Definición: Se dice que f es convexa en cierto intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, si satisface la desigualdad de la página anterior (C.1) para cada par de puntos de I, y es estrictamente convexa en I, si para $a, b \in I$ con $a < b$, se tiene que

$$f(x) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a), \quad \text{para } a < x < b$$

Lema: Una función es convexa en $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, si y solo si, para cada $a, b \in I$: $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$, con $0 \leq t \leq 1$

y es estrictamente convexa si y solo si:

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b), \text{ con } 0 < t < 1$$

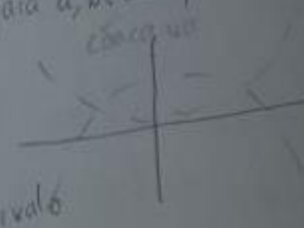
Definición: f es cóncava en un intervalo si ~~todos~~ si $-f$ es convexa en dicho intervalo, f es estrictamente cóncava si $-f$ es estrictamente cóncava en ese intervalo

Lema: Una función f es cóncava en un intervalo I, si y solo si $\forall x \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f(x) \geq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ y es estrictamente cóncava si

$$f(x) \geq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a) + f(a), \text{ para } a < x < c$$

Lema: Una función es cóncava si y solo si para x en $I \subseteq \mathbb{R}$ satisface que:

$$f((1-t)a + tb) \geq f(a)(1-t) + tf(b), \text{ para } a, b \in I \text{ y } 0 \leq t \leq 1$$



Nota: cóncava es = cóncava hacia abajo
convexa es = cóncava hacia arriba

Teorema + Colorario: Sea f derivable en cada punto del intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Entonces:

- f es cóncava hacia arriba si y solo si f' es creciente en I
- f es cóncava hacia abajo si y solo si f' es decreciente en I

Definición: Un punto de inflexión $(a, f(a))$ es donde f cambia de concavidad

Demostrar que f es cóncava si y solo si f' es decreciente
(cóncava es cóncava hacia abajo)

Sabemos que f es cóncava si y solo si

$$f(x) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ con } a \leq x \leq b$$

Suponga que f' es decreciente, entonces $\forall a \leq b \in I \Rightarrow f'(a) \geq f'(b)$
como f es derivable en I, entonces es continua en $I \Rightarrow$

$\exists c \in I$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (TVM), pero

$$a \leq c \leq b \Rightarrow f'(a) \geq f'(c) \geq f'(b) \Rightarrow$$

$$f'(a) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq f'(b) \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tal que}$$

$\forall x \in]a-\delta, a+\delta[$ se tiene que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ así concluimos}$$

que f es cóncava (cóncava hacia abajo)

Suponga que f es cóncava hacia abajo (cóncava), entonces

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ si } f \text{ es derivable} \Rightarrow$$

$$f'(a) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ por TVM } \exists c \in I, \text{ con } a \leq c \leq b$$

tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$

$$f'(a) \geq f'(c) \Rightarrow f' \text{ es decreciente.}$$

Análogo se prueba que si f es convexa (cóncava hacia arriba) si y solo si f' es creciente.

Con ayuda del teorema anterior se realiza la siguiente demostracion de

Criterio de concavidad con la segunda derivada

a) Si $\forall x \in I$ $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ es cóncava ...

b) Si $\forall x \in I$ $f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo.

Demostración

a) Suponga que $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, por teorema sabemos que $f'(x)$ es creciente y por Teorema concluimos que f es cóncava hacia arriba.

b) Suponga que $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in I$, por teorema sabemos que $f'(x)$ es decreciente y por teorema concluimos que f es cóncava hacia abajo.

Note que si $f''(c) = 0 \Rightarrow x = c$ es un punto crítico de $f'(x) \Rightarrow$ Si $\exists \delta > 0$ tal que $f''(x)$ cambia de signo para cada $x \in]c-\delta, c+\delta[$, entonces $f'(x)$ cambia (por criterio de la primera derivada) su monotonía, lo cual implica que f cambia de concavidad, entonces (por definición) concluimos queen $x = c$ hay un punto de inflexión.

Teorema (Criterio de la segunda derivada).

Sea $f'(c)=0$, y tal que $f''(c)$ existe.

Si $f''(c)>0$, entonces $f(c)$ es un mínimo local

Si $f''(c)<0$, entonces $f(c)$ es un máximo local

Demostración: Sea $f'(c)=0$ y suponga que $f''(x)>0$. Con $f: I \to \mathbb{R}$

$f''(c)$ existe de tal forma que

donde $I \in \mathbb{R}$ es un intervalo y $c \in I$ es un punto interior.

Sabemos que $f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}$, cómo $f'(c)=0$, entonces como el límite es positivo,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{x-c} > 0,$$

se sigue por Teorema que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in]c-\delta, c+\delta[$

$\frac{f(x)}{x-c} > 0$, pero además por teorema, como $f''(x)>0$

$\Rightarrow f'(x)$ es creciente, tome $x_1 < c$ $(x_1 \in]c-\delta, c[) \wedge x_2 > c$ $(x_2 \in]c, c+\delta[)$

$\Rightarrow c-\delta < x_1 < c < x_2 < c+\delta$, como $f'(x)$ es creciente, entonces

$f'(x_1) < f'(c) < f'(x_2)$, pero $f'(c)=0$, entonces

$f'(x_1) < 0$, $\forall x \in]c-\delta, c[\wedge f'(x) > 0$, $\forall x \in]c, c+\delta[$,

entonces por el criterio de la primera derivada concluimos que $f(x)$ alcanza un mínimo local en $x=c$, pues $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in]c-\delta, c+\delta[$, $f'(x)$ cambia de signo. (de $-$ a $+$)

Ahora suponga que $f'(c) = 0$ y que $f''(x)$ existe, de tal forma que $f''(x) < 0$, con $f: I \to \mathbb{R}$ función continua en $I \in \mathbb{R}$ un intervalo y $c \in I$ un punto interior.

Sabemos que $f''(x) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0 \Rightarrow$

$$f''(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{x - c} < 0, \text{ pues } f'(c) = 0.$$

Entonces se sigue que $\exists \delta > 0$ tal que $\frac{f(x)}{x-c} < 0$, $\forall x \in]c-\delta, c+\delta[$

Como $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ es decreciente para $x \in]c-\delta, c+\delta[$
y análogo al caso anterior considere que

$$c - \delta < x_1 < c < x_2 < c + \delta \Rightarrow$$

$$f'(x_1) > 0 > f'(x_2), \, (f'(c) = 0) \Rightarrow$$

$\forall x \in]c-\delta, c[$, $f'(x) > 0 \wedge \forall x \in]c, c+\delta[$, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow$ Por el criterio de la primera derivada, concluimos que f alcanza el máximo local en $x = c$, pues $\exists \delta$ tal que $f'(x)$ cambia de signo $\forall x \in]c-\delta, c+\delta[$. (de + a −)

$\therefore$ - Si $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ alcanza un mínimo local en $x = c$
- Si $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ alcanza un máximo local en $x = c$.