草稿纸

2023年2月6日

1\. (1) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(5) $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

$= x(x^2-y^2) + y(y^2-xy) + y(y^2-xy)$

$= x^3 + 2y^3 - 3xy^2 = (x+2y)(x-y)^2$

2\. (1) 左式 $= \begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix}$

$= a(d+y) - c(b+x)$

$= (ad-bc) + ay - cx$

$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} =$ 右式

Q.E.D

(2) 左式 $= \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & e & d \\ a & f & c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} d & b \\ c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$=$ 右式 Q.E.D

3\. (2) $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1$

$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$ $\therefore x_1 = 3$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6$ $\therefore x_2 = 6$

$\therefore x_3 = 15$

综上 $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 15 \end{cases}$

4\. (1) 1 7 3 5 2 4 6

$5+1+2 = 8$

$\therefore \begin{cases} i = 3 \\ j = 4 \end{cases}$

(2) 2 4 6 3 8 9 1 5 7

$1+2+3+1+3+3+2 = 15$

$\therefore \begin{cases} i = 3 \\ j = 5 \end{cases}$

5\. 原：已共有 C_n^2 对，m对逆序，则有 $(C_n^2 - m)$ 对顺序

反：仍有 C_n^2 对，但反转后 $\begin{cases} \text{逆} \to \text{顺} \\ \text{顺} \to \text{逆} \end{cases}$，则有 $(C_n^2 - m)$ 对逆序

{顺→逆 ，则对(n ⋯)对逆N

综上 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - m$

6. (1) 265384 17

$1+4+3+1+3+1=13$

∴(1)为奇排列

(2) $n(n-1)\cdots 2\,1$

$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$, $n\geq 1$

1° 当 $n=4k-3\ (k\geq 1)$ 时

$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(4k-3)(4k-4)}{2}=2(k-1)(4k-3)$

偶

2° 当 $n=4k-2\ (k\geq 1)$ 时

$\frac{n(n-1)}{2}=(2k-1)(4k-3)$ 奇

3° $n=4k-1$

$\frac{n(n-1)}{2}=(2k-1)(4k-1)$ 奇

4° $n=4k$ $\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 偶

综上 $n(n-1)\cdots 2\,1$ 为 $\begin{cases} 偶, & n=4k-3 \text{ 或 } 4k \\ 奇, & n=4k-2 \text{ 或 } 4k-1 \end{cases}$

(3) $2n\,(2n-2)\cdots 2\,(2n-1)(2n-3)\cdots 1$

$\underbrace{f(n)}$

$(2n+2)\,2n\,(2n-2)\cdots 2\,(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 1$

$\underbrace{f(n+1)} = 2n+1+n+f(n)$

$=3n+1+f(n)$

$21 \leftarrow f(1)=1$ $4\,2\,3\,1 \leftarrow f(2)=5$ ✓

∴ $f(n)-f(n-1)=3(n-1)+1$

则有 $f(n)-f(1)=3\frac{n(n-1)}{2}+n-1=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1$

6 4 2 5 3 1

∴ $f(n)=\frac{3n^2-n}{2}$, $n\geq 1$ $f(3)=\frac{3\times 9-3}{2}=12$ ✓

$=5+3+1+2+1=12$

1° $n=4k-3$, $k\geq 1$

$f(n)=\frac{n(3n-1)}{2}=(4k-3)(6k-5)$ 奇

2° $n=4k-2$

$f(n)=(2k-1)(12k-7)$ 奇

3° $n=4k-1$

$f(n)=2(4k-1)(3k-1)$ 偶

4° $n=4k$

$f(n)$ 偶