9.25

2023年9月28日 15:54

习题(A)

5. (9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-3x}{x}=2$

(11) 首先有 $e^{i\cdot 3x}=(e^{ix})^3$

即 $\cos 3x+i\sin 3x=(\cos x+i\sin x)^3$

比较实部 有 $\cos 3x=\cos^3 x+3\cos x(-\sin^2 x)$

$=4\cos^3 x-3\cos x$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\cos x-4\cos^3 x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}4\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$

$=4\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=4$

习题(B)

3. 不妨取 $n\geq 7$，先证 $n!>3^n$

1° 当 $n=7$ 时 有 $7!=5040>2187=3^7$

2° 假设 当 $n=k$ 时 有 $k!>3^k$ 成立

则当 $n=k+1$ 时

$(k+1)!=k!\cdot(k+1)$ 由数学归纳法

$>3^k\cdot(k+1)$ 可知 当 $n\geq 7$ 时

$>3^k\cdot 3=3^{k+1}$ 有 $n!>3^n$

那么就有 $\dfrac{2^n}{n!}<\dfrac{2^n}{3^n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 即 $0<\dfrac{2^n}{n!}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

那么就有 $\frac{2^n}{n!} < \frac{2^n}{3^n} = (\frac{2}{3})^n$ $\Rightarrow$ 即 $0 < \frac{2^n}{n!} < (\frac{2}{3})^n$

且显然有 $\frac{2^n}{n!} > 0$

取 $n\to\infty$ 有 $0 < \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} < 0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$

Q.E.D

4. (2) 原式 $= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin 3x \cdot \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(\frac{\pi}{6}-x)}{\cos 3x}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(\frac{\pi}{6}-x)}{\cos 3x}$

其中 $\cos 3x = \cos[3(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{2}]$

$= -\sin[3(x-\frac{\pi}{6})]$

记 $t = x-\frac{\pi}{6}$，原式 $= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(-t)}{-\sin 3t} = \frac{1}{3}$

(4) 记 $t = x-\frac{\pi}{4}$，则有

原式 $= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan(t+\frac{\pi}{4})-1}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\tan t+1}{1-\tan t}-1}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{2\tan t}{t(1-\tan t)}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{2\tan t}{t} = 2$

总习题(2)

4. (2) 法一：当 $x\to 0$ 时 $(1+\alpha x)^\beta \sim 1+\alpha\beta x$

因此 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{(1+\frac{x}{3})-(1-\frac{x}{3})} = \frac{15}{2}$

法二：记 $\sqrt[3]{1+x} = a$，$\sqrt[3]{1-x} = b$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x[(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1-x^2)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}]}{a^3-b^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1-x^2)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}]$

$= \frac{15}{2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\left[(1+x)+(1-x)+(1-x)\right]$$

$$= \frac{5}{2}\times 3 = \frac{15}{2}$$

(4) 1° 当 $|x|>1$ 时 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^{2n}}-x}{\frac{2}{x^{2n}}+1} = -x$

2° 当 $|x|<1$ 时 原式 $=\frac{1}{2}$

3° 当 $x=1$ 时 原式 $=0$

4° 当 $x=-1$ 时 原式 $=\frac{2}{3}$

(6) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x+x)}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(\sin x+x)}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\right)$$

$$= 1\times(2+2) = 4$$