11.9

2023年11月10日 11:37

习题 3.7 (A)

12. (1) $f'(x) = ax^{a-1}$ $\quad f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$

∴ 当 $a>1$ 时 $f(x)$ 为凸函数

当 $0<a<1$ 时 $f(x)$ 为凹函数.

(2) 凸 $\quad$ (3) 凹

(4) $f'(x) = \ln x + 1$ $\quad f''(x) = \frac{1}{x}$

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凸函数

13. (1) $y' = 6x - 3x^2$ $\quad y'' = 6 - 6x = 6(1-x)$

y 在 $(-\infty,1)$ 上为凸，在 $(1,+\infty)$ 上为凹

$2(4+x^2)\cdot 2x \cdot 8x$

拐点为 $x=1$

(2) $y' = -\frac{8x}{(4+x^2)^2}$ $\quad y'' = -\frac{8(4+x^2)^2 - 32x^2(4+x^2)}{(4+x^2)^4}$

$= -8\,\frac{4+x^2-4x^2}{(4+x^2)^3} = \frac{8(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}})$ 和 $(\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty)$ 上为凸

在 $(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})$ 为凹 $\quad$ 拐点为 $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 和 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $y' = e^{-x}(-x+1)$ $\quad y'' = e^{-x}(x-1-1) = e^{-x}(x-2)$

∴ y 在 $(-\infty,2)$ 上为凹，在 $(2,+\infty)$ 上为凸

拐点为 $x=2$

(4) $y' = 1+\cos x$ $\quad y'' = -\sin x$

∴ y 在 $(2k\pi, \pi+2k\pi)$ 上为凹，在 $(\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$ 上为凸

拐点为 $x=k\pi$

总习题 (3)

25. (1) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$, $(x\neq 0)$ $\quad f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

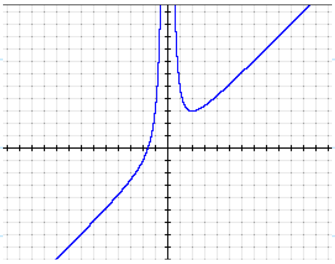
∴ f(x)在$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$上↗ 在$(0,2)$上↓

∵ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ ∴ $f(x)_{极小}=f(2)=3$ 没有极大值

(2) $f''(x)=\frac{24}{x^4}$ ∴ f(x)在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$为凸函数.

(3) 有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$ ∴ 渐近线为 $y=x$

(4)



27. (1) 即证 $\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$ $(0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2})$

记 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ $f'(x)=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\tan x}{x^2}$

$$=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$$

$$=\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}>0$$

∴ f(x)在$(0,\frac{\pi}{2})$↗ Q.E.D

(2) 记 $f(x)=x^p+(1-x)^p$, $(p>1,\ x\in[0,1])$

$f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$

∵ $p-1>0$ ∴ $\begin{cases} x^{p-1}<(1-x)^{p-1}, & x\in(0,\frac{1}{2}) \\ x^{p-1}>(1-x)^{p-1}, & x\in(\frac{1}{2},1) \end{cases}$

∴ $f(x)\geq f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^p+(\frac{1}{2})^p=\frac{1}{2^{p-1}}$ Q.E.D

(3) $\cos x$ 在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上为凹函数. Q.E.D

(4) 记 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$

$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

记 $g(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ $g'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)}>0$

∴ g(x)在R上↗ 又∵ $g(0)=1$

$\therefore f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上小于0　　$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上大于0

$\therefore f(x) \geq f(0) = 0$　　Q.E.D