9.22

2023年9月25日 21:04

习题 2.4 (A)

1. (2) 不能，现在给出一个反例：

取 $f(x)=\sin x$，$g(x)=1$，则存在 $x\in O_0(\frac{\pi}{2},\delta)$ 时

都有 $f(x)<g(x)$

但显然 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x)=1$

(3) 不能，

反例：取 $x_n=\frac{1}{2^n}$，$y_n=\frac{1}{n}$，显然有 $x_n<y_n$

但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$

3. 记 $M=\max\{a,b\}$，则有 $M\le a,b$

$M=\sqrt[n]{M^n}\le\sqrt[n]{a^n+b^n}\le\sqrt[n]{M^n+M^n}=\sqrt[n]{2}M$

即 $M\le\sqrt[n]{a^n+b^n}\le\sqrt[n]{2}M$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} M=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}M=M$

综上 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=M=\max\{a,b\}$.

总习题 (2)

4. (10) $\lim\limits_{x\to\infty} n\sqrt{n}\left(\tan\frac{x}{\sqrt{n}}-\sin\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty} n\sqrt{n}\sin\frac{x}{\sqrt{n}}\left(\frac{1-\cos\frac{x}{\sqrt{n}}}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty} n\sqrt{n}\cdot\frac{x}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\frac{x^2}{2n}}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2\cos\frac{x}{\sqrt{n}}}$

$=\frac{x^3}{2}$

(11) 由和差化积可知 $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}$

$=2\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

又 $\because \cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$ 有界

又∵ $\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$ 有界

∴ $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=0$

(12) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \dfrac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$

$= \dfrac{\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}$

$= \dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

∴原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \dfrac{\sin x}{x}$