11.2

2023年11月6日 12:36

习题3.5 (A)

14. (1) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$

(3) 设 $k-1 < n \le k$ $(k\in\mathbb{Z})$，则有：$\frac{x^{k-1}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} \le \frac{x^k}{e^{ax}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^{ax}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{ae^{ax}} = \cdots = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{k!}{a^k e^{ax}} = 0$

同理 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{k-1}}{e^{ax}} = 0$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}} = 0$

(5) 记 $t = x-\pi$，则原式 $= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan(nt+n\pi)}{\tan(mt+m\pi)}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan(nt)}{\tan(mt)} = \frac{n}{m}$

(7) 原式 $= \lim\limits_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n}\lim\limits_{x\to a}x^{m-n}$

$= \frac{m}{n}\cdot a^{m-n}$

15. (2) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}+1}$

$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}\right]+1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)x}{x}\right]+1}$

$= \frac{1}{2}$

(4) 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\sin x}$

考虑 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\sin x = \lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

综上 原式 $= e^0 = 1$

综上 原式 $= e^0 = 1$

(6) 考虑 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]\right\}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

综上 原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$

(8) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos 2x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$

习题 3.6 (A)

1\. (1) 泰勒公式是拉格朗日中值定理的推广

拉格朗日中值定理是一阶的泰勒公式

(2) 皮亚诺余项描述了整体，拉格朗日余项描述了局部

拉格朗日余项是皮亚诺余项的精确值

(3) 迈克劳林公式是在x=0处的泰勒展开

4\. $f(x) = x^{-1}$ $\therefore f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot n!\cdot x^{-(n+1)}$

$\therefore f(x_0) = -1$ $f^{(n)}(x_0) = (-1)^n\cdot n!\cdot(-1)^{-(n+1)} = -n!$

$\because f(x) = f(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + o((x-x_0)^n)$

$\therefore \frac{1}{x} = -1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$

综上 $\frac{1}{x} = -\sum\limits_{i=0}^{n}(x+1)^n + (-1)^{n+1}!\cdot\xi^{-(n+2)}\cdot(x+1)^{n+1}$

6\. (1) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

x^3

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(2) 同(1)有 原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$

(3) 原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^3+\frac{1}{2}x^6+o(x^6)-1-x^3}{(2x)^5}$

$$= \frac{1}{32}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^6+o(x^6)}{x^5}$$

$$= \frac{1}{32}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^6)}{x^5}\right] = 0$$

(4) 原式 $= \lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x})$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

(5) 原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x\cdot x}$

$$= \frac{1}{2}$$

(6) $\because e^x = 1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$\therefore e^x-1-x = \frac{x^2}{2}+o_1(x^2)$

$\because (1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{x^n}+o(x^n)$

$\therefore \sqrt{1-x} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o_2(x^2)$

$\because \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

$\therefore \cos\sqrt{x} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o_3(x^2)$

综上 原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o_1(x^2)}{-\frac{x^2}{6}+o_2(x^2)-o_3(x^2)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o_1(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{6}+\frac{o_2(x^2)}{x^2}+\frac{o_3(x^2)}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+0}{-\frac{1}{6}+0-0}$$

$$= -3$$