

4-4

2023年11月18日 19:06

6. 设过渡矩阵为  $A$ , 有:  $A = \alpha^{-1}\beta$

考虑增广矩阵  $[\alpha | \beta]$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

↓

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \right] \leftarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & -6 & 8 & -8 & 2 & -6 \end{array} \right]$$

↓

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \right] \therefore A = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

7. (1) 设过渡矩阵为  $A$ , 有:  $A = \alpha^{-1}\beta$

显然  $\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 记  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{有} \begin{cases} \alpha x_1 = b \\ \beta x_2 = b \end{cases} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1/9 \\ -2/9 \\ 4/9 \end{bmatrix}$$

8. 即求解  $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{记 } A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ 计算得 } A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 5 & -15 & 8 \\ 9 & -28 & -15 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ -82 \\ 154 \end{bmatrix}$$

9. 记四维单位矩阵为  $I$ , 则题意可知:

$$Bx = Ex \quad \text{即} (B-I)x = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore x = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$