4-6 (4-1)

2023年11月26日 16:03

16. 对方程 $Ax=0$ 来说：

$$\dim(\ker(A)) = n - rk(A)$$

又因为对 $AB=0$ 来说，B的列向量必定在 $\ker(A)$ 中.

所以 $rk(B) \le n - rk(A)$ 即 $rk(A) + rk(B) \le n$

17. 由 T_{14} 可知 $rank(A) + rank(B) \ge rank(A+B)$

$\therefore$ $rank(A) + rank(A-E) = rank(A) + rank(E-A)$

$$\ge rank(E) = n$$

由 T_{16} 可知 若 $AB=0$，则 $rank(A) + rank(B) \le n$

$\therefore$ $A^2 = A \Rightarrow A(A-E) = 0$

$$\Rightarrow rank(A) + rank(A-E) \le n$$

综上 $rank(A) + rank(A-E) = 0$

18. 由题意可知：向量组 γ_i $(i=1,2,\cdots,n-r)$ 线性无关

γ_i $(i=1,2,\cdots,n-r)$ 可以写作 $\gamma_i = [\eta_1\ \eta_2 \cdots \eta_{n-r}]\begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{i,n-r} \end{bmatrix}$

因此 $A\gamma_i = A\left([\eta_1\ \eta_2 \cdots \eta_{n-r}]\begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{i,n-r} \end{bmatrix}\right)$

$$= \left(A[\eta_1\ \eta_2 \cdots \eta_{n-r}]\right)\begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{i,n-r} \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{i,n-r} \end{bmatrix} = 0$$

所以向量组 γ 也是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

20. (1) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 14 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 0 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\therefore$ 对 $Ax=0$：

$$x = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(2) 对 $Ax=b$：有特解 $x_0 = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ x=\begin{bmatrix}1/7\\2/7\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-11\\-1\\7\\0\end{bmatrix}$$

27. $$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&\sum_{i=1}^{5}a_i\end{array}\right]$$

由最后一行可知：方程有解 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}a_i=0$

对 $Ax=0$ 来说 $x=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$　对 $Ax=b$ 来说：特解 $x_0=\begin{bmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4\\a_2+a_3+a_4\\a_3+a_4\\a_4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_5\\-a_1-a_5\\a_3+a_4\\a_4\\0\end{bmatrix}$

$$\therefore\ x=\begin{bmatrix}-a_5\\-a_1-a_5\\a_3+a_4\\a_4\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$