10.7

2023年10月8日 13:52

习题2.5

(A) 3. 首先 $x_{n+1}=\frac{1}{a}\cdot ax_n\cdot(2-ax_n)$

$$\le \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{ax_n+2-ax_n}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{a}\quad(x_n=\frac{1}{a}\text{时取等})$$

又$\because x_1<\frac{1}{a}$ $\therefore x_n<\frac{1}{a}$

另外 有 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=2-ax_n>1$ 即$\{x_n\}\nearrow$

因此 因为$\{x_n\}\nearrow$且有上界，所以$\{x_n\}$收敛

因为 $\{x_n\}$收敛

所以 有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(2-ax_n)$

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=A$ 有 $A=A(2-aA)$

解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{a}$

4. 1° 当$x_1=\sqrt{3}$时 显然 $x_n=\sqrt{3}$ 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$

2° 当$x_1>\sqrt{3}$时

首先 有 $x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n}<0$

即$\{x_n\}\searrow$

另外 $\because x_1>0$ $\therefore x_n>0$

即$\{x_n\}$有下界

所以$\{x_n\}$收敛

3° 当$0<x_1<\sqrt{3}$时

首先 有 $x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n}>0$

即$\{x_n\}\nearrow$

另外 $x_{n+1}=3\left(1-\frac{2}{x_n+3}\right)<3$

另外 $x_{n+1}=3\left(1-\frac{2}{x_n+3}\right)<3$

即 $\{x_n\}$ 有上界

所以 $\{x_n\}$ 收敛

因此 当 $x_1\in(0,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$ 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

则有 $A=\frac{3(1+A)}{3+A}$ 解得 $A=\pm\sqrt{3}$ 取 $A=\sqrt{3}$

综上 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$ Q.E.D

(B) 1. 首先 有 $x_2=\sqrt{6+x_1}>3$

又有 $x_3=\sqrt{6+x_2}>3$

由数学归纳法可知 $x_n>3$

即 $\{x_n\}$ 有下界

另外 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-x_n$

$$=\frac{-x_n^2+x_n+6}{\sqrt{6+x_n}+x_n}$$

$$=\frac{(x_n-3)(x_n+2)}{\sqrt{6+x_n}+x_n}<0$$

即 $\{x_n\}\downarrow$

$\therefore$ $\{x_n\}$ 收敛 易得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

2. (1) 设 $n>m\geq1$，则

$$|x_n-x_m|=|a_{m+1}q^{m+1}+a_{m+2}q^{m+2}+\cdots+a_nq^n|$$

$$\leq M\left|\sum_{i=m+1}^{n}q^i\right|$$

$$=M\left|\frac{q^{m+1}-q^{n+1}}{1-q}\right|$$

1° 当 $q=0$ 时 $|x_n-x_m|=0$ 显然 $\{x_n\}$ 收敛

2° 当 $0<q<1$ 时 有：

$$|x_n-x_m|\leq M\left|\frac{q^{m+1}-q^{n+1}}{1-q}\right|=M\,\frac{q^{m+1}-q^{n+1}}{1-q}$$

$$|x_n - x_m| \le M\left|\frac{q^{m+1}-q^{n+1}}{1-q}\right| = M\frac{q^{m+1}-q^{n+1}}{1-q}$$

$$< \frac{M}{1-q}\cdot q^{m+1}$$

$\because \lim\limits_{m\to\infty} \frac{M}{1-q}\cdot q^{m+1} = 0$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0$

即 $\{x_n\}$ 为柯西数列　所以 $\{x_n\}$ 收敛

3° 当 $-1<q<0$ 时 有：

$$|x_n - x_m| \le M\left|\frac{q^{m+1}-q^{n+1}}{1-q}\right| \qquad \underline{n>m\ge 1}$$

$$= \frac{M}{1-q}\left|q^{m+1}-q^{n+1}\right|$$

$$\le \frac{M}{1-q}\left(|q^{m+1}| + |q^{n+1}|\right)$$

$$\le \frac{M}{1-q}\left(|q^{m+1}| + |q^{m+1}|\right)$$

$$= \frac{2M}{1-q}|q^{m+1}|$$

$\because \lim\limits_{m\to\infty} \frac{2M}{1-q}|q^{m+1}| = 0$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0$

即 $\{x_n\}$ 为柯西数列　所以 $\{x_n\}$ 收敛

综上 $\{x_n\}$ 收敛

(2) 设 $n>m\ge 1$，则：

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}\right|$$

$$\le \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}\right| + \cdots + \left|\frac{\sin n}{2^n}\right|$$

$$\le \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2^m}$$

$\because \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{2^m} = 0$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0$

即 $\{x_n\}$ 为柯西数列　所以 $\{x_n\}$ 收敛

4. 1° 先证必要性

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在　　记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists X>0, \ni \forall x>X$, 都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

不妨取 $\begin{cases}\varepsilon=1\\ X>a\end{cases}$, 那么就有 $|f(x)-A|<1$, 即 $f(x)<A+1$

又 $\because$ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上 $\nearrow$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界

2° 再证充分性

记 $A=\sup f(x)$, $x\in[a,+\infty)$.

由上确界定理可知:

$\forall \varepsilon_n=\frac{1}{n}$, $\exists x_n\in[a,+\infty)$, $\ni |f(x_n)-A|<\varepsilon_n=\frac{1}{n}$

即 $\exists \{x_n\}$, $\ni \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A \iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

Q.E.D