6-1 6-2

2023年12月1日 21:37

3. (3) $z_1^2-z_2^2+\frac{1}{4}z_3^2-z_4^2$ △

4. (3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x^TAx$

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&-2&-2\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&&\\-1&1-\lambda&&\\&&1-\lambda&-2\\&&-2&-2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1-\lambda&-2\\-2&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

$\therefore$ $\lambda=0$ 或 2(二重) 或 -3.

1° 当 $\lambda=0$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&-2&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&-6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

2° 当 $\lambda=2$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix}-1&-1&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&-1&-2\\0&0&-2&-4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_2=\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$ $E_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

3° 当 $\lambda=-3$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix}4&-1&0&0\\-1&4&0&0\\0&0&4&-2\\0&0&-2&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-4&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_4=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\2\end{bmatrix}$

$\alpha_1=E_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=E_2=\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\left(I-\frac{\alpha_2\alpha_2^T}{\alpha_2^T\alpha_2}\right)E_3$ $\alpha_4=E_4=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1/5&2/5\\0&0&2/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\eta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}$ $\eta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\begin{bmatrix}0\\0\\-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

OR $\because E_2^TE_3=0$

$\therefore \alpha_3=E$

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \eta_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

OK $\because \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 0$

$\therefore \alpha_3 = \varepsilon_3.$

$$\eta_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \eta_4 = \frac{\alpha_4}{\|\alpha_4\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

综上 $T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

5.(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lambda^2-\lambda-\frac{1}{4}\right)^2 \left(\lambda^2-\frac{1}{4}\right)$$

$\therefore \lambda = \pm\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 正惯性指数为2

负惯性指数为2