6-3

2023年12月9日 9:54

6.(4) $A=\begin{bmatrix} 1 & \frac12 & \cdots & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 1 & \cdots & \frac12 & \frac12 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac12 & \frac12 & \cdots & 1 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & \cdots & \frac12 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac12 & & & \\ \frac12 & 1-\lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1-\lambda & \frac12 \\ & & & \frac12 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac12 & \cdots & \frac12 & \frac12 \\ \lambda-\frac12 & \frac12-\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac12-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-\frac12 & \frac12-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\lambda+\frac{n-1}{2} & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & \frac12-\lambda & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & & \frac12-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{n+1}{2}-\lambda\right)\left(\frac12-\lambda\right)^{n-1}=0$$

$\therefore \lambda=\frac{n+1}{2}$ 或 $\frac12$ ($n-1$重根)

7. $\det(C-\lambda I)=\begin{vmatrix} A-\lambda I & 0 \\ 0 & B-\lambda I \end{vmatrix}$

$$=|A-\lambda I||B-\lambda I|$$

$\therefore$ 有C的特征多项式为A的特征多项式和B的特征多项式之积.

即 C的特征值为 (A的特征值) $\cap$ (B的特征值)

$\therefore$ C是正定矩阵.

8. 设A的k阶顺序主式为$|A_k|$

则对$-A$来说 $|A'_k|=(-1)^k|A_k|$

f负定 $\Leftrightarrow$ $-f$正定 $\Leftrightarrow$ $|A'_k|>0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} k\text{为奇数时}, |A_k|<0 \\ k\text{为偶数时}, |A_k|>0 \end{cases}$

9. $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$ $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & a-\lambda \end{vmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a-\lambda \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-1-a & 1+a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & a-\lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1+a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+a-\lambda)\left[(a-\lambda)(a-\lambda-1)-2\right]$$

$$= (1+a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2-(a-\lambda)-2\right]$$

$$= (1+a-\lambda)^2(a-\lambda-2) = 0$$

$\therefore \lambda = 1+a$ 或 $a-2$

(1) $a>2$

(2) $a<-1$