10.8

2023年10月9日 16:27

习题 2.6 (A)

3. (1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2}(1+x)=1$ ✓

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}1+x+x^2=3$ ×

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)^2}{1-x}=0$ ×

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-x}=2$ ×

综上 $1-x\sim\frac{1}{2}(1-x^2)\quad(x\to 1)$

4. (1) $2x^3\sim 2x^3+3x^2-5x+6\quad(x\to\infty)$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}=1$

$\therefore\sqrt{x}\sim\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\quad(x\to+\infty)$

(B) 1. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\frac{1}{2}x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\frac{1}{2}x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\frac{1}{2}x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

即 $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3\quad(x\to 0)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\frac{1}{4}\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{1}{4}\cdot 4x}=1$

即 $\arctan x\sim\frac{1}{4}\sin 4x\quad(x\to 0)$

3. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2-x=2$

即 $2x-x^2=O(x)\quad(x\to 0)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{1}=0$

即 $\sqrt{1+x}-1=o(1)\quad(x\to 0)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1-nx}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^k-1-nx}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}C_n^k x^k}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=2}^{n}C_n^k x^{k-1}=0$

即 $(1+x)^n=1+nx+o(x)\quad(x\to 0)$

$f(x)=o(x^n)\iff\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$

$g(x)=o(x^m)\iff\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^m}=0$

5. (1) 不妨设 $f(x)=o(x^n)$，$g(x)=o(x^m)$ 且 $f(x),g(x)>0$

那么就有 $\frac{f(x)}{x^n}<\frac{f(x)+g(x)}{x^n}=\frac{f(x)}{x^n}+\frac{g(x)}{x^n}<\frac{f(x)}{x^n}+\frac{g(x)}{x^m}$

又∵ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0\qquad\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x^n}+\frac{g(x)}{x^m}\right]=0$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^n}=0$

即 $f(x)+g(x)=o(x^n)\quad(x\to 0)$

综上 $o(x^n)+o(x^m)=o(x^n)\quad(0<n<m,\ x\to 0)$

(2) 不妨设 $f(x)=o(x^n)$，$g(x)=o(x^m)$

那么 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot g(x)}{x^{m+n}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x^n}\cdot\frac{g(x)}{x^m}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^m}$

$=0$

即 $f(x)g(x)=o(x^{m+n})\quad(x\to 0)$

综上 $o(x^n)\cdot o(x^m)=o(x^{m+n})\quad(0<n<m,\ x\to 0)$