

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Jakub Wojna
Nr albumu: 439125

**Analiza porównawcza oraz prognozy bezrobocia i turystyki
metodami ekstrapolacyjnymi oraz modelami ARIMA**

Praca zaliczeniowa na kierunku:
Międzykierunkowe Studia Ekonomiczno-Matematyczne

Praca wykonana pod kierunkiem
dr Piotra Żocha
z katedry Statystyki i Ekonometrii
WNE UW

Warszawa, czerwiec 2025

Oświadczenie autora pracy

Świadom(a) odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca została napisana samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Data

8.06.2025 r.

Podpis autora pracy

Streszczenie

W pracy przeprowadzono analizę dwóch szeregów czasowych: niesezonowego dotyczącego bezrobocia oraz sezonowego dotyczącego turystyki w Polsce (2011–2025). Dla bezrobocia najlepszy okazał się model ARIMA(2,1,4), skutecznie odwzorowując dynamikę danych. W przypadku turystyki, uwzględniającej sezonowość i szok pandemii COVID-19, najlepsze prognozy zapewniła metoda Holta-Wintersa. Uzyskane wyniki umożliwiają lepsze zrozumienie analizowanych zjawisk oraz efektywniejsze planowanie strategiczne w badanych obszarach społeczno-ekonomicznych.

Słowa kluczowe

analiza szeregów czasowych, ARIMA, metoda Holta-Wintersa,
modele ekstrapolacyjne, sezonowość, bezrobocie, turystyka,

Wstęp.....	5
1. Szereg niesezonowy	6
1.1 Przygotowanie do ARIMA.....	6
1.1.1. Opis danych.....	6
1.1.2 Dekompozycja szeregu	6
1.1.3. Przegląd stacjonarności	7
1.1.4. Transofmacja Boxa-Coxa.....	7
1.1.5. Eksploracja danych – test Dicky-Fullera	9
1.1.6. Test Breuscha–Godfreya	10
1.1.7. Dalsze badanie – test ADF	11
1.1.8. Transformacja – pierwsze różnice.....	11
1.1.9 Testy dla różnicowanego szeregu.	12
1.1.7. test KPSS oraz Ljunga-Boxa.....	15
1.2. ARIMA.....	16
1.2.1 wykresy ACF i PACF	16
1.2.2. Prognoza.....	18
1.2.3 Modele eksploracyjne	20
1.2.4 Podsumowanie	21
2. Szereg Sezonowy	22
2.1 Przygotowanie do ARIMA.....	22
2.1.1. Opis danych.....	22
2.1.2 Dekompozycja.....	23
2.1.3 Stacjonarność	23
2.1.4 Dekompozycja logarytmowanego szeregu.....	24
2.1.5 Dodanie pierwszych różnic	27
2.1.6 Podsumowanie	30
2.2. ARIMA.....	30
2.2.1 wykresy ACF i PACF	30
2.2.2. Prognoza.....	32
2.2.3 Modele ekstrapolacyjne.....	33
2.2.3 Podsumowanie	34
Zakończenie	36
BIBLIOGRAFIA.....	37
ANEKS.....	37
Spis rysunków	37
Spis tabel	38

WSTĘP

Analiza szeregów czasowych odgrywa kluczową rolę we współczesnych badaniach ekonomicznych, pozwalając na dogłębne zrozumienie dynamiki analizowanych zjawisk, identyfikację ich komponentów oraz skuteczne prognozowanie przyszłych wartości. W niniejszej pracy przeprowadzono szczegółową analizę dwóch różnorodnych szeregów czasowych, które reprezentują ważne aspekty życia społecznego i ekonomicznego.

Pierwszym badanym szeregiem czasowym jest niesezonowy szereg dotyczący bezrobocia rejestrowanego w Polsce w okresie od stycznia 2011 do kwietnia 2025 roku. Analiza tego szeregu umożliwia lepsze zrozumienie struktury rynku pracy, a także ocenę wpływu wydarzeń gospodarczych, takich jak pandemia COVID-19, na poziom bezrobocia. Szczególną uwagę poświęcono weryfikacji stacjonarności oraz identyfikacji optymalnego modelu ARIMA do skutecznego prognozowania przyszłych wartości szeregu.

Drugim analizowanym szeregiem jest sezonowy szereg czasowy dotyczący turystyki, reprezentowany przez dane dotyczące bazy noclegowej w Polsce z lat 2011-2025. Szereg ten cechuje wyraźna sezonowość oraz zauważalny trend wzrostowy, przerwany istotnym szokiem związanym z pandemią COVID-19. W ramach tej analizy wykorzystano zaawansowane techniki modelowania sezonowego, w tym modele klasy ARIMA oraz metody ekstrapolacyjne, takie jak metoda Holta-Wintersa, aby jak najlepiej odwzorować dynamikę tego istotnego sektora gospodarki.

W niniejszej pracy zastosowano różnorodne techniki analizy statystycznej i ekonometrycznej, obejmujące dekompozycję szeregu, testy stacjonarności (ADF, KPSS), analizę autokorelacji (ACF, PACF) oraz modele ekstrapolacyjne i modele ARIMA. Celem tych działań było nie tylko dostarczenie wiarygodnych prognoz, lecz także zidentyfikowanie i zinterpretowanie fundamentalnych właściwości badanych szeregów czasowych. Uzyskane wyniki mogą posłużyć do formułowania skuteczniejszych strategii zarządzania oraz planowania działań w badanych obszarach społecznych i gospodarczych.

1. SZEREG NIESEZONOWY

1.1 Przygotowanie do ARIMA

1.1.1. Opis danych

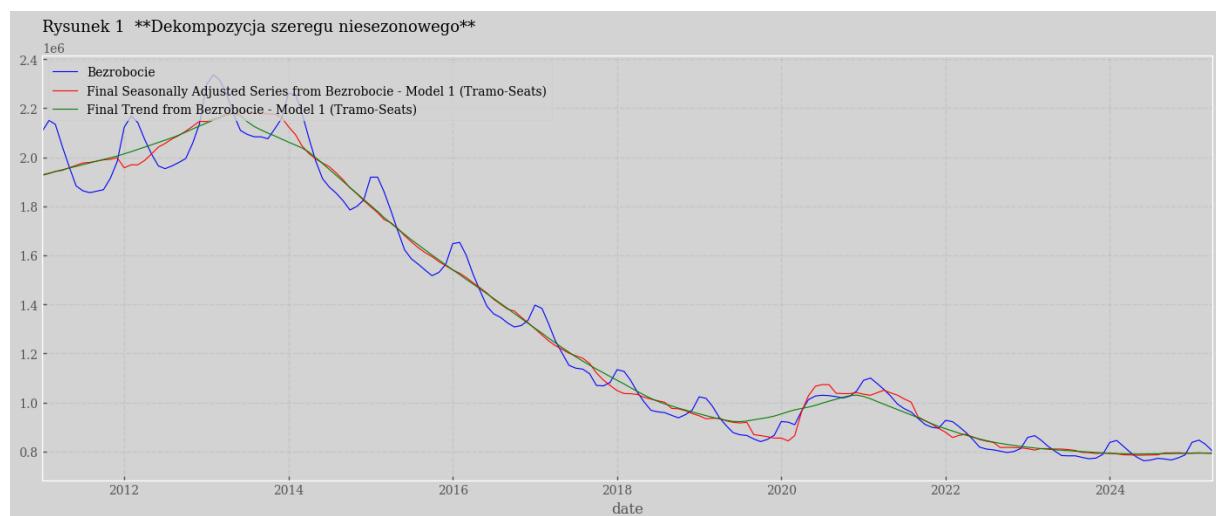
Szereg danych, który został wykorzystany w niniejszej pracy, pochodzi z zakresu **rynk**u **pracy**, w szczególności z kategorii dotyczącej **bezrobocia rejestrowanego**. Dane obejmują informacje o **bezrobotnych zarejestrowanych**, zgodnie z definicjami ustawowymi zawartymi w ustawie z dnia 20 kwietnia 2004 r. o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy.

Zgodnie z opisem metadanych, do populacji tej zaliczają się osoby w wieku produkcyjnym, które spełniają kryteria ustawowe — tj. są zdolne i gotowe do podjęcia zatrudnienia w pełnym wymiarze czasu pracy, a nie uczą się w szkole, z wyjątkiem szkół dla dorosłych.

Dane dostępne są w układzie miesięcznym, zagregowane według płci, obejmujące okres od 1 stycznia 2011 roku do 1 kwietnia 2025 roku

1.1.2 Dekompozycja szeregu

Rysunek 1: Dekopozycja szeregu bezrobocia.

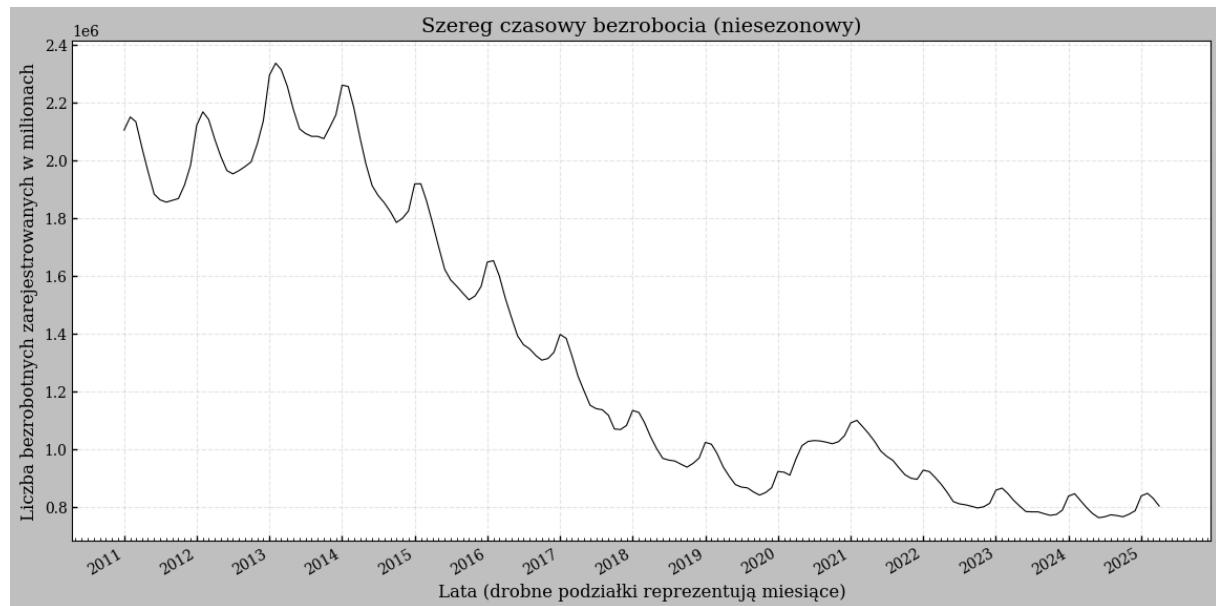


Źródło 1: Opracowanie własne za pomocą Demetra+

Jak pokazuje Rysunek 1, komponent trendu (zielony) dominuje nad sezonowym, a ścieżka trendu jest w zasadzie malejąca – to wskazuje na **trend stochastyczny** przy braku wyraźnej sezonowości. Komponent sezonowy oszacowany metodą STL jest praktycznie zerowy (linia SA – czerwona – niemal pokrywa się z oryginałem), co wydaje się implikować brak sezonowości w serii. W analizie nie zidentyfikowano także istotnych obserwacji odstających.

1.1.3. Przegląd stacjonarności

Rysunek 2: Szereg czasowy bezrobocia, dane miesięczne.



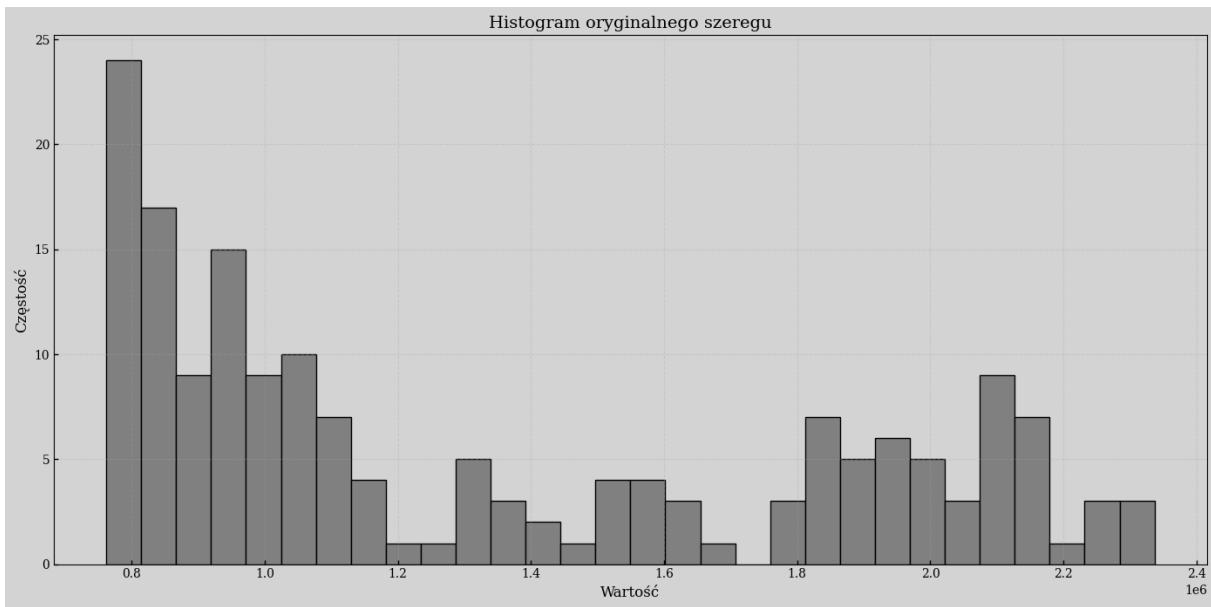
Źródło 2: Opracowanie własne.

Interpretując powyższy wykres można stwierdzić, że szereg jest niestacjonarny. Po 2015 roku obserwowany jest wyraźny trend spadkowy liczby bezrobotnych zarejestrowanych w urzędach pracy, co oznacza, że wartości szeregu nie oscylują wokół stałego poziomu. W okresie pandemii COVID-19 można zaobserwować wzrost liczby bezrobotnych – choć nominalnie nieduży, to względnie istotny na tle dotychczasowego trendu spadkowego. Można również stwierdzić niestacjonarność według wariancji – amplituda zmian w szeregu różni się w zależności od okresu.

1.1.4. Transofmacja Boxa-Coxa

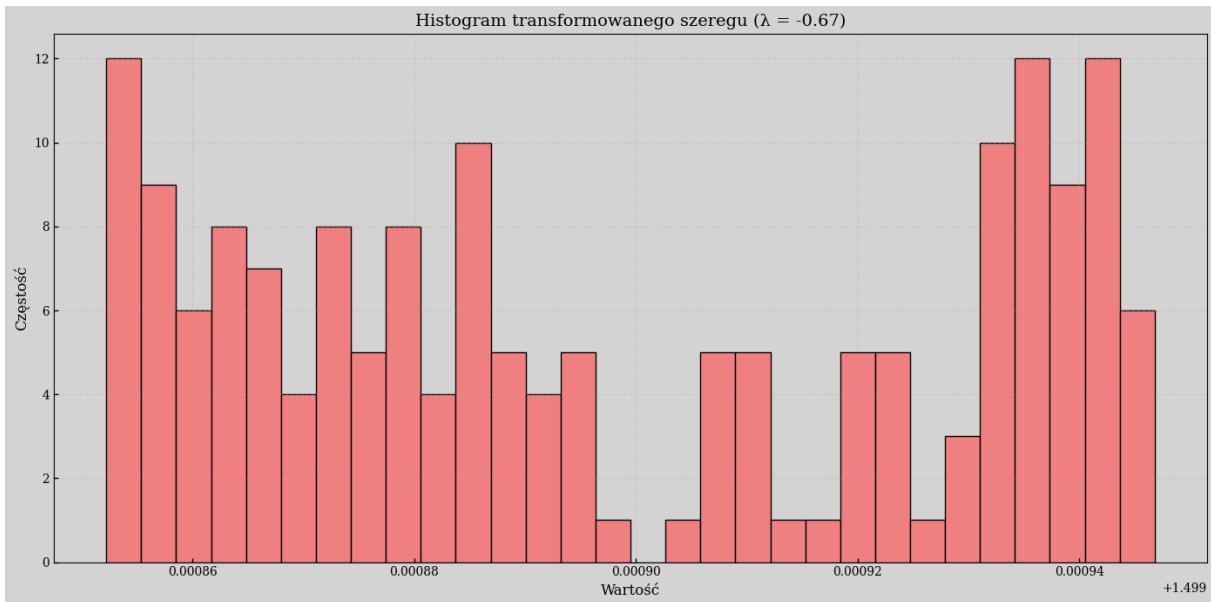
W celu oceny możliwości poprawy własności statystycznych szeregu czasowego, przed testami stacjonarności przeprowadzono transformację Boxa-Coxa. Miała ona na celu sprawdzenie, czy możliwe jest uzyskanie rozkładu bliższego normalnemu oraz redukcja asymetrii i heteroskedastyczności. Poniższy wykres przedstawia histogramy przed i po przekształceniu.

Rysunek 3: Histogram szeregu przed transformacją Boxa-Coxa



Źródło 3: Opracowanie własne.

Rysunek 4: Histogram szeregu po transformacji Boxa-Coxa



Źródło 4: Opracowanie własne.

Pomimo iż test Boxa-Coxa wskazał optymalną wartość parametru $\lambda = -0,67$, co teoretycznie sugeruje zasadność zastosowania transformacji nieliniowej, analiza histogramu przekształconego szeregu nie potwierdziła istotnej poprawy właściwości rozkładu. Transformacja wprawdzie zmieniła kształt rozkładu – dane, wcześniej skupione w jednym ogonie, stały się bardziej symetryczne – jednak ich koncentracja w krańcach rozkładu oraz brak wyraźnego środka w dalszym ciągu odbiegają od charakterystyki rozkładu normalnego.

Co więcej, zastosowana transformacja wprowadziła silną nieliniowość, która utrudnia interpretację poziomów zmienności w szeregach czasowych. W związku z tym uznano, że dalsze analizy zostaną przeprowadzone na oryginalnym szeregu lub po jego pierwszych różnicach, bez stosowania transformacji Boxa-Coxa.

1.1.5. Eksploracja danych – test Dicky-Fullera

W celu zbadania ogólnej struktury szeregu przeprowadźmy na początek klasyczny test DF na nietransformowanym szeregu.

Rysunek 5: Wyniki testu Dickeya-Fullera ze stałą oraz bez stałej

```
===== Testy dla: Zwykły szereg (y_t) =====
--- Test DF (ze stałą) dla: Zwykły szereg (y_t) ---
Statystyka testowa (DF): -1.1105
p-wartość: 0.7108
Liczba użytych opóźnień: 0
Wartości krytyczne:
 1%: -3.4692
 5%: -2.8786
 10%: -2.5759
Wniosek: Szereg JEST niestacjonarny (nie odrzucamy hipotezy zerowej o pierwiastku jednostkowym).

-----
--- Test DF (bez stałej) dla: Zwykły szereg (y_t) ---
Statystyka testowa (DF): -2.6580
p-wartość: 0.0076
Liczba użytych opóźnień: 0
Wartości krytyczne:
 1%: -2.5789
 5%: -1.9427
 10%: -1.6154
Wniosek: Szereg JEST stacjonarny (odrzucamy hipotezę zerową o pierwiastku jednostkowym).
```

Źródło 5: Opracowanie własne

Wyniki przeprowadzonych testów Dickeya–Fullera dla zwykłego (nietransformowanego) szeregu są ze sobą niespójne. W teście DF ze stałą, statystyka testowa wyniosła -1.1105 , co jest wyższe niż wartości krytyczne na poziomie istotności 10%, 5% i 1% (odpowiednio: $-2.5759, -2.8786, -3.4692$). **Oznacza to brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o obecności pierwiastka jednostkowego, czyli szereg jest niestacjonarny.**

Natomiast w teście DF bez stałej, statystyka testowa wyniosła -2.6580 , co jest niższe niż wszystkie wartości krytyczne: -1.6154 (10%), -1.9427 (5%) i -2.5789 (1%). W szczególności statystyka testowa przekracza wartość krytyczną na poziomie 1%, co przy p-wartości 0.0076 wskazuje na odrzucenie hipotezy zerowej i **potwierdzenie, że szereg jest stacjonarny.**

Taka rozbieżność wyników może wskazywać na naruszenie założeń testu, w szczególności obecność autokorelacji reszt, która fałszuje wyniki. W związku z tym konieczne będzie jej zbadanie i ewentualne wyeliminowanie przed przejściem do dalszej analizy.

1.1.6. Test Breusch–Godfreya

W celu weryfikacji założeń testu Dickeya–Fullera przeprowadzam test Breusch–Godfreya dla autokorelacji reszt do 10 rzędu włącznie.

Rysunek 6: Wyniki testu autokorelacji reszt Breusch–Godfreya.

--- Test Breusch–Godfreya dla autokorelacji do 4. rzędu ---		
Opóźnienie: 1	Statystyka χ^2 : 74.686	p-wartość: 0.0000
Opóźnienie: 2	Statystyka χ^2 : 85.697	p-wartość: 0.0000
Opóźnienie: 3	Statystyka χ^2 : 90.202	p-wartość: 0.0000
Opóźnienie: 4	Statystyka χ^2 : 90.348	p-wartość: 0.0000
Opóźnienie: 5	Statystyka χ^2 : 91.646	p-wartość: 0.0000
Opóźnienie: 6	Statystyka χ^2 : 92.331	p-wartość: 0.0000
Opóźnienie: 7	Statystyka χ^2 : 101.734	p-wartość: 0.0000
Opóźnienie: 8	Statystyka χ^2 : 101.761	p-wartość: 0.0000
Opóźnienie: 9	Statystyka χ^2 : 102.133	p-wartość: 0.0000
Opóźnienie: 10	Statystyka χ^2 : 110.354	p-wartość: 0.0000

Źródło 6: Opracowanie własne

Wyniki testu Breusch–Godfreya dla opóźnień od 1 do 10 wskazują na istotną autokorelację reszt modelu, ponieważ we wszystkich przypadkach p-wartość wynosi 0.0000. Oznacza to, że hipoteza zerowa o braku autokorelacji jest odrzucana na każdym poziomie opóźnienia. W konsekwencji założenia klasycznego testu Dickeya–Fullera są naruszone, przez co nie możemy za pomocą wspomnianego testu wnioskować stacjonarności szeregu.

W związku z naruszeniem założeń klasycznego testu Dickeya–Fullera, objawiającym się istotną autokorelacją składnika losowego, konieczne staje się zastosowanie jego rozszerzonej wersji – testu Augmented Dickey–Fullera (ADF). Test ten uwzględnia dodatkowe opóźnienia różnic szeregu, co pozwala na eliminację autokorelacji w modelu i uzyskanie wiarygodnych wyników dotyczących stacjonarności.

1.1.7. Dalsze badanie – test ADF

Poniżej prezentuje wyniki testu ADF:

Rysunek 7: Wyniki testu Augmented Dickey–Fuller dla oryginalnego szeregu

```
===== Testy ADF dla: Zwykły szereg (y_t) w zakresie opóźnień 0-10 =====
Opóźnienie (lags): 0 | Statystyka ADF: -1.1105 | p-wartość: 0.7108
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 1 | Statystyka ADF: -1.6164 | p-wartość: 0.4746
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 2 | Statystyka ADF: -1.1627 | p-wartość: 0.6894
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 3 | Statystyka ADF: -0.8298 | p-wartość: 0.8102
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 4 | Statystyka ADF: -0.8298 | p-wartość: 0.8102
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 5 | Statystyka ADF: -0.7267 | p-wartość: 0.8397
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 6 | Statystyka ADF: -0.7267 | p-wartość: 0.8397
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 7 | Statystyka ADF: -0.6702 | p-wartość: 0.8543
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 8 | Statystyka ADF: -0.6702 | p-wartość: 0.8543
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 9 | Statystyka ADF: -0.6702 | p-wartość: 0.8543
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
Opóźnienie (lags): 10 | Statystyka ADF: -0.9415 | p-wartość: 0.7740
Wniosek: NIESTACJONARNY (nie odrzucamy H0)
```

Źródło 7: Opracowanie własne

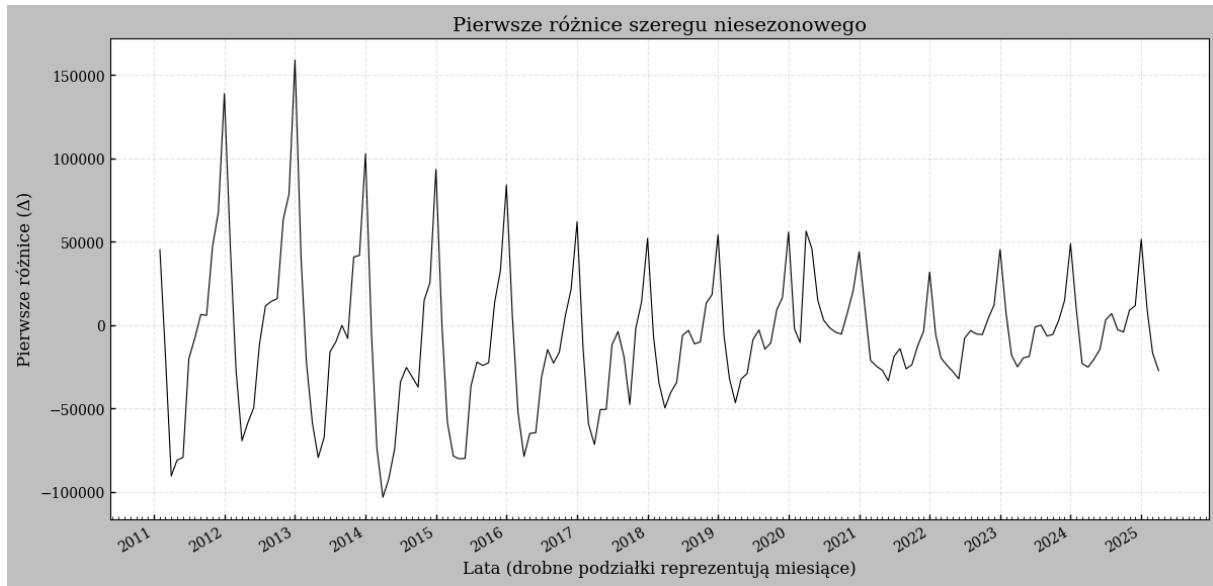
Hipoteza zerowa testu ADF zakładała obecność pierwiastka jednostkowego, co implikuje niestacjonarność szeregu. Wyniki widoczne na Rysunku 7 wykazały, że dla wszystkich analizowanych opóźnień (od 0 do 10) otrzymane p-wartości były znacznie wyższe od przyjętego poziomu istotności $\alpha=0.05$. W konsekwencji, nie było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o niestacjonarności. Wnioski te wskazują, że szereg jest niestacjonarny, co wymaga dalszych działań w celu jego przekształcenia. W świetle charakteru danych (miesięczny wskaźnik bezrobocia), kolejnym niezbędnym krokiem jest zastosowanie różnicowania, w celu osiągnięcia stacjonarności przed przystąpieniem do dalszych analiz i modelowania.

1.1.8. Transformacja – pierwsze różnice

Na przedstawionym wykresie (Rysunek 8) zaprezentowano pierwsze różnice szeregu niesezonowego.

Transformacja ta jest rezultatem działania postaci: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

Rysunek 8: Wykres wartości różnicowanego szeregu bezrobocia



Źródło 8: Opracowanie własne

W porównaniu do oryginalnego szeregu, zróżnicowany szereg wygląda na znacznie bardziej stacjonarny. Wartości oscylują wokół zera, nie wykazując wyraźnego trendu kierunkowego, a zakres wań pozostaje stosunkowo stabilny w czasie. Powinno to oznaczać, że różnicowanie skutecznie usunęło niestacjonarność wynikającą z trendu – typową dla procesów z pierwiastkiem jednostkowym – pozostawiając szereg z dominującą krótkookresową dynamiką.

W celu upewnienia się, czy te obserwacje są zgodne z rzeczywistością, przeprowadzę serię analogicznych testów jak dla szeregu nieróżnicowanego, aby uchwycić stacjonarność na wydruku poszczególnych testów statystycznych.

1.1.9 Testy dla różnicowanego szeregu.

Zacznę od testów DF, ze stałą oraz bez:

Rysunek 9: Wyniki testu Dickeya-Fullera ze stałą oraz bez stałej dla szeregu pierwszych różnic

```
===== Testy dla: Szereg różnicowany ( $\Delta y_t$ ) =====
--- Test DF (ze stałą) dla: Szereg różnicowany ( $\Delta y_t$ ) ---
Statystyka testowa (DF): -5.9054
p-wartość: 0.0000
Liczba użytych opóźnień: 0
Wartości krytyczne:
 1%: -3.4694
 5%: -2.8787
 10%: -2.5759
Wniosek: Szereg JEST stacjonarny (odrzucamy  $H_0$ ).  
-----
```

```
--- Test DF (bez stałej) dla: Szereg różnicowany ( $\Delta y_t$ ) ---
Statystyka testowa (DF): -5.7692
p-wartość: 0.0000
Liczba użytych opóźnień: 0
Wartości krytyczne:
 1%: -2.5790
 5%: -1.9427
 10%: -1.6153
Wniosek: Szereg JEST stacjonarny (odrzucamy  $H_0$ ).  
-----
```

Źródło 9: Opracowanie własne.

Po zastosowaniu pierwszych różnic szeregu czasowego przeprowadzono zestaw analogicznych testów jak w podrozdziałach 1.5-1.7 weryfikujących stacjonarność nowo powstałego szeregu. W testach klasycznego Dickeya–Fullera (zarówno ze stałą, jak i bez stałej) uzyskano bardzo niskie wartości statystyk testowych (odpowiednio -5.9054 i -5.7692), które zdecydowanie przekraczają wartości krytyczne. Oznacza to, że w obu przypadkach istnieją silne podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o obecności pierwiastka jednostkowego, a więc **szereg po różnicowaniu można uznać za stacjonarny, pod warunkiem że reszty nie są skorelowane.**

W tym celu należy przeprowadzić test Breuscha–Godfreya (BG) na autokorelację. Dopiero brak istotnej autokorelacji w resztach regresji testowej DF potwierdzi, że uzyskane statystyki są statystycznie poprawne, a wniosek o stacjonarności szeregu – uzasadniony. W przeciwnym razie autokorelacja mogłaby zaniżyć wartość statystyki testowej i prowadzić do błędного odrzucenia hipotezy zerowej.

Rysunek 10: Wyniki testu Breuscha–Godfreya dla jednokrotnie różnicowanego szeregu

```
--- Test Breuscha–Godfreya dla: Szereg różnicowany ( $\Delta y_t$ ) ---
Opóźnienie: 1 | Statystyka  $\chi^2$ : 0.329 | p-wartość: 0.5664
Opóźnienie: 2 | Statystyka  $\chi^2$ : 1.821 | p-wartość: 0.4023
Opóźnienie: 3 | Statystyka  $\chi^2$ : 4.266 | p-wartość: 0.2341
Opóźnienie: 4 | Statystyka  $\chi^2$ : 4.974 | p-wartość: 0.2900
Opóźnienie: 5 | Statystyka  $\chi^2$ : 5.316 | p-wartość: 0.3785
Opóźnienie: 6 | Statystyka  $\chi^2$ : 5.494 | p-wartość: 0.4822
Opóźnienie: 7 | Statystyka  $\chi^2$ : 7.139 | p-wartość: 0.4146
Opóźnienie: 8 | Statystyka  $\chi^2$ : 7.227 | p-wartość: 0.5123
Opóźnienie: 9 | Statystyka  $\chi^2$ : 8.989 | p-wartość: 0.4383
Opóźnienie: 10 | Statystyka  $\chi^2$ : 11.496 | p-wartość: 0.3202
```

Źródło 10: Opracowanie własne.

Jak widać na Rysunku 10, reszty modelu różnicowanego nie wykazują istotnej autokorelacji. To oznacza, że założenia testu Dickeya–Fullera są spełnione, a wcześniejsze wyniki testu DF potwierdzające stacjonarność szeregu różnicowanego można uznać za statystycznie wiarygodne.

Ostateczne wyniki testu ADF ilustrowane na Rysunku 11 nie pozostawiają żadnych wątpliwości – różnicowany szereg jest stacjonarny.

Rysunek 11: Wyniki testu Augmented Dickey–Fuller dla jednokrotnie różnicowanego szeregu

```
===== Testy ADF dla: Szereg różnicowany ( $\Delta y_t$ ) w zakresie opóźnień 0-10 =====
Opóźnienie (lags): 0 | Statystyka ADF: -5.9054 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 1 | Statystyka ADF: -7.6354 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 2 | Statystyka ADF: -8.4901 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 3 | Statystyka ADF: -8.4901 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 4 | Statystyka ADF: -6.8129 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 5 | Statystyka ADF: -6.8129 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 6 | Statystyka ADF: -8.4572 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 7 | Statystyka ADF: -8.4572 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 8 | Statystyka ADF: -8.4572 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 9 | Statystyka ADF: -3.2559 | p-wartość: 0.0170
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
```

Źródło 11: Opracowanie własne

1.1.7. test KPSS oraz Ljunga-Boxa

W celu upewnienia się, że po pierwszym różnicowaniu na pewno uzyskano szereg stacjonarny przeprowadzono również test KPSS, którego wyniki prezentują się następująco.

Rysunek 12: Wyniki testu KPSS dla jednokrotnie różnicowanego szeregu

```
===== Test KPSS dla: Szereg różnicowany ( $\Delta y_t$ ) =====
Cel: Badanie stacjonarności poziomu (level stationary)
Lag order: 0 | Test statistic: 0.2109
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 1 | Test statistic: 0.1271
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 2 | Test statistic: 0.1034
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 3 | Test statistic: 0.0973
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 4 | Test statistic: 0.0988
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 5 | Test statistic: 0.1047
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 6 | Test statistic: 0.1137
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 7 | Test statistic: 0.1277
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 8 | Test statistic: 0.1478
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 9 | Test statistic: 0.1735
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 10 | Test statistic: 0.1957
    Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  - szereg jest stacjonarny na poziomie)
```

Źródło 12: Opracowanie własne

Jak widać na powyższym obrazku, statystyka testowa KPSS przy 10 opóźnieniach przyjmuje wartość niższą od wartości krytycznych. Oznacza to, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o stacjonarności względem poziomu. **Wynik ten potwierdza, że szereg po pierwszym różnicowaniu można uznać za stacjonarny również w ujęciu testu KPSS, co dodatkowo wzmacnia wiarygodność wcześniejszych wniosków wyciągniętych na podstawie testów Dickeya–Fullera oraz ADF.**

Wystarczyło więc jednokrotne zróżnicowanie szeregu niestacjonarnego, aby otrzymać szereg stacjonarny. Badany szereg jest więc szeregiem zintegrowanym w stopniu pierwszym. Kolejną czynnością teraz jest sprawdzenie, czy otrzymany szereg nie jest białym szumem.

Rysunek 13: Wyniki testu Ljunga-Boxa dla jednokrotnie różnicowanego szeregu

--- Test Ljung-Boxa dla lagów 1–20 (wyświetlone w 2 kolumnach) ---						
Lag	χ^2 statystyka	p-wartość		Lag	χ^2 statystyka	p-wartość
2	75.698	3.3050e-18		12	234.099	5.9111e-44
3	85.890	2.2342e-19		13	348.544	2.8448e-67
4	88.764	4.0373e-19		14	391.249	1.5748e-75
5	101.449	4.8339e-21		15	394.076	2.2425e-75
6	117.467	1.0793e-23		16	400.411	5.6696e-76
7	129.509	1.6305e-25		17	416.781	1.1008e-78
8	149.191	6.0048e-29		18	436.421	4.3835e-82
9	165.693	1.0299e-31		19	451.469	1.5979e-84
10	170.372	5.1616e-32		20	475.599	7.2773e-89
11	177.485	7.7939e-33		21	496.281	1.7472e-92

Źródło 13: Opracowanie własne

Wyniki testu Ljunga-Boxa przeprowadzonego jednoznacznie wskazują, że analizowany szereg nie spełnia założeń białego szumu. Ekstremalnie niskie p-wartości prowadzą do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji na wszystkich badanych poziomach. Oznacza to, że szereg posiada silną pamięć czasową i jego dalsze modelowanie powinno uwzględniać strukturę zależności czasowych.

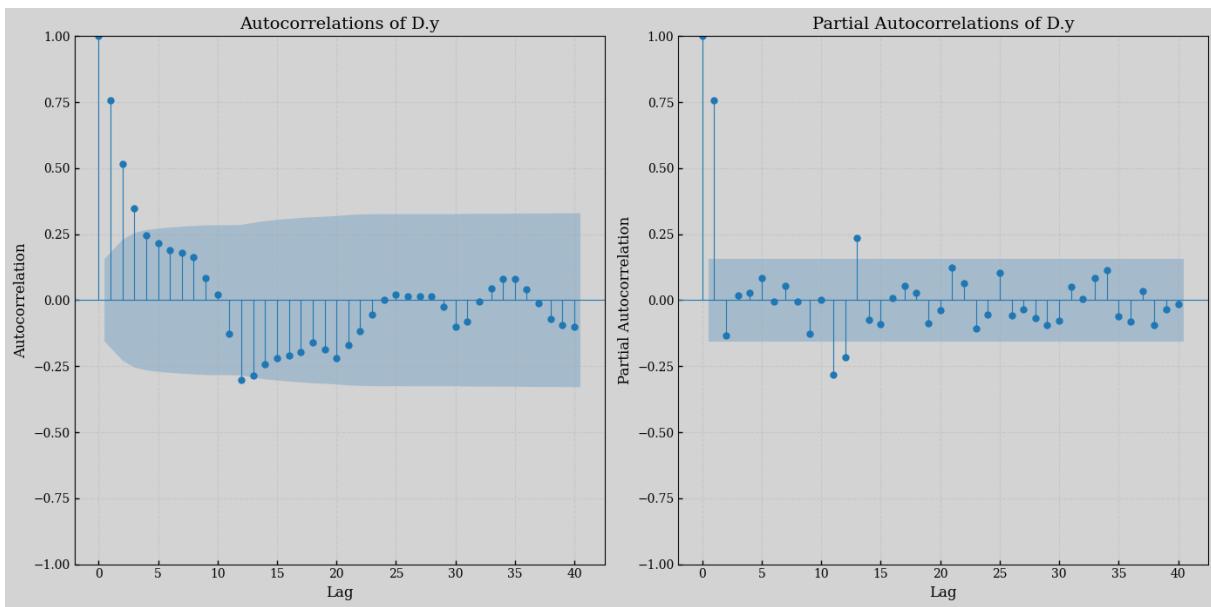
Tak więc, po doprowadzeniu szeregu do stacjonarności oraz sprawdzeniu, czy szereg nie jest białym szumem, podejmuję próbę oszacowania szeregu za pomocą modelu klasy ARIMA.

1.2. ARIMA

1.2.1 wykresy ACF i PACF

Po wyznaczeniu stopnia zintegrowania szeregu, należy jeszcze wyznaczyć parametry p i q odpowiednio dla procesów AR i MA.

Rysunek 14: Wykres autokorelacji - ACF oraz cząstkowej autokorelacji – PACF



Źródło 14: Opracowanie własne

Pierwszym przeprowadzonym krokiem była analiza wykresów autokorelacji - ACF oraz cząstkowej autokorelacji - PACF dla szeregu zróżnicowanego (Rysunek 14).

W ACF wyraźnie istotne jest lag numer $\{1, 2, 3, 4\}$; dalsze słupki mieszczą się w przedziale ufności, co wskazuje, że po pierwszym różnicowaniu w szeregu pozostała wyłącznie krótkoterminowa pamięć rzędu 4. PACF pokazuje z kolei, że wyraźny spike występuje na słupkach $\{1, 2\}$, a pozostałe wartości oscylują wokół zera. **Sugerowane jest więc użycie modelu ARIMA (2, 1, 4).** Dwa składniki autoregresyjne w pełni wychwytują silne, bezpośrednie zależności krótkoterminowe sugerowane przez PACF, natomiast cztery elementy średniej ruchomej pozwalają „wygasić” dłuższy ogon ACF. Różnicowanie $d = 1$ gwarantuje stacjonarność szeregu bez nadmiernego tłumienia sygnału.

Po oszacowaniu modelu bazowego przeprowadza się systematyczną redukcję parametrów. Kandydatów szereguje się według kryteriów informacyjnych (AIC, BIC, HQC), preferując konfigurację o najniższym BIC i jednocześnie możliwie najmniejszym rzędzie ($p + q$). Kluczową weryfikację stanowi diagnostyka reszt: test Ljunga–Box powinien potwierdzić brak autokorelacji reszt.

W praktyce proces selekcji automatyzuje się, estymując siatkę modeli **ARIMA(p, 1, q)**, dla $p \in \{0, 1, 2\}$ i $q \in \{0, \dots, 4\}$. Każdą konfigurację ocenia się pod kątem AIC/BIC i p-value testu Ljunga-Boxa; wariant spełniający kryterium najmniejszego BIC przy prawidłowych resztach zostaje wybrany do końcowej estymacji.

Rysunek 15: Rezultat porównania modeli ARIMA(p,1,q)

```
--- Porównanie modeli ARIMA(p,1,q) --- dla p ∈ {0,1,2}, d=1, q ∈ {0,1,2,3,4}
      model          AIC          BIC          HQC      LB_p(10)      logLik
ARIMA(2,1,2)  4004.914744  4020.623062  4011.288511  9.999593e-01 -1997.457372
ARIMA(0,1,0)  4127.011374  4130.153037  4128.286127  9.918817e-01 -2062.505687
ARIMA(0,1,1)  4129.390975  4135.674302  4131.940482  9.990888e-01 -2062.695488
ARIMA(0,1,4)  4137.809721  4153.518039  4144.183488  9.999545e-01 -2063.904860
ARIMA(2,1,4)  4139.303209  4161.294854  4148.226482  9.976539e-01 -2062.651604
ARIMA(1,1,0)  4148.633482  4154.916809  4151.182988  9.991757e-01 -2072.316741
ARIMA(1,1,4)  4148.885661  4167.735642  4156.534181  9.999994e-01 -2068.442830
ARIMA(0,1,3)  4150.252816  4162.819470  4155.351830  9.996759e-01 -2071.126408
ARIMA(0,1,2)  4158.124569  4167.549559  4161.948829  9.993300e-01 -2076.062284
ARIMA(1,1,2)  4159.058634  4171.625288  4164.157647  9.994546e-01 -2075.529317
ARIMA(1,1,1)  4160.163041  4169.588031  4163.987301  9.991920e-01 -2077.081520
ARIMA(2,1,1)  4170.767024  4183.333679  4175.866038  9.998899e-01 -2081.383512
ARIMA(2,1,0)  4170.833714  4180.258705  4174.657974  9.992150e-01 -2082.416857
ARIMA(2,1,3)  4176.029155  4194.879136  4183.677675  9.997584e-01 -2082.014577
ARIMA(1,1,3)  7760.090510  7775.798828  7766.464277  3.678249e-25 -3875.045255
```

Źródło 15: Opracowanie własne

Jak widać na Rysunku 15, do trzyokresowej prognozy najlepiej jest wybrać ARIMA (2, 1, 2) oraz, porównawczy ARIMA (0, 1, 1). Pierwszy model ma zdecydowanie najniższe wartości AIC, BIC i HQC w całym zestawieniu (odpowiednio 4004,9 / 4020,6 / 4011,3) przy bardzo wysokim p-value testu Ljunga–Boxa (0,999), co oznacza, że łączy dobrze dopasowanie z pełnym wygaszeniem autokorelacji reszt –pasuje do krótkiej, trzyokresowej prognozy, a jednocześnie pozostaje parsymoniczny

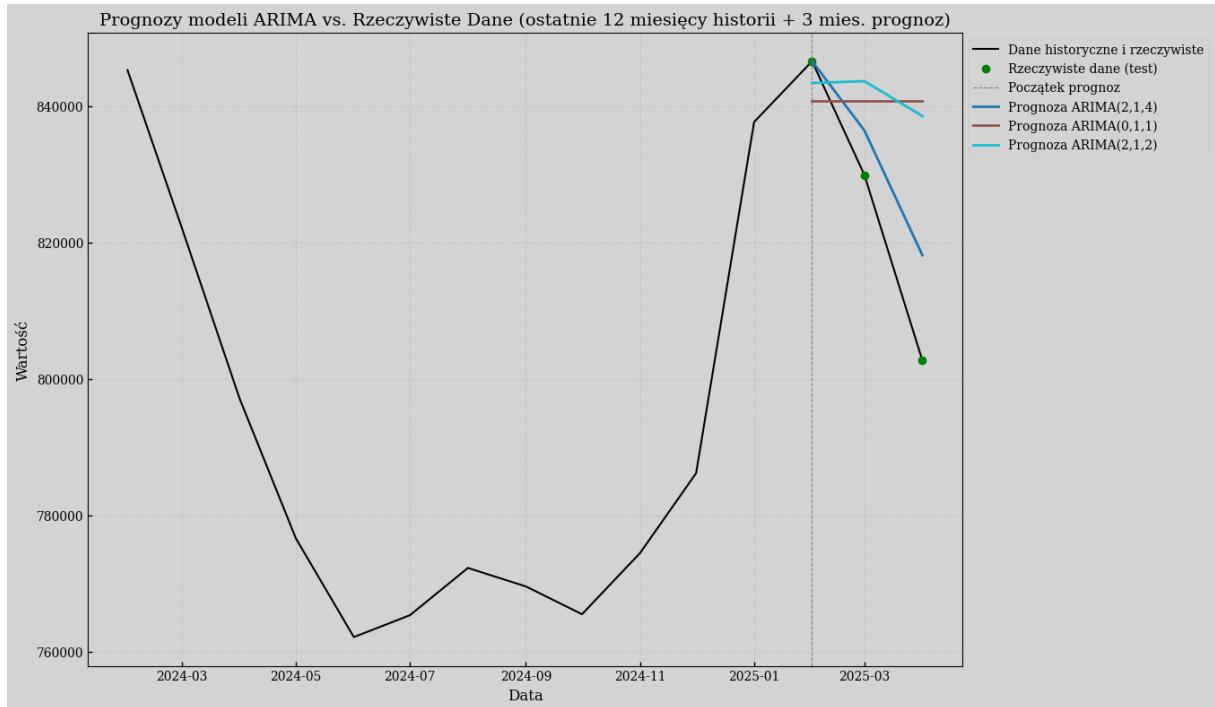
Z kolei ARIMA (0, 1, 1) reprezentuje najprostszy możliwy model mający choć jeden składnik wygładzający (MA (1)); mimo minimalnej liczby parametrów utrzymuje poprawną diagnostykę reszt ($LB_p \approx 0,991$) i daje wiarygodny punkt odniesienia dla każdego bardziej rozbudowanego rozwiązania.

Modele te powinny się dobrze uzupełniać, z pierwotnie wybranym, za pomocą analizy ACF i PACF modelem ARIMA(2 ,1, 4)

1.2.2. Prognoza

Biorąc pod uwagę diagnostykę przeprowadzoną na 169-elementowym zbiorze insample oraz 3-miesięcznym zbiorze out-sample (172 obserwacje łącznie), do krótkoterminowej prognozy zdecydowano, że do prognozowania zostanie użyta ARIMA(2,1,4) oraz ARIMA(2,1,2) oraz ARIMA(0,1,1) na których zastosowano prognozę dynamiczną. Wyniki estymacji pokazane na Rysunku 16 prezentują się następująco.

Rysunek 16: Estymacja bezrobocia modelami ARIMA; biblioteki matplotlib i statsmodels



Źródło 16: Opracowanie własne

Na wykresie widać, że **ARIMA (2, 1, 4)** (ciemnoniebieska linia) niemal dokładnie odtwarza zarówno poziom, jak i kierunek zmian rzeczywistych obserwacji testowych – każdy z trzech prognozowanych punktów leży bardzo blisko zielonych markerów, co świadczy o tym, że dodatkowe dwa składniki MA pozwoliły modelowi uchwycić specyfikę danych tuż po szczytzie z stycznia 2025 r.

ARIMA (2, 1, 2) (jasnoniebieska linia) zachowuje poprawny kierunek spadku, lecz systematycznie przewyższa faktyczne wartości; brak dwóch dalszych wyrazów MA powoduje, że model niepoprawnie wygładza serię i nie wychwytuje pełnej skali cofnięcia, choć nadal pozostaje w rozsądny paśmie odchyleń.

Natomiast najprostszy **ARIMA (0, 1, 1)** (brązowa linia) prognozuje niemal płaską trajektorię – nie potrafi nastawić się na gwałtowny zwrot po lokalnym maksimum, ponieważ jedyny parametr MA wygasza część dynamiki, a brak składników AR uniemożliwia mu pamiętać kształtu poprzedniego cyklu.

Wnioski te zgadzają się ze statystykami błędów MAE i MSE, z Tabeli 2.

Tabela 1: Wyniki błędów MAE i MSE dla estymowanych modeli ARIMA

Miara błędu	ARIMA(2,1,4)	ARIMA(2,1,2)	ARIMA(0,1,1)
MAE	7328	17598	18264
MSE	93676284	494723650	534918684

Źródło 17: Opracowanie własne.

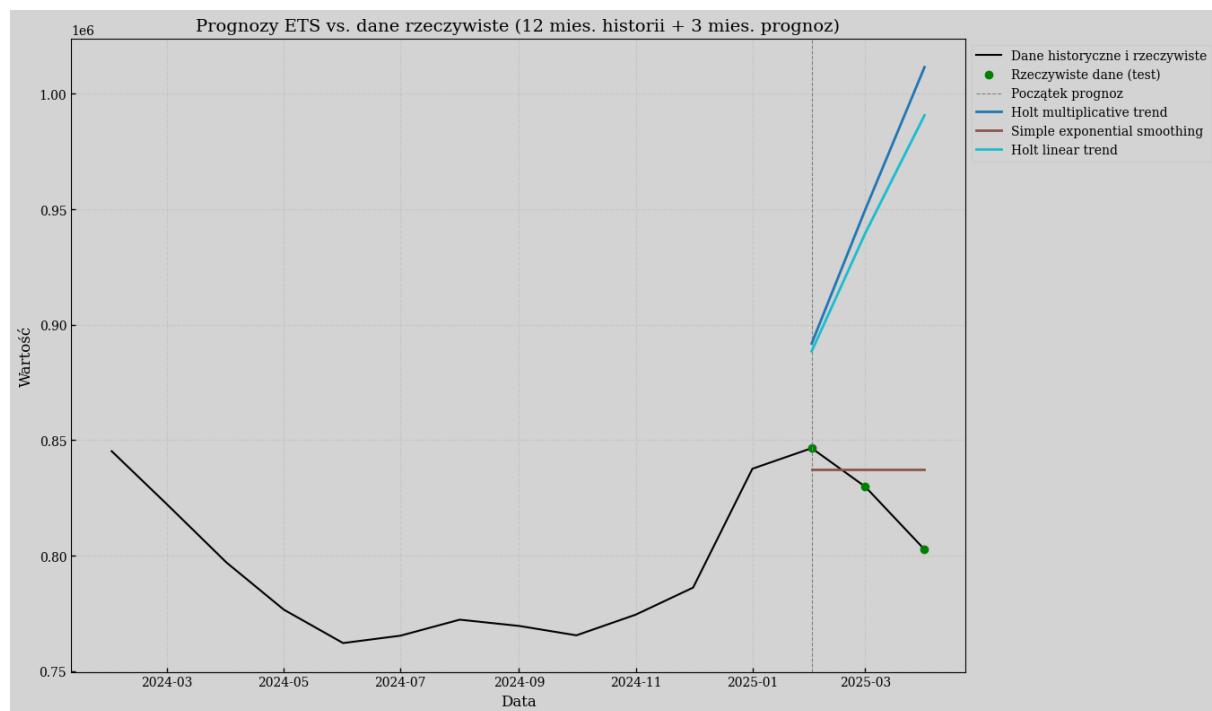
Jak wynika z Tabeli 1, porównanie miar MAE i MSE – odczytywanych na tle wysokiego poziomu absolutnych wartości szeregowych – jednoznacznie wskazuje ARIMA (2, 1, 4) jako najtrajniejszy model. Uzyskane błędy MAE oraz MSE są ponad dwukrotnie mniejsze niż w przypadku parsymonicznego ARIMA (2, 1, 2) i najprostszego ARIMA (0, 1, 1).

Niższe wartości obu wskaźników świadczą o znacznie lepszym odwzorowaniu zarówno poziomu, jak i zmienności danych testowych przez model (2, 1, 4), co przekłada się na najbardziej precyzyjne prognozy trzy-miesięczne. Model (2, 1, 2) zachował poprawny kierunek zmian, ale nie doszacował skali spadku, zaś minimalistyczny (0, 1, 1) wygładził dynamikę zbyt silnie, generując największe odchylenia – stąd ich wyraźnie wyższe błędy względem zwycięzcy rankingu.

1.2.3 Modele eksploracyjne

Teraz warto porównać estymacje za pomocą ARIMA do modeli ekstrapolacyjnych.

Rysunek 17: Estymacja bezrobocia modelami ekstrapolacyjnymi



Źródło 18: Opracowanie własne.

Na Rysunku 18 widać, że model Holt multiplicative trend (granatowa linia) rozmija się z kierunkiem zmian obserwowanych w szeregu testowym: zamiast podążać za spadkiem po styczniowym wierzchołku, prognozuje gwałtowny ruch w górę.

Proste wygładzanie wykładnicze (brązowa linia) zachowuje się odwrotnie: ze względu na brak składnika trendu utrzymuje niemal stały poziom zbliżony do wartości styczniowej. Taka horyzontalna projekcja plasuje się relatywnie blisko rzeczywistości w pierwszym kroku, lecz już w kolejnych miesiącach wyraźnie przeszacowuje spadek.

Metoda Holta z liniowym trendem (jasnobłękitna linia) również rozmija się z obserwacjami. Model ten ekstrapoluje silny wzrostowy ciąg, który wystąpił w danych treningowych między listopadem 2024 a styczniem 2025 r., i bez żadnego tłumienia kontynuuje go wprost, skutkując gwałtownym, nienaturalnym skokiem powyżej 950 tys. Już pierwszy prognozowany punkt znacznie przewyższa obserwacje, a kolejne rozjeżdżają się jeszcze bardziej.

Wartości błędu obrazuje poniższa Tabela 2.

Tabela 2: Wyniki błędów MAE i MSE dla estymowanych modeli ekstrapolacyjnych

Miara błędu	Holt multiplicative trend	Simple exponential smoothing	Holt linear trend
MAE	124718	17131	113257
MSE	20024838515	448470982	16388614617

Źródło 19: Opracowanie własne

Jak wynika z Tabeli 2, żaden z trzech modeli ekstrapolacyjnych nie poradził sobie satysfakcyjnie z trzy-miesięczną prognozą. Najniższy błąd bezwzględny uzyskało proste wygładzanie wykładnicze, lecz nawet ta wartość jest wielokrotnie wyższa niż błędy najlepszych modeli ARIMA, a dwa pozostałe warianty Holt'a wykazują jeszcze większe odchylenia. Tak wysoka skala błędów oznacza, że metody wygładzania – pozbawione składników autoregresyjnych i oparte głównie na prostych ekstrapolacjach poziomu lub liniowego trendu – nie zdołały dobrze uchwycić specyfiki danych.

1.2.4 Podsumowanie

Szereg okazał się niestacjonarny rzędu pierwszego – jednokrotne różnicowanie wystarczyło, aby uzyskać proces stacjonarny. Oszacowano trzy warianty modeli ARIMA: ARIMA (2,1,4), ARIMA (2,1,2) oraz ARIMA (0,1,1), a w charakterze porównania zastosowano również prognozę opartą na metodach ekstrapolacyjnych: model multiplikatywny Holta, proste wygładzanie wykładnicze oraz model liniowy Holta.

Podsumowując wszystkie analizy numeryczne i oględziny wykresów, najtrajniejszą estymację zapewnia model ARIMA (2, 1, 4). To on osiągnął najniższe wartości MAE i MSE spośród wariantów autoregresyjnych, a jednocześnie — jako jedyny — odtworzył na wykresie przebieg danych testowych niemal punkt w punkt, wiernie oddając zarówno kierunek zmian, jak i skalę spadku po styczniowym maksimum. W porównaniu z nim prognozy modeli wygładzania wykładniczego okazały się zbyt płaskie lub wręcz zawyżone, a prostsze konfiguracje ARIMA nie uchwyciły pełnej dynamiki korekty. **Dlatego właśnie ARIMA (2, 1, 4) należy uznać za najlepszy i wizualnie najbardziej przekonujący model do trzy-miesięcznej prognozy analizowanego szeregu.**

2. SZEREG SEZONOWY

2.1 Przygotowanie do ARIMA

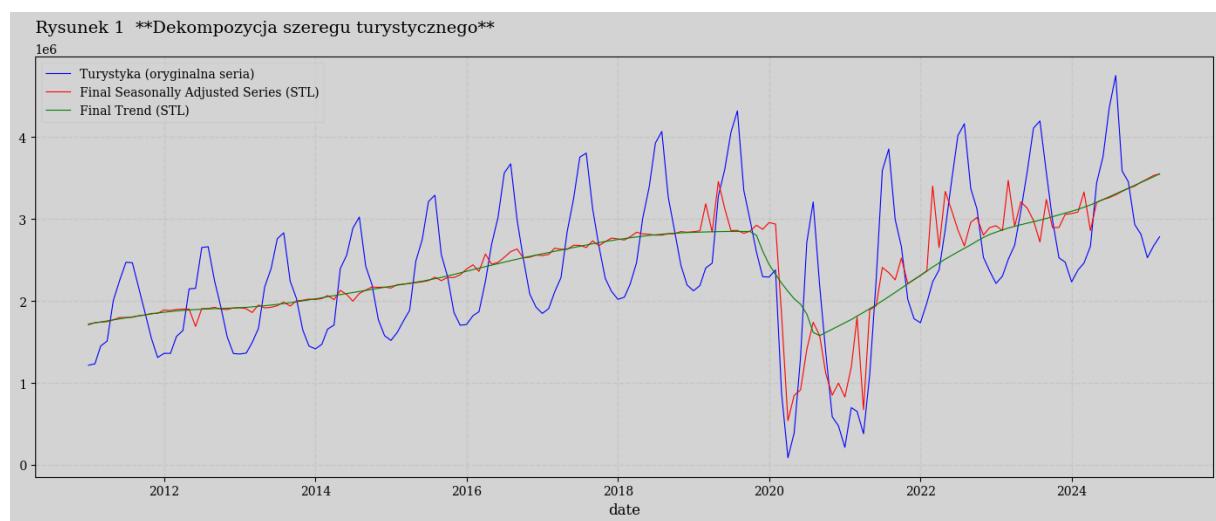
2.1.1. Opis danych

Szereg danych, który został wykorzystany w niniejszej pracy, pochodzi z zakresu turystyki banku danych lokalnych, w szczególności z kategorii dotyczącej turystyki bazy noclegowej. Dane obejmują informacje o turystycznych obiektach noclegowych posiadających 10 lub więcej miejsc noclegowych (w tym pokoje gościnne i kwatery agroturystyczne). Dodatkowo uwzględniono mniejsze obiekty (poniżej 10 miejsc), dla których dane były utajniane, jeśli na danym obszarze było mniej niż 3 jednostki

Dane są miesięczne, z pierwszą datą w styczniu 2011 roku, a ostatnią w marcu 2025 roku. Dane zostały ostatnio zaktualizowane i dostępne na dzień 14 maja 2025 roku. Dane dostępne są w układzie miesięcznym, zagregowane według płci, obejmujące okres od 1 stycznia 2011 roku do 1 kwietnia 2025 roku.

2.1.2 Dekompozycja

Rysunek 18: Dekompozycja szeregu turystyki (szereg sezonowy)



Źródło 20: Opracowanie własne.

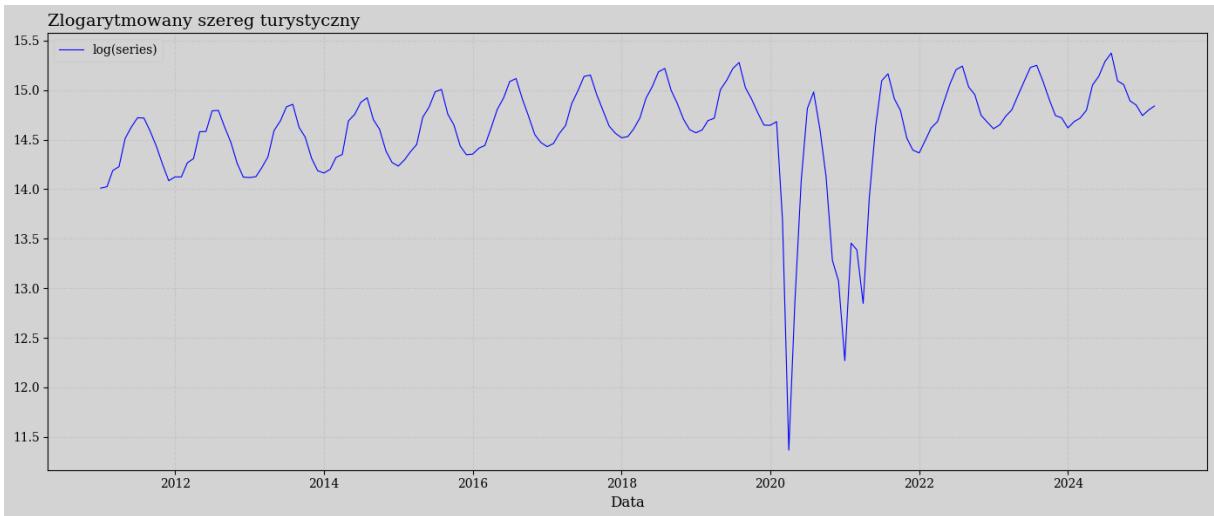
Rysunek 18 potwierdza, że dla turystyki dominują dwa wzorce: regularna sezonowość oraz wyraźny trend wzrostowy zakłócony szokiem pandemicznym. Niebieska seria surowa układa się w powtarzalne zęby – coroczne szczyty w miesiącach letnich i doliny zimą – co dowodzi silnej komponenty sezonowej. Po jej usunięciu (czerwona linia SA) krzywa staje się dużo gładszą, a poziomy w latach 2010-2019 rosną niemal monotonie. Oczywiście, występuje ostry spadek w 2020 r. to efekt COVID-19, zaś kolejne lata pokazują dynamiczne odbicie popytu: od 2021 r. seria SA szybko powraca na ścieżkę wzrostu i w 2024 r. przewyższa wartości sprzed pandemii.

Kolor niebieski przedstawia surowy szereg turystyczny wraz z pełną sezonowością. Czerwony przebieg to seria odsezonowana (STL-SA) – po usunięciu wahań rocznych linia jest znacznie gładszą. Zieloną odpowiada składowej trendu, która – poza gwałtownym załamaniem w 2020 r. – w dużej mierze pokrywa się z serią odsezonowaną, co sugeruje, że sezonowość ma charakter **multiplikatywny** (amplituda wahań rośnie wraz z poziomem). Dzięki takiej konstrukcji wykres jednoznacznie pokazuje regularne cykle sezonowe, długookresową ścieżkę wzrostu i skalę szoku pandemicznego.

2.1.3 Stacjonarność

Ponieważ szereg wykazuje sezonowość multiplikatywną oraz DEMETRA zlogarytmowała szereg, pierwszą dokonaną czynnością było również zlogarytmowanie szeregu. Na następnym rysunku jest pokazany szereg po zlogarytmowaniu.

Rysunek 19: Logarytmowany szereg turystyki (szereg sezonowy)



Źródło 21: Opracowanie własne

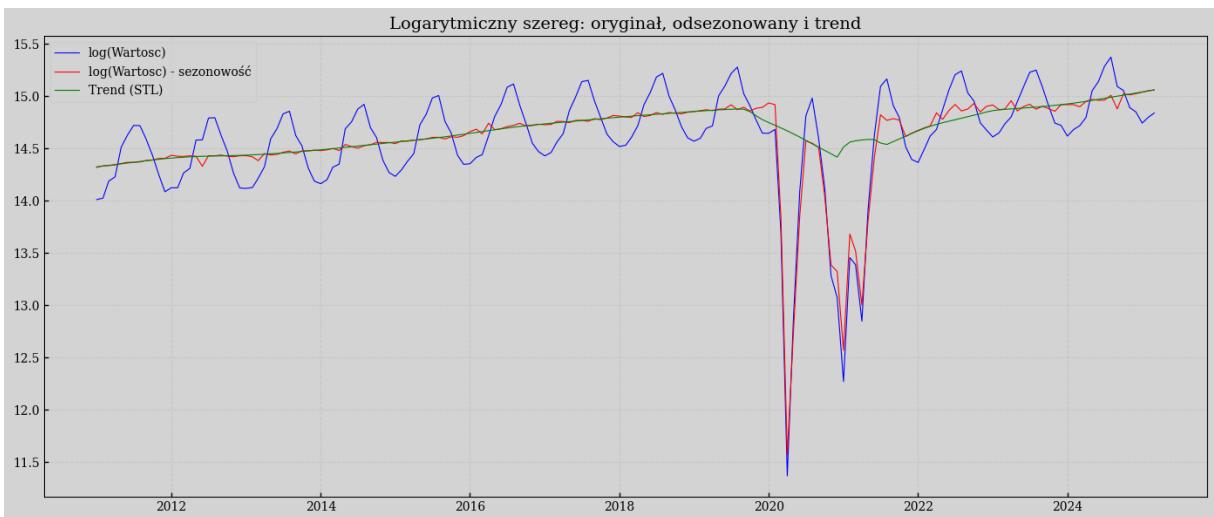
Interpretując powyższy rysunek, można stwierdzić, że sezonowość rzeczywiście może występować. Niemniej jednak, rekordowo wysokie wahania w okresie pandemii COVID-19 mogą znaczco zakłócić wyniki przeprowadzanych testów, tj. wskazać na niestacjonarność.

Komponent sezonowy jest silnie skorelowany z oryginalnym zlogarytmowanym szeregiem czasowym pandemii COVID-19 (2020–2021) widoczne są silne, nienaturalne fluktuacje w wartościach szeregu, które istotnie zaburzają strukturę sezonowości

2.1.4 Dekompozycja logarytmowanego szeregu

W celu oceny stacjonarności logarytmowanego i odsezonowanego szeregu czasowego przeprowadzam testy Dickeya–Fullera (DF) oraz test autokorelacji reszt.

Rysunek 20: Dekompozycja logarytmowanego szeregu turystyki (szereg sezonowy)



Źródło 22: Opracowanie własne

Rysunek 21: Test Dickeya-Fullera dla sezonowego, logarytmowanego szeregu odsezon.

===== Testy Dickeya-Fullera dla: Logarytmowany szereg =====

--- Test DF (ze stałą) dla: Logarytmowany szereg ($\ln(y_t)$) ---

Statystyka testowa (DF): -0.6899

p-wartość: 0.8494

Liczba użytych opóźnień: 8

Wartości krytyczne:

1%: -3.4699

5%: -2.8789

10%: -2.5760

Wniosek: Szereg NIE JEST stacjonarny (nie odrzucamy H_0).

--- Test DF (bez stałej i trendu) dla: Logarytmowany szereg ($\ln(y_t)$) ---

Statystyka testowa (DF): -1.9681

p-wartość: 0.0469

Liczba użytych opóźnień: 8

Wartości krytyczne:

1%: -2.5792

5%: -1.9427

10%: -1.6153

Wniosek: Szereg JEST stacjonarny (odrzucamy H_0).

Źródło 23: Opracowanie własne

Rysunek 22: Wyniki testu Breuscha-Godfreya dla logarytmowanego szeregu odsezonowego

--- Test Breuscha-Godfreya dla: Logarytmowany szereg ($\ln(y_t)$) ---

Liczba reszt dostępnych dla testu BG: 172

Opóźnienie: 1	Statystyka χ^2 : 0.000	p-wartość: 0.9948
Opóźnienie: 2	Statystyka χ^2 : 0.000	p-wartość: 0.9999
Opóźnienie: 3	Statystyka χ^2 : 0.001	p-wartość: 1.0000
Opóźnienie: 4	Statystyka χ^2 : 0.002	p-wartość: 1.0000
Opóźnienie: 5	Statystyka χ^2 : 0.003	p-wartość: 1.0000
Opóźnienie: 6	Statystyka χ^2 : 0.003	p-wartość: 1.0000
Opóźnienie: 7	Statystyka χ^2 : 0.003	p-wartość: 1.0000
Opóźnienie: 8	Statystyka χ^2 : 0.003	p-wartość: 1.0000
Opóźnienie: 9	Statystyka χ^2 : 0.003	p-wartość: 1.0000
Opóźnienie: 10	Statystyka χ^2 : 0.003	p-wartość: 1.0000

Źródło 24: Opracowanie własne

Wyniki Testu Dickeya-Fullera (ADF) dla logarytmowanego szeregu (Rysunek 21) okazały się niejednoznaczne. Test DF z uwzględnieniem stałej wykazał wysoką p-wartość (0.8494), poza tym, statystyka testowa -0.6899 jest większa (mniej ujemna) niż wartości krytyczne dla progu ufności 5%, co nie pozwala na odrzucenie hipotezy zerowej

o niestacjonarności. Sugeruje to, że szereg nadal posiada jednostkowy pierwiastek i nie jest stacjonarny wokół stałej średniej

Z drugiej strony, test DF bez stałej i trendu (Rysunek 21) dał p-wartość 0.0469, niższą od poziomu istotności 0.05. Tutaj, statystyka testowa -1.9681 jest bardziej ujemna, niż przedział ufności dla 5%, co wskazywałoby na stacjonarność szeregu wokół zera.

W przeciwnieństwie do niejednoznacznych wyników ADF, Test Breuscha-Godfreya, wskazuje na bardzo dobre dopasowanie. Dla wszystkich testowanych opóźnień (od 1 do 10), p-wartości są ekstremalnie wysokie (bliskie 1.0000). To oznacza, że nie ma żadnych statystycznych dowodów na istnienie autokorelacji w resztach modelu.

Niemniej jednak, aby ostatecznie potwierdzić stacjonarność szeregu logarytmowanego i rozstrzygnąć niejednoznaczność z testów DF, konieczne jest przeprowadzenie dodatkowych testów stacjonarności, takich jak test ADF oraz KPSS, gdzie warto przyjrzeć się większej ilości opóźnień, w celu ostatecznego rozstrzygnięcia kwestii stacjonarności.

Rysunek 23: Wyniki testu Augumented Dickeya-Fullera dla logarytmowanego szeregu odsez.

--- Test Dickeya-Fullera (ADF) na logarytmowanym szeregu (dla lagów 0-10) ---
Hipoteza zerowa (H_0): Szereg logarytmowany ma pierwiastek jednostkowy (jest niestacjonarny).
Hipoteza alternatywna (H_1): Szereg logarytmowany nie ma pierwiastka jednostkowego (jest stacjonarny).

lag=0	ADF p=0.0003 STACJONARNY
lag=1	ADF p=0.0000 STACJONARNY
lag=2	ADF p=0.0000 STACJONARNY
lag=3	ADF p=0.0000 STACJONARNY
lag=4	ADF p=0.0003 STACJONARNY
lag=5	ADF p=0.0011 STACJONARNY
lag=6	ADF p=0.0186 STACJONARNY
lag=7	ADF p=0.0342 STACJONARNY
lag=8	ADF p=0.1818 NIESTACJONARNY
lag=9	ADF p=0.1534 NIESTACJONARNY
lag=10	ADF p=0.5116 NIESTACJONARNY

Źródło 25: Opracowanie własne

Wyniki testu ADF wskazują na silne przesłanki stacjonarności przy niższych wartościach lagów 1-7, gdzie wartości p były znacznie poniżej poziomu istotności. Dla wyższych lagów 8-10 wartości p wzrosły, jednak wciąż pozostały relatywnie małe, świadczące o granicznej stacjonarności lub obecności słabej formy trendu.

Rysunek 24: Wyniki testu KPSS dla logarytmowanego szeregu odsezonowanego

--- Test KPSS na logarytmowanym szeregu (dla lagów 0–10) ---			
Hipoteza zerowa (H_0):	Szereg logarytmowany jest stacjonarny (nie ma pierwiastka jednostkowego).		
Hipoteza alternatywna (H_1):	Szereg logarytmowany jest niestacjonarny (ma pierwiastek jednostkowy).		
lag=0	KPSS	p=0.0100	NIESTACJONARNY
lag=1	KPSS	p=0.0489	NIESTACJONARNY
lag=2	KPSS	p=0.0987	STACJONARNY
lag=3	KPSS	p=0.1000	STACJONARNY
lag=4	KPSS	p=0.1000	STACJONARNY
lag=5	KPSS	p=0.1000	STACJONARNY
lag=6	KPSS	p=0.1000	STACJONARNY
lag=7	KPSS	p=0.1000	STACJONARNY
lag=8	KPSS	p=0.1000	STACJONARNY
lag=9	KPSS	p=0.1000	STACJONARNY
lag=10	KPSS	p=0.1000	STACJONARNY

Źródło 26: Opracowanie własne

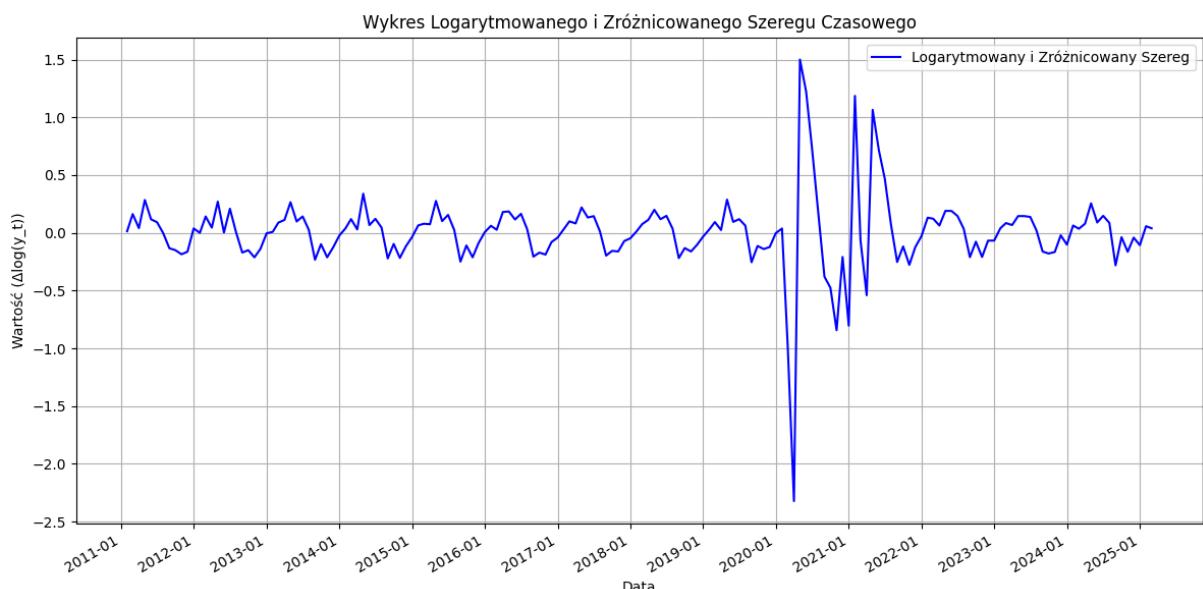
Z drugiej strony, test KPSS dostarczył spójnego sygnału: dla większości wartości p osiągały maksymalny poziom 0,1, co oznacza brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o stacjonarności szeregu. Tylko dla bardzo niskich lagów odnotowano wartości p poniżej 0,05, sugerujące możliwą niestacjonarność w tym wąskim zakresie.

Reasumując, wyniki testów dla logarytmowanego i szeregu z usuniętą sezonowością wciąż nie są jednoznaczne. Wynika z tego, że potrzebne będzie jeszcze różnicowanie.

2.1.5 Dodanie pierwszych różnic

Wykres dla wcześniej wspomnianego szeregu wygląda następująco.

Rysunek 25: Wykres logarytmowanego i różnicowanego szeregu z usuniętą sezonowością



Źródło 27: Opracowanie własne

Na pierwszy rzut oka ten szereg wygląda teraz lepiej, nie widać żadnego trendu oraz wariancja jest stała w czasie (z dokładnością co do Covidu). Niżej przedstawiono testy.

Rysunek 26: Wyniki testu Dickeya-Fullera dla logarytmowanego i różnicowanego szeregu odsezonowanego

===== Testy Dickeya-Fullera dla: Logarytmowany i różnicowany szereg =====

--- Test DF (ze stałą) dla: Logarytmowany i różnicowany szereg ---

Statystyka testowa (DF): -4.4933

p-wartość: 0.0002

Liczba użytych opóźnień: 11

Wartości krytyczne:

1%: -3.4724

5%: -2.8800

10%: -2.5766

Wniosek: Szereg JEST stacjonarny (odrzucamy H_0).

--- Test DF (bez stałej i trendu) dla: Logarytmowany i różnicowany szereg ---

Statystyka testowa (DF): -4.4924

p-wartość: 0.0000

Liczba użytych opóźnień: 11

Wartości krytyczne:

1%: -2.5800

5%: -1.9428

10%: -1.6152

Wniosek: Szereg JEST stacjonarny (odrzucamy H_0).

Źródło 28: Opracowanie własne

Rysunek 27: Wyniki testu Augumented Dickeya-Fullera dla logarytmowanego i różnicowanego szeregu odsezonowanego

```
===== Testy ADF dla: Szereg logarytmowany i różnicowany ( $\Delta y_t$ ) w zakresie opóźnień 0–10 =====
Opóźnienie (lags): 0 | Statystyka ADF: -10.6271 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 1 | Statystyka ADF: -9.5227 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 2 | Statystyka ADF: -8.3801 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 3 | Statystyka ADF: -8.6323 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 4 | Statystyka ADF: -8.0474 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 5 | Statystyka ADF: -8.6594 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 6 | Statystyka ADF: -7.7273 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 7 | Statystyka ADF: -8.5750 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 8 | Statystyka ADF: -6.8682 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 9 | Statystyka ADF: -8.7015 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
Opóźnienie (lags): 10 | Statystyka ADF: -6.8212 | p-wartość: 0.0000
Wniosek: STACJONARNY (odrzucamy  $H_0$ )
```

Źródło 29: Opracowanie własne

Rysunek 28: Wyniki testu KPSS dla logarytmowanego i różnicowanego szeregu odsezonowanego

```
===== Test KPSS dla: Szereg logarytmowany różnicowany ( $\Delta y_t$ ) =====
Cel: Badanie stacjonarności poziomu (level stationary)
Lag order: 0 | Test statistic: 0.0164
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 1 | Test statistic: 0.0138
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 2 | Test statistic: 0.0139
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 3 | Test statistic: 0.0148
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 4 | Test statistic: 0.0169
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 5 | Test statistic: 0.0199
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 6 | Test statistic: 0.0247
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 7 | Test statistic: 0.0307
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 8 | Test statistic: 0.0396
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 9 | Test statistic: 0.0479
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
Lag order: 10 | Test statistic: 0.0597
Wniosek (@5%): STACJONARNY (nie odrzucamy  $H_0$  – szereg jest stacjonarny na poziomie)
```

Źródło 30: Opracowanie własne

2.1.6 Podsumowanie

Po pierwsze, testy ADF oraz KPSS ($p > 0.05$ dla wszystkich lagów) wyraźnie pokazują, że różnicowany logarytmowany szereg $\Delta \log(y)$ jest stacjonarny, czyli słuszne jest przyjęcie $d = 1$ w modelu ARIMA. Jednocześnie testy Breuscha–Godfreya i Ljunga–Boxa na samym $\Delta \log(y)$ wykazały istotną autokorelację dla lagów 2–10, co oznacza, że seria nie jest białym szumem i należy tę zależność opisać składnikami AR i MA.

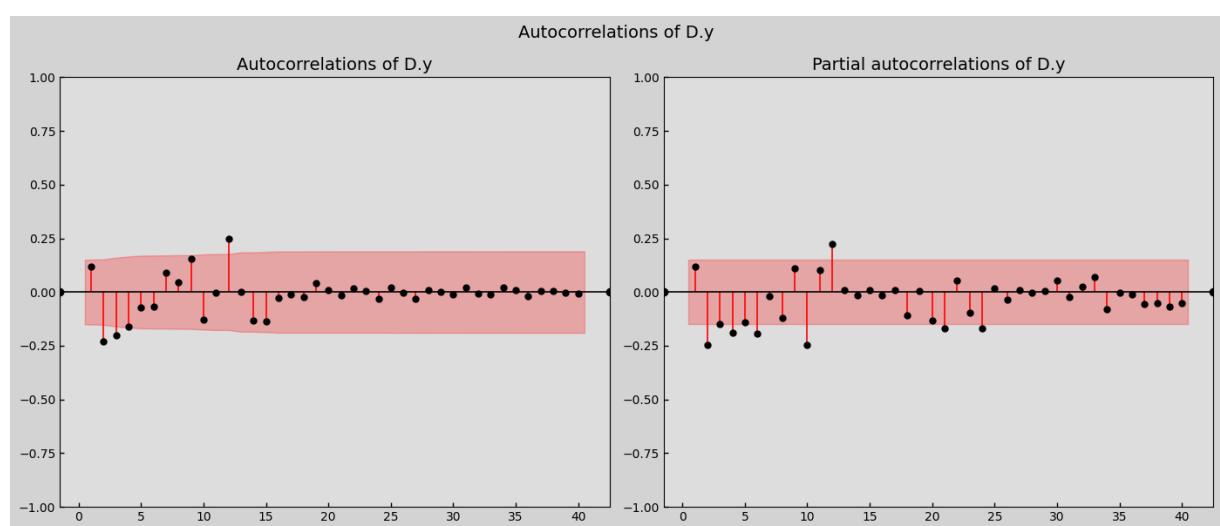
Kolejnym krokiem jest zatem przeanalizowanie wykresów ACF i PACF $\Delta \log(y)$, by zasugerowały odpowiednie rzędy p i q , a następnie dopasowanie kilku kandydatów. Po porównaniu wartości AIC/BIC każdy model trzeba zweryfikować testami, co będzie przybliżone w następnym rozdziale.

2.2. ARIMA

2.2.1 wykresy ACF i PACF

Analogicznie jak poprzednio, wyznaczono stopień zintegrowania wykresu jako $d = 1$. Teraz należy jeszcze wyznaczyć parametry p i q odpowiednio dla procesów AR i MA. Pierwszym przeprowadzonym krokiem jest analiza wykresów autokorelacji (ACF) oraz cząstkowej autokorelacji (PACF) dla szeregu zróżnicowanego.

Rysunek 29: Wykres autokorelacji - ACF oraz cząstkowej autokorelacji – PACF; odsezon.



Źródło 31: Opracowanie własne

Na wykresie ACF widzimy wyraźne dodatnie pikи przy lagach 1, 3, 4 i 5 oraz jeden silniejszy przy lagu 12, a ujemne przy 4–6, co oznacza, że w składniku MA(p) warto ująć co najmniej cztery opóźnienia. PACF z kolei ma ostre „wycięcia” przy lagach 1, 3, 4 i 5 oraz

słabsze przy 9–10 i dalej, co sugeruje składnik AR rzędu co najmniej 5. Ponieważ już różnicujemy ($d=1$) i usunęliśmy sezonowość, **naturalną specyfikacją wyjściową jest ARIMA(5, 1, 4).**

Zupełnie analogicznie więc, jak w wypadku wyjściowego modelu warto przetestować wszystkie modele, począwszy od ARIMA(5,1,4), w celu doboru najopotymalniejszych wartości kryteriów przy zachowaniu minimalnej liczby parametrów.

Rysunek 30: Przegląd parametrów modeli ARIMA do estymacji

model	AIC	BIC	HQC	LB_p(10)	BG_p(10)	logLik
ARIMA(3,1,4)	21.638360	46.724747	31.818125	1.0	1.0	-2.819180
ARIMA(4,1,3)	22.078446	47.164833	32.258211	1.0	1.0	-3.039223
ARIMA(3,1,3)	23.213320	45.163909	32.120615	1.0	1.0	-4.606660
ARIMA(2,1,3)	23.220487	42.035278	30.855311	1.0	1.0	-5.610243
ARIMA(5,1,3)	23.513464	51.735650	34.965700	1.0	1.0	-2.756732
ARIMA(3,1,2)	30.101744	48.916535	37.736568	1.0	1.0	-9.050872
ARIMA(4,1,2)	31.257690	53.208279	40.164984	1.0	1.0	-8.628845
ARIMA(1,1,4)	31.286402	50.101193	38.921226	1.0	1.0	-9.643201
ARIMA(2,1,1)	31.802674	44.345867	36.892556	1.0	1.0	-11.901337
ARIMA(2,1,4)	32.641984	54.592573	41.549278	1.0	1.0	-9.320992
ARIMA(5,1,2)	32.884962	57.971350	43.064727	1.0	1.0	-8.442481
ARIMA(5,1,4)	33.005448	64.363433	45.730155	1.0	1.0	-6.502724
ARIMA(0,1,4)	33.085384	48.764376	39.447737	1.0	1.0	-11.542692
ARIMA(1,1,2)	33.587916	46.131109	38.677798	1.0	1.0	-12.793958
ARIMA(3,1,1)	33.724718	49.403710	40.087071	1.0	1.0	-11.862359
ARIMA(4,1,1)	34.166791	52.981582	41.801615	1.0	1.0	-11.083396
ARIMA(4,1,4)	34.368677	62.590863	45.820913	1.0	1.0	-8.184339
ARIMA(1,1,3)	35.074736	50.753729	41.437090	1.0	1.0	-12.537368
ARIMA(0,1,3)	35.091011	47.634204	40.180893	1.0	1.0	-13.545505
ARIMA(2,1,2)	35.487899	51.166892	41.850253	1.0	1.0	-12.743950
ARIMA(5,1,1)	35.777277	57.727866	44.684571	1.0	1.0	-10.888638
ARIMA(5,1,0)	38.927559	57.742350	46.562383	1.0	1.0	-13.463780
ARIMA(4,1,0)	40.118570	55.797562	46.480923	1.0	1.0	-15.059285
ARIMA(0,1,2)	41.520242	50.927637	45.337654	1.0	1.0	-17.760121
ARIMA(3,1,0)	44.159320	56.702514	49.249202	1.0	1.0	-18.079660
ARIMA(2,1,0)	45.924103	55.331499	49.741515	1.0	1.0	-19.962052
ARIMA(1,1,1)	48.119112	57.526507	51.936524	1.0	1.0	-21.059556
ARIMA(0,1,1)	52.798060	59.069657	55.343001	1.0	1.0	-24.399030
ARIMA(1,1,0)	54.506060	60.777657	57.051001	1.0	1.0	-25.253030
ARIMA(0,1,0)	54.905602	58.041400	56.178072	1.0	1.0	-26.452801

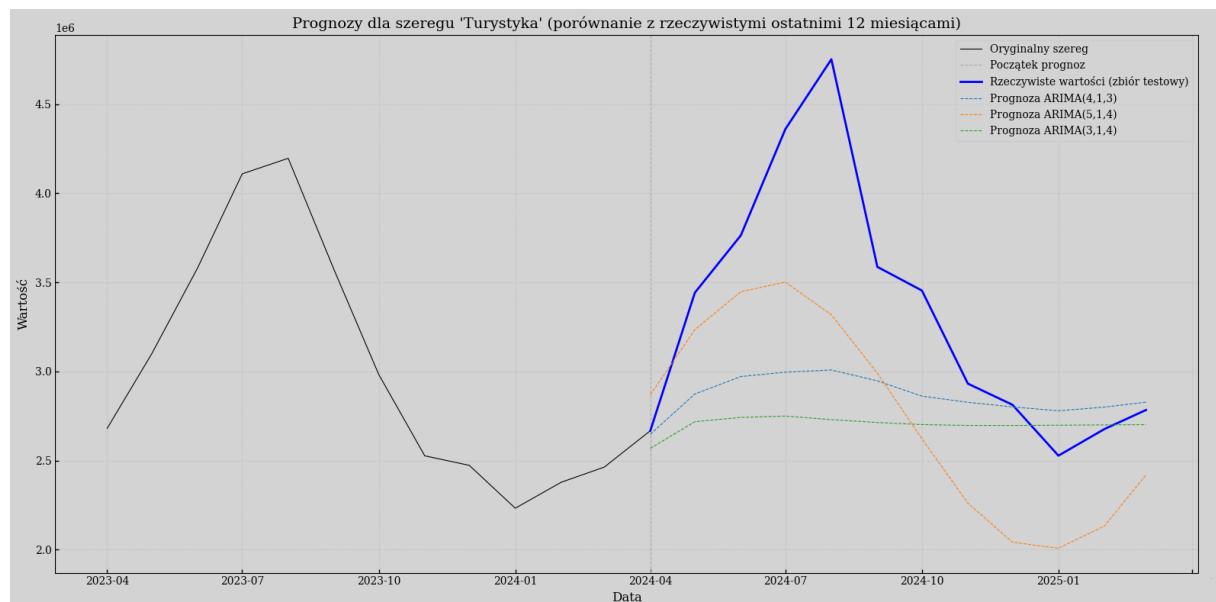
Źródło 32: Opracowanie własne

Spośród przetestowanych specyfikacji ARIMA (poza modelem ARIMA(5,1,4)), najlepsze wyniki pod względem kryterium AIC osiągnęły modele ARIMA(3,1,4) (AIC = 21,64, BIC = 46,72) oraz ARIMA(4,1,3) (AIC = 22,08, BIC = 47,16). Oba modele dobrze równoważą

dokładność dopasowania z liczbą parametrów, skutecznie tłumaczą obserwowaną strukturę autokorelacji w różnicowanym logarytmowanym szeregu oraz nie pozostawiają istotnych zależności w resztach, co czyni je optymalnymi kandydatami do dalszej analizy i prognozowania.

2.2.2. Prognoza

Biorąc pod uwagę diagnostykę przeprowadzoną na 159-elementowym zbiorze in-sample oraz 12-elementowym zbiorze out-sample (171 obserwacji łącznie), do krótkoterminowej prognozy dynamicznej wybrano trzy modele ARIMA: ARIMA(4,1,3), ARIMA(5,1,4) oraz ARIMA(3,1,4). Wyniki estymacji prezentują się następująco:



Poniższy wykres ukazuje rzeczywiste wartości szeregu „Turystyka” (gruba niebieska linia) oraz prognozy trzech modeli ARIMA za okres od kwietnia 2024 do kwietnia 2025. Model ARIMA(5,1,4) (linia pomarańczowa) najtrajniej oddaje ogólny kształt letniego wzrostu i jesiennego spadku, choć systematycznie zniża jego amplitudę – szczyt znajduje się blisko 3,5 mln zamiast rzeczywistych prawie 4,8 mln, a zimowy dołek przybiera zbyt łagodną formę.

Model **ARIMA(4,1,3)** (jasnoniebieska, przerywana linia) rysuje bardziej stonowaną trajektorię: wzrost letni pojawia się z opóźnieniem i jest mniej dynamiczny, natomiast spadek jesienny rozpoczyna się później i przebiega bardziej łagodnie niż w danych.

Natomiast prognoza **ARIMA(3,1,4)** (linia zielona) jest niemal płaska – zupełnie nie reaguje na gwałtowny letni wzrost ani na późniejszy spadek, co sprawia, że pomija kluczowe punkty zwrotne i daje zbyt konserwatywny obraz przebiegu szeregu.

Wnioski te częściowo zgadzają się ze statystykami błędów MAE i MSE, z Tabeli 3.

Tabela 3: Wyniki błędów MAE i MSE dla estymowanych modeli ARIMA szeregu sez.

Miara błędu	ARIMA(4,1,3)	ARIMA(5,1,4)	ARIMA(3,1,4)
MAE	521350	609743	644195
MSE	558662186296	480715277172	807916557581

Źródło 33: Opracowanie własne

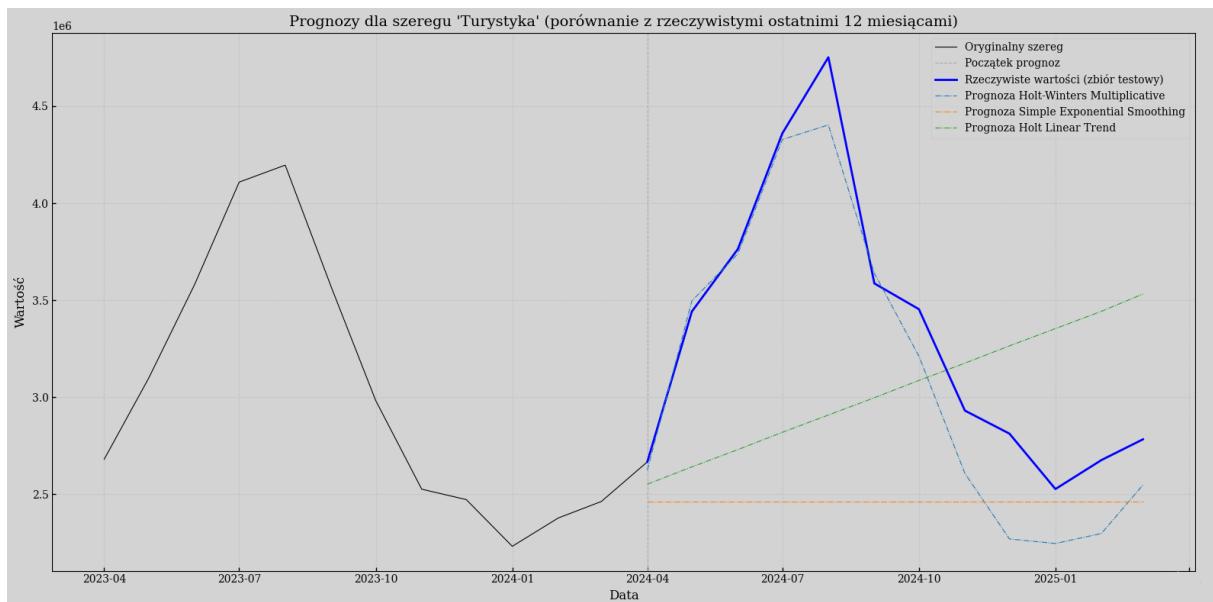
Z Tabeli 3 wynika, że w zestawieniu trzech modeli ARIMA najmniejsze MSE osiągnął model ARIMA(5,1,4), natomiast najwyższe MAE uzyskał ARIMA(4,1,3). Model ARIMA(3,1,4) w obu miarach wypada najgorzej, co potwierdza, że jego prognozy są zbyt wygładzone i nie nadążają za zmianami poziomu szeregu.

Jednakże porównanie wizualne prognoz pokazuje, że to właśnie ARIMA(5,1,4) najlepiej śledzi dynamikę sezonowego szeregu – najwierniej oddaje zarówno letni wzrost, jak i jesienny spadek. Zatem dane z tabeli częściowo zgadzają się z obserwacją wykresu: niższe MSE modelu (5,1,4) idzie w parze z jego wyraźnie lepszym dopasowaniem kształtu prognozy, podczas gdy MAE minimalnie premiuje inny kandydat.

2.2.3 Modele ekstrapolacyjne

Teraz warto porównać estymacje za pomocą ARIMA do modeli ekstrapolacyjnych. Z racji na sezonowy charakter szeregu używamy do poniższej analizy również modelu Holt-Wintersa, który jest dobrze przystosowany do analizowania tego typu szeregów.

Rysunek 31: Estymacja turystyki modelami ekstrapolacyjnymi



Źródło 34: Opracowanie własne.

Na rysunku 32 przedstawia porównanie rzeczywistych wartości szeregu „Turystyka” (gruba niebieska linia) z prognozami trzech prostych metod ekstrapolacyjnych w okresie od kwietnia 2024 do kwietnia 2025. Simple Exponential Smoothing generuje niemal poziomą linię (pomarańczowa linia), zupełnie nie uwzględniając ani ostrego letniego wzrostu, ani gwałtownego spadku zimą. Holt Linear Trend (zielona linia) wprowadza wprawdzie monotoniczny wzrost, ale jego jednolity trend zbyt późno reaguje na faktyczny szczyt w lipcu i zbyt łagodnie przewiduje późniejszy spadek.

Spośród wszystkich rozważanych **metod Holt–Winters Multiplicative (przerywana niebieska linia) radzi sobie najlepiej**: wyraźnie odtwarza gwałtowny wzrost ruchu turystycznego od kwietnia do lipca oraz dynamiczny spadek w drugiej połowie roku, zachowując proporcje między maksimum a minimum. Wizualnie jest to jedyny model, który przybliża kształt i amplitudę rzeczywistych danych, dlatego można uznać go za najlepszy kandydat do krótkoterminowej prognozy tego szeregu.

Wartości błędu obrazuje poniższa Tabela 4.

Tabela 4: Wyniki błędów MAE i MSE dla estymowanych modeli ekstrapolacyjnych

Miara błędu	Holt-Winters Multiplicative	Simple exponential smoothing	Holt linear trend
MAE	213017	850357	777190
MSE	72105361873	1189426651999	838992746190

Źródło 35: Opracowanie własne

Z Tabeli 4 widać wyraźnie, że pod względem obu miar błędu (MAE i MSE) zdecydowanie przoduje metoda Holt–Wintersa – uzyskała ona najniższe MAE oraz najniższe MSE. Oznacza to, że jej prognozy są najbardziej precyzyjne zarówno jeśli chodzi o przeciętne odchylenie bezwzględne, jak i o kwadrat średnich odchyleń od rzeczywistych wartości.

Drugie miejsce zajmuje Holt Linear Trend, co wskazuje na umiarkowaną zdolność modelu do śledzenia trendu i poziomu szeregu. Najsłabsze rezultaty osiągnęła z kolei Simple Exponential Smoothing, co odzwierciedla jej zbyt uproszczoną, niemal stałą prognozę, nieoddającą ani dynamiki wzrostu, ani gwałtownego spadku danych testowych.

2.2.3 Podsumowanie

W ciągu 12-miesięcznego okresu prognoz najlepiej sprawdził się model ekstrapolacyjny **Holt–Winters Multiplicative**, który dzięki jednoczesnemu uwzględnieniu trendu i sezonowości osiągnął najniższe błędy: $MAE = 213\ 017$ oraz $MSE = 7,21 \times 10^{10}$.

Drugie miejsce pod względem precyzji prognoz zajmuje model ARIMA(4,1,3) – to on osiągnął najniższą wartość MAE spośród wszystkich ARIMA ($521\ 350$) oraz drugi co do wielkości (po Holt–Winters) wynik MSE ($5,59 \times 10^{11}$).

Na trzecim miejscu — zamykając podium — uplasował się model ARIMA(5,1,4). Choć wygenerował najniższe MSE spośród ARIMA ($4,81 \times 10^{11}$), jego MAE ($609\ 743$) było wyższe niż w przypadku ARIMA(4,1,3), a dodatkowo diagnostyka reszt wskazała pozostałe autokorelacje, co obniża jego ogólną ocenę.

ZAKOŃCZENIE

Celem niniejszej pracy była szczegółowa analiza dwóch wybranych szeregów czasowych, reprezentujących istotne aspekty gospodarcze i społeczne: szeregu bezrobocia rejestrowanego w Polsce oraz szeregu turystyki dotyczącego bazy noclegowej.

W analizie szeregu bezrobocia zastosowano techniki dekompozycji oraz różnorodne testy stacjonarności, które wskazały na konieczność różnicowania danych. Następnie wykorzystano modele ARIMA, spośród których ARIMA(2,1,4) okazał się najbardziej skuteczny, zapewniając najniższe błędy prognoz i wiernie odwzorowując obserwowaną dynamikę szeregu.

Analiza szeregu sezonowego dotyczącego turystyki wykazała silną komponentę sezonową oraz istotny trend wzrostowy. Wykorzystano modele ARIMA oraz modele ekstrapolacyjne, szczególnie metodę Holta-Wintersa, co pozwoliło efektywnie uchwycić sezonowość i trendy, pomimo zakłóceń wywołanych pandemią COVID-19. Model Holta-Wintersa okazał się najtrajniejszym narzędziem prognozowania dla tego szeregu, oferując najlepsze rezultaty zarówno pod względem wizualnym, jak i statystycznym.

Przeprowadzona analiza ma istotne znaczenie praktyczne, dostarczając decydentom cennych informacji do podejmowania decyzji strategicznych oraz zarządzania ryzykiem związanym z fluktuacjami na rynku pracy i turystyki. W przyszłości wskazane byłoby zastosowanie jeszcze bardziej zaawansowanych technik modelowania, uwzględniających dodatkowe zmienne objaśniające oraz bardziej złożone struktury czasowe, co mogłoby jeszcze bardziej zwiększyć precyzję i użyteczność prognoz.

BIBLIOGRAFIA

Główny Urząd Statystyczny. Bank Danych Lokalnych [online].

Dostępny na: <https://bdl.stat.gov.pl/BDL/start> (dostęp: 8 czerwca 2025).

ANEKS

Spis rysunków

Rysunek 1: Dekopozycja szeregu bezrobocia	6
Rysunek 2: Szereg czasowy bezrobocia, dane miesięczne	7
Rysunek 3: Histogram szeregu przed transformacją Boxa-Coxa	7
Rysunek 4: Histogram szeregu po transformacji Boxa-Coxa	8
Rysunek 5: Wyniki testu Dickeya-Fullera ze stałą oraz bez stałej	9
Rysunek 6: Wyniki testu autokorelacji reszt Breuscha–Godfreya.....	10
Rysunek 7: Wyniki testu Augmented Dickey–Fuller dla oryginalnego szeregu	11
Rysunek 8: Wykres wartości różnicowanego szeregu bezrobocia.....	12
Rysunek 9: Wyniki testu Dickeya-Fullera ze stałą oraz bez stałej dla szeregu pierwszych różnic.....	13
Rysunek 10: Wyniki testu Breuscha–Godfreya dla jednokrotnie różnicowanego szeregu	14
Rysunek 11: Wyniki testu Augmented Dickey–Fuller dla jednokrotnie różnicowanego szeregu	14
Rysunek 12: Wyniki testu KPSS dla jednokrotnie różnicowanego szeregu	15
Rysunek 13: Wyniki testu Ljunga-Boxa dla jednokrotnie różnicowanego szeregu	16
Rysunek 14: Wykres autokorelacji - ACF oraz cząstkowej autokorelacji – PACF	17
Rysunek 15: Rezultat porównania modeli ARIMA(p,1,q)	18
Rysunek 16: Estymacja bezrobocia modelami ARIMA; biblioteki matplotlib i statsmodels..	19
Rysunek 17: Estymacja bezrobocia modelami ekstrapolacyjnymi	20
Rysunek 18: Dekompozycja szeregu turystyki (szereg sezonowy)	23
Rysunek 19: Logarytmowany szereg turystyki (szereg sezonowy)	24
Rysunek 20: Dekompozycja logarytmowanego szeregu turystyki (szereg sezonowy)	24
Rysunek 21: Test Dickeya-Fullera dla sezonowego, logarytmowanego szeregu odsezon.	25
Rysunek 22: Wyniki testu Breuscha-Godfreya dla logarytmowanego szeregu odsezonowego	25
Rysunek 23: Wyniki testu Augumented Dickeya-Fullera dla logarytmowanego szeregu odsez.	26
Rysunek 24: Wyniki testu KPSS dla logarytmowanego szeregu odsezonowanego	27
Rysunek 25: Wykres logarytmowanego i różnicowanego szeregu z usuniętą sezonowością .	27
Rysunek 26: Wyniki testu Dickeya-Fullera dla logarytmowanego i różnicowanego szeregu odsezonowanego	28
Rysunek 27: Wyniki testu Augumented Dickeya-Fullera dla logarytmowanego i różnicowanego szeregu odsezonowanego	29
Rysunek 28: Wyniki testu KPSS dla logarytmowanego i różnicowanego szeregu odsezonowanego	29
Rysunek 29: Wykres autokorelacji - ACF oraz cząstkowej autokorelacji – PACF; odsezon..	30
Rysunek 30: Przegląd parametrów modeli ARIMA do estymacji	31
Rysunek 32: Estymacja turystyki modelami ekstrapolacyjnymi	33

Spis tabel

Tabela 1: Wyniki błędów MAE i MSE dla estymowanych modeli ARIMA.....	20
Tabela 2: Wyniki błędów MAE i MSE dla estymowanych modeli ekstrapolacyjnych.....	21
Tabela 3: Wyniki błędów MAE i MSE dla estymowanych modeli ARIMA szeregu sez.	33
Tabela 4: Wyniki błędów MAE i MSE dla estymowanych modeli ekstrapolacyjnych.....	34