10.31

2023年11月2日 8:50

习题 3.5 (B)

5. 用反证法：

假设 $\forall \xi \in (a,b)$，都有 $f'(\xi) \le 0$

$\because$ $f(x)$不恒为常数

$\therefore$ $f(x)$在(a,b)上$\downarrow$

又$\because$ $f(x) \in C[a,b]$

$\therefore$ $f(x)$在$[a,b]$上$\downarrow$

$\therefore$ $f(b) < f(a)$ 与 $f(a) = f(b)$ 相矛盾

$\therefore$ $\exists \xi \in (a,b)$，$\ni f'(\xi) > 0$ Q.E.D

7. 设 $g(x) = f(x) - x$，$x \in [0,1]$

显然 $g(x) \in C[0,1]$ 且在$(0,1)$上可导

又$\because$ $f(x)$不为x的线性函数

$\therefore$ $g(x)$不为常数函数.

现在有 $\begin{cases} g(0) = g(1) \\ g(x) \in C[0,1] \text{ 且在}(0,1)\text{上可导} \\ g(x) \text{ 不为常数函数} \end{cases}$

那么与上题同理，可用反证法证明：

$\exists \xi \in (0,1)$，$\ni g'(\xi) > 0$

即 $\exists \xi \in (0,1)$，$\ni f'(\xi) > 1$ Q.E.D

9. 设 $\varphi(x) = [f(x) - f(a)][g(x) - g(b)]$

$\because$ $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

$\therefore$ $\exists \xi \in (a,b)$，$\ni \varphi'(\xi) = 0$

$\therefore \exists \xi \in (a,b), \ni \varphi'(\xi)=0$

即 $\varphi'(\xi) = f'(\xi)[g(\xi)-g(b)] + g'(\xi)[f(\xi)-f(a)] = 0$

整理得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$ Q.E.D