# 9.21

2023年9月22日 14:02

## 习题A

2. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0, \ni\forall n>N,$ 都有 $\left|\frac{n^2}{2^n}-0\right|<\varepsilon$

首先 $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$

$=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\cdots$

$\therefore$ 有 $2^n>n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n^3+5n}{6}>\frac{n^3}{6}$

因此想要 $\left|\frac{n^2}{2^n}-0\right|<\varepsilon$，只需 $\frac{6}{n}<\varepsilon$ 即可

综上 取 $N=\left[\frac{6}{\varepsilon}\right]+1$

就有 $\left|\frac{n^2}{2^n}-0\right|=\frac{n^2}{2^n}<\frac{6}{n}<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$ Q.E.D

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{5n+1}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0, \ni\forall n>N,$ 都有 $\left|\frac{3n}{5n+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon$

$\because \left|\frac{3n}{5n+1}-\frac{3}{5}\right|=\left|\frac{-\frac{3}{5}}{5n+1}\right|=\frac{3}{5(5n+1)}$

$\therefore$ 想要 $\left|\frac{3n}{5n+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{3}{5(5n+1)}<\varepsilon$

即 $n>\frac{3}{25\varepsilon}-\frac{1}{5}$

综上 取 $N=\left[\frac{3}{25\varepsilon}-\frac{1}{5}\right]+1$ 即可证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{5n+1}=\frac{3}{5}$

Q.E.D

3. (1) $\forall M>0, \exists N>0, \ni\forall n>N$，都有 $x_n>M$

(2) $\forall M<0, \exists N>0, \ni\forall n>N$，都有 $x_n<M$

## 习题(B)

习题5(B)

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N>0, \ni \forall n>N,$

都有 $\left|\frac{n^3-1}{n^2+1}\right|>M$

首先 不妨设 $n>1$

则有 $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1) > (n-1)(n^2+1)$

$\therefore \left|\frac{n^3-1}{n^2+1}\right| > n-1$

综上 取 $N=M+1$ 即可证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=\infty$ Q.E.D

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0, \ni \forall n>N,$

都有 $\left|\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$

$\because \left|\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(2\sqrt{n}-1)}$

$\therefore$ 想要 $\left|\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要 $\sqrt{n}>\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$

综上 取 $N=\left[\left(\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)^2\right]+1$ 即可证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}=\frac{1}{2}$

Q.E.D

4. 不正确.

下面给出正确的证明：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0, \ni\forall n>N.$ 都有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$

$\because \left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$

$\Leftrightarrow n<(1+\varepsilon)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\varepsilon^k 1^{n-k}$

$\therefore$ 想要 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$，只要 $n<C_n^2\varepsilon^2\cdot 1^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$

即 $n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$

综上 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+2$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ Q.E.D

复习题(2)

3. (2) $\because \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ (A>0)$

$\therefore$ 有 $\forall \varepsilon_1>0$, $\exists \delta_1>0$. $\ni \forall\ 0<|x-x_0|<\delta_1$, 都有 $|f(x)-A|<\varepsilon_1$,

若要证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$

就是要证明 $\forall \varepsilon_2>0$, $\exists \delta_2>0$, $\ni \forall\ 0<|x-x_0|<\delta_2$,

都有 $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|<\varepsilon_2$

$$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}$$

由极限的保号性可知 在某一 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内有 $f(x)>0$

因此 $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|<\frac{1}{\sqrt{A}}|f(x)-A|<\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{A}}$

综上 取 $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{A}}$ 便可证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$ Q.E.D