1-4 行列式的性质

2023年9月21日 22:42

11. (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -11 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{68}{3} \end{vmatrix} = 68$ ✓

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

$= 160$

(4) 记 $a=1^3$ $b=2^3$ $c=3^3$ $d=4^3$

$$\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 4^3 & 1^3 & 2^3 & 3^3 \\ 3^3 & 4^3 & 1^3 & 2^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$$

=

再记 $A = a+b+c+d$

$$\begin{vmatrix} A & A & A & A \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-d & b-d & c-d \\ 0 & d-c & a-c & b-c \\ 0 & c-b & d-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} a-d & b-d & c-d \\ d-c & a-c & b-c \\ c-b & d-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} a+c-b-d & 0 & a+c-b-d \\ d-c & a-c & b-c \\ c-b & d-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} a+c-b-d & 0 & 0 \\ d-c & a-c & b-d \\ c-b & d-b & a-c \end{vmatrix}$$

$$= A \cdot (a+c-b-d) \cdot \left[(a-c)^2 + (b-d)^2 \right]$$

? $= \left[(a+c)^2 - (b+d)^2 \right] \left[(a-c)^2 + (b-d)^2 \right]$

$= A\cdot(a+c-b-d)\cdot\left[(a-c)+(b-d)^2\right] = \left[(a+c)-(b+d)\right]\left[(a-c)+(b-d)^2\right]$

$= -A\cdot(b-a+d-c)\left[(c-a)^2+(d-b)^2\right]$

感觉有用，但实力有限

其中 $A = 1^3+2^3+3^3+4^3 = \frac{4^2\times5^2}{4} = 100$，$b-a = (2-1)(2^2+2\times1+1^2) = 7$

$d-c = (4-3)(4^2+4\times3+3^2) = 37$

$c-a = (3-1)(3^2+3\times1+1^2) = 26$

$d-b = (4-2)(4^2+4\times2+2^2) = 56$

$(n-1)n(n+1)(n+2)-(n-2)(n-1)n(n+1)$

$= 4(n^3-n)$

主方幂公式

设 $f(n) = (n-2)(n-1)n(n+1)$

$n^3 = \frac{f(n+1)-f(n)}{4}+n$

$1^3+\cdots+n^3 = \frac{f(n+1)-f(1)}{4}+\frac{(n+1)n}{2}$

$= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}+\frac{2n(n+1)}{4}$

$= \frac{(n^3-n)(n+2)+2n^2+2n}{4}$

$= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

原式 $= -100\times44\times(26^2+56^2)$

$= -4400\times3812$

$= -16772800$

(5)

$$\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)x & a+(n-1)x & \cdots & a+(n-1)x & a+(n-1)x \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= [a+(n-1)x]\cdot(a-x)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$= [a+(n-1)x] \cdot (a-x)^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$

(6) $\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a-\frac{x^2(n-1)}{a} \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a^{n-1} \cdot \left[a - \frac{x^2(n-1)}{a}\right]$

1° 当 $a \neq 0$ 时 $= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a^{n-2} \cdot [a^2 - x^2(n-1)]$

2° 当 $a=0$ 时 ① 当 $n=1$ 时 原式 $= |x| = x$

② 当 $n=2$ 时 原式 $= \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$

③ 当 $n \geq 3$ 时 原式 $= \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = 0$