10.27

2023年10月28日 14:19

习题3.5 (A)

3. (2) $f(x)=|(x-1)(x-2)|$

$f(x)_{max}=\max\{f(\frac{3}{2}), f(-10)\}$

$=f(-10)=132$

(4) $f'(x)=nx^{n-1}(1-x)^{m}-mx^{n}(1-x)^{m-1}$

$=x^{n-1}(1-x)^{m-1}[n(1-x)-mx]$

$=x^{n-1}(1-x)^{m-1}[-(m+n)x+n]$

记 $g(x)=-(m+n)x+n$, $x\in[0,1]$

显然 $g(x)\downarrow$ 且 $g(0)=n>0$ $g(1)=-m<0$

$\therefore$ 令 $g(x_0)=0$ 解得 $x_0=\frac{n}{m+n}$

$\therefore f(x)_{max}=f(x_0)=(\frac{n}{m+n})^{n}(\frac{m}{m+n})^{m}$

(6) $f(x)=-x^2\ln x$ $f'(x)=-2x\ln x-x$

$=-x(2\ln x+1)$

$\therefore f(x)_{max}=f(e^{-\frac{1}{2}})$

$=e^{-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}$

7. $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)\leq 0$

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $\downarrow$

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个根

8. 记 $\varphi(x)=f(x)-x$

$\because \varphi(0)\cdot\varphi(1)=f(0)\cdot[f(1)-1]<0$

$\therefore \exists x_0\in(0,1)$, $\ni \varphi(x_0)=0$

$\varphi'(x)=f'(x)-1$ $\therefore \forall x\in(0,1)$, $\varphi'(x)\neq 0$

$\varphi'(x)=f'(x)-1 \quad \therefore \forall x\in(0,1),\ \varphi'(x)\neq 0$

即 $\varphi'(x)$ 在 $(0,1)$ 上没有根

因此 $\varphi'(x)$ 在 $(0,1)$ 上恒大于 0 或 恒小于 0

$\therefore$ $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调

综上 存在唯一的一个数 $x_0\in(0,1)$，$\ni f(x_0)=x_0$

Q.E.D

11. 取 $g(x)=x^2$，由柯西中值定理可知：

$$\exists\, \xi\in(a,b),\ \ni \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即 $$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

整理得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

12. 取 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，$h(x)=\frac{1}{x}$

由柯西中值定理可知：

$$\exists\, \xi\in(a,b),\ \ni \frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$$

即 $$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{f'(\xi)\cdot\xi-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

整理得 $$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$