2-1 矩阵的运算

2023年10月14日 23:41

习题二

1. (4) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

下证：$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ 成立

显然当 $n=3$ 时 结论成立

假设 当 $n=k$ 时 有 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$

那么 当 $n=k+1$ 时 有：

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \frac{(k+1)n}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{bmatrix}$$

∵ 数学归纳法可知 当 $n \geq 3$ 时结论成立

当 $n=1$ 时 结论显然成立

当 $n=2$ 时 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$ 成立

综上 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \cdots \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ \cdots \end{bmatrix}$

综上 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

(5) 首先有

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

那么特别得 就有

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{bmatrix}$$

3. (1) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$f(A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

(2) $A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \\ 6 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad A^6 = A^3 \cdot A^3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 6 & 2 & -5 \\ 10 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

$A^8 = A^6 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 3 \\ -6 & 6 & 13 \end{bmatrix}$ $\quad A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$g(A)=\begin{bmatrix}10&6&-3\\6&10&3\\-6&6&13\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&-2&-3\\6&2&-5\\10&6&-3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2&-2&1\\-2&-2&-1\\2&-2&-3\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0&0&1\\-2&0&1\\-2&-2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&-2&-6\\12&11&-8\\16&12&3\end{bmatrix}$$

4. 设满足题设矩阵为A，显然A必然是 2×2 的矩阵，且有

$$A\begin{bmatrix}3&1\\-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\-2&2\end{bmatrix}A \qquad 设\ A=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$$

即 $$\begin{bmatrix}3a-2c&a+2c\\3b-2d&b+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+b&3c+d\\2b-2a&2d-2c\end{bmatrix}$$

有 $$\begin{cases}3a-2c=3a+b\\a+2c=3c+d\\3b-2d=2b-2a\\b+2d=2d-2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2c\\a=c+d\\2a+b=2d\\b=-2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2c & \cdots ①\\a=c+d & \cdots ②\\2a+b=2d & \cdots ③\end{cases}$$

又∵ $2\times② + ① = ③$ ∴ A只需满足 $\begin{cases}b=-2c\\a=c+d\end{cases}$

综上 $A=\begin{bmatrix}c+d&c\\-2c&d\end{bmatrix}$ $(c,d\in R)$ $\begin{bmatrix}a&b\\-2b&a+b\end{bmatrix}$

20. 记 $Z=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-3&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}3&2&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

则 $A=\left[\begin{array}{c|c}B&Z\\\hline Z&C\end{array}\right]$ ∴ $A^2=\begin{bmatrix}B^2&Z\\Z&C^2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2&13&-6&0&0&0\\5&28&-13&0&0&0\\1&-5&2&0&0&0\\0&0&0&11&14&0\\0&0&0&7&18&0\\0&0&0&0&0&9\end{bmatrix}$$