草稿纸

(A) 5、 1° 当 $0<a<c<b$ 或 $a<c<b<0$ 时
显然 $|c| \le \max(|a|,|b|)$ 成立

2° 当 $a<0<c<b$ 时
有 $|c|<|b| \le \max(|a|,|b|)$
$\therefore |c| \le \max(|a|,|b|)$ 成立

3° 同 2° 当 $a<c<0<b$ 时
也成立

综上 当 $a<c<b$ 时
有 $|c| \le \max(|a|,|b|)$ 成立

6、（1）原命题 $\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \ge |x|^2+|y|^2-2|x||y| \Leftrightarrow xy \le |x||y| \Leftrightarrow A \le |A|$ 显然成立

（2） 先证 $|x+x_1| \ge |x|-|x_1|$
1° 当 $|x|<|x_1|$ 时 成立
2° 当 $|x|=|x_1|$ 时
① $x=x_1$ 显然成立
② $x=-x_1$ 显然成立
3° 当 $|x|>|x_1|$ 时 原式 $\Leftrightarrow |x+x_1|^2 \ge (|x|-|x_1|)^2$
$\Leftrightarrow A+|A| \ge 0$ 显然成立

假设当 $n=k$ 时，所给命题成立
则当 $n=k+1$ 时 $|x+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}|$
$\ge |x+x_1+\cdots+x_k|-|x_{k+1}|$
$\ge |x|-(|x_1|+\cdots+|x_{k+1}|)$
则由数学归纳法可知 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，有
$|x+x_1+\cdots+x_n| \ge |x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$ 成立

7、分类讨论就可以了

(B) 4、 左边 $=\sum \underbrace{a_i a_j \cdots a_k}_{n个} + \sum \underbrace{a_i a_j \cdots a_k}_{n-1个} + \cdots + \sum \underbrace{a_i}_{1个} + 1$
右边 $=\sum a_i + 1$
原式 $\Leftrightarrow \sum \underbrace{a_i \cdots a_j}_{n个} + \cdots + \sum \underbrace{a_i a_j}_{2个} \ge 0$
1° 当 $a_i \ge 0$ ，$i \in [1,n]$ 时 显然成立
2° 当 $a_i \in (-1,0)$ 时
当 $n=1$ 时 成立
假设 $n=k$ 时成立
则当 $n=k+1$ 时 $(1+a_1)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})$
$\ge (1+a_1+\cdots+a_k)(1+a_{k+1})$
$= 1+a_1+\cdots+a_{k+1}+\underbrace{a_{k+1}}_{<0}(\underbrace{a_1+\cdots+a_k}_{<0})$
$\ge 1+a_1+\cdots+a_{k+1}$
$\because$ 数学归纳法 $\therefore$ 成立
综上 Q.E.D

5、 原命题 $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^p \ge x^p+1, & p>1 \\ (x+1)^p \le x^p+1, & 0<p<1 \end{cases}$ 其中 $x>0$
记 $f(x)=(x+1)^p-x^p-1$
$f'(x)=p(x+1)^{p-1}-px^{p-1}$
$=p[(x+1)^{p-1}-x^{p-1}]$
1° 当 $p>1$ 时 $(x+1)^{p-1}>x^{p-1}$
$\therefore f'(x)>0$
$\therefore f(x) \ge f(0)=0$
即 $(x+1)^p \ge x^p+1$，$x>0$，$p>1$
Q.E.D

2° 当 $0<p<0$ 时 $(x+1)^{p-1}<x^{p-1}$
$\therefore f(x)\downarrow$ $\therefore f(x) \le f(0)=0$
即 $(x+1)^p \le x^p+1$，$x>0$，$0<p<1$

6、 首先易证明，有 $|a+b| \le |a|+|b|$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{1}{\frac{1}{|a+b|}+1} \le \frac{1}{\frac{1}{|a|+|b|}+1} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

综上 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$ Q.E.D.

7.（1）记 $\alpha_0=\inf E^-$，α 为 E^- 的某一下界
则有 $\forall x \in E^-$，$\alpha_0 \le x$ 且 $\alpha_0 \ge \alpha$
$\Updownarrow$ 等价于
$\forall x \in E$，$x \le -\alpha_0$ 且 $-\alpha_0 \le -\alpha$
又 $\because \alpha$ 为 E^- 的某一下界
$\therefore$ 有 $\forall \alpha$，$\exists \forall x \in E^-$，有 $\alpha \le x$

8.（1）首先有 $z=x+y \le \sup A+\sup B$
其次由上确界定理可知
$\exists \varepsilon>0$，$\exists \exists x_0 \in A$，$\exists y_0 \in B$，有 $x_0 \ge \sup A-\varepsilon$，$y_0 \ge \sup B-\varepsilon$
因此有 $x_0+y_0 \ge \sup A+\sup B-2\varepsilon$
即 $z_0 \ge \sup A+\sup B-\varepsilon_0$ （上确界定理）
$\therefore \sup(A+B)=\sup A+\sup B$

又 ∵ α 为 E^- 的某一下界

∴ 有 $\forall \alpha$, $\exists \forall x \in E^-$, 有 $\alpha \le x$

$\Updownarrow$ 等价于

$\forall \alpha$, $\exists \forall x \in E$, 有 $x \le -\alpha$

也就是说 $-\alpha$ 为 E 的某一上界

∴ $-\alpha_0 = \sup E$ 　即 $\inf E^- = -\sup E$

(2) 同(1)可以证明

即 $z_0 \geq \sup A + \sup B - \varepsilon_0$ (上面所证)

∴ $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

(2) 同(1)可证明

9. 设 α_0 为 A 的某一下界, 则有 $\forall \alpha_0$, 有 $\alpha \geq \alpha_0$, 且有 $\forall x_0 \in A$, 有 $x_0 \geq \alpha$

假设 命题 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$, $\ni x_0 < \alpha + \varepsilon$ 不成立

也就是说 $\exists \varepsilon > 0$, $\forall x_0 \in A$, 都有 $x_0 \geq \alpha + \varepsilon$

即 $\alpha + \varepsilon$ 为 A 的某一下界

但 $\alpha = \inf A \geq \alpha_0$ 这与 $\alpha < \alpha + \varepsilon$ 矛盾

综上 原命题成立 　Q.E.D.

练习题(1) 　1. (1) $f(x) = \begin{cases} \tan x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(2) 没整明白

2. 也没弄明白, 但感觉有点像 Dedekind 分割