5-2 5-3

2023年12月1日 21:37

4. 令 $\det(A-\lambda I)=0$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4 & 2\\ 0 & -3-\lambda & 4\\ 0 & 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(-3-\lambda)(3-\lambda)-16\right]$$

$\therefore\ \lambda=1,\ \pm5$

1° 当 $\lambda=1$ 时

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}0&4&2\\0&-4&4\\0&4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

2° 当 $\lambda=5$ 时

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-4&4&2\\0&-8&4\\0&4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-2&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x_2=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$$

3° 当 $\lambda=-5$ 时

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}6&4&2\\0&2&4\\0&4&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}6&0&-6\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ S=[x_1\ x_2\ x_3]=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1/5&2/5\\0&-2/5&1/5\end{bmatrix}$$

$\therefore\ A=S\Lambda S^{-1}$

$\therefore A = S\Lambda S^{-1}$

$$\therefore A^k = S\Lambda^k S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5}[5^k-(-5)^k] & \frac{1}{5}[4\cdot 5^k+(-5)^k]-1 \\ 0 & \frac{1}{5}[5^k+4(-5)^k] & \frac{2}{5}[5^k-(-5)^k] \\ 0 & \frac{2}{5}[5^k-(-5)^k] & \frac{1}{5}[4\cdot 5^k+(-5)^k] \end{bmatrix}$$

6. $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B^* = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$$A = C^{-1}B^*C = \begin{bmatrix} -4 & 7 & -7 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[(7-\lambda)(5-\lambda)-8]$$
$$= (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-9)$$

$\therefore \lambda = 3$ (二重) 或 9

1° 当 $\lambda=3$ 时 $A-\lambda I = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2° 当 $\lambda=9$ 时 $A-\lambda I = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

综上 $A+2E$ 的特征值为 5 (二重) 或 11.

特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{cases} tr(A)=tr(B) \\ \det(A)=\det(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+a=5+b \\ 2(a+4)=6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$

11. $\det(A-I)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & t & t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 \\ 0 & t-1 & t-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix}=(t-1)^2=0$

$\therefore t=1$

$\because tr(A)=6=2+\lambda' \Rightarrow \lambda'=4$

1° 当 $\lambda=1$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2° 当 $\lambda=4$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore T=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. (1) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$

$=(2-\lambda)\left[(3-\lambda)(6-\lambda)-4\right]+(\lambda-2)\left[4-4(3-\lambda)\right]$

$=(2-\lambda)\left(\lambda^2-9\lambda+14-4\lambda+8\right)=(2-\lambda)\left(\lambda^2-13\lambda+22\right)=(2-\lambda)^2(11-\lambda)$

$\therefore \lambda=2$ (二重) 或 11

1° 当 $\lambda=2$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ \ldots \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \ldots \end{bmatrix}$

1° 当 $\lambda=2$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\quad E_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$

2° 当 $\lambda=11$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&-18&9\\0&18&-9\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \alpha_1=E_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\quad \alpha_2=\left(I-\frac{\alpha_1\alpha_1^T}{\alpha_1^T\alpha_1}\right)E_2=\begin{bmatrix}-1/2\\2\\-1/2\end{bmatrix}\quad \alpha_3=E_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \eta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\quad \eta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\begin{bmatrix}-1/3\sqrt{2}\\2\sqrt{2}/3\\-1/3\sqrt{2}\end{bmatrix}\quad \eta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\begin{bmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}$

综上 $T=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/3\sqrt{2}&2/3\\0&2\sqrt{2}/3&1/3\\1/\sqrt{2}&-1/3\sqrt{2}&2/3\end{bmatrix}$

16. (1) $[A|\alpha]\xrightarrow{\text{if } a\neq 0}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-2-a\end{array}\right]\xrightarrow{\text{if } a\neq 1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&1&-1&0\\0&0&-a^2-a+2&-2-a\end{array}\right]\xrightarrow{\text{if } a\neq -2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&1&-1&0\\0&0&a-1&1\end{array}\right]$

由上述消元可知 $a=-2$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\quad \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\1&-2-\lambda&1\\-2&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\1&-2-\lambda&1\\0&-3-2\lambda&3-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)\left[(-2-\lambda)(3-\lambda)-(-3-2\lambda)\right]-\left[(3-\lambda)-(-2)(-3-2\lambda)\right]$

$=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-3)+5\lambda+3=\lambda(-\lambda^2+9)$

$\therefore \lambda=0$ 或 3 或 -3

1° 当 $\lambda=0$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2° 当$\lambda=3$时 $A-\lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3° 当$\lambda=-3$时 $A-\lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\because E_1 \perp E_2 \perp E_3$ $\therefore y_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ $y_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $y_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$$\therefore T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

19. $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 8 \\ \lambda_1\lambda_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$