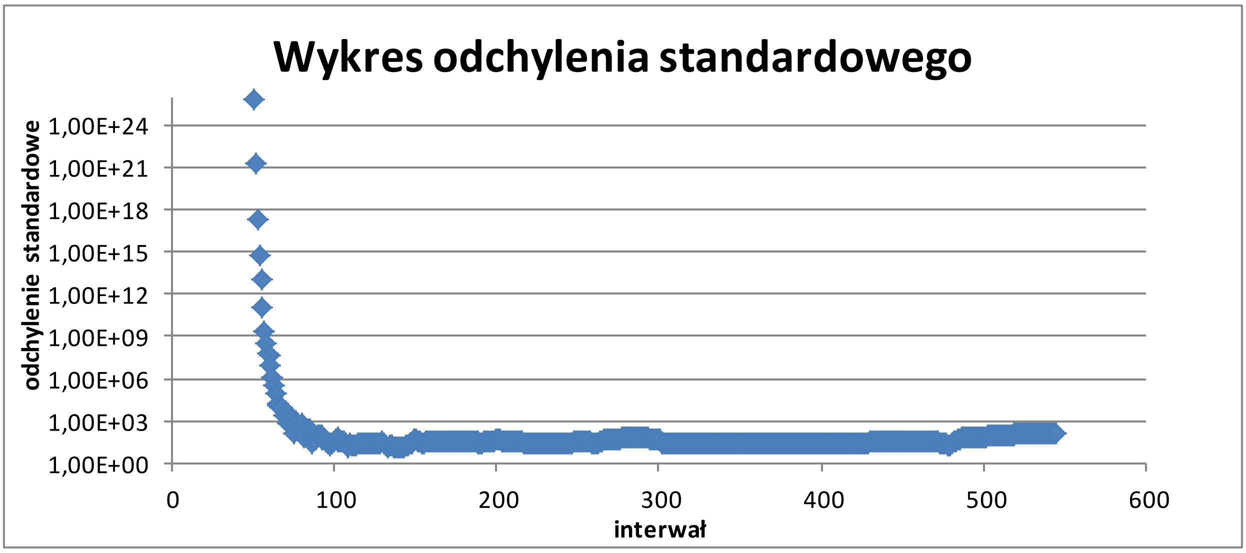
- Generator który dodaje węzeł co określoną liczbę punktów (interwał).
- Generator który liczy odchylenie standardowe z różnic wysokości. Jeśli 2 punkty oddalone są od siebie o więcej niż wartość odchylenia dodaje go jako węzeł interpolacji. W ten sposób więcej punktów będzie w pobliżu dużych wzniesień.
- Generator który węzły aproksymacji przyjmuję jako przekształcone zera wielomianu Czebyszewa.

2. Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki

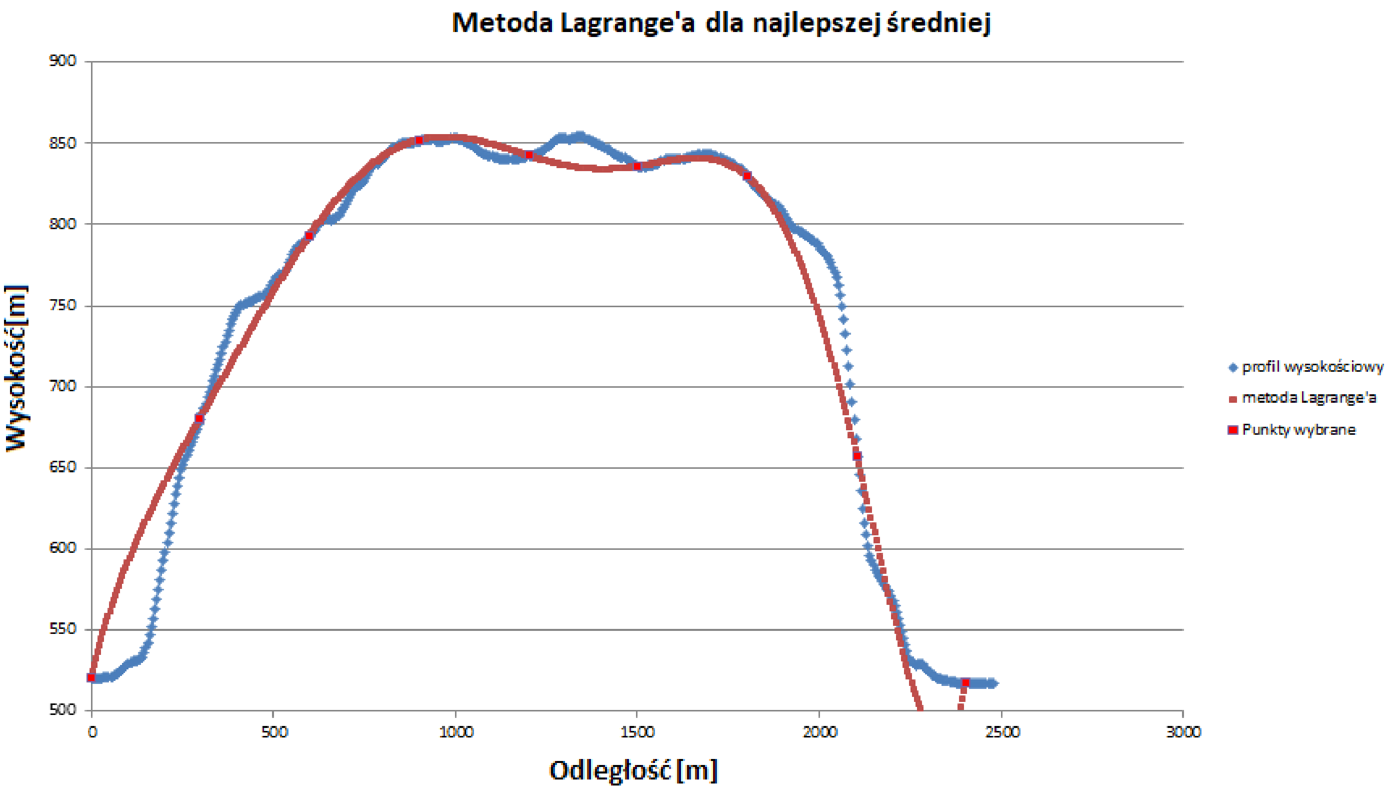
- **Metoda Lagrange'a**

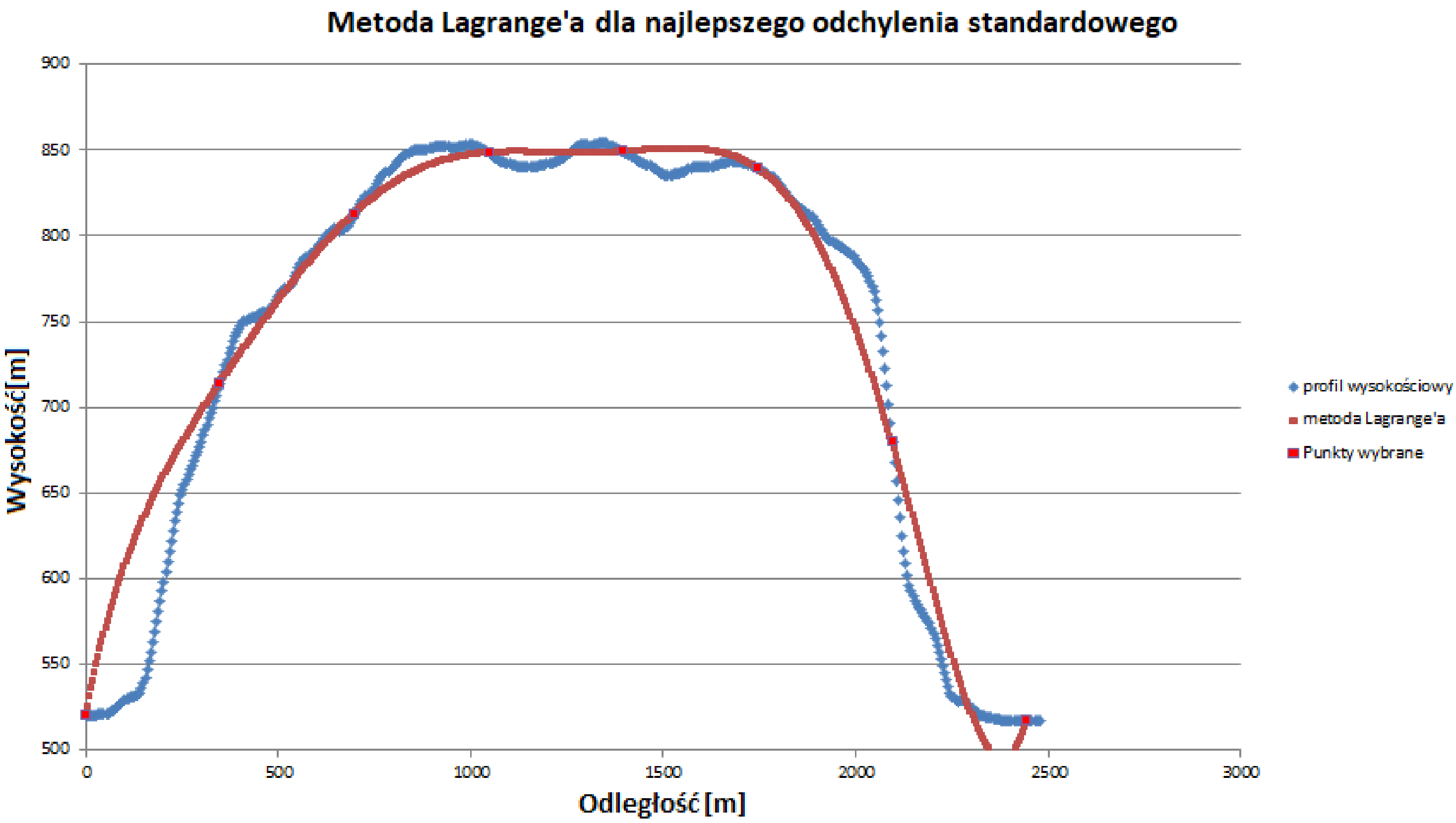
Dla zobrazowania zależności użyłem profilu wysokościowego Uluru. Do porównania ze sobą wyników skorzystałem zarówno z średniej jak i z odchylenia standardowego. Możemy w ten sposób zobaczyć jak mocno wyniki odbiegają od prawidłowej wartości.



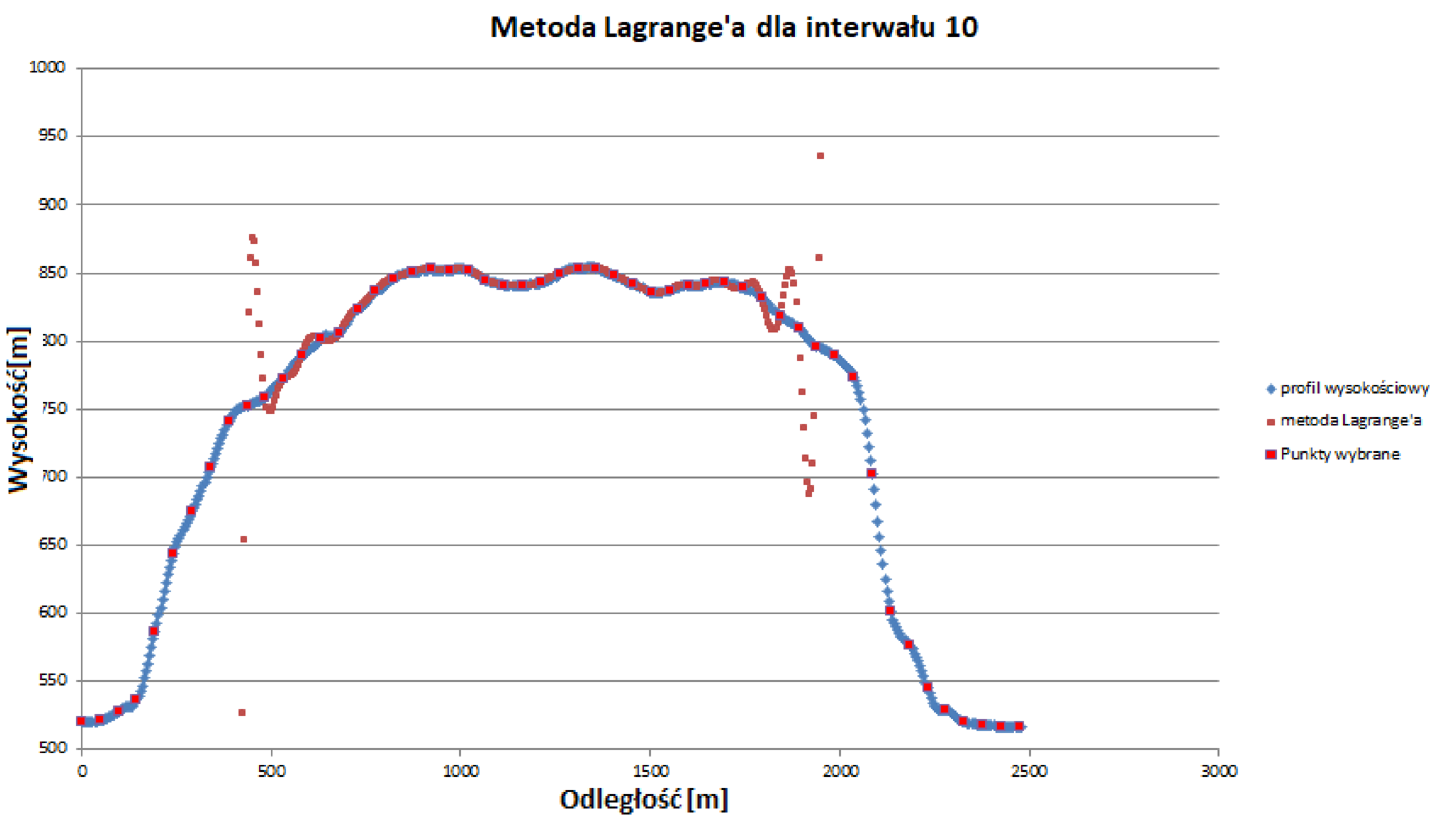


Interwał to odległość 2 punktów od siebie. Aby uzyskać liczbę punktów należy podzielić liczbę wszystkich punktów przez interwał. Na wykresach można zauważyć bardzo mocny trend obu wielkości. Dla małych interwałów wartości średniej oraz odchylenia standardowego dążą do nieskończoności. Oznacza to, że wybór zbyt wielu punktów węzłowych dla metody Lagrange'a nie jest dobrym wyborem. Dla zbyt wielu węzłów w tej metodzie wartości bardzo szybko rosną i mogą wyjść po za zakres rozmiaru danych. Jest to ogromny minus tej metody. Średnia osiąga swoje minimum dla liczby punktów N = 8. Natomiast odchylenia standardowe dla N= 7. Zobaczmy jak wyglądają wykresy w obu wypadkach.



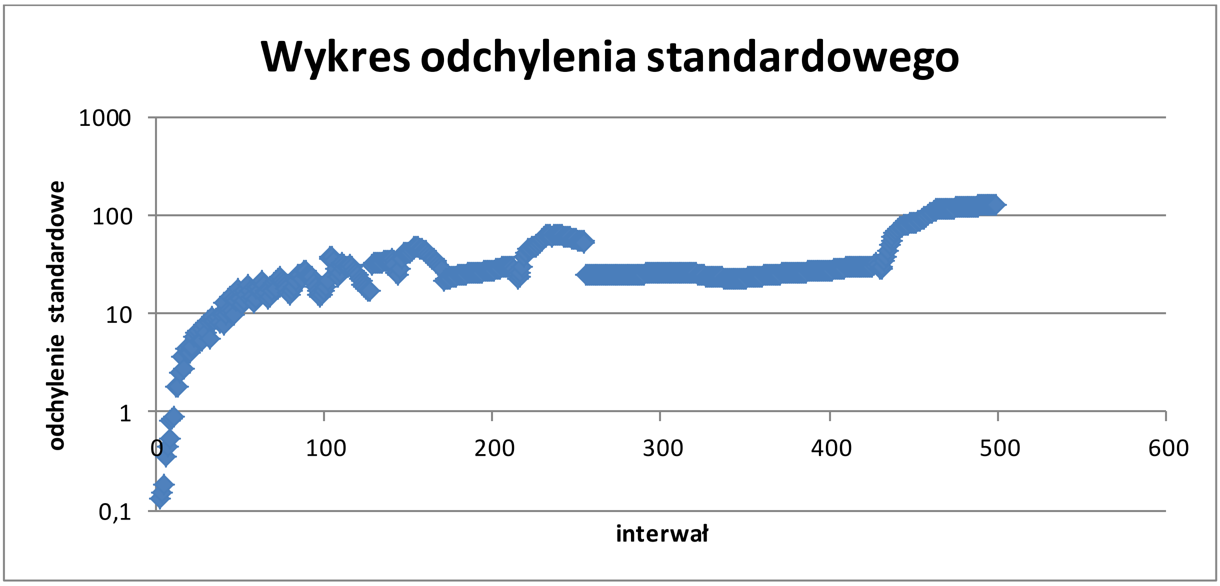


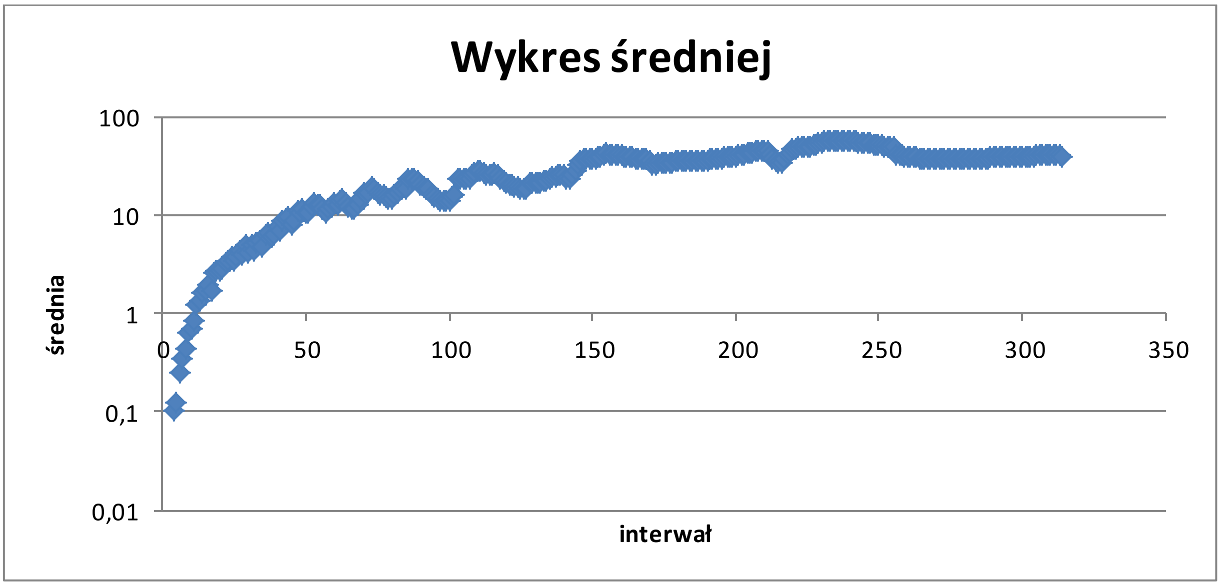
Można zauważyć, że trasy nie pokrywają się ale wyniki wygenerowane przez metodę Lagrange'a dobrze przybliżają oryginalną drogę. Zobaczmy też co dzieje się z metodą Lagrange'a dla większej liczby punktów.



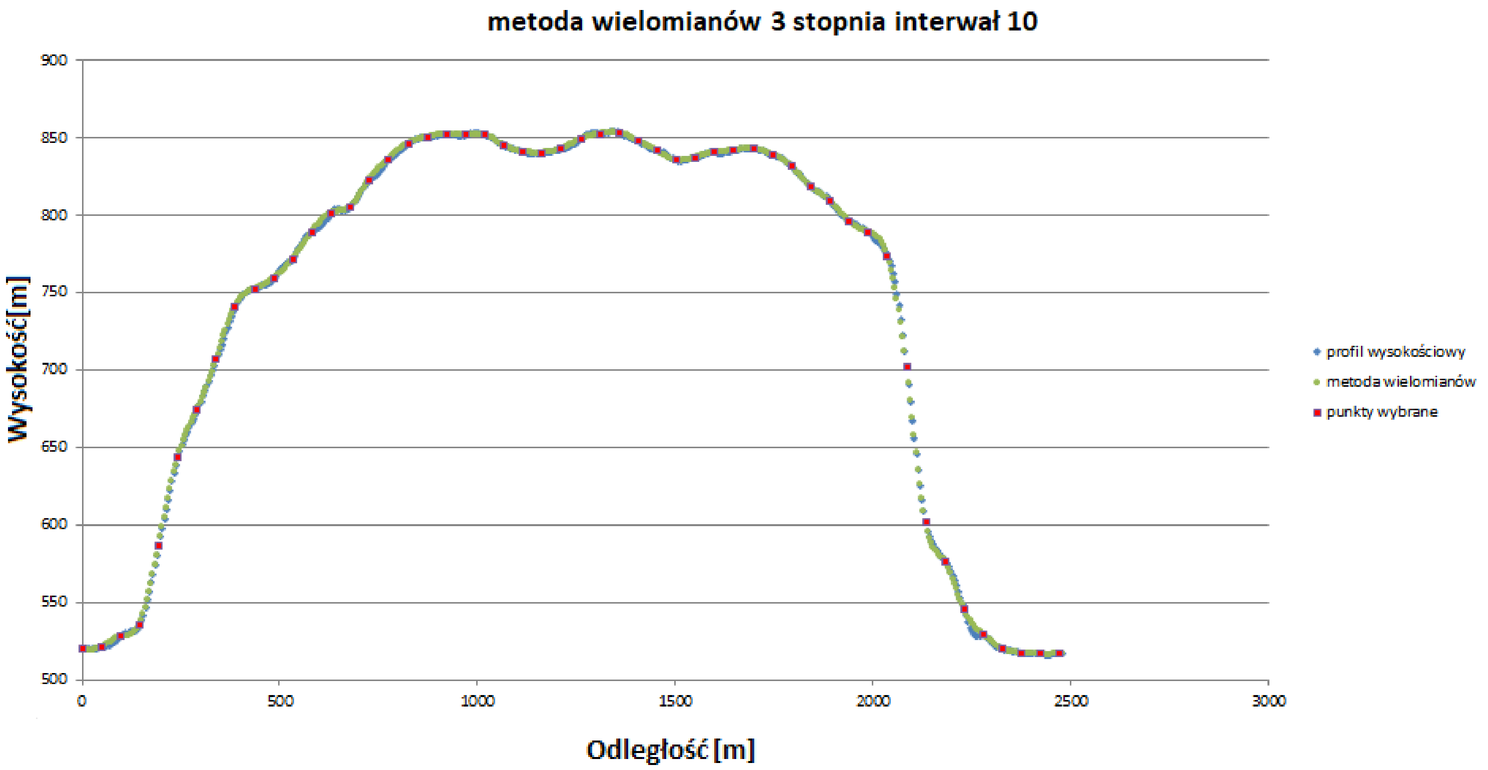
Można zauważyć, że dla większej liczby węzłów metoda Lagrange'a bardzo dobrze przybliżyła środek trasy. Końce natomiast bardzo mocno odbiegają od trasy. Wynika z tego, że Metoda Lagrange'a ma swoje plusy i minusy. Dla małej liczby punktów jest w stanie dobrze przybliżyć trasę. Dla większej liczby jest w stanie obliczyć bardzo dobrze środek trasy natomiast błędy na jej krańcach są bardzo duże co wpływa na pogląd całości.

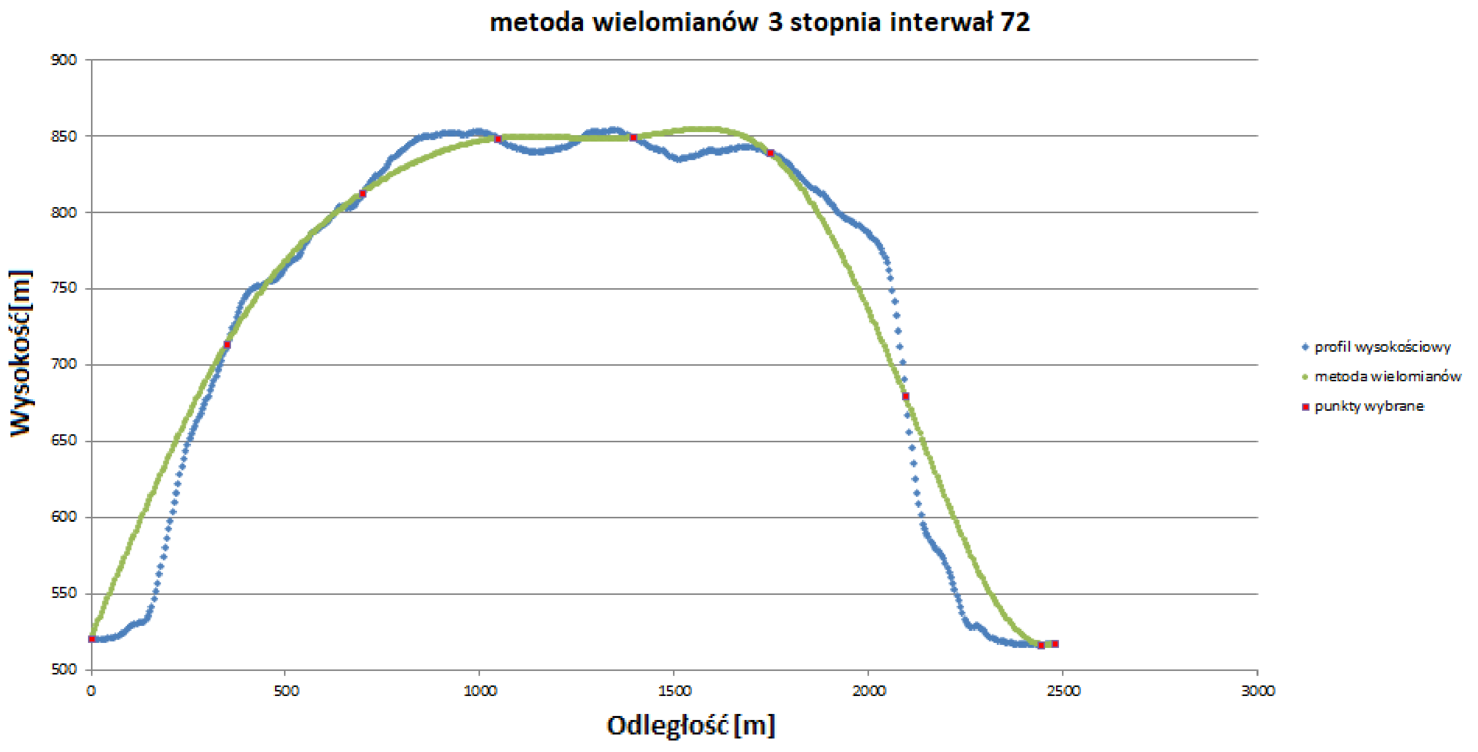
- **Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia**





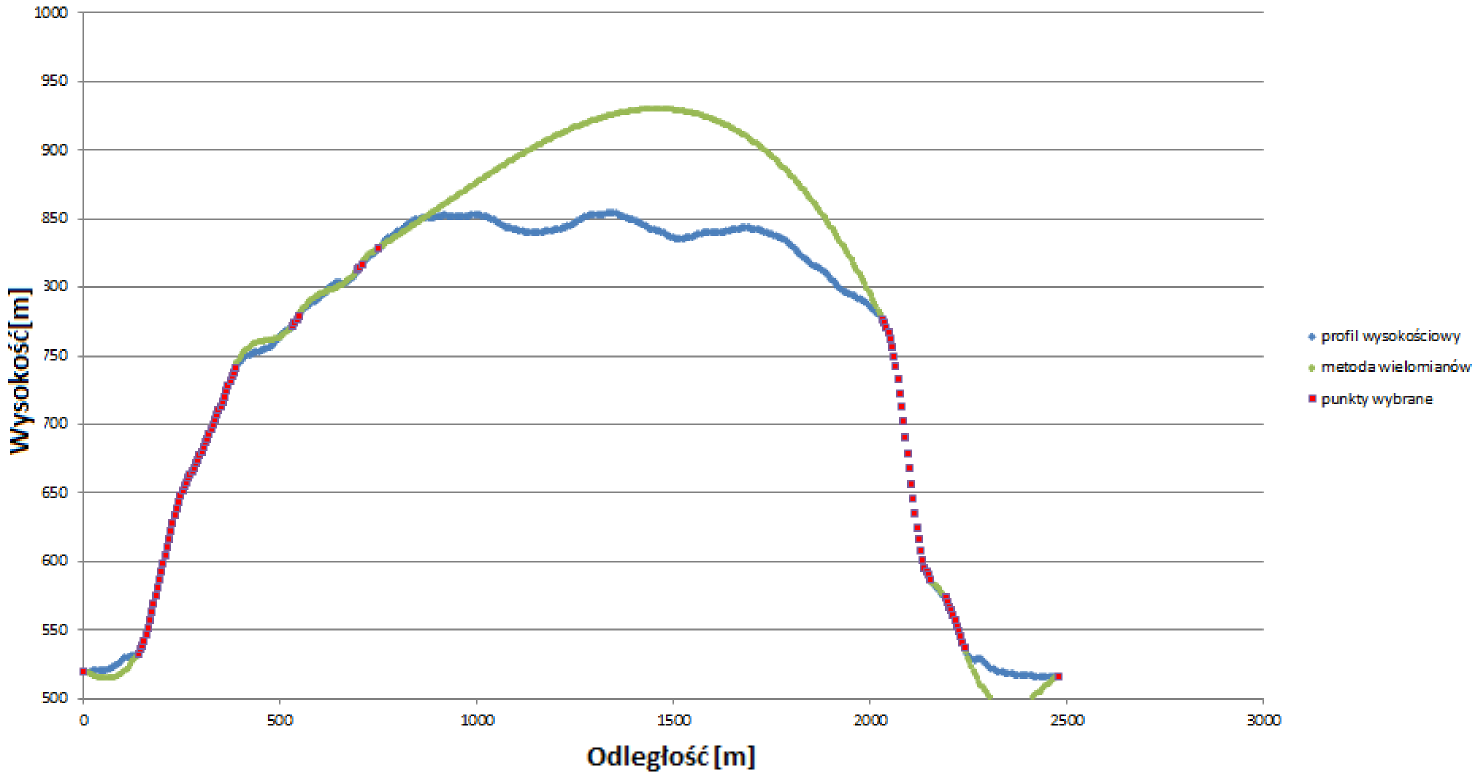
Można zauważyć, że metoda ta jest dokładniejsza gdy posiada bardzo dużo punktów. Jesteśmy wtedy w stanie bardzo dobrze przybliżyć oryginalną trasę. Wynika to z tego, że każdy z wielomianów trzeciego stopnia musi przybliżyć mniej punktów. Zobaczmy jak ta metoda zachowuje się dla N=51(interwał 10) i N = 7(interwał 72).


metoda wielomianów 3 stopnia interwał 10
900
850
800
750
700
650
600
550
500
Wysokość[m]
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
Odległość [m]
profil wysokościowy
metoda wielomianów
punkty wybrane

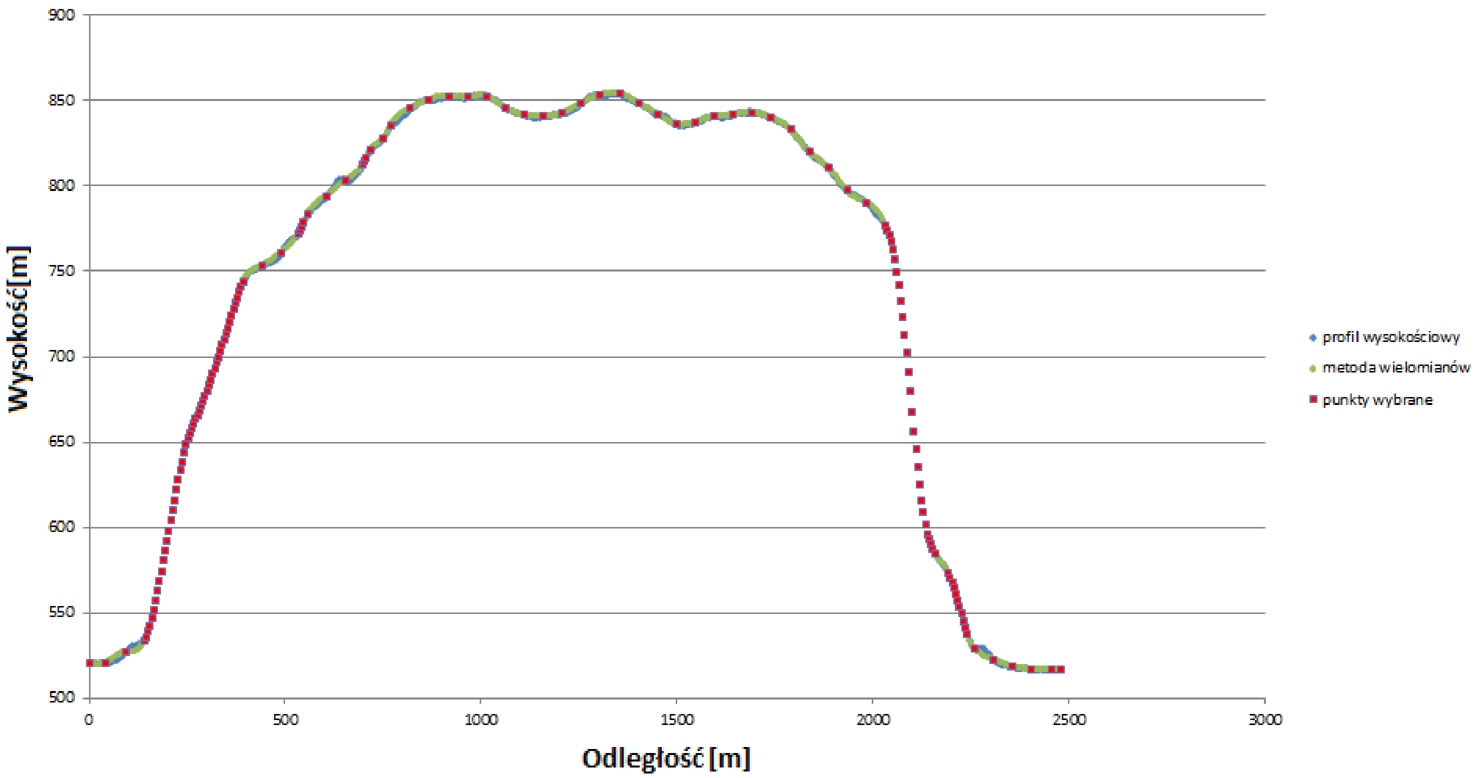

metoda wielomianów 3 stopnia interwał 72
900
850
800
750
700
650
600
550
500
Wysokość[m]
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
Odległość [m]
profil wysokościowy
metoda wielomianów
punkty wybrane

3. Wpływ rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki.

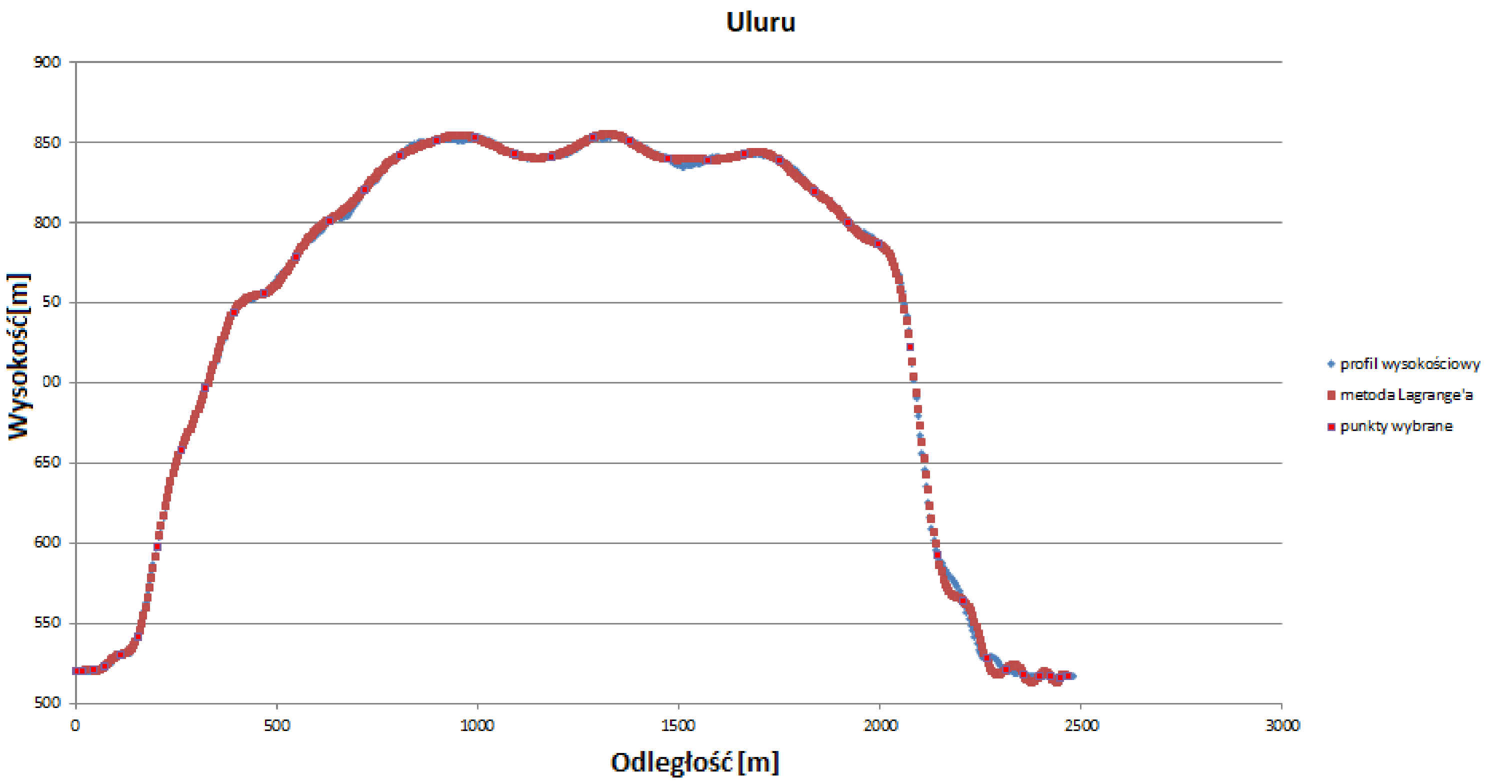
Powyżej pokazałem jak obie metody zachowują się podczas gdy węzły są równoodległe. Teraz pokażę co dzieje się z metodami gdy więcej węzłów przesuniemy blisko dużych wzniesień w terenie.



Widzimy, że metoda wielomianów 3 stopnia bardzo dobrze dostosowuje się na wysokich wzniesieniach, ale nie radzi sobie na wy płaszczeniach, ponieważ nie ma tam żadnych węzłów.



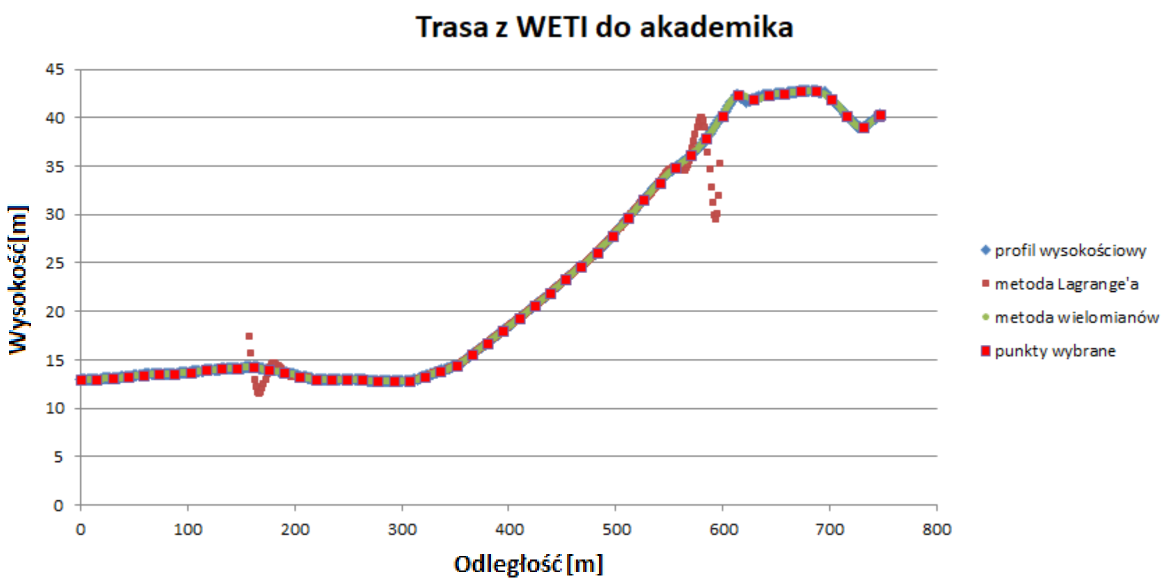
Jeśli dodamy stały interwał metoda ta zachowuje się bardzo dobrze niemal idealnie odtwarza trasę. Metoda Lagrange'a w ogóle nie radzi sobie z takim typem rozmieszczenia punktów. Jest to spowodowane zbyt bliską odległością między węzłami oraz za dużą liczbą punktów. Powoduje to ogromne liczby z którymi nie radzi sobie nasz program. Na potrzeby tego podpunktu stworzyłem również generator który jako węzły aproksymacji przyjmuje przekształcone zera wielomianu Czebyszewa. Pokaże teraz jak metoda Lagrange'a radzi sobie z trasą dla wielu węzłów.

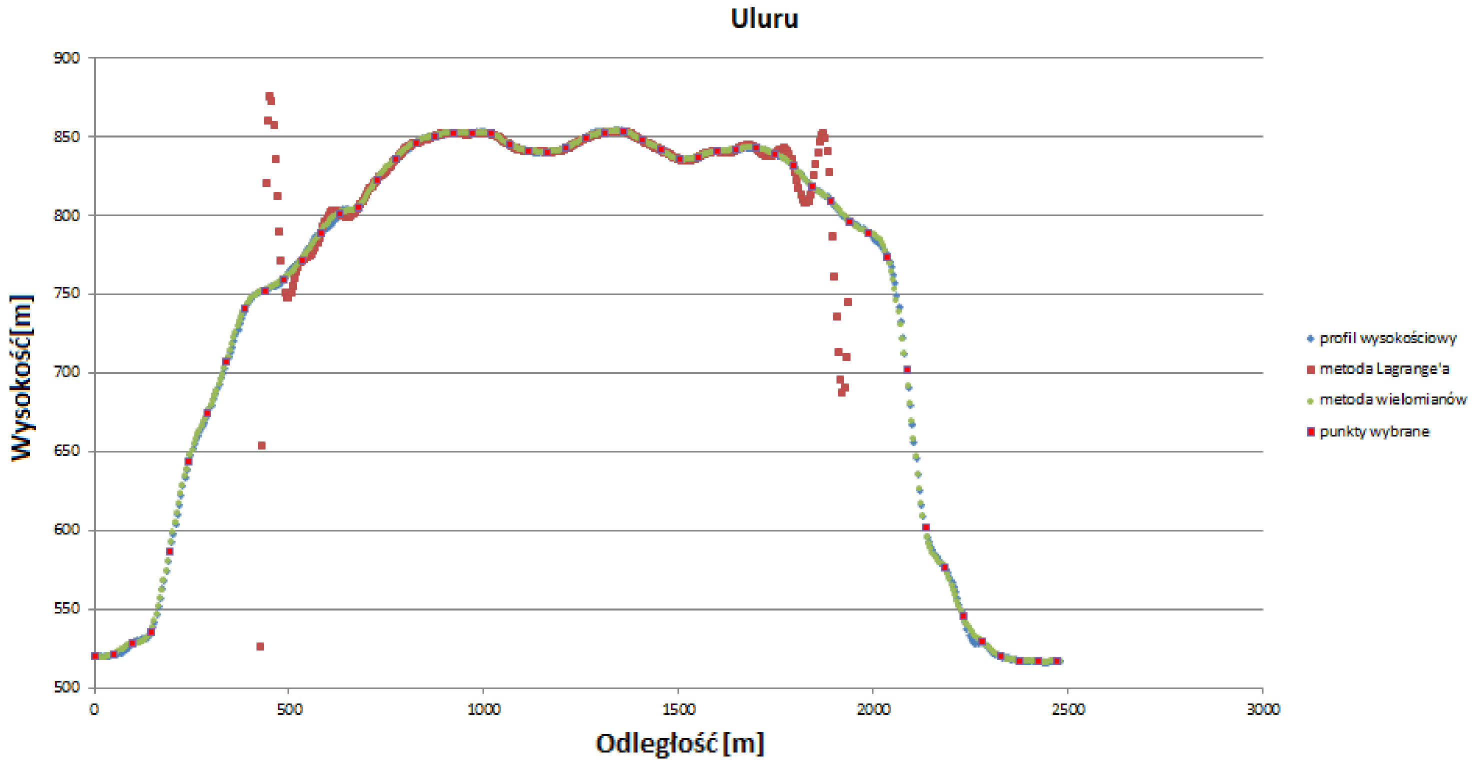


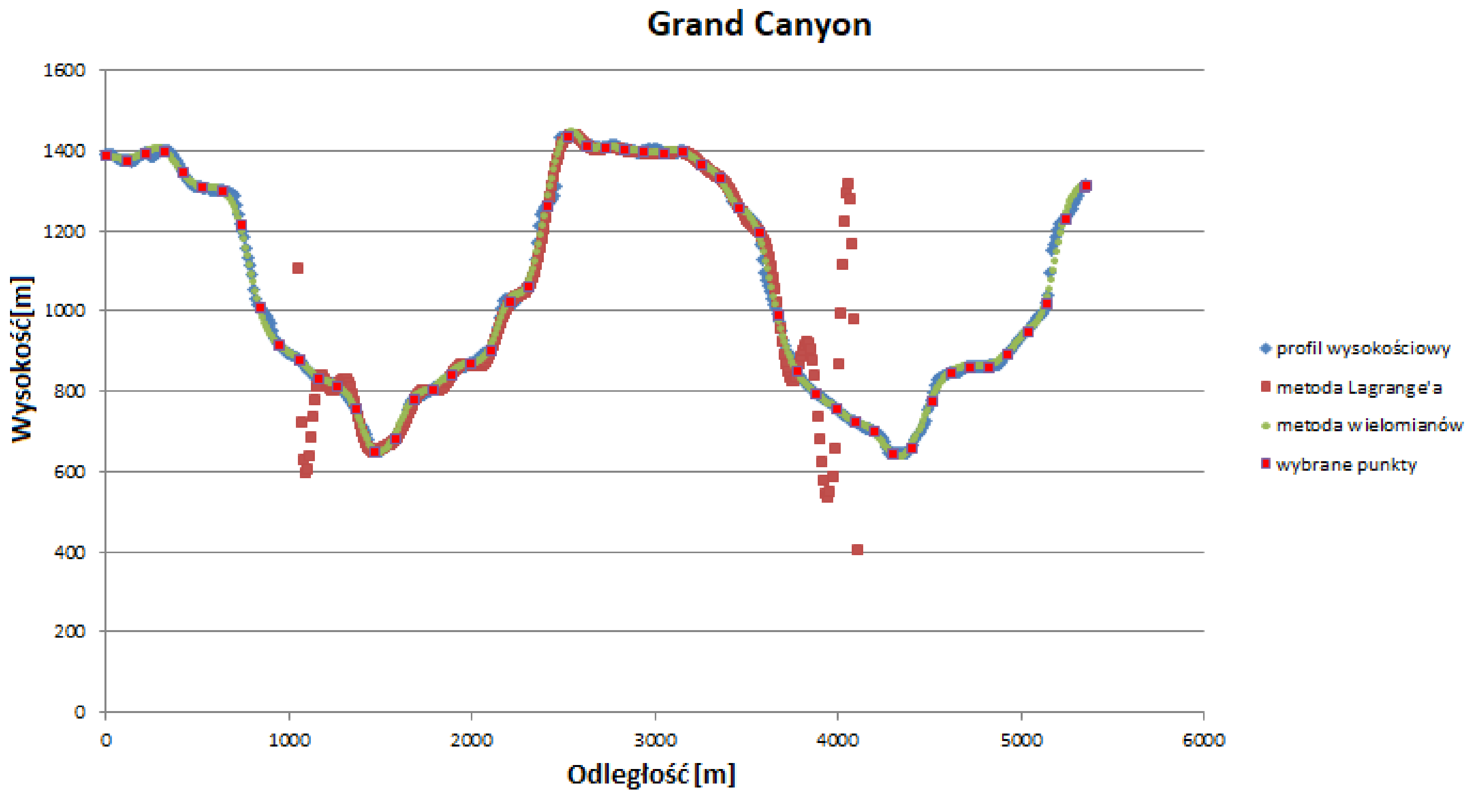
Na pierwszy rzut oka widać, że metoda Lagrange'a z tak wybranymi węzłami bardzo dobrze przybliża naszą trasę. Pokazuje to jak wielki wpływ na wyniki ma odpowiednie dobieranie węzłów.

4. Wpływ charakteru trasy na wyniki.

W tym podpunkcie wykorzystam różne trasy, aby wykazać jak charakter trasy wpływa na wyniki. Na początku przedstawię trasy z dosyć dużą ilością punktów tak, aby pokazać jak radzi sobie z nimi metoda wielomianów 3 stopnia, która jest dokładniejsza przy dużej ilości punktów.



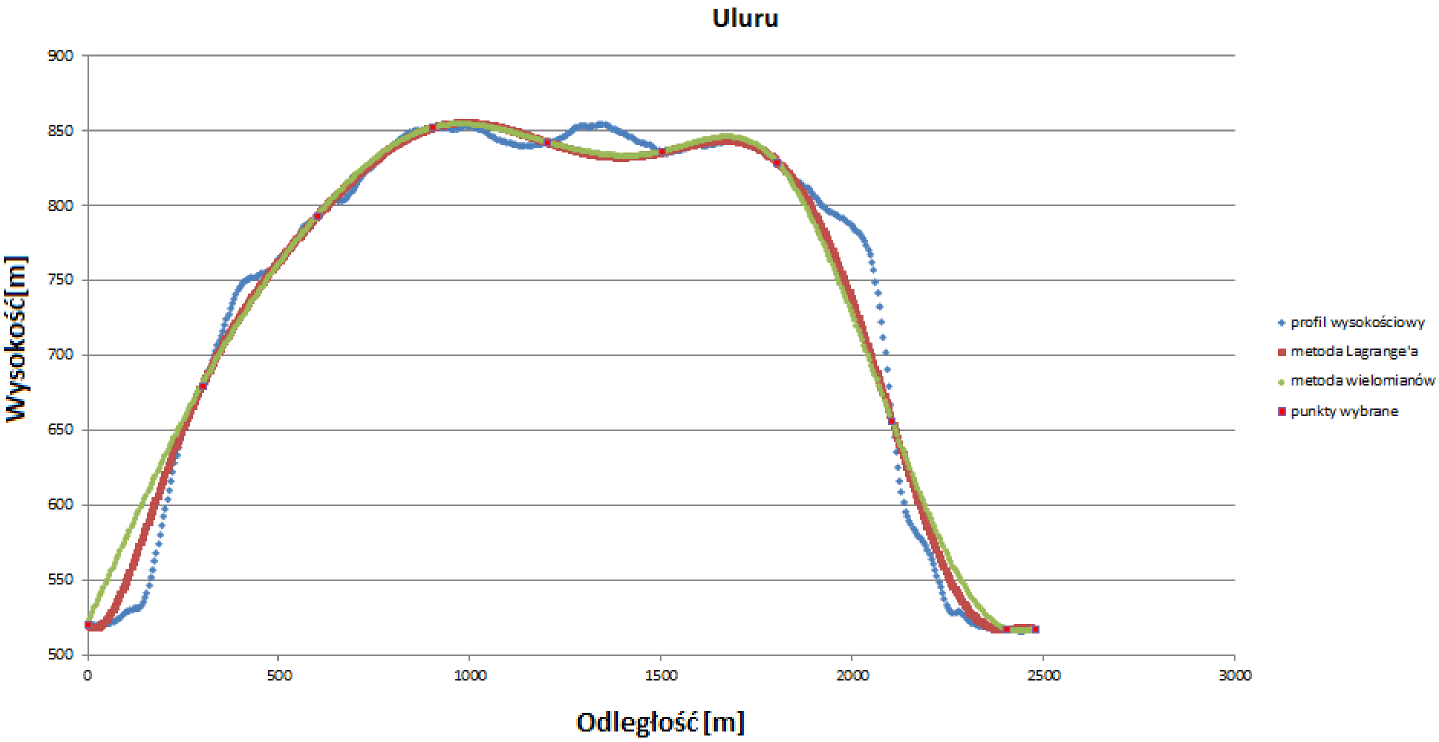


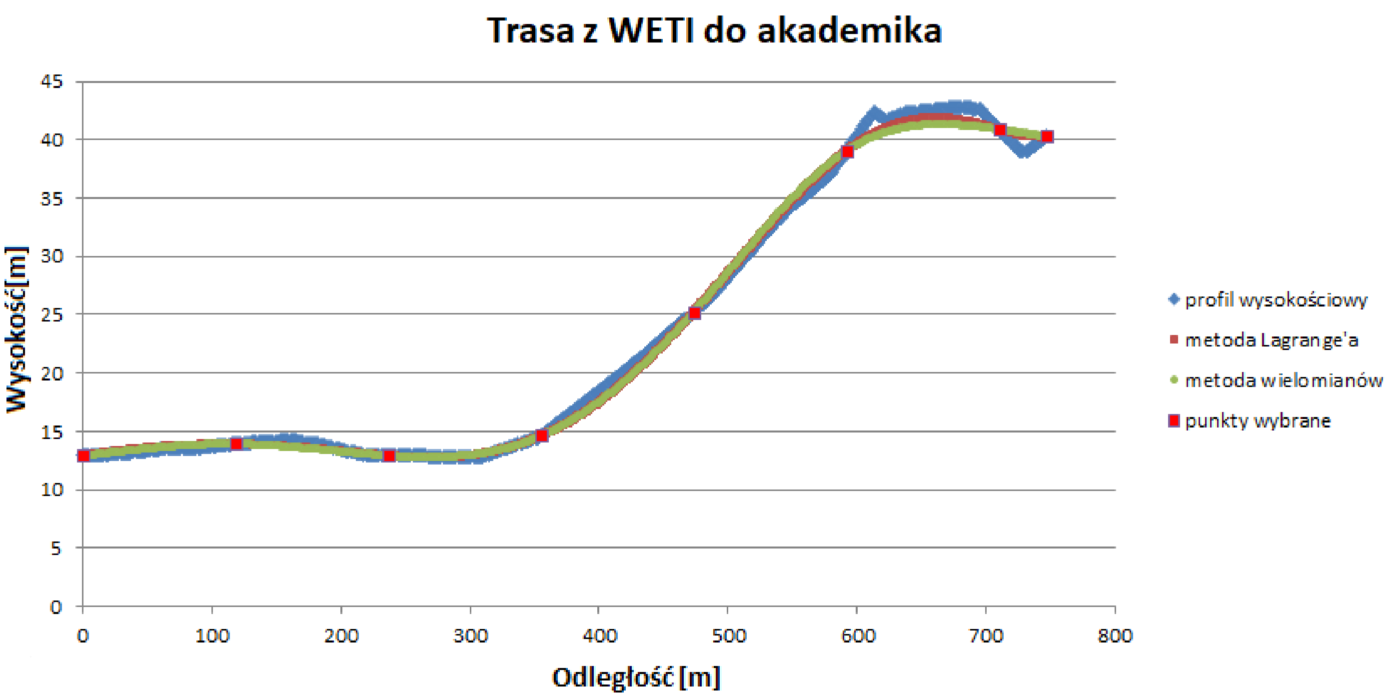


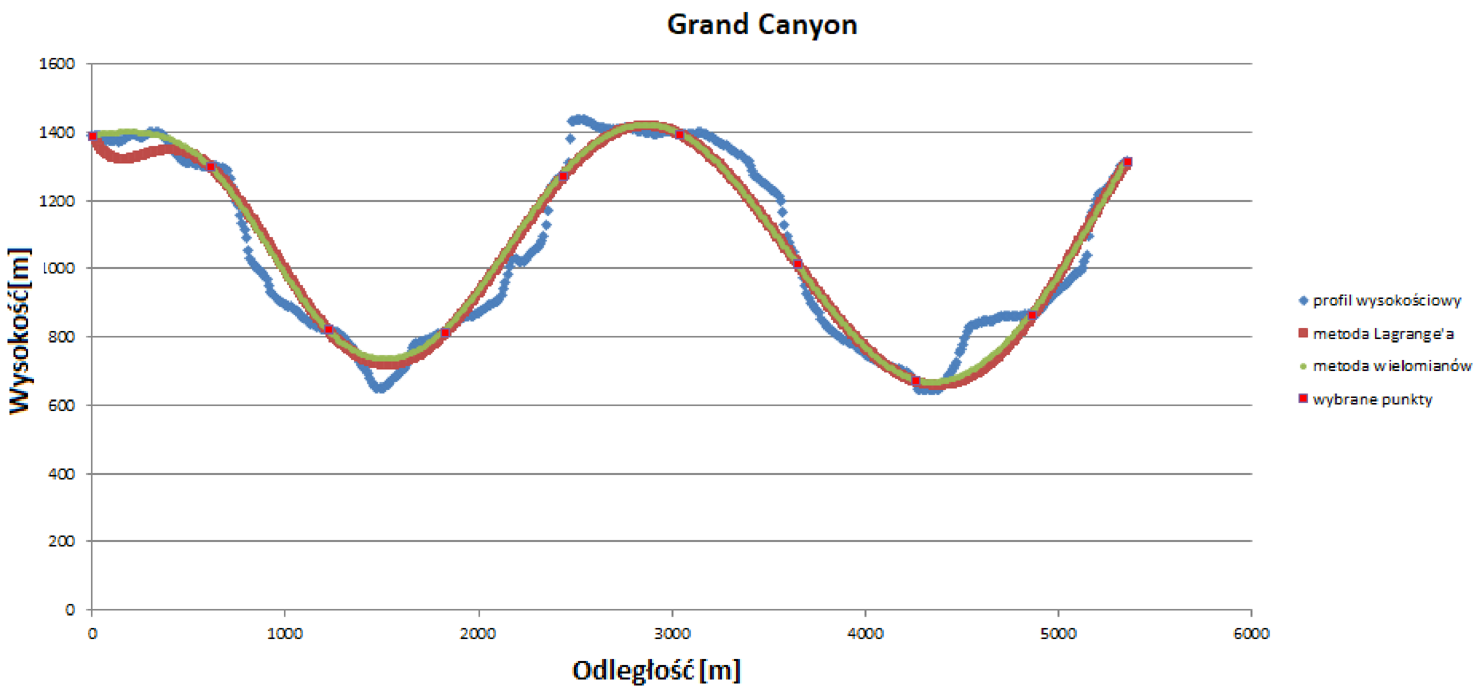
Dla wielu punktów można zauważyć, że metoda wielomianów działa bardzo dobrze bez względu na charakterystykę trasy. Metoda Lagrange'a również bardzo dobrze odtwarza trasę w środkowej jej części natomiast na krańcach bardzo mocno odbiega od rozwiązania. Dla każdej z tras sprawdzę teraz dla ilu węzłów ich średnia oraz odchylenie standardowe jest najmniejsze i jeszcze raz pokaże wykresy.

	Uluru		akademik		Grand Canyon	
	interwał	wartość	interwał	wartość	interwał	wartość
średnia	62	10,01226	52	0,307624	58	47,51198
odchylenie	95	12,8954	81	0,360154	58	38,14094

Średnia jest w tym momencie złym wyznacznikiem, ponieważ mocne oscylacje mogą znacząco wpływać na jej wartość. Dlatego narysujemy wykresy dla interwału wskazanego przez odchylenie standardowe.

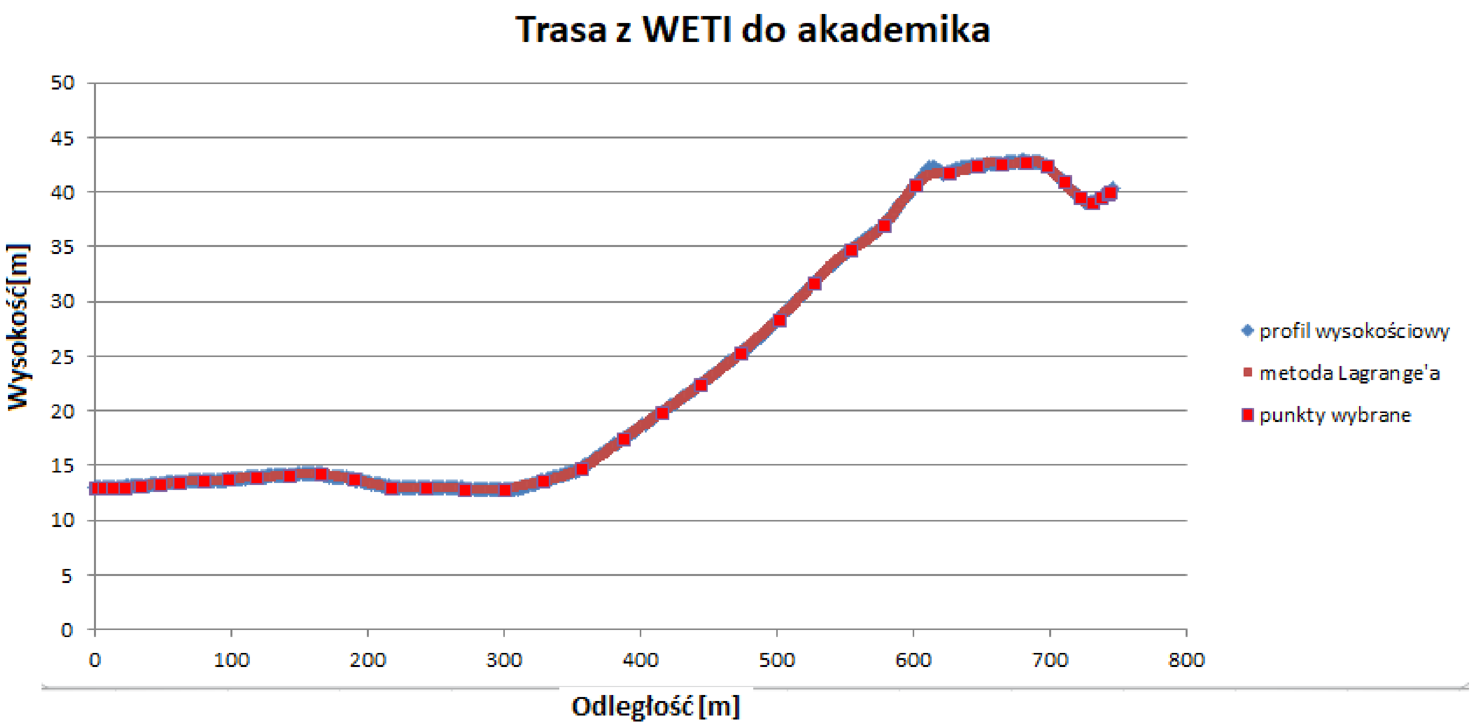


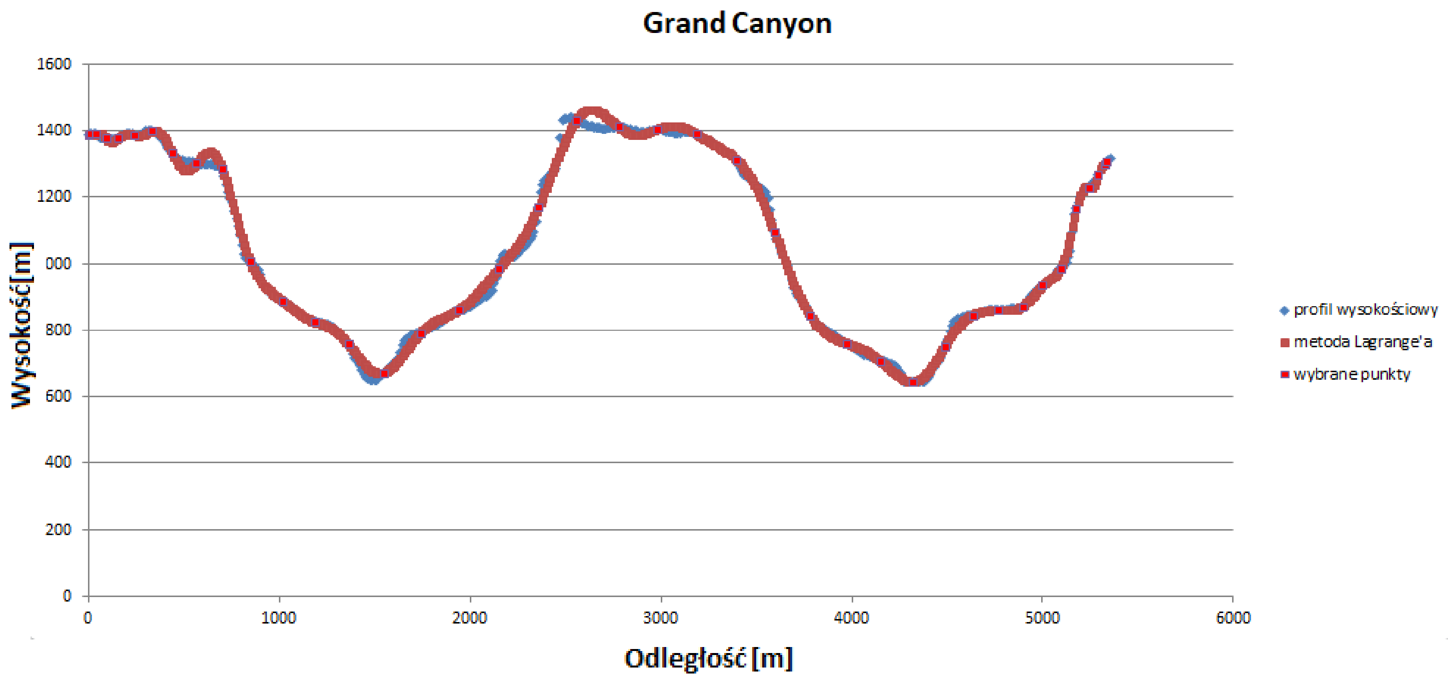


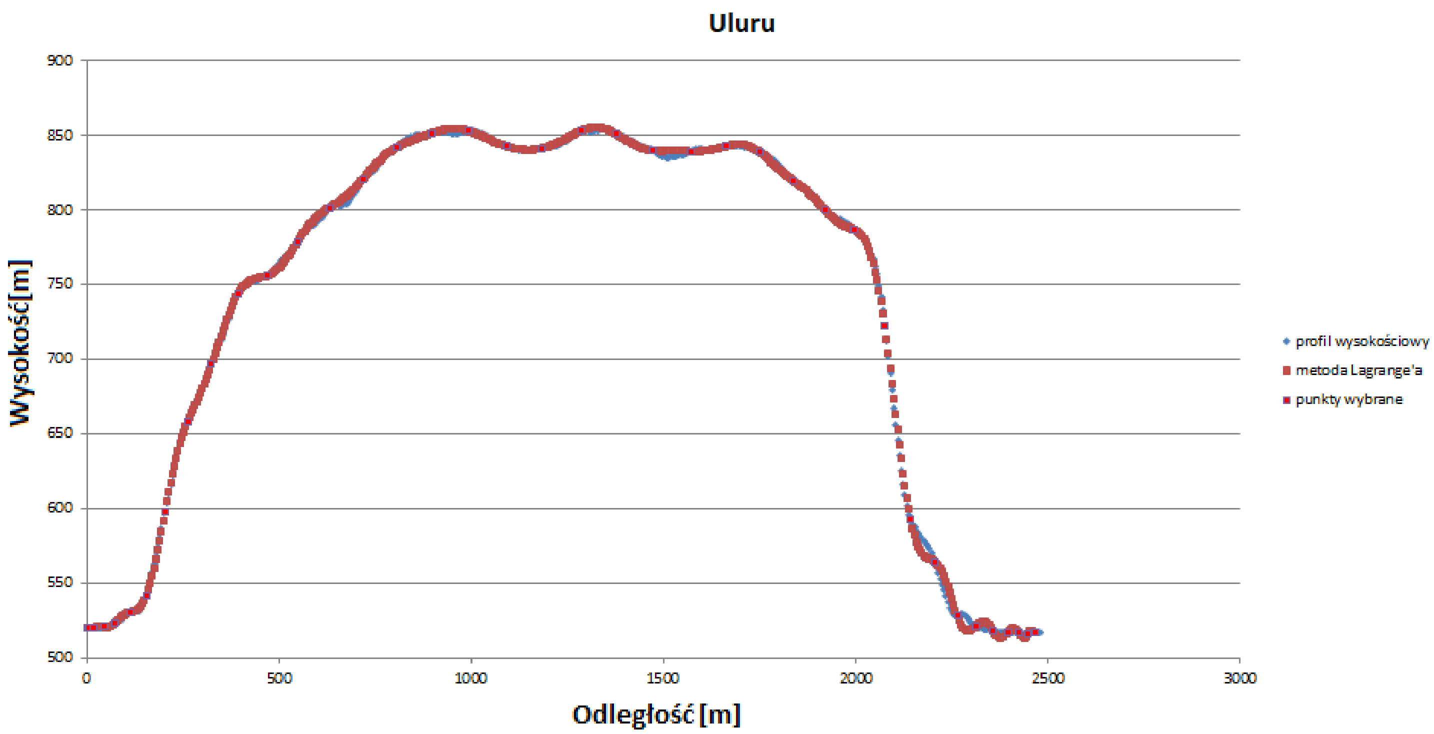


Dla małej ilości węzłów metody przybliżają trasy w sposób mocno odbiegający od tego co widzieliśmy wcześniej. Najlepiej w takiej sytuacji przybliżać trasy które nie mają gwałtownych zmian wysokości tylko rosną w sposób równomierny. Bardzo dobrze przedstawia to rysunek z trasy do akademika. Tam obie metody w bardzo dobry sposób odtworzyły trasę mimo szczątkowych informacji na jej temat. Widać też, że im więcej gwałtownych zmian terenu tym więcej węzłów potrzebują metody.

Sprawdźmy jeszcze co dzieje się gdy za węzły dla metody Lagrange'a przyjmiemy przekształcone zera wielomianu Czebyszewa.







Widać, że metoda Lagrange'a w takim wypadku sprawuje się dobrze. Jedynie w przypadku trasy z dużą ilością gwałtownych zmian wysokościowych powstają problemy.

5. Wnioski.

Przed wyborem metody której użyjemy do odtwarzania tras należy dobrze się zastanowić której użyć, albowiem wiele czynników wpływa na to jaki wynik końcowy otrzymamy.

Należy zadać sobie pytania:

- Jaki charakter ma odtwarzana trasa?
- Ile punktów jest nam znanych?
- Jak rozmieszczone są węzły?
- Czy chcemy odtworzyć trasę jak najwierniej czy wystarczą nam przybliżone wartości?
- Czy chcemy odtworzyć całą trasę czy tylko jej część?

Dopiero po odpowiedzeniu na te pytania wybrać jedną z metod.

Jeśli trasa posiada wiele zmian wysokościowych i są one bardzo strome, ponadto mamy dużo znanych punktów, należy wybrać metodą wielomianów.

Jeśli trasa posiada łagodne wzniesienia wtedy nawet przy małej liczbie węzłów opłaca się skorzystać z metody Lagrange'a.

Metoda Lagrange'a ma istotną wadę. Jeśli mamy do dyspozycji dużo węzłów nie można z niej skorzystać . Krańce obliczanych tras zawsze będą obliczone z dużą niedokładnością, ponieważ funkcja zaczyna bardzo mocno oscylować.

Rozwiązaniem tego problemu jest wybranie mniejszej ilości węzłów, lub przyjęcie za węzły przekształcone zera wielomianu Czebyszewa. W takim wypadku metoda Lagrange'a znacznie lepiej przybliża i nawet przy dużej liczbie węzłów mocno nie oscyluje na krańcach przedziału. Wadą tego przypadku jest to, że musimy znać wartości konkretnych punktów z całej funkcji co nie zawsze jest możliwe.

Metoda wielomianów 3 stopnia również ma istotną wadę. W trakcie jej wykonywania obliczamy układ równań liniowych metodą bezpośrednią. Dla dużych układów metody bezpośrednie są wolne co wpływa na czas wykonania całego programu.

Wynika stąd, że nie ma metody uniwersalnej. Przed wykonaniem obliczeń zawsze trzeba mieć na uwadze jakimi danymi dysponujemy oraz jakiego wyniku się spodziewamy.