11.03 工数作业

快要变成猪了QwQ

2023 年 11 月 7 日

P_{149} 习题3.6 (B)

4. 我们知道 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, 其中余项

$$o(x^3) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = \frac{e^\xi}{4!}x^4$$

因为 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 所以 $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，因此误差（即余项）

$$o(x^3) = \frac{e^\xi}{4!}x^4 <= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{4!}(\frac{1}{2})^4 = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{16 * 4!} \approx 0.005 < 0.01$$

又因为 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ ，所以将 $x = \frac{1}{2}$ 带入得到

$$\sqrt{e} \approx \frac{79}{48}$$

P_{170} 总习题（3）

5. 因为 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导，所以有

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = C, (C \in \mathbb{R})$$

其中

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a^+} \frac{A(x - a)(x - b)(x - B) - 0}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a^+} A(x - b)(x - B) = A(a - b)(a - B)\end{aligned}$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{(x - a) - 0}{x - a} = 1$$

即

$$A(a - b)(a - B) = 1$$

同理可得

$$A(b-a)(b-B)=2$$

解的

$$\begin{cases} A=3 \\ B=\frac{2a+b}{3} \end{cases}$$

9. (1) 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}[xg'(x)+xe^{-x}-g(x)+e^{-x}]$$

当 $x=0$ 时,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}$$

(2) 由(1)可知,当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)$ 显然连续

当 $x=0$ 时,

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg''(x)-xe^{-x}}{x}$$

$$=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$$

即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

综上 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

13. 首先有 $f(0)=1$

接下来求 $f^{(n)}(x)$

$$f'(x)=\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=(-2)\cdot(1+x)^{-2}$$

$$f''(x)=(-2)\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3}$$

$$f'''(x)=(-2)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(1+x)^{-4}$$

由数学归纳法可知

$$f^{(n)}(x)=2\cdot(-1)^n\cdot n!\cdot(1+x)^{-(n+1)}$$

因此 $\frac{1-x}{1+x}$ 的n阶泰勒展开为

$$\frac{1-x}{1+x}=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

即

$$\frac{1-x}{1+x} = 1 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \cdot 2 \cdot x^i + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (q+\xi)^{-(n+1)\cdot x^{n+1}}$$

15. (1) 易得

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

(2) 令 $x = 1, 2$ 得到

$$\begin{cases} f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(1-c)^2, (c < \xi_1 < 1) \\ f(0) = f(c) + f'(c)(0-c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(0-c)^2, (0 < \xi_2 < c) \end{cases}$$

两式相减得

$$f(1) - f(0) = f'(c) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(1-c)^2 - \frac{1}{2}f''(\xi_2)c^2$$

所以有

$$|f'(c)| \leq |f(0)| + |f(1)| + \frac{1}{2}|f''(\xi_1)|(1-c)^2 + \frac{1}{2}|f''(\xi_2)|c^2$$

$$\leq a + a + \frac{1}{2}b(1-c)^2 + \frac{1}{2}bc^2 = 2a + \frac{1}{2}b[(1-c)^2 + c^2] \leq 2a + \frac{1}{2}b$$