

4-5

2023年11月18日 19:06

11. (1) 显然不存在 $c \neq 0$, 使得 $\xi_1 = c\xi_2$

即 ξ_1 与 ξ_2 线性无关

$$(2) \because \xi_3 = 3\xi_1 + \xi_2$$

$\therefore \xi_3$ 不在极大线性无关组中

\therefore 不存在 a, b , 使得 $\xi_4 = a\xi_1 + b\xi_2$

$\therefore \xi_4$ 在极大线性无关组中

$$\therefore \xi_5 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_4$$

$\therefore \xi_5$ 不在极大线性无关组中

综上 ξ_1, ξ_2, ξ_4 为极大线性无关组

$$12. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \text{rank} = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为极大线性无关组

$$13. \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_s \end{bmatrix} \cdot A$$

(I) 极大线性无关组 (II) 的极大线性无关组.

$$\therefore r \leq s \quad \text{即} \quad \text{rank}(I) \leq \text{rank}(II)$$

14. 设 L 为 A 的极大线性无关组与 B 的极大线性无关组的并集

$$\text{则 } r(A+B) \leq r(L) \quad \text{又} \because L \text{ 中至多有 } [r(A) + r(B)] \text{ 个向量}$$

$$\therefore r(L) \leq r(A) + r(B) \quad \text{综上 } r(a+b) \leq r(a) + r(b)$$