10.12

2023年10月16日　　19:12

习题 2.8 (A)

3. (2) $\lim\limits_{x\to1}\cos\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\cos(x+1)=\cos2$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^{3\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$

$=e^3$

(6) $\frac{\pi}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^3$

记$t=1+\frac{1}{x}$ $\lim\limits_{t\to\infty}\left[(1-t)^{t-1}\right]^3$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{1}{(1-t)^{-t}(1-t)}\right]^3$

$=e^{-3}$

5. (1) 记$f(x)=x2^x-1$　$f(0)=-1$　$f(1)=1$

$\because f(0)\cdot f(1)<0$　$\therefore f(x)$在$[0,1]$上必有一个根

(2) 记$f(x)=x^3+px-q$　$-x^3-px-q$

则有 $f(t)\cdot f(-t)=-t^6-2pt^4-p^2t^2+q^2$，$t>0$

那么只要 $t\geq\frac{|q|}{p}$ 就有 $f(t)\cdot f(-t)<0$

$\therefore f(x)$在$\left[-\frac{|q|}{p},\frac{|q|}{p}\right]$上至少有一根

即$f(x)$在R上至少存在一根.

7. 记$F(x)=f(x)-g(x)$ 只需要证明 $\exists c\in(a,b)$，$\ni F(c)=0$

$\because F(a)=f(a)-g(a)<0$　$F(b)=f(b)-g(b)>0$

$\therefore F(a)\cdot F(b)<0$　$\therefore F(x)$在$[a,b]$上至少有一个根.

即 $\exists c\in(a,b)$，$\ni f(c)=g(c)$

(B)

(B)

2. 不妨设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = B$

那么由极限的定义可知：

$\forall \varepsilon>0, \exists X_1>0, \ni \forall x > X_1$, 都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

不妨取 $\varepsilon=1$, 那么就有 $|f(x)-A|<1$

即当 $x > X_1$, $A-1 < f(x) < A+1$ $\therefore f(x)$在$(X_1,+\infty)$上有界

同理 $f(x)$在$(-\infty, X_2)$上也有界 $(X_2<0<X_1)$

又$\because f(x)$在$[X_2, X_1]$上连续

$\therefore$由一致连续性定理可知：$f(x)$在$[X_2, X_1]$上一致连续

$\therefore$有$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \ni \forall x_1, x_2 \in [X_2, X_1]$: $|x_1-x_2|<\delta$, 都有

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

不妨取$\varepsilon=1$, $x_1 = x \in [X_2, X_1]$, $x_2 = X_1$

则有对$\forall x \in [X_2, X_1]$, 都有 $f(X_1)-1 < f(x) < f(X_1)+1$

$\therefore f(x)$在$[X_2, X_1]$上也有界.

综上 $f(x)$必有界 Q.E.D

总习题(2)

15. (1) 首先 $x \neq 0$ 或 ± 1

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} = \frac{-1}{x+1} = -1$$

$\therefore x=0$ 为跳跃间断点.

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$\therefore x=1$ 为可去间断点

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} = \lim_{x\to-1} \frac{1}{x+1} = \infty$$

$\therefore x=-1$ 为无穷间断点.

$\therefore x=-1$ 为无穷间断点.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq 1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$

$\therefore x=1$ 不是间断点

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0 \qquad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2$

$\therefore x=-1$ 为跳跃间断点.

(5) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3nx}{1-nx}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x}{\frac{1}{n}-x}=\begin{cases}0, & x=0\\ -3, & x\neq 0\end{cases}$

$\therefore x=0$ 为可去间断点

19. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=1+\beta$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}, & \alpha=0\\ 0, & \alpha>0\\ +\infty, & \alpha<0\end{cases}$$

1° 当 $\alpha=0$ 时 $\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$

$\therefore \forall \beta\in R$, $x=0$ 为震荡间断点.

2° 当 $\alpha<0$ 时 $\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

$\therefore \forall \beta\in R$, $x=0$ 为无穷间断点

3° 当 $\alpha>0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

① 当 $\beta=-1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

② 当 $\beta\neq -1$ 时 $x=0$ 为跳跃间断点