9.19

P_{34} 习题(A)

7. (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X>0$, $\ni \forall |x|>X$,
都有 $\left|\frac{x^2+2}{3x^2}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$

想要 $\left|\frac{x^2+2}{3x^2}-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3x^2}<\varepsilon \Leftrightarrow x>\sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}}$

综上 取 $X=\sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}}$，即有 $\left|\frac{x^2+2}{3x^2}-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3x^2}<\varepsilon$ Q.E.D

(4) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x}{x^2-4}=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \ni \forall 0<x-2<\delta$,
都有 $\frac{2x}{x^2-4}>M$

不妨取 $x\in(2,3)$ 想要 $\frac{2x}{x^2-4}>M$
$\Leftrightarrow x-2<\frac{2x}{(x+2)M}=\frac{2}{(1+\frac{2}{x})M}$

只需要 $x-2<\frac{1}{M}$ 即可

综上 取 $\delta=\min\left\{1, \frac{1}{M}\right\}$ 可证时 $\frac{2x}{x^2-4}>M$ Q.E.D

8. 由于 $0<|x-a|<\delta$ 与 $\begin{matrix}0<x-a<\delta\\ \cup\\ -\delta<x-a<0\end{matrix}$ 互为充要条件

所以由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在的定义 以及 $\lim\limits_{x\to a^\pm}f(x)$存在的定义可知

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在 且 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$存在 Q.E.D

9. 同8 因为 $|x|>X$ 与 $\begin{matrix}x>X\\ \cup\\ x<-X\end{matrix}$ 互为充要条件

所以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty^+} f(x)$ 存在 且 $\lim\limits_{x\to\infty^-} f(x)$ 存在

习题(B)

2. (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \end{cases}$

1° 先证 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$，即证 $\forall M<0, \exists \delta>0, \ni \forall\ 0<x-\frac{\pi}{2}<\delta$，
都有 $\tan x < M$

不妨设 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

想要 $\tan x < M \Longleftrightarrow \tan(x-\pi) < M$

$\Longleftrightarrow x-\pi < \arctan M$

$\Longleftrightarrow x-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \arctan M$

取 $M = \min\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\arctan M\} = \frac{\pi}{2}+\arctan M$ 即可

2° 再证 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$，

不妨设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，即证 $\forall M>0, \exists\delta>0, \ni\forall -\delta<x-\frac{\pi}{2}<0$，
都有 $\tan x > M$

想要 $\tan x > M \Longleftrightarrow x > \arctan M$

取 $M = \max\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}+\arctan M\} = -\frac{\pi}{2}+\arctan M$ 即可

综上 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ Q.E.D

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-100) = \infty \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-100) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x-100) = -\infty \end{cases}$

1° 先证 $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-100) = +\infty$

不妨设 $x > 100$ 则有 $2x-100 = x+(x-100) > x$

1° 先证 $\lim\limits_{x\to+\infty}$ ...

不妨设 $x>100$ 则有 $2x-100 = x+(x-100) > x$

因此 取 $X=\max\{x, 100\}$ 即可证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-100)=+\infty$

2° 再证 $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-100) = -\infty$

不妨设 $x<0$

因为 $2x-100 < 2x < x$

所以 取 $X=\min\{0, x\}$ 即可

综上 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-100) = \infty$　　Q.E.D

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x} = 1 \iff \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x} = 0$

$\iff \forall \varepsilon>0, \exists X>0, \ni \forall |x|>X,$

都有 $\left|\dfrac{\cos x}{x}-0\right| < \varepsilon$

$\because \left|\dfrac{\cos x}{x}-0\right| = \dfrac{|\cos x|}{|x|} < \dfrac{1}{|x|}$

$\therefore$ 想要 $\left|\dfrac{\cos x}{x}-0\right| < \varepsilon$

只要 $\dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$，即 $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$

综上 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x} = 1$　　Q.E.D

4、$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 的定义为 $\forall M>0, \exists X>0, \ni \forall x>X,$

都有 $f(x) > M$

那么 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$ 的定义就是 $\exists M_0>0, \forall X>0, \ni \exists x_0>X,$

使得 $f(x_0) \leq M_0$

所以要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1} = +\infty$ 是错误的，就是要证明：

$\exists M_0>0, \forall X>0, \ni \exists x_0>X$，使得 $\dfrac{x_0}{x_0+1} \leq M_0$

考虑 $M_0=1$，那么 $\dfrac{x_0}{x_0+1} \leq M_0 = 1$ 在 $x_0>0$ 时恒成立　　Q.E.D