Maturitní otázky z matematiky

Michaela Dudašková, Aneta Foralová, Marek Fuchs, Oliver Hadraba, Matiáš Horejsek, Marek Kalenda, Jonáš Lavička, Jan Peroutka, Kateřina Polášková, Jakub Sláma, Roman Šnajder, Jakub Švagr

April 2025

Contents

List of Figures

List of Tables

1. Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou a odmocninou mocninou

Jakub Sláma (Marek Fuchs)

24.4.2025

1 Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou a odmocninou mocninou

1.1 Absolutní hodnota

1.1.1 Absolutní hodnota reálného čísla

Absolutní hodnotu reálného čísla a, kde $a \in \mathbb{R}$ označujeme $|a|$ a platí pro ni:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{pokud } a \geq 0 \\ -a, & \text{pokud } a < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Pro kladnou hodnotu platí: $|1| = 1$, pro zápornou hodnotu platí: $|-1| = -(-1) = 1$

1.1.2 Geometrický význam

Absolutní hodnota nám vyjadřuje vzdálenost obrazu tohoto čísla od počátku

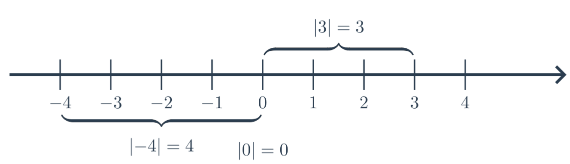


Figure 1: Absolutní hodnota

1.2 Mocnina a odmocnina z reálného čísla

Definice mocniny: Pro libovolná reálná čísla a a přirozená čísla n, kde:

- a je základ mocniny (říkáme mu základ nebo číslo, které umocňujeme)
- n je exponent nebo mocnitel (říkáme mu stupeň nebo mocnina)

platí, že $a^n = a \cdot a \cdot a ...$, tudíž: $a^3 = a \cdot a \cdot a$

1.2.1 Sudé mocniny, odmocniny

Sudé mocniny jsou a^x, kde x náleží celé sudé číslo např. $a^2; a^4; a^6$. Platí pro ně, že po umocnění čísla sudou mocninou bude výsledek vždy kladný.

Sudá odmocnina $\sqrt[x]{a} = n$, z nezáporného reálného čísla a je takové nezáporné číslo x, pro které platí: $n^x = a; n \in \mathbb{R}^+ + \{0\}$. Zapisujeme $\sqrt{a} = x$. Symbol $\sqrt{}$ se nazývá **odmocnítko**. Praxe: $\sqrt[2]{9} = 3$; $\sqrt[2]{-9} =$ nelze v $\mathbb{R}$ (lze v $\mathbb{C}$).

1.2.2 Liché mocniny, odmocniny

Liché mocniny jsou a^x, kde x náleží celé liché číslo např. $a^1; a^3; a^5$. Platí, že po umocnění čísla lichou mocninou bude výsledek se stejným znaménkem, jako základ.

Lichá odmocnina $\sqrt[x]{a}$, kde x náleží celému lichému číslu a $a \in \mathbb{R}$, platí: z reálného čísla **a** je reálné číslo **b**, pro které platí, že $b \cdot b \cdot b = a$ značíme $b = \sqrt[3]{a}$ Praxe: $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{-27} = -3$.

1.2.3 Základní pravidla, pro počítání s mocninami a odmocninami

Pro libovolné číslo $x \in \mathbb{R}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}; b \wedge d \neq 0$ platí

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}},$$

$$x^{\frac{a}{b}} \cdot x^{\frac{c}{d}} = x^{\frac{ad+cb}{bd}},$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b},$$

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[a \cdot b]{x}.$$

Přičemž číselný výsledek obecně $\in \mathbb{C}$.

1.3 Ekvivalentní a důsledkové úpravy rovnic a nerovnic - rozdíly

Při úpravách nerovnic používáme ekvivalentní úpravy, které se vyznačují tím, že nezmění platnost nerovnice. Smyslem ekvivalentních úprav je dostat nerovnici do jednoduššího tvaru. Výsledek rovnice s = je kořen/kořeny. Výsledek nerovnice je interval. Příklady rovnice a nerovnice:

$$3x + 2 = 1 + x$$

$$|x + 3| < 0$$

1.3.1 Ekvivalentní úpravy rovnic a nerovnic

Ekvivalentní úpravy jsou takové, při kterých se nezmění počet výsledků rovnice, nebo nerovnice

- přičtení výrazu

$$x - 2 = -2 / + 2$$

$$x - 2 + 2 = -2 + 2$$

$$x = 0$$

- odečtení výrazu

$$x + 2 = 2 / - 2$$
$$x + 2 - 2 = 2 - 2$$
$$x = 0$$

- Vynásobení výrazem

$$0,5x = 3 / \cdot 2$$
$$0,5x \cdot 2 = 3 \cdot 2$$
$$x = 6$$

- Vydělení výrazem

$$3x = 3 / \div 3$$
$$3x \div 3 = 3 \div 3$$
$$x = 1$$

Pokud násobíme nerovnici záporným číslem, potom musíme změnit znaménko nerovnosti.

$$-x < 1 / \cdot (-1)$$

$$x > -1$$

1.3.2 Důsledkové úpravy rovnic a nerovnic

U důsledkových úprav (umocnění) získáme větší množství kořenů rovnice/nerovnice, tudíš musíme na konci výpočtu provést zkoužku (dosazení do původní rovnice/nerovnice a porovnání rovnosti pravé a levé strany), tímto způsobem vyřadíme nadbytečné nespávné výsledky.

1.3.3 Rozdíly

	Rovnice	Nerovnice
znaménko	$=$	$\leq; <; >; \geq$
násobení -1	nic se nemění	změna znaménka
výsledek	n počet kořenů ($\mathbb{C}$)	interval

2. Lineární a mocninné funkce

Jakub Sláma

25.4.2025

2 Lineární a mocninné funkce

2.1 Lineární funkce

Definice funkce: Množina sdružených číselných dvojic, pro které platí, že hodnota každého jednoho x z definičního oboru náleží právě jedno y z oboru hodnot.

Předpis funkce: $f : y = f(x)$
Grafem funkce f je množina všech bodů roviny, které mají souřadnice $[x; f(x)]$

lineární funkce: Grafem lineární funkce je přímka. $D(f) \in R$. Lineární funkcí rozumíme takovou, která má předpis:

$$f : y = kx + q$$

$$k, q \in \mathbb{R}$$

kde k je směrnice, jejíž hodnota udává strmost stoupání/klesání přímky a q udává průsečík přímky s osami x a y. A pro hodnoty k platí:

k	co se děje s funkcí	viz.
$k > 0$	funkce je rostoucí	Figure 2
$k = 0$	konstantní	Figure 3
$k < 0$	klesající	Figure 4

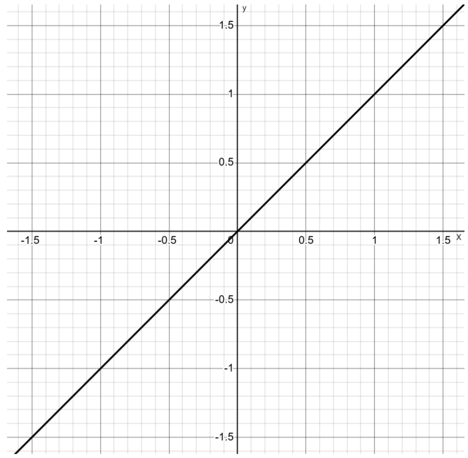


Figure 2: $f(x) : y = x$

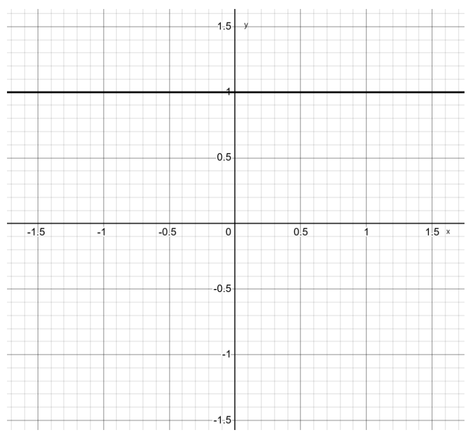


Figure 3: $f(x) : y = 0x + 1$

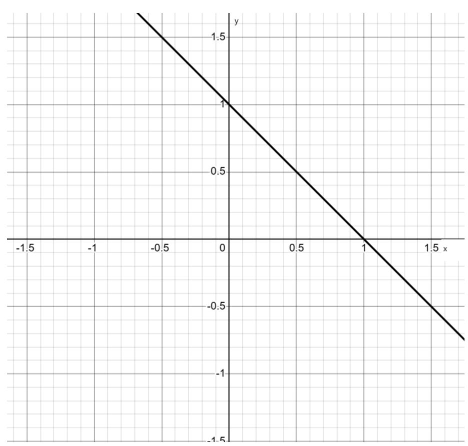


Figure 4: $f(x) : y = -x + 1$

2.2 Mocninná funkce pro $n \in \mathbb{N}$ (celá čísla)

Mocninná funkce má předpis: $y = x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Vlastnosti se liší pro sudá a lichá n Pro předpisy$y = x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$ a platí:

sudá funkce	**lichá funkce**
n je sudé	n je liché
$D(f) = \mathbb{R}$	$D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = \langle 0; \infty)$	$H(f) = \mathbb{R}$
je sudá	je lichá
Je omezená z dola, shora omezená není	není shora ani zdola omezená
není prostá *	je prostá
klesající na $(-\infty; 0\rangle$ a rostoucí na $\langle 0; \infty)$	je rostoucí v $\mathbb{R}$
má v bodě 0 minimum $f(0) = 0$	nemá maximum, ani minimum
nemá maximum $f(0) = 0$	
viz. Figure 5	viz. Figure 6

*(Prostá funkce je v funkce, která žádnou funkční hodnotu nenabývá vícekrát)

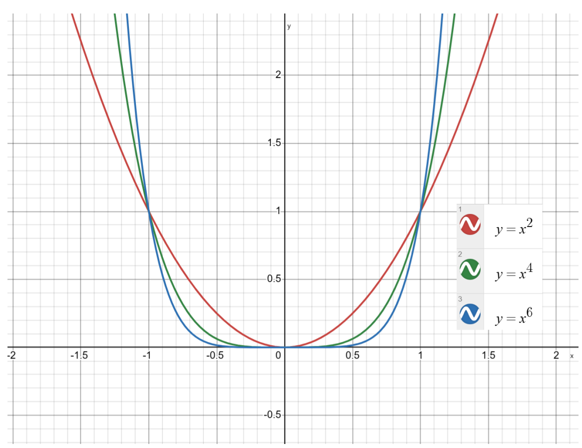


Figure 5: grafy funkcí s sudými mocninami

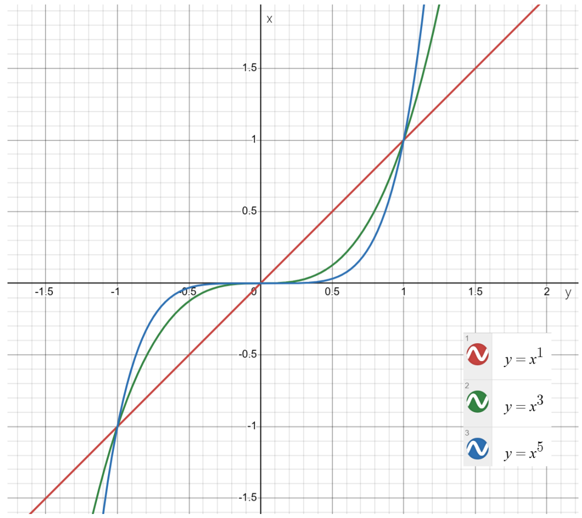


Figure 6: grafy funkcí s lichými mocninami

2.3 Lineární lomená funkce

lineární lomená funkce je každá funkce daná předpisem

$$f : y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

kde:
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$
$c \neq 0$
$ad \neq bc$ Tato funkce je vždy prostá na celém $D(f)$. Grafem je hyperbola s středem v bodě $[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}]$.

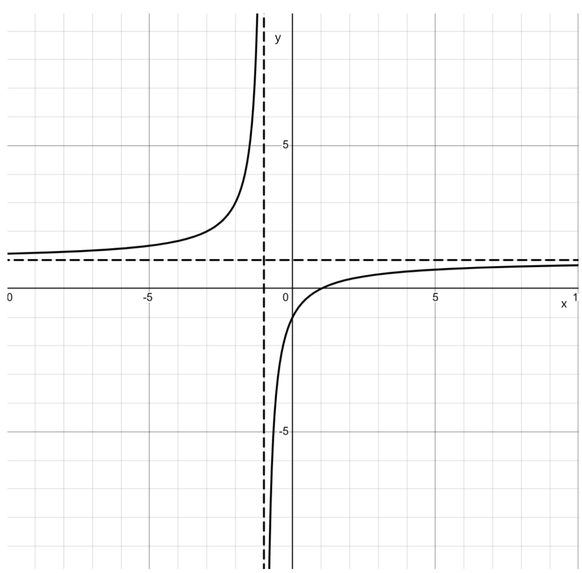


Figure 7: $f(x) : y = \frac{x-1}{x+1}$
(čerchovaně jsou asymptoty)

tato konkrétní funkce je v intervalu $\mathbb{R} - \{1\}$, jelikož v $x = -1$ není definována

2.3.1 Asymptoty

Asymptota je taková přímka, jejíž vzdálenost od křivky se limitně blíží k nule, když se jedna nebo obě souřadnice blíží nekonečnu.

Co to znamená? funkce se blíží k dané asymptotě do nekonečna, nikdy ji neprotne.

Příklad: Určete asymptoty $y = \frac{2x-3}{x-1}$
Budou 2 asymptoty.
1. získáme určením podmínky $x \neq 1$ první asymptota má rovnici: $x = 1$
2. získáme podílem $(2x - 3) : (x - 1) = 2 \cdot (-\frac{1}{x-1})$. Druhá asymptota má tedy hodnotu $y = 2$ graf funkce je:

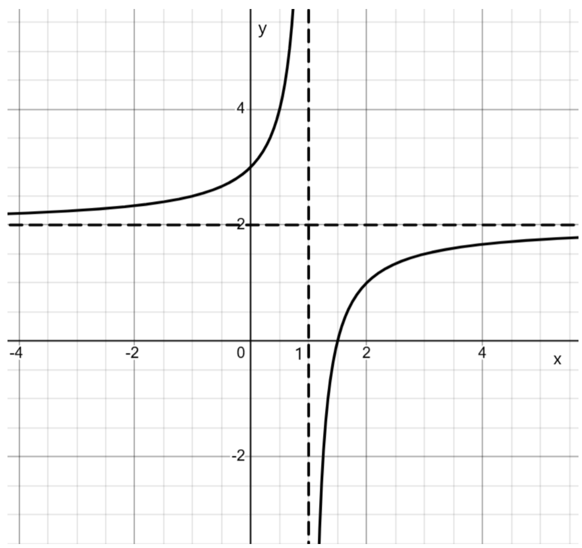


Figure 8: $f(x) : y = \frac{2x-3}{x-1}$
(čerchovaně jsou asymptoty)

2.4 Základní vlastnosti funkcí

2.4.1 Definiční obor

Množina A označujeme $D(f)$ a platí pro ni, že $x \in A$

2.4.2 Obor hodnot

Obor hodnot je množinou prvků $y \in B$ z nichž ke každému existuje alespoň jeden takový prvek $x \in A$, že $[x, y] \in f$ nazýváme oborem hodnot funkce f a označujeme $H(f)$

2.4.3 Intervaly monotónnosti

Intervaly (souvislá množina hodnot), ve kterých je funkce rostoucí nebo klesající

2.4.4 Sudost Lichost

Funkce je sudá (souměrná podle osy y), pokud splňuje: když do funkce vložíte prvek x a poté inverzní prvek $-x$, pak musí funkce vrátit stejnou výslednou hodnotu. Typickou sudou funkcí je funkce $f : y = x^2$

Funkce se nazývá lichá (je souměrná podle počátku $[0; 0]$), pokud splňuje:
1) Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$
2) Pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$ například funkce: $y = x^3$

2.4.5 Prostá funkce

Prostá funkce je v funkcí, která žádnou funkční hodnotu nenabývá vícekrát

2.5 Grafy vybraných funkcí a jejich vlastnosti

2.5.1 Funkce absolutní hodnoty

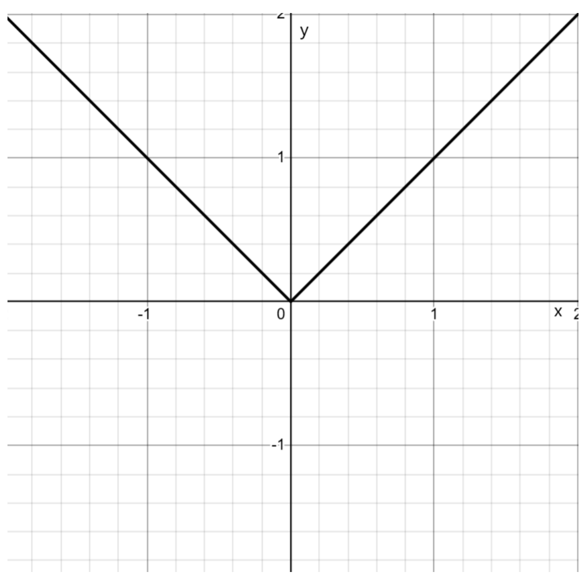


Figure 9: $f(x) : y = |x|$

V intervalu $(-\infty; 0 >$ je funkce klesající. V intervalu $< 0; \infty)$ je rostoucí. funkce je zdola omezená (má minimum v bodě $[0; 0]$). Je sudá.

$$D(f) \in \mathbb{R}$$

$$H(f) \in \langle 0; \infty)$$

2.5.2 Logaritmická funkce

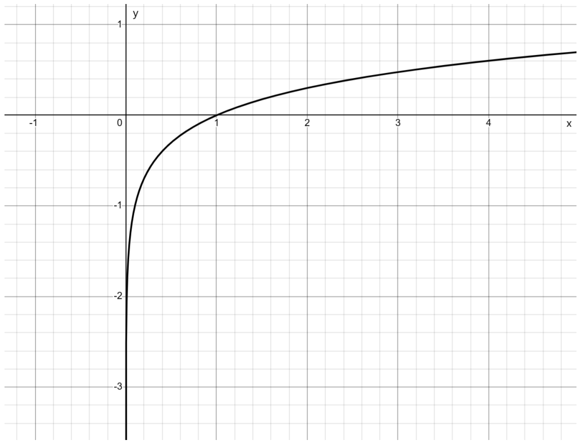


Figure 10: $f(x) : y = log_{10}x$

funkce je v celém jejím intervalu $(0; \infty)$ rostoucí. Není omezená. Má lymitu $x = 0$

$$D(f) \in (0; \infty)$$

$$H(f) \in \mathbb{R}$$

2.5.3 Graf funkce druhé odmocniny

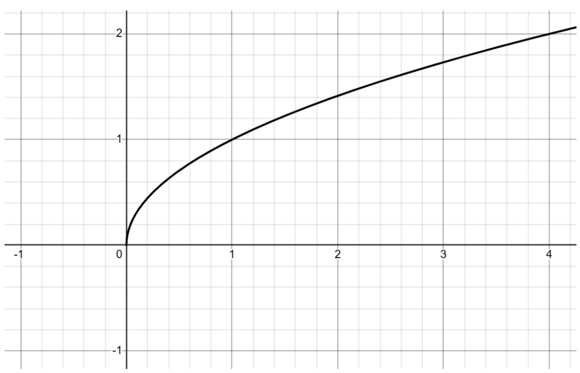


Figure 11: $f(x) : y = \sqrt{x}$

funkce je v celém jejím intervalu $(0; \infty)$ rostoucí. Je zdola omezená v bodě $[0; 0]$

$$D(f) \in \langle 0; \infty)$$

$$H(f) \in \langle 0; \infty)$$

2.5.4 Graf funkce třetí odmocniny

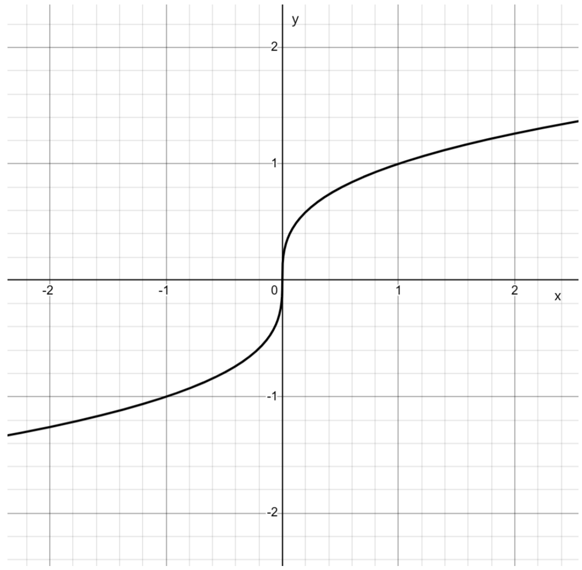


Figure 12: $f(x) : y = \sqrt[3]{x}$

funkce je rostoucí

$$D(f) \in \mathbb{R}$$

$$H(f) \in \mathbb{R}$$

3. Rovnice s parametrem

Matyáš Horejsek

26.4.2025

3 Rovnice s parametrem

3.1 Obecné rovnice s parametrem

Rovnice s parametrem jsou rovnice, které obsahují kromě neznámé x ještě další proměnné (označujeme je například p), kterým se říká parametry.

Rovnice s parametrem představují souhrnný zápis množiny rovnic, které bychom získali po dosazení jednotlivých přípustných hodnot za parametry. Řešíme-li rovnice s parametrem, hledáme kořeny v závislosti na hodnotě parametru.

Parametry ovlivňují hodnotu proměnné s ohledem na provádění operace, a proto musíme provést tzv. diskusi řešení vzhledem k parametru.

3.2 Lineární rovnice s parametrem

Lineární rovnice s parametrem jsou takové rovnice s parametrem, ve kterých se proměnná x vyskytuje pouze v první mocnině.

3.2.1 Postup řešení lineární rovnice s parametrem

1. Upravení rovnice a vyjádření neznámé

   - Všechny členy s neznámou převedeme na jednu stranu, ostatní na druhou.
   - Vytkneme neznámou a rovnici upravíme do tvaru:

     $$k(a) \cdot x = q(a)$$

     Kde x je neznámá
     a je parametr
     a $k(a)$, $q(a)$ jsou výrazy závislé na parametru.

2. Podmínky pro dělení

   - **Vzorová rovnice:** $(a-2) \cdot x = a+1$

- Pokud chceme rovnici vydělit výrazem s parametrem (například $a-2$), musíme zjistit, kdy je tento výraz roven nule.
- **Nulou dělit nelze!** Proto je nutné rozlišit následující případy:

(a) Pokud $k(a) \neq 0$, tedy $a-2 \neq 0$, lze dělit a získáváme jedno řešení:

$$x = \frac{q(a)}{k(a)}$$

Tedy z příkladu:

$$x = \frac{a+1}{a-2}$$

(b) Pokud $k(a) = 0$, musíme dosadit tuto hodnotu parametru zpět do původní rovnice a zjistit, zda:

- Rovnice je pravdivá pro všechna x, tedy má nekonečně mnoho řešení. $x \in \mathbb{R}$
- Rovnice je nepravdivá pro všechna x, tedy nemá řešení. $x \notin \mathbb{R}$

3. Shrnutí výsledků

- Výsledky se často přehledně uvádějí v tabulce tzv. **Tabulka diskuse**, kde jsou jednotlivé případy podle hodnoty parametru a odpovídající množina řešení.

Vzorová tabulka z příkladu:

Hodnota parametru a	**Hodnota kořene K**
$a \neq 2$	$K = \{\frac{a+1}{a-2}\}$
$a = 2$	$K = \emptyset$

3.2.2 Diskuse k řešení lineární rovnice

Diskuse řešení lineární rovnice s parametrem spočívá v rozboru všech možných hodnot parametru a určení, jak se pro tyto hodnoty mění množina řešení rovnice. Klíčové je správně určit podmínky, kdy lze dělit výrazem obsahující parametr, a analyzovat speciální případy, kdy tento výraz zaniká.

Obecné zásady diskuse:

- Vždy určete podmínky, kdy nelze dělit výrazem s parametrem (například kdy je koeficient u x roven nule).
- Pro vyloučené hodnoty parametru ověřte, zda má rovnice nekonečně mnoho, jedno nebo žádné řešení.
- Výsledky vždy shrňte přehledně (tabulkou nebo v bodech), kde je jasně vidět závislost řešení na hodnotě parametru.

3.3 Kvadratické rovnice s parametrem

Kvadratické rovnice s parametrem jsou takové rovnice s parametrem, ve kterých se neznámá vyskytuje nejvýše ve druhé mocnině. Je důležité, aby ve druhé mocnině se nacházela neznámá, jinak se nejedná o kvadratickou rovnici. Parametr smí, ale nemusí se nacházet v libovolné n-té mocnině.
Tedy z obecné rovnice $(a)x^2 + (b)x + (c) = 0$, kde alespoň jeden koeficient (a, b, c) závisí na hodnotě parametru (např. m)
Příklad:$(m-1)x^2 + 2mx + (m+2) = 0$
Než začneme řešit rovnici musíme určit typ rovnice a v jakém případě nám zůstává kvadratickou. Pokud:

- $a \neq 0$ Rovnice má standardní kvadratický tvar.
  Příklad: $(m-1) \neq 0$, tedy pro $m \in \mathbb{R} - (1)$
- $a = 0$ Rovnice se redukuje na lineární $bx + c = 0$
  Příklad: $(m-1) = 0$, tedy $(m-1)x^2$... nám vypadává.
- $a = 0$ a současně i $b = 0$ rovnice nemá řešení a ztrácí smysl.

Při řešení kvadratických rovnic s parametrem musíme provést diskusi řešení vzhledem k parametru, stejně jako u lineárních rovnic s parametrem.

3.3.1 Diskuse k řešení kvadratické rovnice s parametrem

Diskusi provádíme nejprve určením, kdy nám rovnice zůstává kvadratickou a kdy se redukuje na lineární tvar. Poté provedeme **analýzu diskriminantu**, poté můžeme vše zapsat opět přehledně do tabulky, stejně jako u lineární rovnice. **POZOR!** Do tabulky uvádíme i případ, kdy se nám kvadratická rovnice redukuje na lineární rovnici.

Diskriminant $D = b^2 - 4a \cdot c$, kde je tedy alespoň jeden koeficient (a, b, c) závislí na hodnotě parametru, nám určuje počet reálných kořenů:

- $D > 0$: Rovnice má dva reálné kořeny. Graficky má rovnice s osou x dva průsečíky.
- $D = 0$: Rovnice má jeden reálný kořen. Graficky má rovnice s osou x jeden průsečík a stává se tečnou.
- $D < 0$: Rovnice nemá žádné reálné kořeny, má pouze komplexně sdružené kořeny. Graficky nemá rovnice s osou x žádný průsečík.

Vzorová tabulka z příkladu:

Hodnota parametru m	**Hodnota kořenů** K
$m = 1$	$K = \{-\frac{3}{2}\}$
$m < 2 - \{1\}$	$K = \{-\frac{1-\sqrt{3}}{2}; -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\}$
$m = 2$	$K = \{-2\}$
$m > 2$	$K = \emptyset$

3.4 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Pro kořeny x_1, x_2 obecné kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, případně normované kvadratické rovnice $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ kde $a \neq 0$ a $a, b, c \in \mathbb{C}$ platí vztahy, které se nazývají Vietovy vzorce.

3.4.1 Vietovy vzorce

Tyto vzorce (vztahy) nám umožňují:

- Rychle určit součet a součin kořenů bez jejich explicitního výpočtu.
- Sestavit kvadratickou rovnici, známe-li její kořeny.
- Rozkládat kvadratické trojčleny na součin dvou lineárních výrazů.

Vždy musí platit společně:

$a(x_1 + x_2) = -b$	$a \cdot x_1 \cdot x_2 = c$
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

4. Soustavy rovnic o více neznámých

Matyáš Horejsek

29.4.2025

4 Soustavy rovnic o více neznámých

4.1 Obecné poznatky o soustavě rovnic o více neznámých

Soustavy rovnic o více neznámých jsou matematické úlohy, kde hledáme hodnoty proměnných splňující všechny rovnice současně. Tedy řešením soustavy rovnic o n neznámých se rozumí každá uspořádaná n-tice, která splňuje zároveň všechny rovnice soustavy (po dosazení každé rovnice dostaneme pravdivý výrok).

Mezi nejčastější typy patří rovnice o dvou, třech až čtyřech neznámých. Ty následně dělíme na:

- Lineární
- Algebraické rovnice vyšších řádů (kvadratické a výše)
- Goniometrické

Obecný zápis soustavy rovnic o dvou neznámých, kde a, b, c, d, e, f jsou daná reálná čísla a x, y neznámé:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Řešením soustavy rovnic o n neznámých nazýváme takovou uspořádanou n-tici (dvojicí, trojici,...) a **výsledek zapisujeme**:

$$K = \{[x, y, z, ...n]\}$$

4.2 Metody řešení soustavy rovnic

Soustavy rovnic můžeme řešit několika **početními metodami** a u rovnic se dvěma neznámýma, případně třemi neznámými, můžeme řešit i **graficky**. Pro dvě neznámé se graficky pohybujeme ve 2D prostoru a pro tři neznámé ve 3D prostoru.

4.2.1 Početní řešení soustavy rovnic

Soustavy rovnic můžeme řešit dvěma základními metodami, které se dají uplatnit u všech rovnic o n neznámých:
Vzorový příklad rovnice o dvou neznámých:

$$3x + y = 7$$

$$x - 2y = -4$$

- **Dosazovací metoda**

  1. Vyjádříme jednu proměnnou z jedné rovnice, například:

     $$x = 2y - 4$$

  2. Dosadíme do druhé rovnice a vyřešíme:

     $$3(2y - 4) + y = 7$$

     $$y = \frac{19}{7}$$

  3. Získanou neznámou dosadíme zpět do původní rovnice a vyřešíme ji pro druhou neznámou:

     $$3x + \frac{19}{7} = 7$$

     $$x = \frac{10}{7}$$

     $$K = \{[\frac{10}{7}, \frac{19}{7}]\}$$

     Pro ověření můžeme dosadit obě neznámé zpět do původní soustavy rovnic a vypočítat. Vyjadřovat neznámé z rovnice a dosazovat je zpět pro následný výpočet, se pokoušíme vždy co nejrozumněji.

- **Eliminační (sčítací) metoda**

  1. Úpravou rovnic a následným sečtením, nebo odečtením, odstraníme jednu neznámou:

     $$3x + y = 7 / \cdot 2$$

     $$x - 2y = -4$$

     Upravíme si první rovnici a rovnice mezi sebou sečteme:

     $$6x + 2y + x - 2y = 14 - 4$$

  2. Vznikne jednoduchá rovnice s jednou neznámou, kterou vyřešíme:

     $$7x = 10$$

     $$x = \frac{10}{7}$$

3. Vyřešenou neznámou dosadíme zpět do původní rovnice a vyřešíme druhou neznámou:
$$\frac{10}{7} - 2y = -4$$
$$y = \frac{19}{7}$$
$$K = \{[\frac{10}{7}, \frac{19}{7}]\}$$

- **Substituční metoda**
Substituční metoda je doplňkový způsob jak řešit soustavy rovnice o více neznámých. Využijeme ji primárně u soustav o třech a více neznámých, ale i u například soustav, kde je neznámá v mocnině. Ne vždy se, ale vyplatí využít substituci, proto nepatří mezi základní metody řešení soustav rovnic o více neznámých:
Příklad:
$$\frac{2}{x+y} - \frac{5}{x-y} = 1$$
$$\frac{1}{x+y} + \frac{4}{x-y} = \frac{9}{5}$$

1. Nejprve si určíme co nahradíme substitucí za jinou neznámou, případně neznámé:
$$a = \frac{1}{x+y}$$
$$b = \frac{1}{x-y}$$
2. Nově vzniklé neznámé dosadíme zpět do původní soustavy rovnic:
$$2a - 5b = 1$$
$$a + 4b = \frac{9}{5}$$
3. Nově vzniklou snazší soustavu rovnic vyřešíme s pomocí dosazovacích a sčítacích metod a najdeme výsledky pro nové neznámé:
$$2a - 5b = 1$$
$$a + 4b = \frac{9}{5} / \cdot (-2)$$
Rovnice sečteme a dořešíme. Výsledek opět vrátíme do upravených rovnic a vyřešíme pro druhou neznámou:
$$b = \frac{1}{5}$$
$$a = 1$$

4. Pokud známe hodnoty neznámých, které jsme si vytvořili, vrátíme tyto hodnoty do substitučních rovnic:

$$1 = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{x-y}$$

5. Nově vzniklou snazší soustavu rovnic opět vyřešíme s pomocí dosazovacích a sčítacích metod a zjistíme hodnoty neznámých:

$$x = 3$$

$$y = -2$$

$$K = \{[3, -2]\}$$

U soustav rovnic se **třemi a více** neznámými využíváme i další pokročilejší metody, které se studují hlavně až na vysokých školách (následující informace slouží pro ilustraci a jejich znalost není klíčová):

- Gaussova eliminace
- Využití matic

4.2.2 Grafické řešení soustavy rovnic

Každá rovnice vyjadřuje geometrický objekt:

- Rovnice o dvou neznámých se graficky zobrazí jako přímka v rovině.
- Rovnice o třech neznámých se graficky zobrazí jako rovina v prostoru.
- Lineární rovnice s n proměnnými se graficky zobrazí jako hyperrovina v nD prostoru.

Řešení soustavy odpovídá společnému bodu všech těchto objektů, tedy jejich průsečíku. Grafické řešení pomáhá pochopit koncept řešení soustavy jako průniku více podmínek najednou.

Pokud řešíme soustavu graficky, musíme si soustavy převést do tvaru:

$$y = ax + b$$

Příklad:

$$y = 2x + 1$$

$$y = -x + 4$$

1. Nejdříve obě převedené rovnice zaznačíme do souřadnicové roviny (xy-roviny)
2. Následně hledáme bod (body), kde se protínají – to je řešení soustavy.

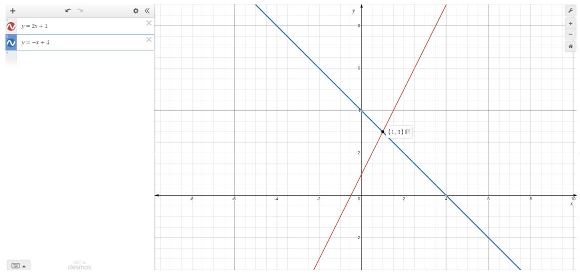


Figure 13: $y = 2x + 1; y = -x + 4$

4.3 Počet řešení soustavy rovnic

Nejsnazší zjištění počtu řešení je pře grafické řešení.
Pokud řešíme soustavu rovnic o **dvou neznámých** tak počet řešení odpovídá následujícím podmínkám:

Situace	**Geometrický význam**	**Počet řešení**
Přímky se protínají	Jediný průsečík	**Jedno řešení**
Přímky se překrývají	Jsou totožné	**Nekonečně mnoho řešení**
Přímky jsou rovnoběžné	Nikdy se neprotínají	**Žádné řešení**

Ukázku můžete vidět v předešlém příkladu.

Pokud řešíme soustavu rovnic o **třech neznámých** tak počet řešení odpovídá následujícím podmínkám:

Situace	**Geometrický význam**	**Počet řešení**
Tři roviny se protínají v jednom bodě	Společný průsečík všech	**Jedno řešení**
Tři roviny se protínají v přímce	Mají společnou přímku	**Nekonečně mnoho řešení**
Rovnoběžné nebo se neprotínají	Žádný společný bod	**Žádné řešení**

Příklad tří rovin, které mají společný průsečík:

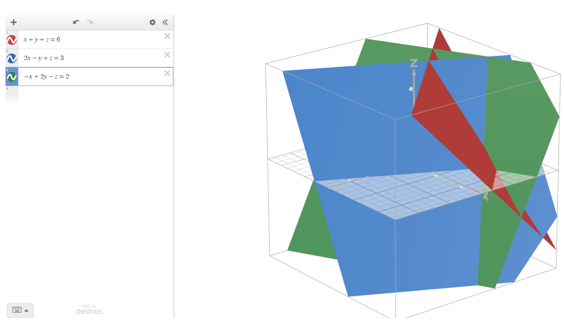


Figure 14: $y = 6 - x - z; y = 2x + z - 3; y = \frac{2+z+x}{2}$

5. Exponenciální a logaritmická funkce

Jan Peroutka

29.4.2025

5 Exponenciální a logaritmická funkce

5.1 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce je každá funkce tvaru

$$f(x) = a^x,$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$.

5.1.1 Vliv základu a na průběh

- Pokud $a > 1$, je funkce rostoucí.
- Pokud $0 < a < 1$, je funkce klesající.

Graf vždy prochází bodem $[0, 1]$**.**

5.1.2 Definiční obor a obor hodnot

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Obor hodnot: $H(f) = (0, \infty)$

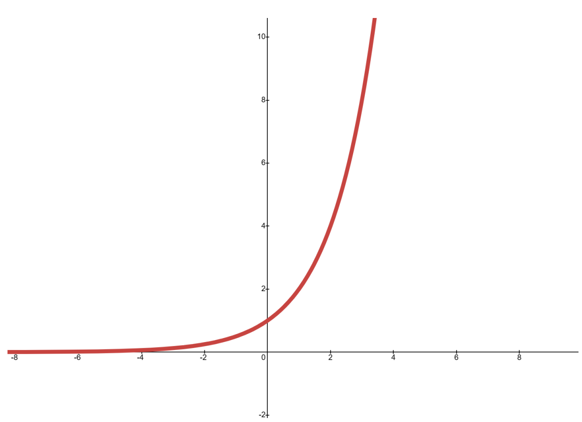


Figure 15: $y = 2^x$

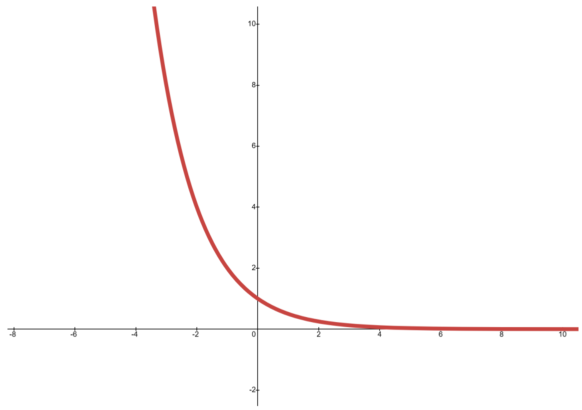


Figure 16: $y = (\frac{1}{2})^x$

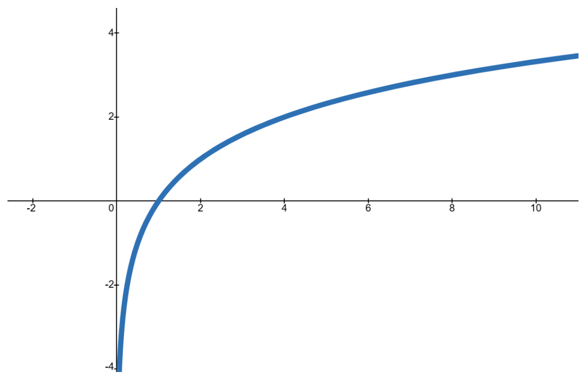


Figure 17: $y = \log_2 x$

5.2 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je inverzní funkcí k exponenciální funkci. Její obecný tvar je:

$$f(x) = \log_a x,$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

5.2.1 Vliv základu a na průběh

- Pokud $a > 1$, je funkce rostoucí.
- Pokud $0 < a < 1$, je funkce klesající.

Graf vždy prochází bodem $[1, 0]$.

5.2.2 Definiční obor a obor hodnot

- Definiční obor: $D(f) = (0, \infty)$
- Obor hodnot: $H(f) = \mathbb{R}$

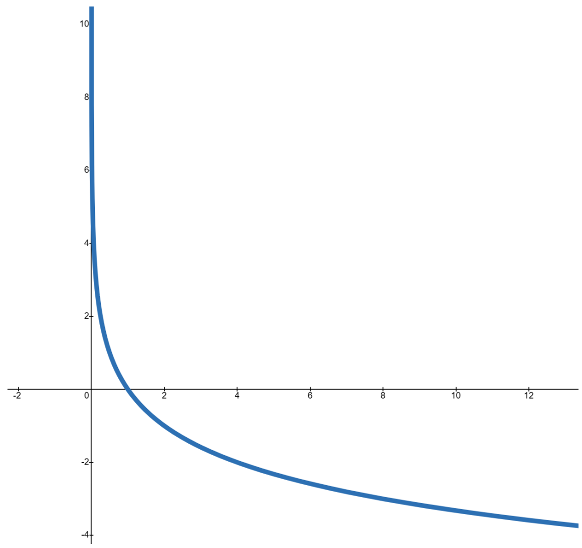


Figure 18: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

5.3 Vztah mezi exponenciální a logaritmickou funkcí

Funkce $f(x) = a^x$ a $f^{-1}(x) = \log_a x$ jsou navzájem inverzní. To znamená:

$$a^{\log_a x} = y \quad \text{a} \quad \log_a(a^x) = y.$$

Grafy těchto funkcí jsou zrcadlově souměrné podle osy $y = x$.

5.4 Představa logaritmu

Logaritmus je odpovědí na otázku: „Na kolikátou musím umocnit číslo a, abych dostal číslo x?“

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

5.5 Základní pravidla pro počítání s mocninami a logaritmy

5.5.1 Mocniny

Pro všechna $a > 0$, $m, n \in \mathbb{R}$:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^0 = 1$
- $\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$

5.5.2 Logaritmy

Pro všechna $a, x, y > 0$, $a \neq 1$:

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$
- $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$
- Změna základu: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

6 Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

Roman Šnajder

April 2025

6 Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

6.1 Exponenciální rovnice

Z běžné rovnice se exponenciální stává, pokud obsahuje proměnnou v exponentu. Typickým příkladem exponenciální rovnice může být třeba $2^x = 8$.

6.2 Pravidla pro počítání s exponenty

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$a^{x^y} = a^{xy}$$
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$a^0 = 1$$

Rovnice typu $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ se řeší porovnáním exponentů (pro $a > 0$, a $\neq 1$). Rovnice typu $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, se řeší logaritmováním na tvar $f(x) \cdot \log_a a = g(x) \cdot \log_a b$ (pro $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$)

6.2.1 Jednoduchá exponenciální rovnice

Při řešení exponenciální rovnici, je žádoucí, pokud lze rovnici upravit na tvar o stejném základu na obou stranách rovnice.

$$2^3 = 8$$
$$2^x = 2^3$$
$$x = 3$$

Další případ nastává, pokud se na jedné straně rovnice vyskytuje jednička. Základ obsahující číslo 1 je možné zapsat jako libovolné číslo na nultou a tím vznikne exponenciální rovnice o stejném základu.

$$5^x = 1$$

$$5^x = 5^0$$

$$x = 0$$

V exponenciální rovnici lze využít i substituce, kdy členy s neznámou jsou nahrazeny písmenem, které však po vypočtení nově vzniklé rovnice musí být dosazeno zpět do původního výrazu a až tento výsledek je řešením dané rovnice. Při použití této metody často vznikne kvadratická rovnice.

$$9^x - 25 \cdot 3^x - 54 = 0$$

$$3^{2x} - 25 \cdot 3^x - 54 = 0$$

$$t^2 - 25t - 54 = 0$$

$$(t + 2) \cdot (t - 27) = 0$$

$$3^x = -2, x_1 \neq R$$

$$3^x = 27$$

$$x_2 = 3$$

6.3 Exponenciální nerovnice

Exponenciální nerovnice se řeší stejně jako rovnice. Liší se pouze u výsledku, kdy u nerovnice vznikne interval nebo intervaly. Pokud je neznámá menší než 0, pak se nerovnost vynásobí (-1).

$$2^{1-x} > \frac{1}{2}$$

$$2^{1-x} > 2^{-1}$$

$$1 - x > -1$$

$$-x > -2 / \cdot (-1)$$

$$x < 2$$

$$K = (-\infty; 2)$$

Stejně jako u rovnice i zde lze použít substituce s tím rozdílem, že řešením bude interval nebo intervaly, pro které má daná rovnice řešení.

$$9^x - 25 \cdot 3^x - 54 > 0$$

$$3^{2x} - 25 \cdot 3^x - 54 > 0$$

$$t^2 - 25t - 54 > 0$$

$$(t + 2) \cdot (t - 27) > 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} - & + & + \\ - & - & + \end{array}$$

$$x = (-\infty; -2) \cup (27; \infty)$$

6.4 Pravidla pro počítání s logaritmy

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$
$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$
$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$$

6.4.1 Logaritmické rovnice

Základní logaritmická rovnice s užitím pravidla. Zde však musí být určeny podmínky, jelikož logaritmus nemůže být záporný a tak budu řešit pouze pro x, která nám vyjdou kladná. (V tomto případě čísla $x \in (0; \infty)$)

$$\log_2 x = 3$$
$$x = 2^3$$
$$x = 8$$

Pokud je v příkladu logaritmus a k tomu nějaké další číslo, pak z tohoto čísla vytvoříme logaritmus a příklad se vyřeší podobně jako ten předchozí. Opět musí být určen definiční obor

$$(1; \infty)$$

$$\log_2(x-1) + 2 = \log_2(2x+1)$$
$$\log_2(x-1) + \log_2 4 = \log_2(2x+1)$$
$$\log_2[(x-1) \cdot 4] = \log_2(2x+1)$$
$$4x - 4 = 2x + 1$$
$$x = \frac{5}{2}$$

U logaritmický nerovnice opět použít substituce.

$$\log_2^2 x - 2log_2 x + 1 = 0$$
$$\log_2 x = t$$
$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t-1)^2 = 0$$
$$\log_2 x = 1, x = 2$$

6.4.2 Logaritmické nerovnice

Logaritmické nerovnice se řeší stejně jako rovnice. Liší se pouze u výsledku, kdy u nerovnice vznikne interval nebo intervaly. I u nerovnic lze použít substituce. Pokud je základ logaritmu menší než 1, pak se nerovnost musí otočit! Dalším důležitým krokem je si, tak jako u rovnic, určit definiční obor.

$$\log_{\frac{1}{2}}(2-x) < -3$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2-x) < \log_{\frac{1}{2}} 8$$
$$2-x < 8$$
$$x < 6$$
$$x \in (-\infty; 6)$$

Z -3 se stane $\log_{\frac{1}{2}} 8$ díky pravidlu pro počítání s logaritmy.

6.5 Použití logaritmu u exponenciálních rovnic a nerovnic

U rovnic i nerovnic se může sát, že žádnou jednoduchou úpravou nelze dostat stejné základy. Zde však lze zlogaritmovat obě strany logaritmem o stejném základu. Řešení je stejné jak pro rovnice tak pro nerovnice, liší se pouze výsledkem. U nerovnic to bude interval a u rovnic nějaké konkrétní číslo.

$$2^x > 5$$

$$x \cdot \log_2 2 > \log_2 5$$
$$x > \log_2 5$$

7. Goniometrické funkce

Jakub Švagr

1.5.2025

7 Goniometrické funkce

Jsou skupinou funkcí, které dávají do vztahu úhel v pravoúhlém trojúhelníku a poměr dvou jeho stran.

7.1 Jednotková kružnice

Jednotková kružnice je kružnice se středem v počátku souřadnic a o poloměru 1

Hodnoty goniometrických funkcí nalezneme v tabulkách. Jsou tradičně udávány ve stupních °, nebo radiánech π.

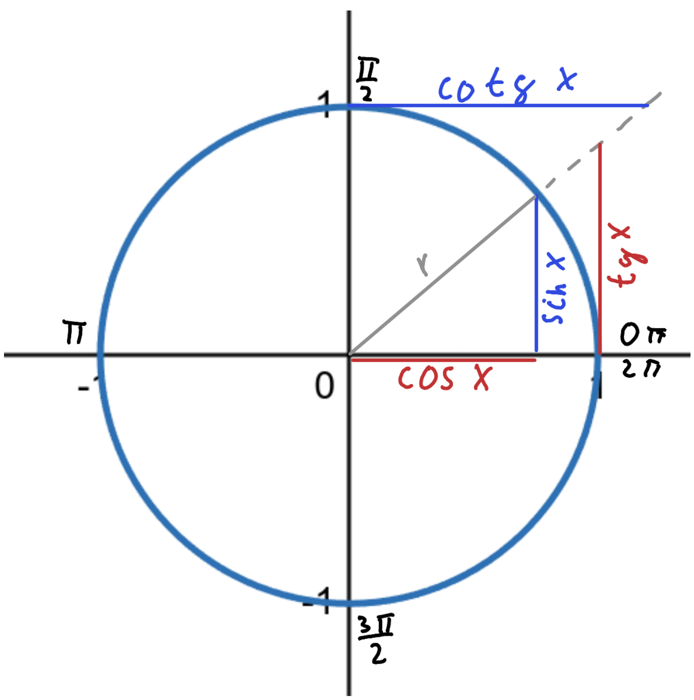


Figure 19: Jednotková Kružnice

Funkce jsou periodické, což znamená, že se jejich hodnoty pravidelně opakují (jako na kruhu)

7.2 Grafy funkcí

7.2.1 Sinus a Kosinus

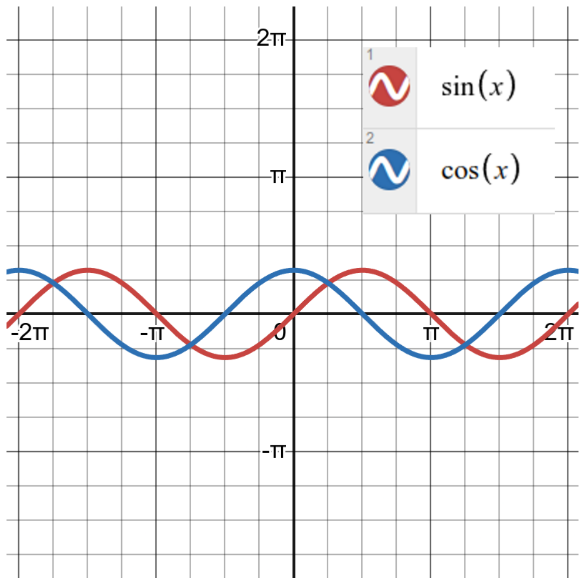


Figure 20: $f(x) : y = sin(x), g(x) : y = cos(x)$

sin(x) začíná v počátku, tedy v bodě [0;0] (na grafu znázorněn červeně). Je to lichá funkce (souměrná podle počátku, jako jediná goniometrická funkce) periodická v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$. Je definována v pravoúhlém trojúhelníku, jako poměr délky protilehlé odvěsny úhlu alfa ku délce přepony:

$$\sin\alpha = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny úhlu alfa}}{\text{délka přepony}}$$

cos(x) začíná v bodě [0;1] (na grafu znázorněn modře), je to sudá funkce (souměrná

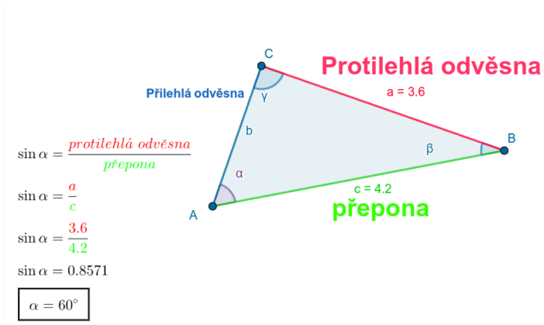


Figure 21: $\sin\alpha$, znázorněn na pravoúhlém trojúhelníku

podle osy x) a periodická v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$. Je definována v pravoúhlém trojúhelníku, jako poměr délky přilehlé odvěsny úhlu alfa ku délce přepony:

$$\cos \alpha = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny úhlu alfa}}{\text{délka přepony}}$$

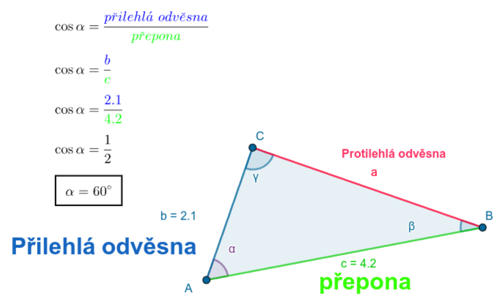


Figure 22: $\cos \alpha$, znázorněn na pravoúhlém trojúhelníku

7.2.2 Tangens a Kotangens

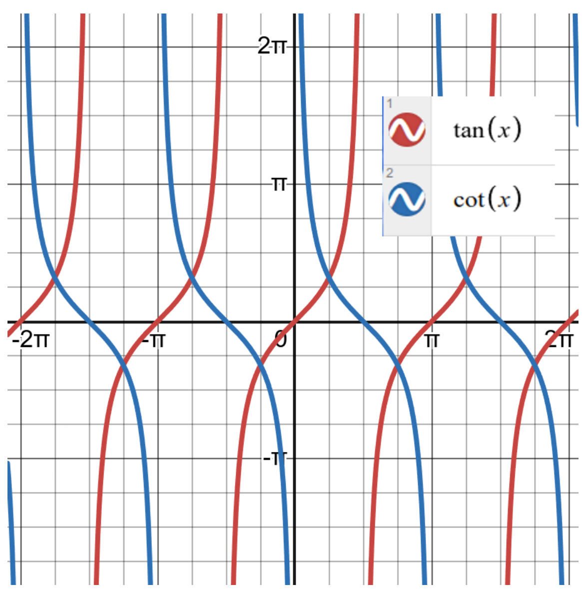


Figure 23: $f(x) : y = tg(x), g(x) : y = cotg(x)$

tg(x), na grafu červeně, je funkce periodická v intervalu π (o polovinu méně než sin(x) a cos(x)), lichá, definovaná v intervalu $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ je definována jako poměr:

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

V pravoúhlém trojúhelníku odpovídá poměru délky protilehlé odvěsny ku přilehlé odvěsně:

$$tg(x) = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$$

Tangens není definován pro ty úhly, kdy je $\cos(x) = 0$, takže **neexistuje** $tg\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, neboli $90° + k \times 180°$ kde $k \in \mathbb{Z}$.

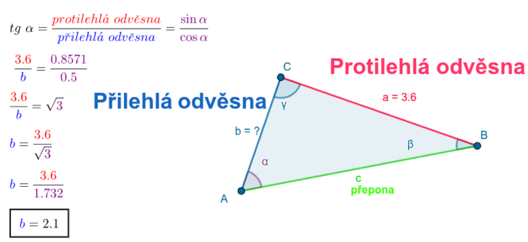


Figure 24: $tg\ \alpha$, znázorněn na pravoúhlém trojúhelníku

cotg(x), na grafu modře, je taktéž periodická funkce s periodou π, a je definována jako poměr:

$$cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

V pravoúhlém trojúhelníku představuje poměr délky přilehlé odvěsny ku protilehlé odvěsně:

$$cotg(x) = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}}$$

Kotangens není definován pro ty úhly, kdy je $\sin(x) = 0$, takže **neexistuje** $cotg(k\pi)$, neboli $0° + k \times 180°$ kde $k \in \mathbb{Z}$

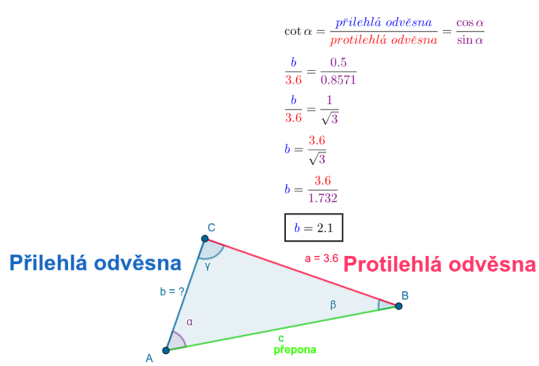


Figure 25: $cotg\ \alpha$, znázorněn na pravoúhlém trojúhelníku

ÚHLY		**GON. FUNKCE**			
$\alpha°$	α (rad)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Table 1: Hodnoty goniometrických funkcí

Kvadrant	sin(x)	cos(x)	tg(x)	cotg(x)
I.	$+$	$+$	$+$	$+$
II.	$+$	$-$	$-$	$-$
III.	$-$	$-$	$+$	$+$
IV.	$-$	$+$	$-$	$-$

Table 2: Tabulka znamének pro kvadranty

7.3 Tabulky

7.4 Jak na to?

7.4.1 Sinus a Kosinus

Je dobré pro orientaci použít jednotkovou kružnici, jde to udělat i bez ní, ale pokud se opravdu chcete vyhnout chybě, tak se hodí. Jako jednoduchý příklad jsem použil hodnotu $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

1. Hledáme všechny hodnoty x, pro které platí $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

2. Teď se podíváme do tabulky, z toho zjistíme že pro $\frac{1}{2}$ je $\sin\frac{\pi}{6}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

   To znamená, že jeden z úhlů, který tuto rovnici splňuje, je $\frac{\pi}{6}$.

3. ALE funkce sinus je kladná i ve druhém kvadrantu, existuje ještě druhý úhel s touto hodnotou, jak je vidět na jednotkové kružnici:

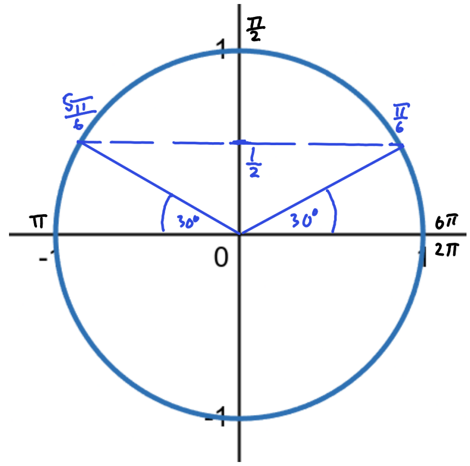


Figure 26: $\sin \frac{1}{2}$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

4. Funkce sinus je periodická s periodou 2π, takže obecné řešení je:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

V případě že počítáme funkci $cos(x)$, postup je stejný, jediný rozdíl je, že místo osy y použijeme osu x, a to takto:

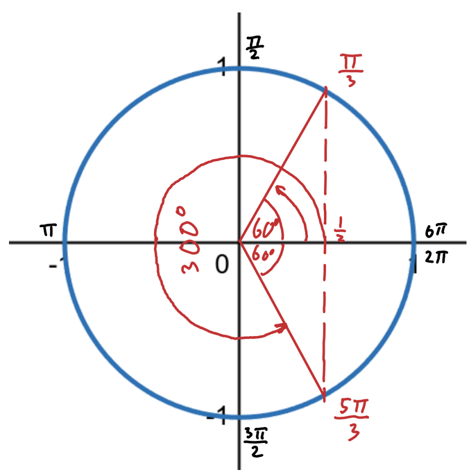


Figure 27: $\cos \frac{1}{2}$

7.4.2 Tangens a Kotangens

Tito dva se zdají být výrazně děsivější, ale jakmile to pochopíte, je to vcelku jednoduché, tady je příklad s tabulkovou hodnotou:

1. Hledáme hodnoty x, pro které platí $\tan(x) = \sqrt{3}$.

2. Když se podíváme to tabulky, zjistíme že:

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Takže jeden z úhlů, který tuto rovnici splňuje, je:

$$x = \frac{\pi}{3}$$

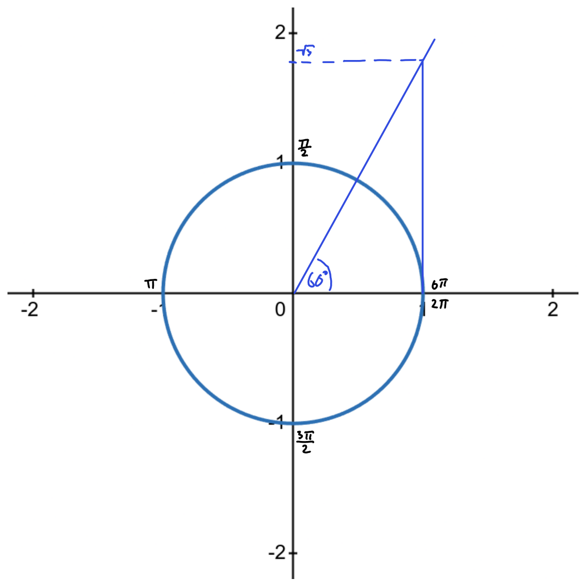


Figure 28: $tg\sqrt{3}$

3. Funkce tangens má periodu π, protože se opakuje každých 180° (ne každých 2π jako sinus a kosinus), také je na rozdíl od nich kladný v protilehlých kvadratech, tedy v prvním a třetím kvadrantu. O to je naše práce jednoduší, jak jsem znázornil na jednotkové kružnici, stačí pouze z naši polopřímku protáhnout na druhou stranu.

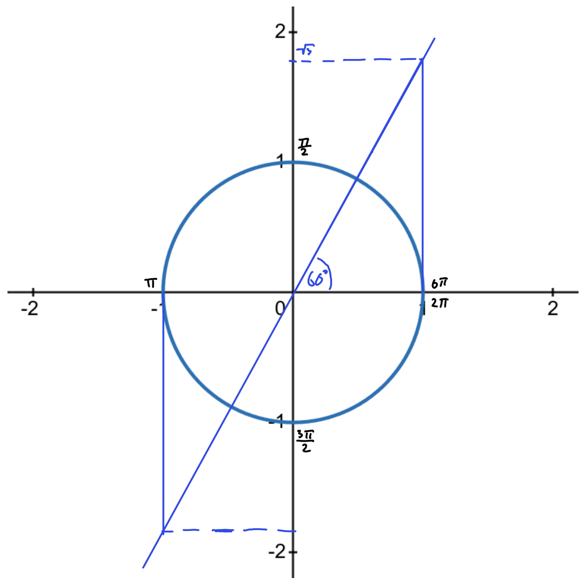


Figure 29: $tg\sqrt{3}$

4. Taky je dobré si všimnout, že $\sqrt{3} > 1$, toto je možné pouze proto, že $tg(x)$ a $cotg(x)$ mohou dosahovat $-\infty$ až $+\infty$, vyjma tedy těch hodnot, kdy by hodnota ve jmenovateli byla rovna 0.

5. Obecné řešení rovnice tedy je:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

V případě funkce $cotg(x)$ je to podobné jako u kosinu.

8 Goniometrické rovnice

Roman Šnajder

May 2025

8 Goniometrické rovnice

8.1 Základní goniometrické rovnice

Rovnice v nichž se vyskytují goniometrické výrazy s neznámou $x \in R$ nazýváme goniometrické rovnice. Vzhledem k tomu, že jsou goniometrické funkce periodické, mohou mít goniometrické rovnice nekonečně mnoho kořenů. Stačí za k v $k\pi$ dosadit jakékoliv celé číslo.

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Rovnice, ve kterých funkce nabývají hodnot mimo interval $\langle -1; 1 \rangle$ nemají řešení, jelikož se tato čísla nenacházejí na jednotkové kružnici. Například $\sin(x) = 3$. Tato rovnice $3\sin(x) = 2$ však řešení má, jelikož jde obě strany vydělit číslem 3 a dostaneme $\sin(x) = \frac{2}{3}$.

8.2 Použití substituce u goniometrických rovnic

$$2\sin(x)^2 + \sin(x) - 1 = 0$$

$$\sin(x) = t$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$(t + 1) \cdot (2t - 1) = 0$$

$$t_1 = -1; t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = -1; \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Substituci lze využít i takto:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = t$$

$$\sin(t) = 1$$

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Goniometrické rovnice je možné řešit i za pomoci následujících vzorečků (zde jsou vypsány pouze některé vzorce):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$tgx = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$cotgx = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$tgx - cotgx = 1$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

8.3 Kvadranty

Každou goniometrickou funkci, která je definována v $\langle 0; 2\pi \rangle$ lze znázornit na jednotkové kružnici, kde mezi každými dvěma osami je právě jeden kvadrant. V celku je tedy kružnice tvořena čtyřmi kvadranty a pomocí jedné hodnoty $(\frac{\pi}{6})$ v obloukové míře je možné dopočítat hodnoty ve zbylých kvadrantech $(\frac{5\pi}{6}); (\frac{7\pi}{6}); (\frac{11\pi}{6})$ opět v obloukových mírách. Zde jsou pravidla pro výpočet daných hodnot

$$x_1 = x_0$$

$$x_2 = \pi - x_0$$

$$x_2 = \pi + x_0$$

$$x_2 = 2\pi - x_0$$

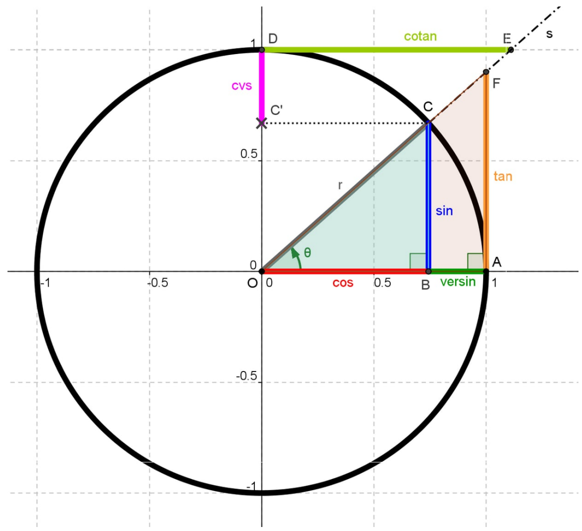


Figure 30: Jednotková kružnice

8.3.1 Jednotková kružnice

Vzdálenost od středu se vypočítá jako tangens úhlu nebo poměr protilehlé strany (sin osy y) ku přilehlé straně (cos osy x). V pravoúhlém trojúhelníku může tangens úhlu dosahovat libovolných kladných hodnot. Pohyb na grafu od $(0;\infty)$ se na jednotkové kružnici znázorní pohybem PROTI SMĚRU hodinových ručiček.

- Funkce sinus v prvních dvou kvadrantech je kladná, v druhých dvou je záporná
- Funkce cosinus v prvním a čtvrtém kvadrantu roste, v druhém a třetím klesá
- Funkce tangens je v první kvadrantu kladná a v druhém záporná
- Funkce kotangens je v prvním kvadrantu kladná a v druhém záporná

(1. kvadrant vpravo nahoře $(0; 90°)$; 2. kvadrant vlevo nahoře $(90°; 180°)$; 3. kvadrant vlevo dole $(180°; 270°)$; 4. kvadrant vpravo dole $(270°; 360°)$)

8.4 Řešení rovnice ve stupních a převod mezi radiány a stupni

Goniometrické rovnice mohu být řešeny buď v radiánech nebo ve stupních – záleží na zadání. Zde jsou vzorečky pro převody mezi stupni a radiány.

- Ze stupňů na radiány: α rad$=\frac{\pi}{180}\cdot\alpha$ stupně
  například 30° na radiány
  $$30°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{6}$$
- Z radiánů na stupně: α stupně$=\frac{180}{\pi}\cdot\alpha$ rad
  například $\frac{\pi}{2}$ na stupně
  $$\frac{\pi}{2}\cdot 180°=90°$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
$\mathrm{cotg}\, x$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

Figure 31: Tabulka hodnot goniometrických funkcí

Rovnice zadaná ve stupních $\sin(x) = \frac{\pi}{2}$, $x \in \langle 0°; 360° \rangle$

$$\sin(x) = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 30°$$

$$x_1 = 30$$

$$x_2 = 180° - 30° \Rightarrow 150°$$

8.5 Řešení rovnice v daném intervalu

Pokud je goniometrická rovnice zadána s konkrétním intervalem, musí být řešena právě v tomto intervalu. Po výpočtu všech možných řešení je nutné tato řešení porovnat s daným intervalem a zapsat pouze ta, která do něj skutečně náleží. Rovnice $cosx = -\frac{\pi}{2}$, $x \in \langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$

$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{4\pi}{3}$$

9. Komplexní čísla

Michaela Dudašková (Jakub Sláma)

1.5.2025

9 Komplexní čísla

9.1 Základní definice

- uspořádané dvojice reálných čísel, značí se $z; z = [a; b]$
- skládají se z reálné části a a imaginární části b
- $\mathbb{C}$.... množina všech komplexních čísel

9.2 Znázornění komplexních čísel

- komplexní čísla znázorňujeme v Gaussově rovině
- místo osy x a y máme reálnou osu Re a imaginární osu Im

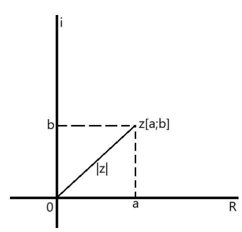


Figure 32: Komplexní číslo na grafu s reálnou a imaginární osou

9.2.1 Typy (podmnožiny) komplexních čísel

- pokud komplexní číslo z nemá imaginární část $(b = 0)$, je to **reálné číslo**
- $a = 0$ a $b = 0$, je to **nulové číslo**
- pokud $a \neq 0$ a $b \neq 0$, je to **komplexní číslo**
- pokud nemá reálnou část $(a = 0)$, je to **ryze imaginární číslo**

9.3 Rovnost komplexních čísel

$$z_1 = z_2, a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

9.4 Algebraický tvar komplexního čísla

$$z = a + bi$$

9.5 Imaginární jednotka

- je to číslo $[0, 1]$ a značí se i
- platí: $i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1$

9.6 Součet komplexních čísel

$$z_1 + z_2 = [a_1 + a_2; b_1 + b_2]$$
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

9.7 Součin komplexních čísel

$$z_1 \cdot z_2 = [a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2]$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

9.7.1 Příklad

a)$i^{13} = i^{4 \cdot 3+1} = i$ b)$i^{96} = i^{4 \cdot 24} = 1$

- mocninu vydělím 4 a podle zbytku určím výsledek

9.8 Číslo komplexně sdružené a číslo opačné

- komplexně sdružené číslo se značí $\overline{z}$

  číslo $z = [a, b] = a + bi$ *a číslo* $\overline{z} = [a, -b] = a - bi$ *jsou komplexně sdružená*

- součet i součin komplexně sdružených čísel jsou čísla reálná
- číslo $-z = -a - bi$ je číslo opačné k číslu $z = a + bi$

9.9 Rozdíl komplexních čísel

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 + b_1i) + (-a_2 - b_2i)$$

9.10 Podíl komplexních čísel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

9.11 Umocňování komplexních čísel

- druhá a třetí mocnina pomocí vzorečků

$$(a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$
$$(a+bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$$

9.12 Absolutní hodnota komplexního čísla

- vzdálenost komplexního čísla od počátku (bodu $[0,0]$) v Gaussově rovině

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

9.13 Argument (amplituda) komplexního čísla

- úhel φ, který svírá kladná poloosa x a absolutní hodnota z

9.13.1 Určení argumentu přes sinus a kosinus

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$$
$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

- rovnice se budou shodovat pro jeden úhel φ
- kvadrant úhlu φ odpovídá kvadrantu komplexního čísla v Gaussově rovině

9.13.2 Určení argumentu přes tangens

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{pro} \quad b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{pro} \quad b < 0 \end{cases}$$

9.14 Goniometrický tvar komplexního čísla

- komplexní číslo vyjádřeno pomocí argumentu a absolutní hodnoty

$$z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

9.14.1 Převod z goniometrického tvaru na algebraický tvar

- vypočítáme funkční hodnoty sinu a kosinu a roznásobíme s absolutní hodnotou:

$$\text{např.:}\;\; 2(\cos(\tfrac{2}{3}\pi) + i \cdot \sin(\tfrac{2}{3}\pi)) = 2(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 + i\sqrt{3}$$

9.15 Moivreova věta

- pro umocňování - má jeden výsledek

$$z^n = |z|^n(cos(n \cdot \varphi) + i \cdot sin(n \cdot \varphi))$$

- pro odmocňování - má tolik výsledků, kolikátá je odmocnina (n)

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

- za k dosazujeme čísla $0, 1, 2, \ldots, n-1$
- získáme výsledky $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$

9.16 Řešení binomických rovnic

- pomocí goniometrického tvaru komplexních čísel můžeme řešit i binomické rovnice (rovnice vyšších řádů)(tvar $ax^n + b = 0$)

9.16.1 Řešení rovnice $x^4 + 16 = 0$

Rovnici

$$x^4 + 16 = 0$$

převedeme na tvar

$$x^4 = -16.$$

Zápis pravé strany v goniometrickém tvaru:

$$-16 = 16\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$

Použijeme vzorec pro n-té odmocniny komplexního čísla:

$$x_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Vypočteme:

$$\sqrt[4]{16} = 2.$$

Jednotlivá řešení:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\
x_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\
x_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \\
x_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Řešení:

$$\boxed{x = \pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}$$

10. Kombinatorika

Marek Fuchs (Oliver Hadraba)

26.4.2025

10 Kombinatorika

10.1 Faktoriál

Faktoriál čísla n je roven součinu všech přirozených čísel N $(1; 2; 3; ..)$, která jsou menší nebo rovna číslu n.
Faktoriál zapisujeme pomocí vykřičníku $\rightarrow n!$
Například: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

10.2 Variace

Variace k-té třídy z n prvků je každá uspořádaná k-tice vytvořená z celkového počtu n prvků, přičemž při výběru záleží na pořadí jednotlivých prvků.

- Bez opakování
$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- S opakováním
$$V_k(n) = n^k$$

Například: Vybíráme 4 studenty z 25 na zkoušení a záleží jim na tom, kolikátí budou vybráni, aby se mohli učit co nejdéle. V tomto případě záleží na pořadí a proto pro výpočet počtu možností použijeme variace.

10.3 Permutace

Kolika způsoby lze uspořádat všechny n prvky.
Permutace je zvláštní případ variace, kde $k = n$. To znamená, že ze zadaných prvků postupně vybereme všechny. Každá permutace tedy odpovídá nějakému pořadí zadaných prvků: každý prvek se v pořadí musí objevit, ale žádný tam nemůže být dvakrát. Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

$$P(n) = n!$$

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \; ...2 \cdot 1 = n!$$

Případ, kdy zkoušíme všechny studenty.

10.4 Kombinace

Kombinace je neuspořádaná k-tice vytvořená z celkového počtu n prvků, přičemž nezáleží na pořadí vybraných prvků.

- Bez opakování

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

  Využíváme například, pokud vybíráme z 6 kluků 3, kteří budou současně zametat (nezáleží na pořadí v kterém budou vybráni)

- S opakováním

$$C_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

10.5 Kombinační číslo

Kombinační číslo, označované jako $\binom{n}{k}$ (čteme: n nad k), udává počet způsobů, jak lze z množiny n prvků vybrat právě k prvků bez ohledu na pořadí.

Matematicky je definováno jako:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{pro } 0 \leq k \leq n$$

kde $n!$ značí *faktoriál* čísla n, tedy součin všech přirozených čísel od 1 do n.

Pro $k > n$ platí:

$$\binom{n}{k} = 0$$

10.6 Binomická věta

Binomická věta říká, že:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Znamená to, že výraz $(a+b)^n$ se rozepíše jako součet členů, ve kterých:

- mocniny a a b se vždy doplňují do n,
- koeficienty jsou **binomické koeficienty**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

- index k určuje, kolikrát se v daném členu vyskytuje b, a tedy i kolikrát a.

10.6.1 Příklad pro $n = 3$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$$

$$= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Při řešení různých algebraických úloh potřebujeme občas umocnit dvojčlen $a + b$ na přirozené číslo n, tj. vypočítat $(a + b)^n$.
Když chceme určit k-tý člen binomického rozvoje použijeme tento vzoreček:

$$(a+b)^n = \binom{n}{k-1} \cdot a^{n-(k-1)} \cdot b^{k-1}$$

Příklad:
Určete čtvrtý člen výrazu $(x + 2)^{12}$

$$(x+2)^{12} = \binom{12}{3} \cdot x^9 \cdot 2^3 = 220 \cdot x^9 \cdot 8 = 1760x^9$$

10.7 Pascalův trojúhelník

Je tvořen čísly a platí, že číslo, které se nachází pod jinými dvěma čísly, se rovná jejich součtu.

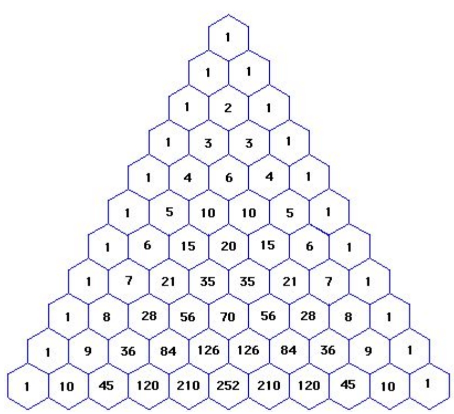


Figure 33: Pascalův trojúhelník s přirozenými čísly

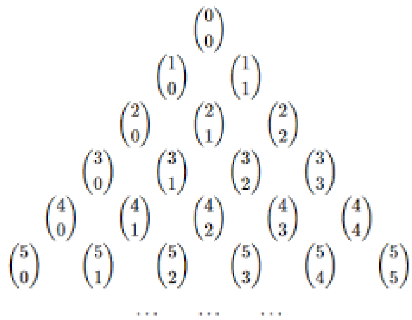


Figure 34: Pascalův trojúhelník s kombinačními čísly

10.8 Výpočet rovnice

Upravme výraz:

$$\frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!}$$

Společný jmenovatel je $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$:

$$= \frac{(1)(n+1) - 3}{(n+1)!} = \frac{n-2}{(n+1)!}$$

10.9 Speciální případy kombinačních čísel

- $k = 0$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

- $k = n$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

- $k = 1$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n!$$

10.10 Vlastnosti kombinačních čísel

- Pro všechna celá nezáporná čísla n, k platí $\rightarrow k \leq n$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

- Důkaz:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

- Tato vlastnost popisuje jednoduchý fakt: Chceme li vybrat k-prvkovou podmnožinu n-prvkové množiny, zbyde vždy $n-k$ nevybraných prvků. Rozhodneme li se tedy vybrat $n-k$ prvků, které do hledaný podmnožiny nezařadíme, počet možností, jak je vybrat bude stejný jako při přímém výběru k.

11. Posloupnosti

Kateřina Polášková (Jakub Sláma)

30.4.2025

11 Posloupnosti

Posloupnost je funkce, jejíž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ (všech přirozených čísel). Posloupnost se nazývá NEKONEČNÁ, pokud je jejím definičním oborem celá množina $\mathbb{N}$. Posloupnost se nazývá KONEČNÁ, pokud je jejím definičním oborem množina prvních n přirozených čísel $1, 2, 3, ..., n$.

Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají ČLENY POSLOUPNOSTI; funkční hodnota posloupnosti v bodě $n \in N$ se nazývá nTÝ ČLEN POSLOUPNOSTI a značí se a_n.

Posloupnost (nekonečnou) zapisujeme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, nebo $(a_1, a_2, a_3, ...a_n)$
Konečnou posloupnost zapisujeme $(a_n)_{n=1}^{k}$ nebo $(a_1, a_2, a_3, ...a_k)$
Posloupnost je nejčastěji zadána jedním z těchto dvou způsobů:

- Vzorcem, vyjadřujícím n-tý člen posloupnosti pomocí n
- Rekurentně udáním prvního členu posloupnosti a rekurentního vzorce, který vyjadřuje $(n + 1)$-ní člen posloupnosti pomocí členů předchozích.

11.1 Definice aritmetické posloupnosti

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST je taková posloupnost, v níž je rozdíl dvou sousedních členů konstantní. Tento rozdíl $a_{n+1} - a_n$se nazývá DIFERENCE a označuje se d, kde $(d \in \mathbb{R})$.

Rekurentní vzorec aritmetické posloupnosti je: $a_{n+1} = a_n + d$, kde $n \in \mathbb{N}$

Obecný vzorec aritmetické posloupnosti je: $a_n = a_1 + (n - 1)d$
Pro každé dva členy a_r, a_s aritmetické posloupnosti platí: $a_r - a_s = (r - s)d$
Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí:$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

11.2 Definice geometrické posloupnosti

GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST je taková posloupnost, v níž podíl následujícího a předchozího členu je konstantní. Tento podíl se označuje q a nazývá se KVOCIENT ($q \in \mathbb{R}$).
Rekurentní vzorec geometrické posloupnosti je $a_{n+1} = a_n.q$ nebo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, n \in \mathbb{N}$
Obecný vzorec geometrické posloupnosti je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Pro každé dva členy geometrické posloupnosti a_r, a_s platí: $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$
Pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti platí:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

pro $q \neq 1$

$$s_n = n \cdot a_1$$

pro $q = 1$

11.3 Důkaz matematickou indukcí

Dokažte: $\forall (n \in \mathbb{N}): \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot n$

Prvním krokem je ověření platnosti pro číslo 1. Dosadíme tedy toto číslo do rovnosti. Levá strana bude 1, pravá strana bude $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1)$ což je opět 1. Pro číslo 1 tedy věta platí.
Přichází na řadu indukční krok. Předpokládejme, že tato věta platí pro nějaké přirozené číslo k, tedy že pro toto k platí:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2} \cdot (k + 1) \cdot k$$

Nyní musíme dokázat, že za tohoto předpokladu platí věta i pro $(k + 1)$, tedy že platí:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{1}{2} \cdot (k + 2)(k + 1)$$

Levá strana je $1 + 2 + \ldots k + (k + 1)$. My však z našeho předpokladu víme, že $1 + 2 + \ldots k = \ \cdot (k + 1) \cdot k$, a tak můžeme psát:[1]

$$1 + 2 + \ldots k + (k + 1) = \frac{1}{2} \cdot (k + 1) \cdot k + (k + 1)$$

Pokud budeme výraz dále upravovat (vytkneme závorku $(k + 1)$), získáme:

$$\frac{1}{2} \cdot (k + 1) \cdot k + (k + 1) = (k + 1)(\frac{1}{2} \cdot k + 1) = \frac{1}{2} \cdot (k + 2)(k + 1)$$

Dostali jsme se od levé strany dokazované rovnosti k pravé, dokázali jsme, že platí:

$$1 + 2 + \ldots k + (k + 1) = \frac{1}{2} \cdot (k + 2)(k + 1).$$

Provedli jsme oba kroky důkazu a věta je tak dokázána

[1] Pro ty co jsou zmatení: jedná se o původní větu, s $k + 1$ přičteno na obou stranách, dále upravujem pravou stranu rovnice.

12. Limita funkce a derivace funkce

Marek Fuchs

26.4.2025

12 Limita funkce a derivace funkce

12.1 Co je to limita

Limita popisuje chování nějaké funkce v okolí určitého bodu, definuje spojitost fce.

12.2 Určení limity funkce v bodě

Jestliže chceme hledat limitu nějaké funkce f v jistém bodě a, je třeba jediné: V definičním oboru f musí existovat nějaká x, která se blíží libovolně blízko k a, takže má smysl říct "pro x jdoucí k a"

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

12.3 Typy limit

- Vlastní limita - Existuje jako nějaké reálné číslo, čili rovná se nějakému konečnému číslu.
- Nevlastní limita - Směřuje do nekonečna nebo mínus nekonečna, čili nemá konečnou hodnotu.
- Limita ve vlatním bodě - V bodě a říká, k čemu se hodnota fce. blíží, když se x blíží k a aniž by nutně musela být v tomto bodě definovaná.
- Limita v nevlastním bodě - Situace, kdy se proměnná x neblíží ke konečnému číslu, ale k nekonečnu nebo mínus nekonečnu.

12.4 Derivace funkce

Derivace funkce je změna (růst či pokles) její hodnoty v poměru ke změně jejího argumentu, pro velmi malé změny argumentu. Z definice dle limitního počtu plyne vztah

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

definujeme ji, jako: Derivace funkce v bodě je směrnicí její tečny v daném bodě.

12.5 Geometrický význam derivace

Směrnice tečny v daném bodě x
(Rozepsané) Hodnota derivace funkce v daném bodě x_0 mi dává informaci o prudkosti růstu nebo klesání funkce v tomto bodě. Pokud bych v tomto bodě spustil tečnu, tak hodnota derivace se rovná tangens úhlu α, které svírá tečna s kladným směrem osy x

$$\tan\alpha = \frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}.$$

12.6 Směrnice

Směrnice je tangens úhlu, který svírá přímka/tečna s osou x
-Tečna neexistuje pokud úhel tg není definovaný (například 90° =>přímka je totožná s osou y)

12.7 L´hospitalovo pravidlo

Umožňuje za určitých předpokladů vypočítat limitu ve vlastním či nevlastním bodě podílu dvou reálných funkcí reálné proměnné v případě, že výpočet limity vede na neučitý výraz. Říká, že limita podílu dvou fcí. které splňují jisté předpoklady, je rovna limitě podílu dervací těchto fcí.
-Používáme pokud zlomek vychází

$$\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}.$$

Praktické využití L´hospitala, kdy nemůžeme dosadit za $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

12.8 Derivace základních funkcí

- Derivace konstanty: $(c)' = 0$
- Derivace mocniny: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- Derivace sinus: $(\sin x)' = \cos x$
- Derivace kosinus: $(\cos x)' = -\sin x$
- Derivace tangens: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- Derivace kotangens: $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- Derivace exponenciální funkce: $(e^x)' = e^x$
- Derivace mocninné exponenciální funkce: $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
- Derivace přirozeného logaritmu: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- Derivace obecného logaritmu: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$

12.9 Pravidla pro derivace

- Derivace součtu: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- Derivace rozdílu: $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
- Derivace součinu: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Derivace podílu: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- Derivace složené funkce (řetězové pravidlo): $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

13. Primitivní funkce, určitý a neurčitý integrál

Marek Kalenda

3.5.2025

13 Primitivní funkce, určitý a neurčitý integrál

13.1 Primitivní funkce

Primitivní funkce $F(x)$ spojité reálné funkce $f(x)$ obecně v intervalu (a, b) jest funkcí, pro kterou na celém intervalu (a, b) platí

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

13.2 Neurčitý integrál

13.2.1 Definice

Neurčitý integrál spojité reálné funkce $f(x)$ jest množina všech jejich primitivních funkcí $F(x)$ lišící se konstantou C, kde $C \in \mathbb{R}$. Neurčitý integrál funkce $f(x)$ pak zapisujeme jako

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kde funkci $f(x)$ nazýváme integrandem. Ze základní věty integrálního počtu vyplývá vztah mezi operacemi derivování $\left(\frac{d}{dx}\right)$ a integrování $(\int)$, pro každou reálnou funkci $f(x)$ spojitou na intervalu (a, b), ve tvaru

$$\int \frac{df(x)}{dx}dx = \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),$$

jedná se ve zkratce o navzájem inverzní operace.

13.2.2 Neurčité integrály elementárních funkcí

V následující tabulce 3 uvedeme některé neurčité integrály některých vybraných elementárních funkcí.

Funkce $f(x)$	**Neurčitý integrál** $\int f(x)\,dx$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\| + C$
$\cot x$	$\ln\|\sin x\| + C$
$\sec x$	$\ln\|\sec x + \tan x\| + C$
$\csc x$	$\ln\|\csc x - \cot x\| + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2+a^2}\right\| + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2-a^2}\right\| + C$

Table 3: Neurčité integrály elementárních funkcí

13.2.3 Základní vztahy

Uvažujme dvě spojité funkce $f(x), g(x)$ na společném intervalu (a, b) ve tvaru $f(x)g(x)$. Pro neurčitý integrál součtu, respektive rozdílu platí

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Potom pro neurčitý integrál takového součinu platí

$$\int f(x)g(x)dx.$$

Nyní takto vzniklý tvar řešíme metodou *per partes* tzn. po částech. Tato metoda přímo vyplývá z pravidla derivace součinu funkcí $u(x)v(x)$, pro které viz. 12. kapitola platí

$$\frac{du(x)v(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv(x)}{dx}.$$

Tento tvar lze integrováním upravit na

$$u(x)v(x) = \int \frac{du(x)}{dx}v(x)dx + \int u(x)\frac{dv(x)}{dx}dx,$$

nyní vyjádříme jeden libovolný člen s integrálem a upravíme

$$\int v(x)du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)dv(x),$$

dále položíme

$$\int f(x)g(x)dx = \int v(x)du(x)$$

a vyjádříme upravené funkce $f(x), g(x)$ jako

$$du(x) = g(x)dx, v(x) = f(x),$$

potom pro zbylé členy platí

$$u(x) = \int g(x)dx, dv(x) = \frac{df(x)}{dx}dx,$$

přičemž přidání konstanty C nás nezajímá a následně lze psát finální vztah pro integraci součinu funkcí $f(x)g(x)$ jako

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x)dx - \int \left(\int g(x)dx \frac{df(x)}{dx}\right) dx.$$

Mnohem rozšířenější je však pro funkce $u(x), v(x)$ výše uvedený tvar

$$\int v(x)du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)dv(x).$$

V případě stále ještě integrálního výsledku lze metodu jednoduše iterovat.

Příklad č.1:

$$\int \ln x dx.$$

1. Připravíme na metodu *per partes*

$$u(x) = \ln x, dv(x) = 1dx.$$

2. Určíme zbylé členy $du(x), v(x)$

$$du(x) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, v(x) = \int dv(x) = \int 1dx = x.$$

3. Dosadíme všechny proměnné do tvaru pro *per partes*

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{x}{x}dx = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + C.$$

Příklad č.2:

$$\int e^x \sin x dx.$$

1. Připravíme na metodu *per partes*

$$u(x) = \sin x, dv(x) = e^x dx.$$

2. Určíme zbylé členy $du(x), v(x)$

$$du(x) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, v(x) = \int dv(x) = \int e^x dx = e^x.$$

3. Dosadíme všechny proměnné do tvaru pro *per partes*

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx + C_1.$$

4. Člen $\int e^x \cos x dx$ rovněž řešíme analogicky metodou *per partes* a volíme $dv(x) = e^x$ nebo obecně stejnou funkci jako při počítání v první iteraci metody *per partes*

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx + C_2.$$

5. Dosadíme do původního vztahu

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx + C.$$

6. Konečně vyjádříme

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C.$$

Pro neurčitý integrál podílu funkcí $f(x)g(x)$ nepochybně taktéž existuje obecný vzorec vycházející z pravidel derivací podílu ale častější je převedení do tvaru

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int f(x)(g(x))^{-1} dx,$$

a nyní už je to zase klasické *per partes*. Další zásadní metodou počítání neurčitých integrálů reálných spojitých složených funkcí jest metoda substituce. Uvažujme funkci ve tvaru $\frac{g(x)}{dx} f(g(x))$ z funkcí $f(x), g(x)$ a interval (a, b), na kterém je spojitá. Potom pro neurčitý integrál takové funkce platí

$$\int \frac{dg(x)}{dx} f(g(x)) dx.$$

Nyní takto vzniklý tvar řešíme metodou substituce. Tato metoda přímo vychází z řetízkového pravidla derivování složených funkcí z 12. kapitoly

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx},$$

nyní vztah zintegrujeme

$$f(g(x)) = \int \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} dx,$$

pokládáme substituci v podobě vnitřní funkce $g(x)$ tzn. $u = g(x)$ a zderivujeme $du = \frac{dg(x)}{dx} dx$ a dosadíme do předchozího vztahu

$$f(u) = \int \frac{df(u)}{du} \frac{dg(x)}{dx} \frac{dx}{dg(x)} du,$$

po zjednodušení je patrná ekvivalence levé i pravé strany. V případě vícero složené funkce lze metodu substituce rovněž iterovat.

Příklad č.1:

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx.$$

1. Vhodně určíme substituci u a její 1. derivaci - ono obecně jde o to se daný příklad správně podívat
$$u = \ln x, \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}.$$
2. Vměstnáme do původního integrálu
$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int \frac{\cos u}{x} \frac{x}{1} du = \int \cos u du = \sin u + C.$$
3. Dosadíme za u
$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \sin \ln x + C.$$

13.3 Určitý integrál

Určitý integrál spojité reálné funkce $f(x)$ na intervalu (a, b) jest dle její primitivní funkce $F(x)$ definován jako

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \mid_a^b = F(b) - F(a),$$

kde funkci $f(x)$ nazýváme integrandem a reálné číselné hodnoty a, respektive b nazýváme dolní, respektive horní meze. Ve zkratce můžeme definovat určitý integrál funkce $f(x)$ jakožto numerickou hodnotu plochy pod grafem funkce $f(x)$ na intervalu (a, b).

Příklad č.1

$$\int_1^2 (x^2 + x + 1) dx$$

1. Řešíme nejdříve jako neurčitý integrál tzn. hledáme primitivní funkci
$$\int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$$

2. Nyní započítáme meze

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C \;\Big|_1^2 .$$

3. Vyčíslíme

$$\left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 + C\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 + C\right) = \frac{29}{6}.$$

4. Konstanta C v případě určitých integrálů nehraje žádnou roli.

14. Vztahy geometrických útvarů v rovině - shodnost

Jonáš Lavička

2.5.2025

14 Vztahy geometrických útvarů v rovině - shodnost

14.1 Základní pojmy pro geometrická zobrazení

- Geometrickým zobrazením Z v rovině nazýváme zobrazení dané roviny na sebe, kterým každému bodu X je přiřazen právě jeden X'. Bod X je vzor a bod X' jeho obraz.
  Píšeme: $Z : X \to X'$
- Samodružný bod X je bod pro který platí: $X = X'$
- Samodružný útvar U, je útvar pro který platí: $U = U'$
  Útvar U se zobrazuje sám do sebe, je tvořen samodružnými body a body, které se zobrazují do jiných bodů útvaru - útvar je symetrický.
- Identita (identické zobrazení) je zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný: $X = X'$

14.2 Shodné zobrazení

Shodné zobrazení je v geometrii takové zobrazení, které záchovává vzdálenost. Každým dvěma bodům X, Y přiřazuje body X', Y' (obrazy) tak, že platí:

$$|XY| = |X'Y'|$$

Jsou li všechny odpovídající úsečky(páry bodů) dvou geometrických útvarů stejně dlouhé, jsou tyto útvary shodné.

14.3 Druhy shodnosti

V rovině existují následující druhy shodnosti:

14.3.1 Posunutí (translace) $T(\vec{s})$

Všechny body roviny jsou posunuty stejným směrem o stejnou vzdálenost - směr a vzdálenost jsou dány **vektorem posunutí** $\vec{s}$.
Platí: $X' = X + \vec{s}$
V tomto zobrazení samodružný bod neexistuje.
Všechny přímky rovnoběžné s vektorem posunutí $\vec{s}$ jsou samodružné.

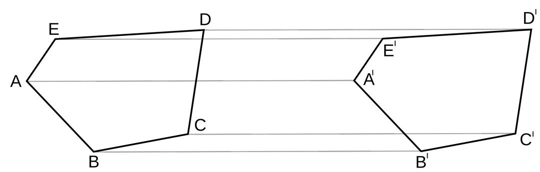


Figure 35: Posunutí pětiúhelníku

14.3.2 Otočení (rotace) $O(S, \phi)$

Všechny body roviny jsou otočeny kolem středu otočení S stejným směrem o úhel ϕ.

- Bodu S přiřazuje týž bod: $S' = S$
- Každému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|XS| = |X'S|$ a orientovaný úhel $\measuredangle XSX'$ má velikost ϕ.

Střed S je samodružný bod.
Pro $\phi = 180° + k \cdot 360°; k \in \mathbb{Z}$ (liché násobky 180°), se jedná o středovou souměrnost.
Pro $\phi = k \cdot 360°; k \in \mathbb{Z}$ (násobky 360°), se jedná o identitu.

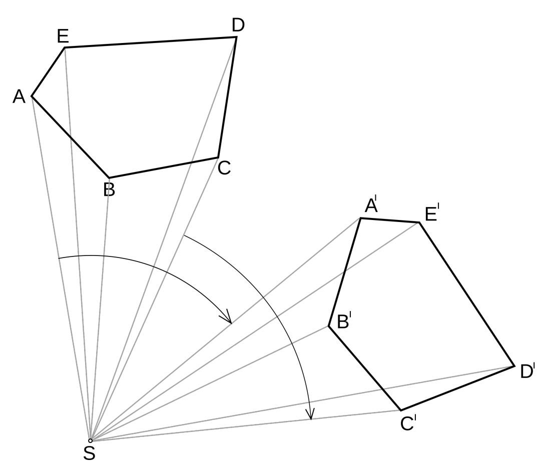


Figure 36: Otočení pětiúhelníku

14.3.3 Středová souměrnost $S(S)$

Středová souměrnost je zvláštní případ otočení - otočení kolem středu o 180°.

- Středu souměrnosti S přiřazuje týž bod: $S' = S$

- Bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X', který leží na polopřímce opačné k polopřímce $\mapsto SX$. Úsečka XX' je bodem S půlena.

Platí: $X' \in \mapsto XS \quad \cap \quad |XS| = |X'S| \quad \cap \quad X \neq X'$
Střed S je samodružný bod.

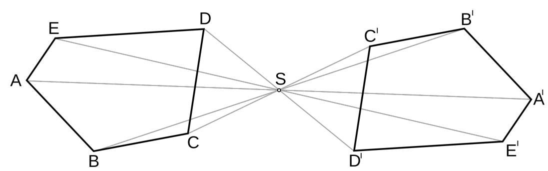


Figure 37: Zobrazení pětiúhelníku v středové souměrnosti

14.3.4 Osová souměrnost(zrcadlení) $O(o)$

Osová souměrnost je shodné zobrazení, které je dané přímkou o a zobrazovacím předpisem:

- Každému bodu $X \in o$ přiřazuje týž bod: $X' = X$
- Každému bodu $X \notin o$ přiřazuje bod X', který leží na kolmici vedené bodem X k ose o tak, že úsečka $\leftrightarrow XX'$ je osou o půlena.

Platí: $X' \in \mapsto XS \quad \cap \quad |Xo| = |X'o| \quad \cap \quad X \neq X'$
Všechny body osy o jsou samodružné body - osa o je samodružná přímka.
Všechny přímky kolmé na osu o jsou samodružné.

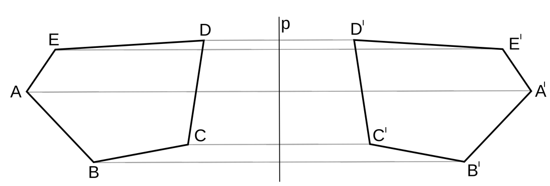


Figure 38: Zobrazení pětiúhelníku v osové souměrnosti

14.3.5 Totožnost (identita) $I()$

Zobrazení, které každý bod zobrazuje na sebe sama. Lze ji považovat za posunutí o úsečku nulové délky nebo za otočení o nulový úhel.
Každý bod je samodružný.

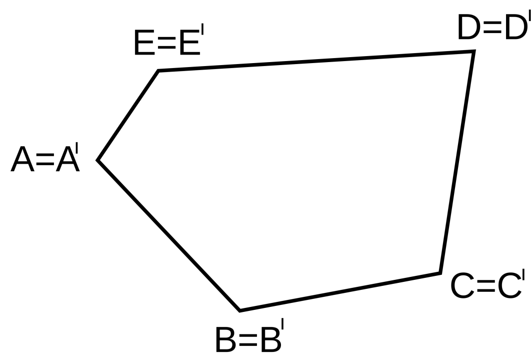


Figure 39: Geometrická identita

14.4 Skládání shodných zobrazení

Shodné zobrazení shodného zobrazení je jen dalsí shodné zobrazení.

- Složením dvou posunutí je opět posunutí.
- Složením dvou středových souměrností je posunutí.
- Složením dvou otočení se stejným středem je opět otočení se stejným středem.
- Složením dvou osových souměrností se stejnou osou je identita.
- Složením dvou osových souměrností s různými rovnoběžnými osami je posunutí.
- Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami je otočení kolem průsečíku os, úhel ϕ je dvojnásobek úhlu, který osy svírají.

14.5 Přímá a nepřímá shodnost

Vrcholy vzorového trojúhelníku jsou pojmenovány proti směru hodinových ručiček.
Po posunutí, otočení, středové souměrnosti si trojúhelník **zachová orientaci**. Trojúhleník je **přímo shodný**.
Naopak po osové souměrnosti se pořadí vrcholů otočí. Osová souměrnost **mění orientaci**. Trojúhleník je **nepřímo shodný**.
Shodnost zachovávající orientaci se nazývá přímá neboli přemístění. Shodnost měnící orientaci se nazývá nepřímá.

- Složením přímých shodností je přímá shodnost.
- Složením sudého počtu nepřímých shodností je přímá shodnost.
- Složením lichého počtu nepřímých shodností je nepřímá shodnost.

15. Kuželosečky - kružnice, elipsa

Aneta Foralová

30.4.2025

15 Kružnice, elipsa

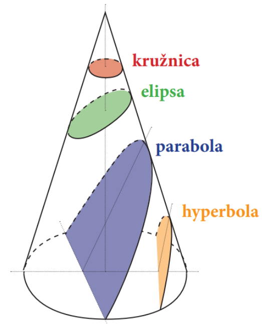


Figure 40: Kuželosečky

15.1 Definice

Pojem **KUŽELOSEČKY** vznikl jako název množin bodů v prostoru, které lze získat jako průniky roviny a kuželové plochy.

Nechť je dán v rovině E_2 bod S a číslo $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. **KRUŽNICE** je množina všech bodů v rovině, které leží ve stejné vzdálenosti, označované jako poloměr, od pevně daného bodu, zvaného střed.

Nechť jsou dány v rovině E_2 dva různé body F a G. **ELIPSA** je množina všech bodů v rovině, které mají stálý součet vzdáleností $(2a)$ od dvou pevně daných bodů, tzv. ohnisek.

Je-li střed elipsy bod $S[0;0]$ poté platí:
Číslo $e > 0$ se nazývá **excentricita elipsy** a platí: $e^2 = a^2 - b^2, a > b$
Body $A[a;0], B[-a;0]$ se nazývají **hlavní vrcholy elipsy**
$a > 0$ se nazývá **hlavní poloosa elipsy**
Body $C[0;b], D[0;-b]$ se nazývají **vedlejší vrcholy elipsy**

$b > 0$ se nazývá **vedlejší poloosa elipsy**

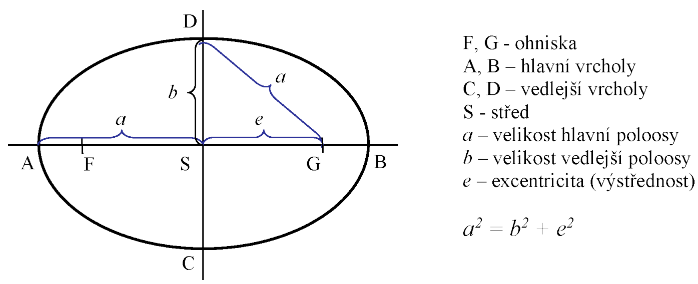


Figure 41: Elipsa

15.2 Středové a obecné rovnice

Obecnou rovnici kuželosečky získáme ze středové rovnice provedením operací ve středové rovnici a zavedením nových konstant
Středovou rovnici kuželosečky získáme z obecné rovnice doplněním na čtverec

15.2.1 Kružnice

Je-li S[0;0] středová rovnice kružnice je:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

A je-li S$[m; n]$ a $r > 0$, je středová rovnice kružnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Obecná rce kružnice je

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + q = 0,$$

kde $p = m^2 + n^2 - r^2$

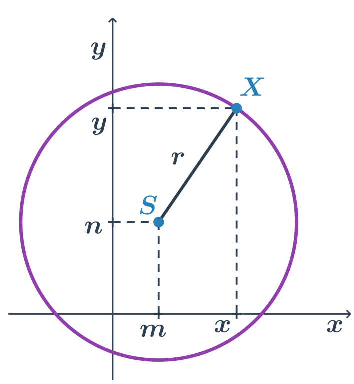


Figure 42: Kružnice

15.2.2 Elipsa

Jeli S[0;0] a elipsa je umístěna horizontálně tedy A[a;0] a B[$-a$;0] pak středová rovnice elipsy je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

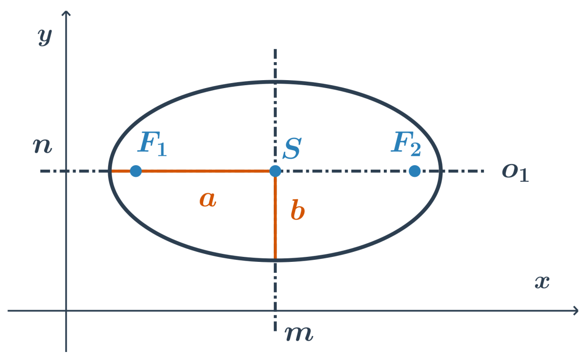


Figure 43: Elipsa s hlavní poloosou x

Jeli S[0;0] a elipsa je umístěna vertikálně tedy A[0;a] a D[b;0], $a > b$ pak středová rovnice elipsy je

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

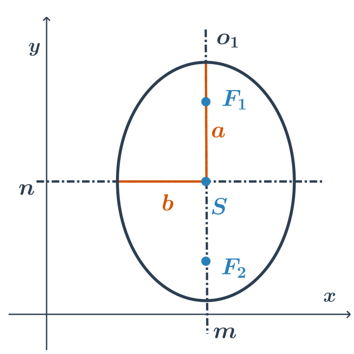


Figure 44: Elipsa s hlavní poloosou y

Je-li $S[m; n], a > 0$, $b > 0$, $a > b$ je středová rovnice elipsy:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

Obecná rce elipsy je: $px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$, kde $pq > 0$

15.3 Vzájemná poloha kuželosečky a bodu

Nechť je dána obecná rovnice kuželosečky a bod $A[x_A, y_A]$. Označíme si levou stranu obecné rovnice kuželosečky $f(x, y)$ pro každý bod kuželosečky a dosadíme souřadnice bodu $A[x_A, y_A]$ a pro jednotlivé kuželosečky platí:

- A je bodem kuželosečky právě tehdy když $f(x_A, y_a) = 0$
- A je vnějším bodem kuželosečky právě když $f(x_A, y_a) > 0$
- A je vnitřním bodem kuželosečky právě když $f(x_A, y_a) < 0$

15.4 Vzájemná poloha kuželosečky a přímky

Vzájemnou polohu kuželosečky a přímky určujeme tak, že hledáme jejich společné body. Analyticky to znamená, že hledáme řešení soustavy lineární rce (přímka) a kvadratické rce (kuželosečka) o dvou neznámých. To nakonec vede k řešení kvadratické rce o jendé neznáme. Ta může mít:

- Pro $D > 0$ - dva společné body tj. sečna
- Pro $D = 0$ - jedno řešení tj. tečna
- Pro $D < 0$ - žádné řešení tj. vnější přímka

15.5 Vzájemná poloha kuželoseček

Vzájemná poloha kuželoseček se zkoumá opět tak, že se hledají společné body, analyticky to znamená, že se řeší soustava dvou kvadratických rovnic o dvou neznámých

16. Kuželosečky - parabola, hyperbola

Aneta Foralová

1.5.2025

16 Parabola, hyperbola

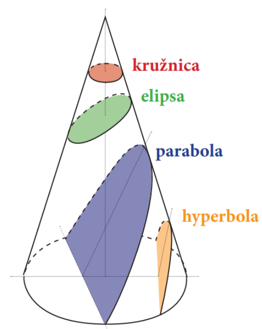


Figure 45: Kuželosečky

16.1 Definice

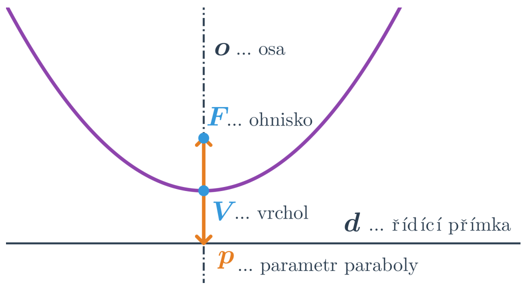
Pojem **KUŽELOSEČKY** vznikl jako název množin bodů v prostoru, které lze získat jako průniky roviny a kuželové plochy.

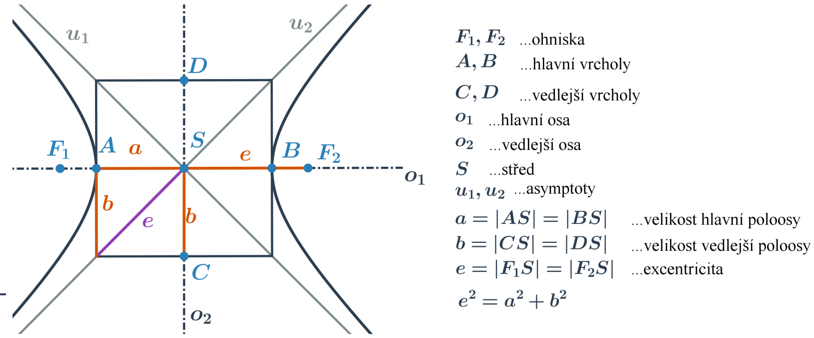
Nechť je dána v rovině E_2 přímka d a bod F, $F \notin d$.**PARABOLA** je množina všech bodů X roviny E_2, které mají stejnou vzdálenost od bodu F i od přímky d

Nechť jsou dány v rovině E_2 dva různé body F a G. **HYPERBOLA** je množina všech bodů X v rovině E_2, které mají od bodů F a G konstantní rozdíl vzdálenosti

Přímka d se nazývá **řídící přímka** paraboly, V je **vrchol** paraboly a číslo p nazýváme **parametr** a body F a G jsou jak u elipsy **ohniska** (U paraboly pouze 1)

Číslo e se nazývá **excentricita** hyperboly a platí $e^2 = a^2+b^2$, **Asymptoty** hyperboly jsou přímky, ke kterým se ramena hyperboly blíží, ale nikdy se jich nedotknou, určují její směr a mají tvar: $a_1 : y = \frac{b/a}{a/b}x, a_2 : y = -\frac{b/a}{a/b}x$





16.2 Středová, vrcholová a obecné rovnice

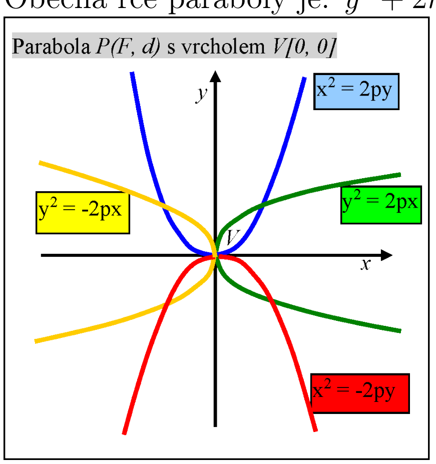
Obecnou rovnici kuželosečky získáme ze středové rovnice provedením operací ve středové rovnici a zavedením nových konstant
Středovou rovnici kuželosečky získáme z obecné rovnice doplněním na čtverec

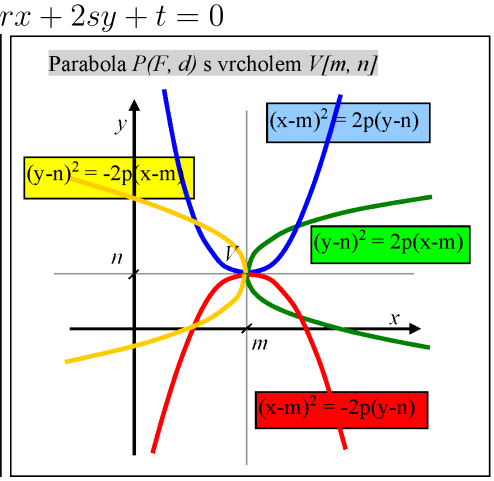
16.2.1 Parabola

Obecná rce paraboly je: $y^2 + 2rx + 2sy + t = 0$

Je-li V[0;0]$2p > 0$, $d = -\frac{p}{2}$ a $F[\frac{p}{2}; 0]$ vrcholová rovnice paraboly je: $y^2 = 2px$
Je-li V[0;0]$2p > 0$, $d = \frac{p}{2}$ a $F[-\frac{p}{2}; 0]$ vrcholová rovnice paraboly je: $y^2 = -2px$
Je-li V[0;0]$2p > 0$, $d = -\frac{p}{2}$ a $F[0; \frac{p}{2}]$ vrcholová rovnice paraboly je: $x^2 = 2py$
Je-li V[0;0]$2p > 0$, $d = -\frac{p}{2}$ a $F[0; -\frac{p}{2}]$ vrcholová rovnice paraboly je: $x^2 = -2py$

Je-li V$[m, n]$, polopč. VF a kladná poloosa x souhlasně orientované, a je omezené zleva je vrcholová rce. paraboly $(y - n)^2 = 2p(x - m)$
Je-li V$[m, n]$, polopč. VF a kladná poloosa x nesouhlasně orientované, a je omezená zprava je vrcholová rce. paraboly $(y - n)^2 = -2p(x - m)$
Je-li V$[m, n]$, polopč. VF a kladná poloosa y souhlasně orientované, a je omezená zespoda je vrcholová rce. paraboly $(x - m)^2 = 2p(y - n)$
Je-li V$[m, n]$, polopč. VF a kladná poloosa y souhlasně orientované, a je omezená shora je vrcholová rce. paraboly $(x - m)^2 = -2p(y - n)$
Obecná rce paraboly je: $y^2 + 2rx + 2sy + t = 0$

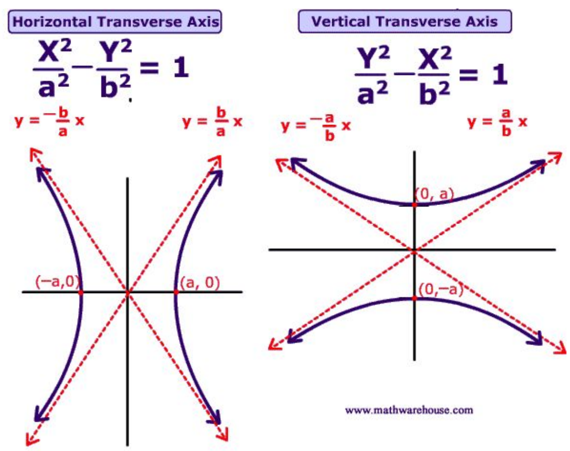




16.2.2 Hyperbola

Obecná rce hyperboly je: $px^2+qy^2+2rx+2sy+t=0$, kde $pq<0$ (jedno je záporné)

Jeli S[0;0] a hyperbola je umístěna horizontálně, je F[$-e$;0] a G[e;0],a je hlavní poloosa a b je vedlejší poloosa pak středová rovnice hyperboly je $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Jeli S[0;0] a hyperbola je umístěna vertikálně, je F[0, e] a G[0, $-e$] a je hlavní poloosa a b je vedlejší poloosa pak středová rovnice hyperboly je $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Je-li $S[m;n]$ a hlavní osa o rovnoběžná s osou x je středová rovnice hyperboly: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$, asymptoty mají tvar $a_1, 2:(y-n)=\pm\frac{b}{a}(x-m)$ Je-li $S[m;n]$ a hlavní osa o rovnoběžná s osou y je středová rovnice hyperboly: $-\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$, asymptoty mají tvar $a_1, 2:(y-n)=\pm\frac{a}{b}(x-m)$

16.3 Vzájemná poloha kuželosečky a bodu

Nechť je dána obecná rovnice kuželosečky a bod $A[x_A, y_A]$. Označíme si levou stranu obecné rovnice kuželosečky $f(x,y)$ pro každý bod kuželosečky a dosadíme souřadnice bodu $A[x_A, y_A]$ a pro jednotlivé kuželosečky platí:

- A je bodem kuželosečky právě tehdy když $f(x_A, y_a)=0$
- A je vnějším bodem kuželosečky právě když $f(x_A, y_a)>0$
- A je vnitřním bodem kuželosečky právě když $f(x_A, y_a)<0$

16.4 Vzájemná poloha kuželosečky a přímky

Vzájemnou polohu kuželosečky a přímky určujeme tak, že hledáme jejich společné body. Analyticky to znamená, že hledáme řešení soustavy lineární rce (přímka) a kvadratické rce (kuželosečka) o dvou neznámých. To nakonec vede k řešení kvadratické rce o jendé neznáme. Ta může mít:

- Pro $D>0$ - dva společné body tj. sečna

- Pro $D = 0$ - jedno řešení tj. tečna nebo i sečna (u paraboly, pokud přímka je rovnoběžná s osou)!
- Pro $D < 0$ - žádné řešení tj. vnější přímka

16.5 Vzájemná poloha kuželoseček

Vzájemná poloha kuželoseček se zkoumá opět tak, že se hledají společné body, analyticky to znamená, že se řeší soustava dvou kvadratických rovnic o dvou neznámých

17. Objemy a povrchy těles, řezy těles rovinou

Jan Peroutka

1.5.2025

17 Objemy a povrchy těles, řezy těles rovinou

17.1 Obecně k tělesům

Tělesa jsou trojrozměrné geometrické útvary, jejichž objem a povrch se dá vyjádřit pomocí matematických vzorců. Dále je lze zobrazit a analyzovat pomocí řezů rovinou.

17.2 Hranol

- Objem: $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy a v výška.
- Povrch: $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$, kde S_{pl} je obsah pláště (součet obsahů stěn mezi podstavami).

Řezy hranolem: mohou být rovnoběžné s podstavou (vypadá jako podstava), nebo kolmé na podstavu (obdélníky nebo pravoúhlé tvary).

17.3 Válec

- Objem: $V = \pi r^2 v$
- Povrch: $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$

Řezy válcem:

- Řez rovinou rovnoběžnou s osou: obdélník
- Řez kolmý na osu: kruh

17.4 Kužel

- Objem: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$
- Povrch: $S = \pi r^2 + \pi r s$, kde s je délka strany (tvořící).

Řezy kuželem:

- Kolmý řez osou: rovnoramenný trojúhelník
- Rovnoběžný s podstavou: kruh menšího poloměru

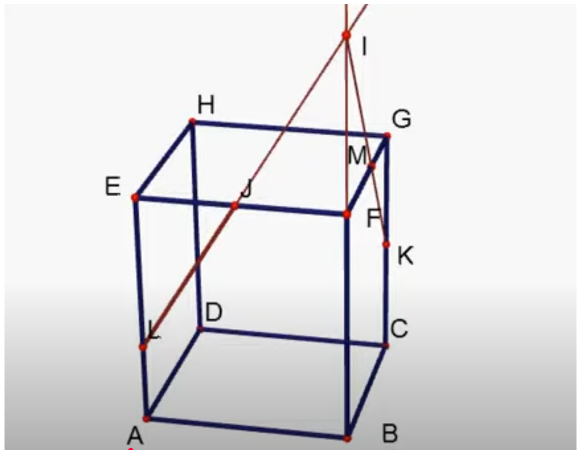


Figure 46: 3. pravidlo v akci

17.5 Koule

- Objem: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Povrch: $S = 4\pi r^2$

Řezy koulí: libovolný rovinný řez koulí je kruh. Největší řez (středový) je kruh s poloměrem r.

17.6 Poznámka k řezům

Řezy těles nám pomáhají pochopit jejich vnitřní strukturu. Často se využívají např. v technických výkresech, deskriptivní geometrii nebo fyzice.

Konstrukční pravidla pro rýsování řezu hranolem

1. **Dva body leží na stejné stěně** ⇒ *spojujeme je přímou úsečkou.* Pokud zadané body leží na téže stěně tělesa, můžeme je přímo spojit úsečkou. Tato úsečka pak tvoří část řezu.

2. **Tři body, z nichž dva leží na jedné stěně a třetí na protější** ⇒ *určíme směr a vedeme rovnoběžku.* Například body A a B leží na přední stěně, bod C na zadní: spojíme A a B, čímž určíme směr, a tímto směrem vedeme rovnoběžku přes bod C.

3. **Dva body leží ve dvou různých stěnách, třetí leží ve třetí stěně** ⇒ *určíme průsečík pomocí roviny.* Pokud body L, J a K leží ve dvou různých stěnách (např. přední a boční), určíme rovinu jejich spojením. Tato rovina protne třetí stěnu (např. pravou) – najdeme průsečík této roviny s hranou dané stěny (např. BF) a tím získáme další bod (např. M). Pokud třetí bod (např. K) už leží v této rovině, lze ho rovnou použít a spojit s ostatními.

4. **Řezová čára je vždy spojitá a tvořena úsečkami.** Musí ležet v jednotlivých stěnách tělesa a nesmí se „lámat“ uvnitř jedné stěny.

5. **Řez vždy začíná a končí na hraně tělesa.** Žádná část řezu nesmí ležet mimo stěnu nebo končit „ve vzduchu“.

6. **Rovina řezu nemůže částečně ležet v hraně – buď celá, nebo vůbec.** Pokud rovina řezu prochází hranou, musí celá ležet v rovině této stěny.

18. Tečny k funkcím a kuželosečkám

Jakub Švagr

2.5.2025

18 Tečna

Tečna je přímka, která má k dané funkci nebo kuželosečce v určitém bodě stejný směrový vektor (směrnici), jako ta funkce nebo kuželosečka. Tečna leží vně (venku) funkce, až na jeden společný bod, který sdílí s funkcí.

18.1 Normála

Normála je přímka kolmá na tečnu, která prochází bodem dotyku. Rovnice normály se získá z rovnice tečny změnou směrnice na její zápornou převrácenou hodnotu.

$$Ax + By + C = 0$$

- A, B, C jsou reálné konstanty
- pokud $B \neq 0$, můžeme tvar převést do směrnicového
- směrnice přímky je potom $k = -\frac{A}{B}$

18.2 Směrnice

Směrnice přímky je tangens úhlu, který daná přímka svírá s kladnou poloosou x.

$$y = kx + q$$

- k je směrnice přímky – určuje její sklon přímky,
- q je absolutní člen – určuje průsečík přímky s osou y

18.3 Jak na to?

18.3.1 Tečna k funkci

U funkcí hledáme tečnu pomocí derivace. Derivace funkce v bodě udává hodnotu směrnice tečny.

1. Máme funkci $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$, chceme najít rovnici tečny v bodě $T[-2; ?]$.

2. Nejdříve spočítáme funkční hodnotu tím, že za x dosadíme -2:

$$f(-2) = \frac{2 \cdot (-2) + 1}{(-2)^2} = \frac{-4+1}{4} = \frac{-3}{4}$$

   Bod dotyku je tedy $T[-2; -\frac{3}{4}]$.

3. Nyní funkci zderivujeme, tím získáme:

$$f'(x) = \frac{2x^2 - (2x+1)2x}{x^4} = \frac{2x(x-(2x+1))}{x^4} = \frac{2(-x-1)}{x^3} = \frac{-2(1+x)}{x^3}$$

4. Dosadíme $x = -2$ do zderivované funkce:

$$f'(x) = -\frac{2([-2]+1)}{(-2)^3} = -\frac{-2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

5. Tečna má tedy směrnici $-\frac{1}{4}$, bodem $T[-2; -\frac{3}{4}]$ vede tečna s rovnicí:

$$y = -\frac{1}{4}x + c$$

   dosadíme za souřadnice x a y

$$-\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(-2) + c$$

$$-\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + c$$

$$-\frac{5}{4} = c$$

   dosadíme vypočítané c do rovnice a máme rovnici tečny funkce v daném bodě

$$y = -\frac{x}{4} - \frac{5}{4}$$

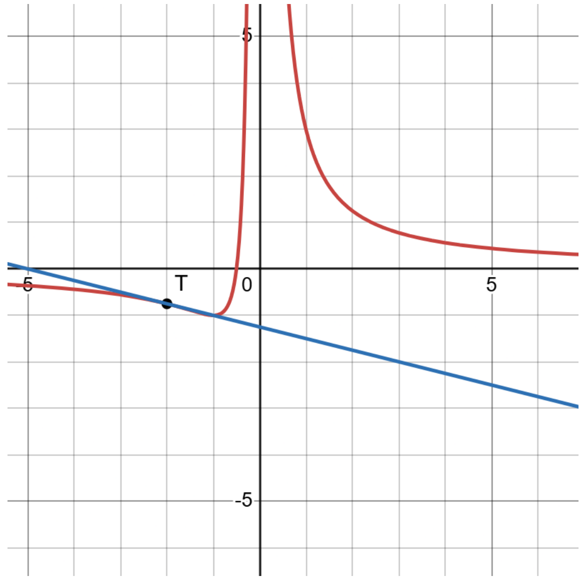


Figure 47: Tečna k funkci $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$

18.3.2 Tečna ke kuželosečce

U kuželoseček hledáme tečnu pomocí soustavy rovnic a diskriminantu. Pokud dosadíme rovnici přímky do rovnice kuželosečky, vznikne kvadratická rovnice. Tečna nastane tehdy, pokud má tato rovnice právě jedno řešení, tedy diskriminant je roven nule (neplatí pro parabolu, kdy sečna může mít jeden společný bod s kuželosečkou, pokud je rovnoběžná s osou).

1. Máme rovnici paraboly a přímku p, počítá se to jako soustava rovnic:

$$P : y^2 - 16x - 4y - 12 = 0$$

$$p : x - y + c = 0$$

2. Vyjádřeme si to, co pro nás bude lehčí, v tomto případě je to celkem jedno, ale zvolil jsem x.

$$x = y - c$$

3. Dosadíme x z přímky do rovnice kuželosečky:

$$y^2 - 16(y - c) - 4y - 12 = 0$$
$$y^2 - 16y + 16c - 4y - 12 = 0$$
$$y^2 - 20y + 16c - 12 = 0$$

4. Aby to byla tečna, kvadratická rovnice musí mít právě jedno řešení, tedy diskriminant D musí být roven nule:

$$D = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (16c - 12) = 400 - 64c + 48 = 448 - 64c$$

$$448 - 64c = 0$$
$$c = \frac{448}{64} = 7$$

5. Hodnota $c = 7$, naše tečna je tedy $x - y + 7 = 0$.

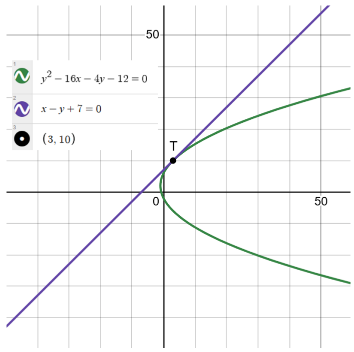


Figure 48: Tečna k parabole $P : y^2 - 16x - 4y - 12 = 0$

POZOR! U paraboly nestačí, aby diskriminant byl nulový, protože se může stát, že přímka s kuželosečkou má právě jeden společný bod, ale není tečnou, ale sečnou. Toto se stane pokud je naše přímka kolmá na řídící přímku paraboly.

18.3.3 Tečna u kuželoseček pokud máme bod doteku

Existuje i jiná cesta, jak získat tečnu ke kuželosečce, a to pomocí vzorečků, zde je tabulka:

Kuželosečka	**Středová rovnice kuželosečky**	**Rovnice tečny v bodě** $[x_0, y_0]$
Kružnice	$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$	$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$
Elipsa	$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} + \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1$
Parabola	$(x-m)^2 = 2p(y-n)$	$((y_0 - n)(y - n) = 2p[(x - m) + (x_0 - m)])$
Hyperbola	$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} - \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1$

Table 4: Přehled rovnic kuželoseček a jejich tečen

1. Zde stačí pouze do rovnice dát souřadnice bodu doteku. Vezměme si rovnici paraboly. Toto je, mimochodem, ta stejná parabola, přepsaná v do středového útvaru.
$$(y-2)^2 = 16(x+1)$$

2. Určeme si souřadnice středu a parametr, pro přehlednost:

$$(y-2)^2 = 16(x+1), m = -1,\ n = 2,\ 2p = 16 \implies p = 8$$

3. Vezměme si rovnici z tabulky:

$$(y_0 - n)(y - n) = p\big[(x - m) + (x_0 - m)\big]$$

4. Dosadíme do ní naše hodnoty:

$$(10 - 2)(y - 2) = 8\big[(x + 1) + (3 + 1)\big]$$

5. Pak to upravíme a dostaneme toto:

$$8(y - 2) = 8(x + 5)$$

$$y - 2 = x + 5$$

$$x - y + 7 = 0$$

19. Průběh funkce

Jakub Sláma

26.4.2025

19 Průběh funkce

Vyšetřování průběhu funkce má několik kroků, následuje jejich seznam a popis:

1. - Definiční obor
   - sudost nebo lichost
   - periodičnost
2. - jednostranné limity v bodech, kde není funkce definována
   - limity v nevlastních bodech
3. - průsečíky s osami x a y
   - znaménka funkčních hodnot
4. - první derivace, první derivace rovna 0, kde není definována
   - intervaly monotónnosti, stacionární body
5. - druhá derivace, druhá derivace rovna 0, kde není definována
   - intervaly konvexnosti (nad tečnou) a konkávnosti (pod tečnou), extrémy, inflexní body
6. - asymptoty bez směrnice $x = a$
   - asymptoty se směrnicí $y = ax + b$
7. - graf funkce
   - obor hodnot

Vyšetřujeme funkci:

$$f : y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

19.1 Definiční obor, sudost nebo lichost, periodičnost

19.1.1 Obor hodnot

Obor hodnot získáme zjištěním hodnot, které mohou být dosazeny za x. V našem případě $D(f) \in R$

19.1.2 Zjištění sudosti

Funkce $f(x)$ je sudá, pokud platí:

$$f(-x) = f(x)$$

(pokud se skládá z sudých funkcí a konstant)
Typickými sudími funkcemi je funkce kvadratická, nebo kubická.

19.1.3 Zjištění lichosti

Funkce $f(x)$ je lichá, pokud platí:

$$f(-x) = -f(x)$$

(pokud se skládá z lichých funkcí a konstant)

19.1.4 Periodičnost

Funkce je periodická za předpokladu, že její průběh periodicky opakuje. Zástupci jsou například: $\sin(x); \cos(x); \tan(x); \cot(x)$

19.1.5 Výpočet

v našem případě:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1}$$

$$-\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{-x}{(-x)^2 + 1}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

při porovnání funkce po úpravách zjistíme, že je funkce lichá

19.2 Limity vlastní a nevlastní

Je nutno spočítat limity ve všech krajních bodech těch intervalů, které tvoří definiční obor funkce f, pokud v nich tato funkce není přímo definovaná. Tj. jde většinou o jednostranné limity. Speciálně půjde často o limity v $+\infty; -\infty$

Např. v intervalech $(-\infty; 0)(0; \infty)$ rovnice $y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0$$

+ limity jdoucí do +, - nekonečna

19.2.1 Jednostranné limity v bodech, kde není funkce definována

Jednostranná limita je v infinitezimálním počtu libovolná z limit funkce $f(x)$ reálné proměnné x, u nichž se x přibližuje k zadanému bodu buď zleva nebo zprava

19.2.2 Limity v nevlastních bodech

Limity v nevlastních bodech se týkají situací, kdy proměnná x směřuje k nekonečnu nebo minus nekonečnu.

19.2.3 Výpočet

u této funkce $D(f) \in \mathbb{R}$, tudíž počítáme pouze limity jdoucí do $+$, - nekonečna

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

Tato funkce se blíží z obou stran k nule .

19.3 Průsečíky s osami x a y, znaménka funkčních hodnot

19.3.1 Průsečíky s osami x a y

Průsečíky s osami hodnot získáme dosazením 0 nejprve za x souřadnici, poté za y

19.3.2 Znaménka funkčních hodnot

Za pomocí nulových bodů si vytvoříme tabulku, ve které zjistíme v kterých intervalech je funkce kladná a v kterých je záporná

19.3.3 Výpočet

1. výpočet průsečíku s osou x ($y = 0$)

$$0 = \frac{x}{x^2+1}$$
$$0 = x$$

souřadnice průsečíku funkce s osou x je $X[0; 0]$
2. výpočet průsečíku s osou y ($x = 0$)

$$y = \frac{0}{0^2+1}$$
$$y = 0$$

souřadnice průsečíku funkce s osou y je $Y[0; 0]$

	$(-\infty; 0\rangle$	$(0; \infty)$
x	$-$	$+$
x^2+1	$+$	$+$
	$-$	$+$

Funkce v intervalu nabývá záporné hodnoty $(-\infty; 0\rangle$ a v intervalu $(0; \infty)$ nabývá kladné hodnoty.

19.4 První derivace, první derivace rovna 0, kde není definována, intervaly monotónnosti, stacionární body

19.4.1 První derivace, první derivace rovna 0, kde není definována

První derivací zjistíme v kterých intervalech je funkce rostoucí, nebo klesající

Pokud položíme první derivaci funkce rovnou nule body podezřelé z lokálních minim a maxim.

Derivace také nemusí být definovaná, pokud má v nějakém bodě:
1. Nevlastní limitu (např. asymptotu)
2. Ostrý zlom (např. absolutní hodnota $y = |x|$ v bodě $x = 0$)

19.4.2 Intervaly monotónnosti, stacionární body

Interval monotónnosti je část definičního oboru funkce, kde funkce buď stále roste, nebo stále klesá

Stacionární bod je bod na grafu funkce, kde je první derivace rovna nule: $f'(x) = 0$
Funkce v tomto bodě může mít extrém (maximum, minimum)

19.4.3 Výpočet

nejprve zderivujeme výraz

$$f : y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$y' = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Následně výraz dáme roven 0, tímto zjistíme stacionární body

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0$$

Jsou dva $[1; 0]; [-1; 0]$, následně zjistíme v kterých intervalech je funkce rostoucí a v kterých klesající:

	$(-\infty; -1\rangle$	$(-1; 1)$	$\langle 1; \infty)$
$-x^2 + 1$	$-$	$+$	$-$
$(x^2 + 1)^2$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$

Z tohoto vylívá, že funkce je klesající v intervalech $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$ klesající a v intervalu $(-1; 1)$ rostoucí.

Musíme dosadit body monotónnosti do původní rovnice, aby jsme získali souřadnice minim a maxim.

$$f : y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

pro $x = 1$

$$f : y = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

Souřadnice maxima je $[1; \frac{1}{2}]$ pro $x = -1$

$$f : y = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

Souřadnice minima je $[1; -\frac{1}{2}]$

Minimum je mezi klesajícím a rostoucím intervalem.
Maximum je mezi rostoucím a klesajícím.

19.5 Druhá derivace, druhá derivace rovna 0, kde není definována, intervaly konvexnosti (nad tečnou) a konkávnosti (pod tečnou), inflexní body

19.5.1 Druhá derivace, druhá derivace rovna 0, kde není definována,

Pomocí druhé derivace zjistíme tvar křivky (konkávnost, konvexnost) za pomocí intervalů (v kladných je funkce konvexní (nad tečnou $\cup$), v záporných je konkávní (pod tečnou $\cap$))
Druhou derivaci funkce pokládáme nule, aby jsme zjistily inflexní body (body, ve kterých se mění zakřivení grafu funkce)
druhá derivace není definována, pokud:

- Funkce není dostatečně hladká – není spojitá nebo není dostatečně "plynulá"
- První derivace není spojitá – například má ostrý zlom.
- Výpočty vedou k dělení nulou – druhá derivace obsahuje problémové místo (asymptoty).
- Funkce sama není definovaná – např. odmocnina ze záporného čísla, dělení nulou apod.

19.5.2 Intervaly konvexnosti (nad tečnou) a konkávnosti (pod tečnou), inflexní body

Konkávnost a konvexnost určují tvar křivky v intervalech.
V kladných intervalech je funkce konvexní (nad tečnou $\cup$),
V záporných intervalech je konkávní (pod tečnou $\cap$)

inflexní body- Inflexní body jsou body, kde se mění zakřivení grafu (nulové body druhé derivace)

19.5.3 Výpočet

Vypočítáme si druhou derivaci funkce:

$$y' = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x\cdot(x^2+1)^2 - (-x^2+1)\cdot 2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{[-2x(x^2+1)][(x^2+1)+2(-x^2+1)]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+1-2x^2+2)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Položíme druhou derivaci rovnou nule a zjistíme inflexní body:

$$\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0$$

Nulové body jsou: $-\sqrt{3}; 0, \sqrt{3}$, vytvoříme tabulku:

	$(-\infty; -\sqrt{3}\rangle$	$(-\sqrt{3}; 0)$	$\langle 0; \sqrt{3})$	$\langle\sqrt{3}; \infty)$
x^2-3	$+$	$-$	$-$	$+$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x^2+1)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$ konkávní $\overline{\cap}$	$+$ konvexní $\underline{\cup}$	$-$ konkávní $\overline{\cap}$	$+$ konvexní $\underline{\cup}$

Díky ní zjistíme tvar grafu funkce v intervalech.
vypočítáme si souřadnice inflexních bodů dosazením do původní rovnice:
$x = -\sqrt{3}$

$$f: y = \frac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2+1} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$x = 0$

$$f: y = \frac{0}{(0)^2+1} = 0$$

$x = -\sqrt{3}$

$$f : y = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Inflexní body mají souřadnice: $[-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}]; [0; 0]; [-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}]$

19.6 Asymptoty bez směrnice $x = a$, asymptoty se směrnicí $y = ax + b$

Asymptota je rovnice přímky ke které se funkce blíží, ale nikdy ji neprotne. Dělíme je na asymptoty se směrnicí a bez směrnice.

19.6.1 Asymptoty bez směrnice $x = a$

Asymptota bez směrnice vzniká v bodech, které jsou vyjmuty z $D(f)$, nebo $H(f)$. Jejich předpisem je $x = a$, nebo $y = a$, kde $a \in R$ lze vypočítat, jako

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

nebo

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Příklad:

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

funkce není definována v bodě $x = 2$ limyty:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$$

Takže $x = 2$ je svislá asymptota

19.6.2 Asymptoty se směrnicí $y = ax + b$

19.7 Graf funkce, obor hodnot, výsledek příkladu

Graf funkce sestrojíme vynesením minim, maxim, inflexních bodů a jejich následným propojením pomocí konkávních a konvexních křivek v příslušných intervalech.

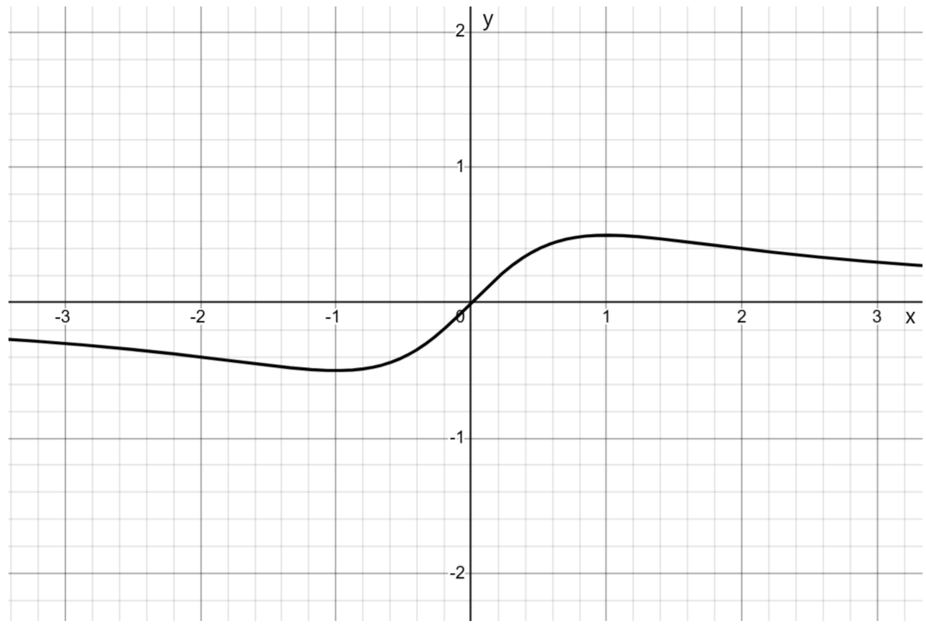


Figure 49: Graf vyšetření funkce

Z grafu můžeme vyčíst, že $H(f)$ se pohybuje mezi minimem a maximem, tudíž $H(f) \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$

20. Analytická geometrie lineárních útvarů, vektorová algebra

Michaela Dudašková (Jakub Sláma)

1.5.2025

20 Analytická geometrie lineárních útvarů, vektorová algebra

- Používáme kartézskou soustavu souřadnic
- Bod X má souřadnice $[a, b]$, souřadnice a leží na ose x a souřadnice b leží na ose y je to uspořádaná dvojice hodnot.

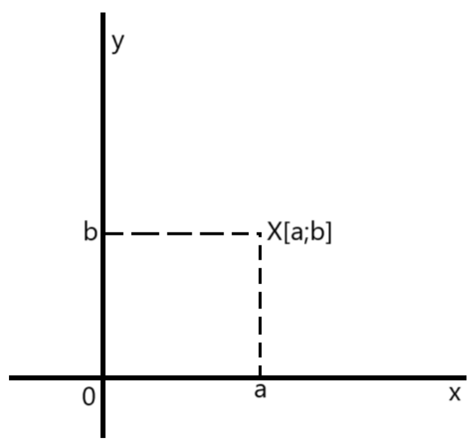


Figure 50: Graf kartézské soustavy souřadnic

20.1 Body a vektory

Pro body $A[x_a; y_a]; B[x_b; y_b]$:

20.1.1 Střed úsečky:

$$S[\frac{x_a + x_b}{2}; \frac{y_a + y_b}{2}]$$

20.1.2 Velikost úsečky:

$$|AB| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

20.1.3 Orientovaná úsečka:

- Kromě délky určuje i směr
- Určuje počátek a konec
- Opačně orientované úsečky mají opačné hodnoty

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_b - x_a; y_b - y_a)$$
$$\overrightarrow{BA} = A - B = (x_a - x_b; y_a - y_b)$$

20.1.4 Vektor

- Všechny orientované úsečky se stejným směrem a velikostí
- Označují se malým písmenem a šipkou
- Zobrazují posunutí (o kolik se bod posunul po ose x a y)
- Kolmé vektory mají hodnoty prohozené a u jedné odlišné znaménko

$$\overrightarrow{u} = (a; b)$$
$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$$
$$\overrightarrow{v} = (b; -a)$$

20.1.5 Operace s vektory

- Můžeme násobit vektor libovolným číslem, musíme ale násobit obě souřadnice
- Můžeme sčítat a odčítat vektory

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_u + x_v; y_u + y_v)$$
$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (x_u - x_v; y_u - y_v)$$

- Můžeme vektory násobit – skalární součin

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x_u \cdot x_v; y_u \cdot y_v)$$

20.1.6 Odchylka vektorů (odchylka dvou přímek)

- Odchylka dvou přímek je od 0°do 90°- u vektorů neplatí
- Odchylka u vektorů je od 0° do 180°

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

- Úhel 0° svírají dva rovnoběžné a stejně orientované vektory
- Úhel 180° svírají rovnoběžné a opačně orientované vektory
- Rovnoběžné vektory poznáme tak, že jeden je násobek toho druhého
- Úhel 90° svírají kolmé vektory — skalární součin musí být roven nule
- Tzv. Nulový vektor $\overrightarrow{0} = (0; 0)$

20.2 Přímky

20.2.1 Parametrická rovnice přímky

- Směrový vektor $\overrightarrow{u}$ určuje směr, je rovnoběžný s přímkou
- Parametr, který náleží do množiny reálných čísel: $t \in \mathbb{R}$
- Bod A, který leží na přímce

$$x \in p : x = x_a + t \cdot \overrightarrow{u_x}$$
$$y \in p : y = y_a + t \cdot \overrightarrow{u_y}; t \in \mathbb{R}$$

20.2.2 Obecná rovnice přímky

- Alespoň jedno z čísel a, b, c musí být nenulové, aby rovnice určovala přímku.
- Normálový vektor – kolmý na přímku, má souřadnice (a, b).
- Bod ležící na přímce má souřadnice $[x, y]$, které splňují rovnici.

$$ax + by + c = 0$$

- Čísla a, b, c by měla být nesoudělná (tj. jejich největší společný dělitel je 1).

20.2.3 Směrnicový tvar přímky

- Směrnice = tangens úhlu mezi přímkou a kladnou poloosou x.
- Přímka rovnoběžná s osou y nemá směrnicový tvar! $y = kx + q$ $k = tg\alpha$

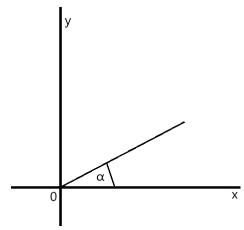


Figure 51: Graf směrnicové přímky

20.2.4 Polopřímky

- Stačí u parametrické rovnice přímky zadat interval, ze kterého budeme parametr vybírat. p :

$$x = a_x + t \cdot u_x$$
$$x = a_y + t \cdot u_y; t \in (z; r)$$

  Kdy z označuje začátek intervalu a r konec. Intervaly mohou být otevřené i zavřené.

Bod a přímka

- Pro zjištění, zda bod leží na přímce, dosadíme souřadnice bodu za x a y do rovnice přímky.
- Vzdálenost bodu od přímky lze spočítat pomocí speciálního vzorce.

$$p : ax + by + c = 0$$
$$M = [m; n]$$
$$V_{M,p} = \frac{|a \cdot m + b \cdot n + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

20.2.5 Vzájemná poloha dvou přímek v rovině

- Vzájemnou polohu zjistíme pomocí soustavy rovnic.
- Možnosti:
  - **Totožné** – jedna rovnice je násobkem druhé, výsledkem je nekonečně mnoho společných bodů.
  - **Rovnoběžné** – soustava nemá řešení, přímky se nikdy neprotínají.
  - **Různoběžné** – soustava má právě jedno řešení, přímky se protínají v jednom bodě.

21. Vztahy geometrických útvarů v rovině - podobnost a stejnolehlost

Jonáš Lavička

1.5.2025

21 Vztahy geometrických útvarů v rovině - podobnost a stejnolehlost

21.1 Definice

Dva geometrické útvary nazýváme podobné, jestliže poměry délek všech dvojic odpovídajících si úseček těchto útvarů se rovnají témuž číslu - koeficientu podobnosti.
Podobnost zachovává velikost úhlů a poměr délek.
$\rightarrow$ Podobné útvary mají stejný tvar(bez ohledu na velikost)

21.2 Koeficient podobnosti

Koeficient podobnosti je poměr vzdálenosti dvou bodů daného geometrického útvaru a vzdálenosti. odpovídajících dvou bodů jiného geometrického útvaru.
Rovinné útvary O_1 a O_2 jsou podobné, píšeme: $O_1 \sim O_2$
Vyjádření poměru podobnosti: $k = |X'Y'| : |XY| = \frac{|X'Y'|}{|XY|}$; $|X'Y'| = k \cdot |XY|$

21.3 Zvětšení - zmenšení

$k > 1$	$\Rightarrow$ podobný útvar je zvětšený
$0 < k < 1$	$\Rightarrow$ podobný útvar je zmenšený
$k = 1$	$\Rightarrow$ útvar je shodný

21.4 Podobnost trojúhelníka

Trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ jsou si podobné (píšeme $\triangle ABC \sim \triangle DEF$), pokud vyhoví jedné z následujících vět:

21.4.1 Věta sss

Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek všech tří dvojic odpovídajících stran, jsou si podobné.

$$k = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|AC|} \quad \equiv \quad k = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

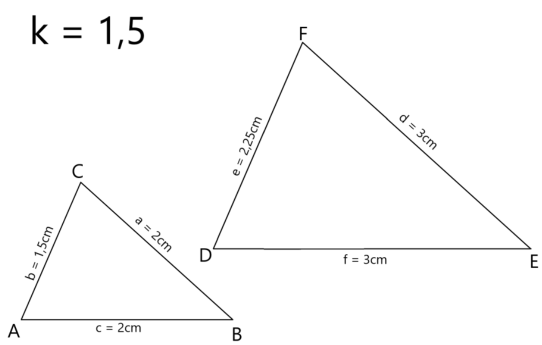


Figure 52: Podobné trojúhelníky dle věty sss

21.4.2 Věta sus

Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek dvou odpovídajících stran a shodují se v úhlu jimi sevřeném, jsou si podobné.

$$k = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|} \quad \cap \quad |\measuredangle BAC| = |\measuredangle EDF|$$

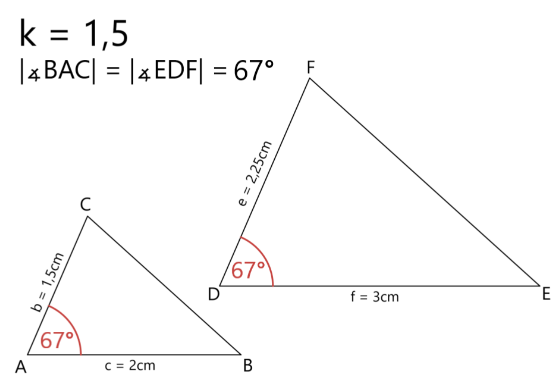


Figure 53: Podobné trojúhelníky dle věty sus

21.4.3 Věta uu

Každé dva trojúhelníky, které mají dva úhly stejné, jsou si podobné.

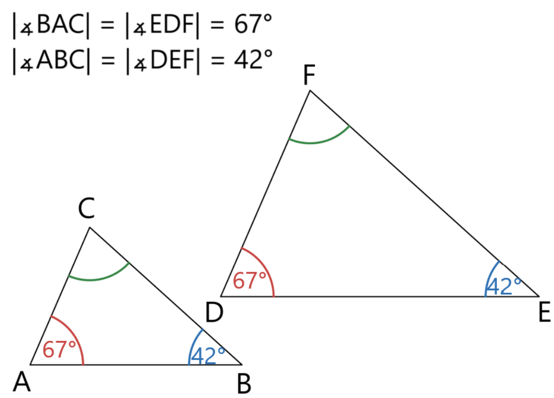


Figure 54: Podobné trojúhelníky dle věty uu

21.4.4 Věta Ssu

Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek dvou odpovídajících stran a shodují se v úhlu naproti větší straně, jsou si podobné. Tento úhel je ostrý.

$$k = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|} \quad \cap \quad |\measuredangle ABC| = |\measuredangle DEF|$$

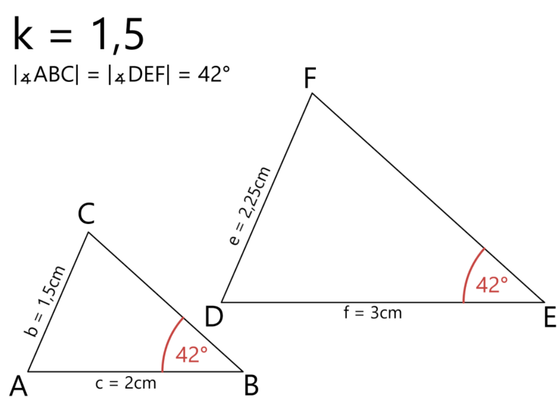


Figure 55: Podobné trojúhelníky dle věty Ssu

21.5 Věty vyplývající z podobnosti trojúhleníků

- Dva trojúhelníky jsou podobné, jsou-li jejich odpovídající si strany rovnoběžné, nebo navzájem kolmé.
- Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom ostrém úhlu nebo v poměru dvou odpovídajících si stran.
- Dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v úhlu při základně nebo v úhlu při vrcholu.
- Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou si podobné.

21.6 Stejnolehlost

Stejnolehlost neboli homotetie $H(S, \kappa)$ je podobné zobrazení určené bodem S a nenulovým reálným číslem - koeficientem stejnolehlosti κ, ve kterém se zobrazí bod $X \neq S$ na bod X' tak, že: $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$
Pro $\kappa > 0$ bod X' leží na polopřímce $\mapsto SX$.
Pro $\kappa < 0$ bod X' leží na polopřímce opačné k $\mapsto SX$.

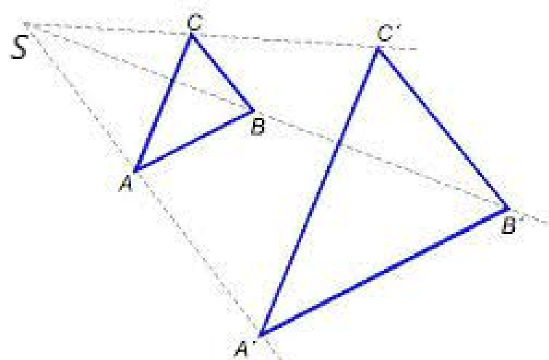


Figure 56: Stejnolehlost s $\kappa > 1$

Pro stejnolehlé zobrazení platí:

- Obrazem přímky je vždy přímka s ní rovnoběžná.
- Absolutní hodnota koeficientu stejnolehlosti je rovna koeficientu podobnosti. $|\kappa| = k$
- S Je samodružný bod. $S = S'$
- Pro koeficient stejnolehlosti roven -1 se jedná o středovou souměrnost, obraz je shodný, otočený o 180°.

21.7 Eukleidovy věty

Eukleidovy věty se označují matematické věty o délkách odvěsen a výšky pravoúhlého trojúhelníku. Jsou to:

- Eukleidova věta o výšce: $v_c^2 = c_a \cdot c_b$
- Eukleidova věta o odvěsně: $a^2 = c \cdot c_a$

Podrobněji popsáno v otázce 24.

22. Pravděpodobnost a statistika

Marek Fuchs

26.4.2025

22 Pravděpodobnost a statistika

22.1 Náhodný pokus

V počtu pravděpodobnosti se jím rozumí libovolná opakovaná činnost za danných podmínek, jejíž výsledky závisí do jisté míry na náhodě.
Např. hod mincí, kostek, míchání karet.

22.2 Množina všech možných výsledků náhodného pokusu m

Jedná se o množinu všech výsledků, které mohou nastat v uvažovaném náhodném pokusu.

22.3 Možné výsledky náhodného pokusu

- Jsou navzájem rozlišitelné a v případě konečné množiny m je lze vyjmenovat
- navzájem se vylučují tj. žádné dva nemůžou nastat současně
- 1 z nich vždy nastane tj. nemůže nastat výsledek, který by nepatřil do množiny
- jsou dány volbou množiny m

22.4 Pravděpodobnost

Určuje chování náhodných jevů

- Jaká je šance, že daný jev nastane
- Podíl všech příznivých jevů $m(A)$ ku všem možným jevům m

$$\frac{m(A)}{m}$$

- Nejzákladnější zápis pravděpodobnosti je zlomek
- Tento zlomek nemůže být větší jak jedna

22.5 Typy jevů

- $x = 1$ - jev jistý (100%)
- $x = 0$ - jev nemožný, zapisuje se prázdou množinou (0%)
- Doplňkový jev - Doplňkový jev k jevu A je jev A', který obsahuje všechny možné výsledky, které mohou nastat, ale nejsou zahrnuty v jevu A
- Sjednocení jevů A a B - zapisuje se $A \cup B$ a nastává tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů A nebo B
- Průnik jevů $A \cap B$ - Nastává tehdy, když nastanou oba jevy A a B

22.6 Pravděpodobnost jevu A

Poměr počtu $m(A)$ výsledků příznivých jevu A a počtu m všech možných výsledků náhodného jevu.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m}, P(A) \in \langle 0; 1 \rangle.$$

Předpokládáme, že všechny výsledky náhodného jevu jsou stejně možné - při hodu více mincemi musíme být schopni navzájem mince rozlišit, aby výsledky jevů byly stejně možné.

22.7 Pravděpodobnost průniku jevů

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

za předpokladu, že jevy jsou vzájemně nezávislé.

22.8 Pravděpodobnost sjednocení jevů

$$A \cap B = \emptyset;\ P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$
$$A \cap B \neq \emptyset;\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

22.9 Variace

Variace k-té třídy z n prvků je každá uspořádaná k-tice vytvořená z celkového počtu n prvků, přičemž při výběru záleží na pořadí jednotlivých prvků.

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

22.10 Kombinace

Kombinace je neuspořádaná k-tice vytvořená z celkového počtu n prvků, přičemž nezáleží na pořadí vybraných prvků

$$C_k(n) = \binom{n}{k}.$$

22.11 Permutace

Permutace je zvláštní případ variace, kde $k = n$. To znamená, že ze zadaných prvků postupně vybereme všechny. Každá permutace tedy odpovídá nějakému pořadí zadaných prvků: každý prvek se v pořadí musí objevit, ale žádný tam nemůže být dvakrát. Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

$$P(n) = n!,$$

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \;...2 \cdot 1 = n!.$$

22.12 Kombinační číslo

Z prvkové množiny n vybíráme z podprvkové množiny k

$$\binom{n}{k}.$$

22.13 Kombinatorické pravidlo o součinu

Máme a způsobů, jak něco provést, a b způsobů jak udělat něco jiného, a je možné dělat obojí zároveň, pak existuje $a \cdot b$ způsobů jak danou činnost provést.

22.14 Kombinatorické pravidlo o součtu

Máme a způsobů, jak něco provést, a b způsobů jak udělat něco jiného, a je nemožné dělat obojí zároveň, pak pak existuje $a + b$ způsobů jak danou činnost provést.

22.15 Statistika

Vědní obor, zabývající se metodami kvantitativního hodnocení vlastností hromadných jevů a procesů.

22.16 Statistický soubor

Jistý konečný soubor zkoumaných dat.
Počet prvků v statistickém souboru nazýváme *rozstah souboru.*

22.17 Statistická jednotka

Konkrétní prvek statistického souboru.

22.18 Statistický znak

Znak, který chceme měřit.

22.19 Četnost

Četnost může být buď relativní nebo absolutní a udává, kolik hodnot daného znaku se vyskytuje ve statistickém souboru — buď absolutně, nebo relativně vzhledem k celkovému počtu prvků souboru.
V množině se nemohou opakovat prvky.

22.20 Aritmetický průměr

Průměr všech hodnot ve statistickém souboru. Tedy podíl součtu všech hodnot ku počtu hodnot.

$$p_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_n}{n}$$

22.21 Modus a medián

- Modus - Hodnota, která má nejvyšší četnost, značí se $Mod(x)$.
- Medián - Prostřední hodnota, značíme $Med(x)$.

23. Nekonečná geometrická řada

Marek Fuchs (Oliver Hadraba)

26.4.2025

23 Nekonečná geometrická řada

23.1 Řada

Vznikne sečtením prvků posloupnosti.
Je dána posloupností a_n. A zapisuje se:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = ...$$

Členy posloupnosti se nazývají členy řady

23.2 Typy řad

- Konvergentní řada - řada je konvergentní jeli její součet realné číslo
- Divergentní řada - řada je divergentní pokud výsledek řady není realné číslo

23.3 Konečná řada

- Nastává když máme konečnou posloupnost

$$(a_n)_{n=1}^{k}$$

- Zapisuje se:

$$\sum_{n \to k}$$

23.4 Nekonečná řada

- Pokud je posloupnost nekonečna tedy

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

- Vzniká nekonečná geometrická řada tedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

23.5 Geometrická řada

23.5.1 Základní vlastnosti

V každém členu je předchozí člen násoben konstantou q, q nesmí být 0

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

23.5.2 Legenda

- kvocient q - každý člen kromě prvního je stálým násobkem předchozího členu

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- členy posloupnosti $a_1, a_2, ...$ - hodnoty spadající do $D(f)$ posloupnost

23.6 Nekonečná řada

- Pro nekonečnou geometrickou řadu

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + ...$$

- Součet existuje jen pokud $|q| < 1$ Pak platí :

$$S = \frac{a}{1-q}$$

- Pokud $|q| \geq 1$, řada diverguje - součet neexistuje.

23.7 Postup řešení

- Rozpoznej geometrickou řadu vevýrazu.
  (Ověř, že má tvar $S = a + aq + aq^2 + ...$).
- Zjisti hodnota a a q.
- Zkontroluj, že $|q| < 1$ (jinak nelze použít vzorec viz. 7.8).
- Výpočítej součet pomocí $S = \frac{a}{1-q}$
- Použij výsledek k řešení rovnice, nebo k řešení hodnoty výrazu.

23.8 Podmínky pro nahrazení řady vzorcem

- Řada je nekonečná
- Řada je geometrická
- $|q| < 1$

23.9 Příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} = 1 \qquad 3^x + 3^{2x} + 3^{3x}$$

$$a_1 = 3^x \rightarrow 3^x \cdot q = 3^{2x}$$

$$q = \frac{3^{2x}}{3^x} \rightarrow q = 3^x$$

$$3^x < 1 \rightarrow x \subset (-\infty; 0)$$

$$\frac{3^x}{1 - 3^x} = 1$$

$$3^x = 1 - 3^x$$

$$2 \cdot 3^x = 1$$

$$3^x = \frac{1}{2}$$

$$log_3 3^x = log_3 \frac{1}{2}$$

$$x = log_3 \frac{1}{2}$$

24. Trigonometrické řešení obecného trojúhelníka

Kateřina Polášková (Jakub Sláma)

30.4.2025

24 Trigonometrické řešení obecného trojúhelníka

Pro řešení obecného trojúhelníka (tj. ne pravoúhlého) se používají trigonometrické věty: sinová a kosinová věta.

24.1 Sinová věta

Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ a strany velikost a, b, c platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané

Sinovou větu používáme při řešení trojúhelníku, jsou-li dány
a) velikosti jedné strany a dvou úhlů přilehlých (věta usu)
b) velikosti dvou stran a úhlu proti jedné z nich (věta ssu)

24.2 Kosinová věta

Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ a strany velikost a, b, c platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Kosinovou větu používáme při řešení trojúhelníků, jsou-li dány
a) velikosti všech tří stran (věta sss)
b) velikosti dvou stran a úhlu jimi sevřeného (věta sus)

24.3 Euklidovy věty

24.3.1 Euklidova věta o výšce

V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b s přeponou c a výškou k přeponě v_c platí:
Obsah čtverce nad výškou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony.

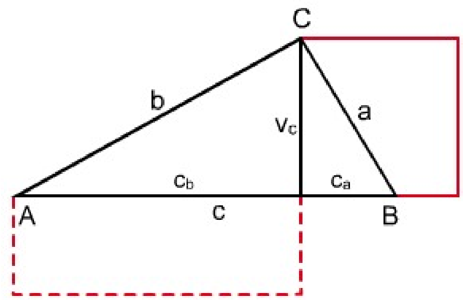


Figure 57: Euklidova věta o výšce

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

24.3.2 Euklidova věta o odvěsně

V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a s přeponou c platí: Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a přilehlého úseku.

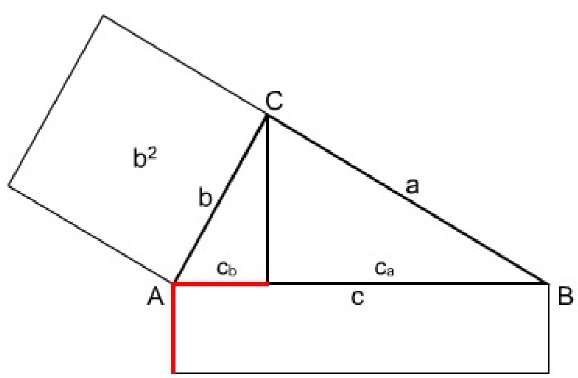


Figure 58: Euklidova věta o odvěsně

$$b^2 = c \cdot c_b$$

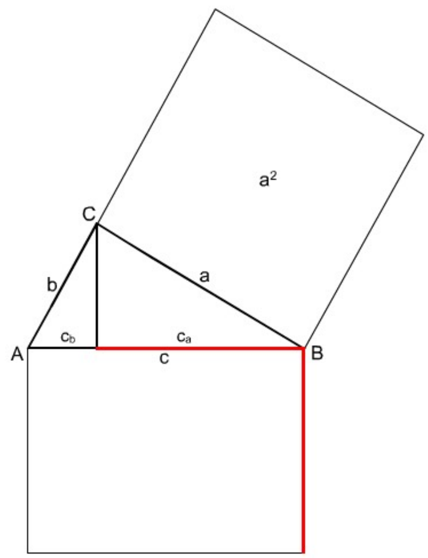


Figure 59: Euklidova věta o odvěsně

$$a^2 = c \cdot c_a$$