17) Sea $I := [0, 1]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua.

Suponer que $\int_0^x f = \int_x^1 f \quad \forall x \in I$

Demostrar que $f(x) = 0 \quad \forall x \in I$

Sea $F(x) := \int_a^x f(x)\,dx$, como f es continua y es integrable

Entonces $F(x)$ es derivable y $F'(x) = f(x)$ (colorario)

Ahora $\int_0^x f = \int_x^1 f \Rightarrow \int_0^x f = -\int_1^x f \Rightarrow F(x) = -F(x) \Rightarrow F(x) = 0$

En consecuencia $F'(x) = 0 = F(0) = f(x)$, $\therefore f(x) = 0 \quad \forall x \in I$

Sea $a>0$ y sea $J=[-a,a]$. Sea $f:J\to\mathbb{R}$ una función acotada y sea $\mathcal{P}^*(I)$ el conjunto de todas las particiones que contienen al cero y son simétricas.

Demostrar que $L(f)=\sup\{L(P,f): P\in\mathcal{P}^*(I)\}=\sup\{C\}$

Sea $\mathcal{P}(I)$ el conjunto de todas las particiones, entonces

$L(f)=\sup\{L(P,f): P\in\mathcal{P}(I)\} \Rightarrow L(f)\geq \sup\{C\}$, pues $L(f)$ es (1) el sup de todas las particiones.

Ahora sea $P\in\mathcal{P}(I)$ tal que $0\notin P$ y P no es simétrica tal que $P=\{x_0,x_1,x_2\ldots x_n\}$ y sea $P_c=\{-x_n,-x_{n-1},\ldots,-x_1,0\}$ una partición de los inversos aditivos que contiene P y el cero

Considere $Q=P\cup P_c$, $Q\in\mathcal{P}^*(I)$, pues es simétrica y contiene el cero

Ahora $L(P,f)\leq L(Q,f)$, pues Q es un refinamiento de P, entonces $L(Q,f)$ es una cota superior de $\{L(P,f)\}$

Entonces $\sup\{L(P,f)\}=L(f)\leq L(Q,f)\Rightarrow$

(2) $L(f)\leq\sup\{C\}$, pues $Q\in\mathcal{P}^*(I)$ y el sup es la menor de las cotas superiores

de (1) y (2) concluimos que $L(f)=\sup\{C\}$ //