11.10

2023年11月10日 11:37

习题3.7 (A)

17. (1) $x_1=0.1$ 为极大点 $x_2=0.2$ 为拐点

(2) $x=\pi, 3\pi, 5\pi$ 为极小点 $x=2\pi, 4\pi$ 为极大点

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 为拐点 $(k=0,1,2,\cdots,5)$

(3) $x=-1$ 为极大点 $x=1$ 为极小点

$x=0$、$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 为拐点

(4) $x=\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$ 为极大点 $x=\frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{21\pi}{4}$ 为极小点

$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ 为拐点 $(k=1,2,\cdots,6)$

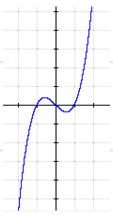
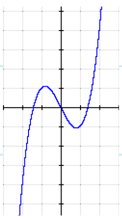
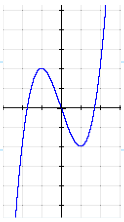
(B) 5. (1) $P'(x)=3x^2-a$

$P(x)_{极大}=P(-\sqrt{\frac{a}{3}})=-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+a\sqrt{\frac{a}{3}}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$

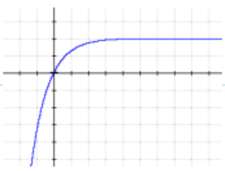
$P(x)_{极小}=P(\sqrt{\frac{a}{3}})=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a\sqrt{\frac{a}{3}}=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$

(2) 远离

(3) 1° 当 $a=1$ 时 2° 当 $a=2$ 时 3° 当 $a=3$ 时

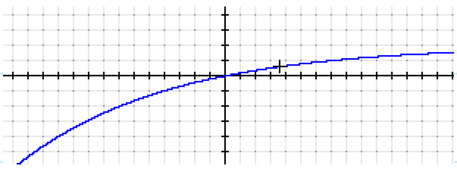




7. (1)



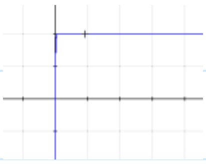
(2) 1° 当 $a=2$

$b=0.1$ 时



2° 当 $a=2$

$b=100$ 时



总习题(3)

28. (1) 令 $x=c$ ∵ $f'(c)=0$

∴ $cf''(c) = 1-e^{-c} \Rightarrow f''(c) = \frac{1-e^{-c}}{c}$

∵ $c\neq 0$ ∴ $f''(c)>0$

∴ 当 $x=c$ 时 $f(x)$ 取到极小值

(2) 原式对 x 求导得 $f''(x)+xf'''(x)+3[f'(x)]^2+6xf'(x)f''(x)=e^{-x}$

令 $x=0$ 得 $f''(0)=1$

∴ 当 $x=0$ 时 $f(x)$ 取到极小值

(3) 法一：记 $F(x)=f(x)-kx^2$

∵ $F(0)=0$ $F'(0)=0$

∴ $F''(0)=f''(x)-2k\leq 0$

由(2)可知 $f''(0)=1$ ∴ $k\geq \frac{1}{2}$

下证 当 $k\geq\frac{1}{2}$ 时 命题成立：

想要 $f(x)\leq kx^2$ 只要 $f(x)\leq \frac{1}{2}x^2$

记 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$ $g'(x)=f'(x)-x$

$g''(x)=f''(x)-1=\frac{1-e^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2-1$

$=\frac{1-x-e^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2$

∵ $e^x\geq x+1$ ∴ $e^{-x}\geq -x+1$ 即 $1-x-e^{-x}\leq 0$

∴ $g''(x)\leq 0$ ∴ $g'(x)\leq g'(0)=0$

∴ $g(x)\leq g(0)=0$ 即 $f(x)\leq\frac{1}{2}x^2$ Q.E.D

法二：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

$f(x)\leq kx^2 \Leftrightarrow f''(\xi)\leq 2k$

由题意得 $f''(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2$

$$\leq \frac{1-e^{-x}}{x} \leq \frac{x}{x} = 1 \quad ,(x=0\text{时取等})$$

$\therefore\ 2k \geq [f'(\xi)]_{max} = 1$

$\therefore\ k \geq \frac{1}{2}$

综上 $k_{min} = \frac{1}{2}$