

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Laboratorium 9

Dyskretna Transformacja Fouriera

8 maja 2024

Literatura

- *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Carl D. Meyer, SIAM, 2000.

Discrete Fourier Transform: rozdział 5.8, w szczególności strony: 368 - 370.

Przydatne funkcje

- Matlab: `dct`, `fft`
- Python: `cmath` module, `scipy.fft`

Zadanie 1 FFT

1. Zaimplementuj funkcję realizującą DFT jako iloczyn macierzy Fouriera \mathbf{F}_n i n -elementowego wektora wejściowego ($\mathbf{y} = \mathbf{F}_n \mathbf{x}$).

$$n = 2^r \tag{1}$$

$$[\mathbf{F}_n]_{jk} = \xi^{jk} \tag{2}$$

$$\xi = e^{-\frac{2\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \bar{\omega} \tag{3}$$

2. Zaimplementuj również IDFT korzystając z tożsamości:

$$\mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{y} = \frac{\overline{\mathbf{F}_n} \mathbf{y}}{n} = \frac{\overline{\mathbf{F}_n} \bar{\mathbf{y}}}{n} \tag{4}$$

Sprawdź poprawność działania funkcji realizującej DFT stosując transformację odwrotną ($\mathbf{x} = \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{y}$) oraz porównując uzyskane wyniki z wyjściem funkcji bibliotecznej.

3. Zaimplementuj rekurencyjny algorytm Cooleya-Turkeya realizujący szybką transformację Fouriera (FFT). Porównaj szybkość jego działania z implementacją biblioteczną oraz implementacją z mnożeniem wektora przez macierz \mathbf{F}_n dla danych o różnym rozmiarze.

Zadanie 2 DFT w 1D

- Wygeneruj dwa sygnały czasowo-amplitudowe:
 - a) Sygnał będący sumą pięciu sygnałów sinusoidalnych o różnych częstotliwościach (przykładowo:)
 - b) Sygnał złożony z pięciu sygnałów o tych samych częstotliwościach co w punkcie a), ale ułożonych przedziałami, tzn. w każdym z pięciu przedziałów o tej samej szerokości występuje sygnał o jednej częstotliwości
- Dokonaj transformacji sygnałów a) i b) do domeny częstotliwościowej, porównaj otrzymane wyniki (część rzeczywista, część urojona). Przedstaw na osobnych wykresach część rzeczywistą i część urojoną wyniku transformacji.