11.7

2023年11月10日 11:37

习题 3.7 (A)

8. (1) 设 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$

$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$ $f''(x)=-\sin x$

$\because f''(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上小于 0

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $\downarrow$

又 $\because f'(0)\cdot f'(\frac{\pi}{2})=(1-\frac{2}{\pi})\cdot(0-\frac{2}{\pi})<0$

$\therefore \exists$ 唯一一个 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使 $f'(x_0)=0$

又 $\because f'(x)\downarrow$ $\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上 $\nearrow$

在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上 $\downarrow$

$\therefore f(x)>\min\{f(0),f(\frac{\pi}{2})\}=0$

即 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$, $(0<x<\frac{\pi}{2})$

(2) 设 $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$, $(x\neq 0)$

$f'(x)=-\sin x+x$ $f''(x)=-\cos x+1\geqslant 0$

又 $\because f'(0)=0$ $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上 $\downarrow$

在 $(0,+\infty)$ 上 $\uparrow$

$\therefore f(x)>f(0)=0$ 即 $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$

(3) 设 $f(x)=x-\ln(1+x)$, $(x>0)$

$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$

$\therefore f(x)>f(0)=0$ 即 $x>\ln(1+x)$

设 $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$, $(x>0)$

$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$

$\therefore g(x)>g(0)=0$ 即 $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$

综上 $x > \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$, $(x>0)$

(4) 先证明 $x \geqslant \arctan x$, $(x \geqslant 0)$

设 $\varphi(x) = x - \arctan x$, $(x \geqslant 0)$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$$

$\therefore \varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$ 即 $x \geqslant \arctan x$, $(x \geqslant 0)$

只需要证明 $\ln(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x}$, $(x \geqslant 0)$ 即可

易证 $\ln x \leq x-1$, $(x>0)$

$\Leftrightarrow -\ln x \geqslant 1-x$, $(x>0)$

$\Leftrightarrow \ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$, $(x>0)$

$\Leftrightarrow \ln(x+1) \geqslant 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, $(x>-1)$

即 $\ln(x+1) \geqslant \frac{x}{x+1}$, $(x \geqslant 0)$

15. (1) $f'(x) = 3x^2 - 18x - 48 = 3(x-8)(x+2)$

$f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3)$

$f''(8) > 0$, $x=8$ 为极小值

$f''(-2) < 0$, $x=-2$ 为极大值

(2) $g'(x) = e^{-x}(-x+1)$ $g''(x) = e^{-x}(x-1-1) = e^{-x}(x-2)$

$g''(1) < 0$ $\therefore x=1$ 为极大值

(3) $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$ $h''(x) = \frac{2}{x^3}$

$h''(1) > 0$ $\therefore x=1$ 为极小值

$h''(-1) < 0$ $\therefore x=-1$ 为极大值

18. (1) 首先 $x \neq -1$ $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{(1+x)^2}$

$$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - 2(1+x)(2x+x^2)}{(1+x)^4}$$

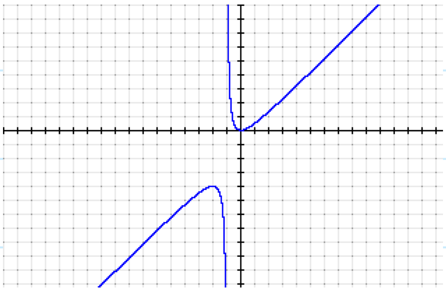
$$= \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

综上 $f(x)$ 在 $(0,-2)$ 和 $(0,+\infty)$ 上↗

在 $(-2,0)$ 上↘

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是凹函数

在 $(-1,+\infty)$ 上是凸函数



(2) $f'(x)=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$

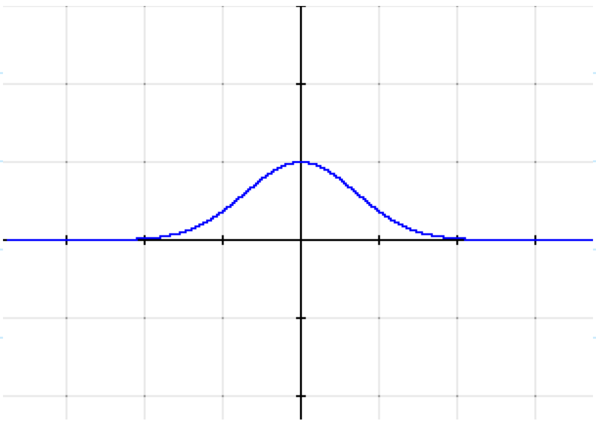
$f''(x)=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}(-2x)$

$=-2e^{-x^2}(1-2x^2)$

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，在 $(-\infty,0)$ 上↗

$f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上为凸函数

在 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上为凹函数



(B) 3. (1) 设 $f(x)=\ln x$，$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ ↗ 且为凹函数

∴ $f(x)\le f'(1)(x-1)+f(1)=x-1$，$(x>0)$　Q.E.D

(2) 设 $f(x)=\arctan x$，$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上$\nearrow$且为凹函数.

$\therefore$ 有 $f(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$, $(a,b\geq 0)$

即 $2\arctan\frac{a+b}{2} \geq \arctan a + \arctan b$, $(a,b\geq 0)$

Q.E.D

(3) 设 $f(x)=2^x-x^2-1$, $(0\leq x\leq 1)$

$f'(x)=2^x\ln 2-2x$, $f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$

显然 $f''(x)$在$[0,1]$上$\downarrow$ 又$\because f''(0)<0$, $f''(1)<0$

$\therefore f'(x)$在$(0,1)$上$\downarrow$ 又$\because f'(0)>0$ $f'(x)<0$

$\therefore$ 存在唯一一个$x_0\in(0,1)$, $\ni f'(x_0)=0$

$\therefore f(x)$在$(0,x_0)$上$\nearrow$ 在$(x_0,1)$上$\downarrow$

$\therefore f(x)\geq \min\{f(0),f(1)\}=0$

即 $1+x^2\leq 2^x$, $(0\leq x\leq 1)$ Q.E.D

(4) 设 $f(x)=x^n$, $(x,y>0$, $x\neq y$, $n>1)$

$f'(x)=nx^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$

$\because n>1$ $\therefore f''(x)>0$

$\therefore$ 有 $f(\frac{x+y}{2})<\frac{f(x)+f(y)}{2}$

即 $\frac{x^n+y^n}{2}>(\frac{x+y}{2})^n$. Q.E.D

x^4+x^2 .

总习题(3)

17. (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-\ln(1-x+x^2)}{1-\cos^2 x}\cdot\cos x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+o(x^4)\right]-\left[(-x+x^2)-\frac{(-x+x^2)^2}{2}+o(x^4)\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x^3+o(x^4)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}+\lim_{x\to 0}\left[-2x+\frac{o(x^4)}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{x} \quad \lim_{x\to}\left[-2x+\frac{o(x^4)}{x^2}\right] = \infty$$

(2) 原式 $= \lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}}{1}$

$$= e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$= e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x+3x^2}$$

$$= -e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{2+6x} = -\frac{e}{2}$$

(3) 考虑极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6}$$

$\therefore$ 原式 $= e^{-\frac{1}{6}}$

(4) 原式 $= \lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x-x(\ln a-\ln b)}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b-\ln a+\ln b}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln^2 a-b^x\ln^2 b}{2} = \frac{\ln^2 a-\ln^2 b}{2}$$

(5) 原式 $= \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln^2 x}{x^{-n}}\cdot\lim_{x\to 0^+}e^{-x}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{(-n)x^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{(-n)x^{-n}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}}{n^2x^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{n^2}\cdot x^n = 0$$

23. 设 $f(x)=e^x-2x-a$, $f'(x)=e^x-2$

显然 $f'(x)$ 在 R 上 ↗ $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上 ↘ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上 ↗

$\because \lim_{x\to -\infty}f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

$\therefore f(x)_{min}=f(\ln 2)=2-2\ln 2-a\le 0$

$\therefore\ a \geq 2-2\ln 2$