10.17

2023年10月18日 0:06

习题 2.8 (B)

3. 我们为 $f(x)$ 补充定义 $f(a)=f(a^+)$ ， $f(b)=f(b^-)$

然后就有 $f(x)\in C[a,b]$

由一致连续性定理可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续 $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, $\ni \forall x,y\in[a,b]$:

$|x-y|<\delta$,都有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\because |f(x)-f(y)| \le L|x-y| < L\cdot\delta$

$\therefore$ 只要取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$ 即可证明

习题 3.1 (A)

4. 由(1)可知 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

由(2)可知 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ 存在且与 $\varphi(x_0)$ 相等

由导数的定义可知 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$ Q.E.D

5. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+nh)-f(a-mh)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+nh)-f(a)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-mh)-f(a)}{h}$

$=n\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+nh)-f(a)}{nh}+m\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-mh)-f(a)}{-mh}$

$=nf'(a)+mf'(a)=(m+n)f'(a)$

9. $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\overset{\because \sin\frac{1}{\Delta x}\text{有界}}{=\!=}0$