2-3 矩阵的秩

2023年10月27日 9:33

习题2

6. 即要证：

矩阵A 与任意 n 阶矩阵都可交换 $\Leftrightarrow A=kE$

先证充分性：

∵ 矩阵A 与任意 n 阶矩阵都可交换

∴ A也是n阶矩阵且有 $AB=BA$

假设 $A\neq kE$，即 $A=kE+C$（C为n阶矩阵 且不为数量矩阵）

$AB=BA \Leftrightarrow (kE+C)B=B(kE+C)$

$\Leftrightarrow kEB+CB=BkE+BC$

$\Leftrightarrow CB=BC$

显然，C和B不满足交换律，与假设矛盾

∴ $A=kE$

再证必要性：

∵ $A=kE$

∴ $AB=kEB=kB$

$BA=BkE=kB$

∴ $AB=BA$

综上 命题成立 . Q.E.D

7. $AB=BA \Leftrightarrow \sum_{a=1}^{n} A_{ia}B_{aj}=\sum_{a=1}^{n} B_{ia}A_{aj}$ ---- ①

$AC=CA \Leftrightarrow \sum_{a=1}^{n} A_{ia}C_{aj}=\sum_{a=1}^{n} C_{ia}A_{aj}$ ---- ②

① + ② $\Rightarrow \sum_{a=1}^{n} A_{ia}(B_{aj}+C_{aj})=\sum_{a=1}^{n}(B_{ia}+C_{ia})A_{aj}$

$\Leftrightarrow A(B+C)=(B+C)A$ ----- (一)

$\Leftrightarrow \quad A(B+C)=(B+C)A \quad \cdots\cdots \quad (一)$

$AB=BA \Leftrightarrow ABC=BAC$

$\Leftrightarrow A(BC)=B(AC)$

$\Leftrightarrow A(BC)=B(CA)$

$\Leftrightarrow A(BC)=(BC)A$

8. 先证充分性： $A^2=A \Rightarrow B^2=E$

$A^2=A \Leftrightarrow A(A-E)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(A+E)\cdot\frac{1}{2}(A-E)=0$

$\Leftrightarrow A^2-E^2=0$

$\Leftrightarrow A^2=E^2=E \qquad \therefore A^2=A \Rightarrow B^2=E$

再证必要性： $A^2=A \Leftarrow B^2=E$

$A^2=\frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{4}(B^2+2BE+E^2)$

$=\frac{1}{4}(E+2B+E)$

$=\frac{1}{2}(B+E)=A \quad \therefore A^2=A$

Q.E.D

9. $\because A^2=0$ 且 $A=A^T$

$\therefore AA^T=0 \qquad \therefore$ 必有 (AA^T) 的对角线上的元素为 0

即 $\sum_{a=1}^{n} A_{ia}A^T_{aj}=0 \Leftrightarrow \sum_{a=1}^{n} A_{ia}^2=0$

$\therefore A_{ia}=0 \quad (a=1,2,\cdots,n)$

又 $\because i=1,2,\cdots,n \qquad \therefore A_{ij}=0$ 即 $A=0$ Q.E.D

11. 记任一方阵 A，对称矩阵为 B，反对称矩阵为 C

$$\begin{cases} A_{ij}=B_{ij}+C_{ij} \\ A_{ji}=B_{ji}+C_{ji}=B_{ij}-C_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_{ij}=\dfrac{A_{ij}+A_{ji}}{2} \\ C_{ij}=\dfrac{A_{ij}-A_{ji}}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 取 $\begin{cases} B_{ij} = \dfrac{A_{ij}+A_{ji}}{2} \\ C_{ij} = \dfrac{A_{ij}-A_{ji}}{2} \end{cases}$ 即可用 B, C 表达 A.

Q.E.D

13. 由题意可知 $\dim \mathrm{Null}(A) = n$

$\therefore \mathrm{rank}(A) = n-n = 0$

$\therefore \dim \mathrm{Col}(A) = 0$

$\therefore A = 0$

14. (1) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & -5 & 0 & -7 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -5 & 0 & -7 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 6 & -1 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{16}{3} & 3 & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} & 4 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} & 4 & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{16}{3} & 3 & \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 6 & -1 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} & 4 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{19}{16} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{4} & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 6 & -1 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} & 4 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{19}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{46} & \frac{285}{92} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{203}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{285}{2} \end{bmatrix}$$