11.30

2023年11月29日　22:20

习题 4.7 (A)

2. (2) 原式 $= \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x}{4+x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\int_1^b \frac{d(4+x^2)}{4+x^2}$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\ln(4+x^2)\Big|_1^b = \frac{1}{2}(+\infty-2\ln 2)$

∴ 原积分发散.

(4) 原式 $= \lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = \lim\limits_{b\to-\infty}\ln(1+e^x)\Big|_b^0 = \ln 2$

∴ 原积分收敛且等于 $\ln 2$.

(6) 原式 $= \lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b \frac{dz}{z^2+25} = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\frac{1}{5}\arctan\frac{z}{5}\Big|_a^b = \frac{\pi}{5}$

∴ 原积分收敛且等于 $\frac{\pi}{5}$.

(8) 原式 $= \lim\limits_{b\to4}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim\limits_{b\to4}\arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^b = \frac{\pi}{2}$

∴ 原积分收敛且等于 $\frac{\pi}{2}$.

(14) 原式 $= \lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^b = +\infty-\ln(\ln 2)$

∴ 原积分发散.

(16) 原式 $= \lim\limits_{b\to+\infty}\int_3^b \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} -\frac{1}{\ln x}\Big|_3^b = \frac{1}{\ln 3}$.

∴ 原积分收敛且等于 $\frac{1}{\ln 3}$.

(18) 原式 $= \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \ln\frac{1}{x}\, d(\frac{1}{x})$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{x})\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x})\Big|_1^b$

$= 1$

∴ 原积分收敛且等于 1.

(B) 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-x^2-x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}dx = Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\frac{1}{2})^2}d(x+\frac{1}{2})$

$= Ae^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi} = 1$

$\Rightarrow A = \frac{e^4}{\sqrt{\pi}}$

3. 先求 $I = \int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

3. 先求 $I=\int\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

$$I=\int x\,d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\frac{dx}{1+e^{-x}}$$

$$=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\frac{d(1+e^{x})}{1+e^{x}}=\frac{x}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{x})+C$$

∴ 原式 $=\lim\limits_{b\to\infty}\frac{x}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{x})\Big|_0^b$

1° 当 $b\to+\infty$ 时 原积分发散.

2° 当 $b\to-\infty$ 时 原积分收敛于 $\ln 2$.