草稿纸

2023年2月6日

5. $\because \delta \in (0,1)$

$\therefore |x-3| < \delta < 1$

$\therefore x \in (2,4)$

又 $\because |x^2-9| = |x-3||x+3| < |x+3|\delta$

$\therefore$ 只需证 $|x+3| < 7$

$\because x \in (2,4)$

$\therefore |x+3| < 7$

综上 $|x^2-9| < 7\delta$

$\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni \forall\ 0 < |x-3| < \delta$，有 $0 < |x^2-9| < \varepsilon$

1° 当 $\varepsilon \in (0,7)$ 时

由前面的证明可知，若取 $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$，则此时 $\delta \in (0,1)$，命题成立

2° 当 $\varepsilon \in [7,+\infty)$ 时

$0 < |x^2-9| < \varepsilon \Leftarrow |x^2-9| < 7 \Leftrightarrow x \in (\sqrt{2},4)$

$\Leftrightarrow x-3 \in (\sqrt{2}-3, 1) \Leftarrow |x-3| \in (0, 1)$

$\therefore$ 当取 $\delta = 1$ 时 命题成立

综上 当取 $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\}$ 时 有 $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ Q.E.D

6. $\because \delta \in (0,1)$

$\therefore |x-4| < \delta < 1$

$\therefore x \in (3,5)$

又 $\because |\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|}$

$\therefore |\sqrt{x}-2| < \frac{\delta}{\sqrt{3}+2}$

$\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni \forall\ |x-4| < \delta$，有 $|\sqrt{x}-2| < \varepsilon$

1° 当 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}+2})$ 时

若取 $\delta = (\sqrt{3}+2)\varepsilon$，则 $\delta \in (0,1)$，由前面的证明可知，命题成立

2° 当 $\varepsilon \in [\frac{1}{\sqrt{3}+2}, +\infty)$ 时

$|\sqrt{x}-2| < \varepsilon \Leftarrow |\sqrt{x}-2| < \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \in (\sqrt{3}-2, 2-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow x \in (3, (4-\sqrt{3})^2) \Leftarrow |x-4| \in (0,1)$

$\therefore$ 当取 $\delta = 1$ 时 命题成立

综上 当取 $\delta = \min\{(\sqrt{3}+2)\varepsilon, 1\}$ 时 $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$ Q.E.D

7. (1) $\lim\limits_{x\to 3} (x^2+5x) = 24 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni \forall\ |x-3| < \delta$，有 $|(x^2+5x)-24| < \varepsilon$

证明：取 $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{12}, 1\}$，则有 $|x-3| < 1$

又 $\because |x-3| < 1$

$\therefore x \in (2,4)$

$\therefore |x+8| \in (10,12)$

则有 $|x^2+5x-24| = |x-3| \cdot |x+8| < 12\delta \le \varepsilon$

综上 $\lim\limits_{x\to 3} (x^2+5x) = 24$ Q.E.D

(2) $\lim \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni \forall\ |x-1| < \delta$，有 $\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni\forall|x-1|<\delta$，有 $\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$

证明：$\because \left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|$

$\therefore$ 只需证 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni\forall|x-1|<\delta$，有 $|x-1|<\varepsilon$

显然 当取 $\delta=\varepsilon$ 时 命题成立

综上 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ Q.E.D

10. 1° 先证明 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$

$\because \lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni\forall|x-a|<\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

要证 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$，即证 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni\forall|x-a|<\delta$，有 $\big||f(x)|-|A|\big|<\varepsilon$

首先证明 $\big||x|-|y|\big|\le|x-y| \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x||y|\le x^2+y^2-2xy$

$\Leftrightarrow |A|\ge A$ 显然成立

$\therefore$ 有 $\big||f(x)|-|A|\big|\le|f(x)-A|<\varepsilon$

2° 再证明 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A \not\Leftarrow \lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$

取 $f(x)=x$，$a=1$，$A=-1$

显然 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$ 成立，但 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 不成立

Q.E.D