Cours d'analyse numérique
Chapitre 2 : Intégration numérique

Dr. Nehla DEBBABI

29 janvier 2018

Motivation :

- Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ et F une primitive de f sur $[a, b]$ alors :
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

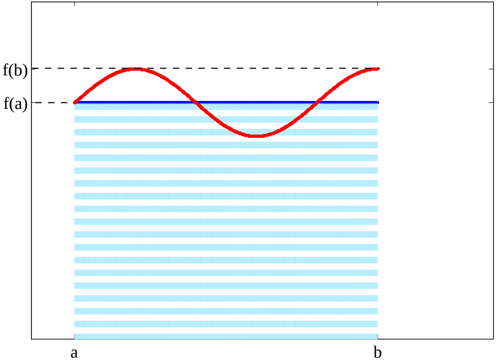
- Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ dont on connaît la valeur en un nombre fini de points. Peut-on calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$?

- Soit $f(t) = \dfrac{e^{sin(t^3)}}{t^2 + artan(t)}$. Peut-on intégrer f sur $[a, b]$ (a, b dans le domaine de définition de f) ?

Méthodes d'intégration numérique pour approcher $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Méthodes d'intégration simples : Méthode du rectangle à gauche

Principe :



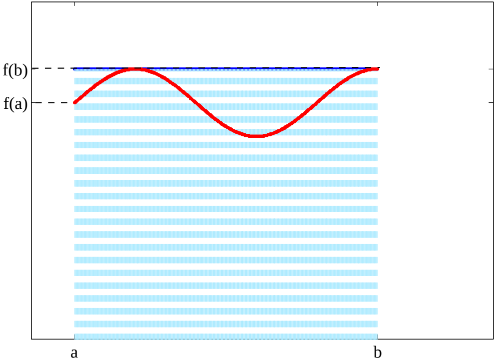
Formule :

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt \simeq I_{Rg}^{s}(f) = f(a)(b-a).$$

Rg : *R*ectangle à *g*auche, s : *s*imple.

Méthodes d'intégration simples : Méthode du rectangle à droite

Principe :



Formule :

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt \simeq I^s_{Rd}(f) = f(b)(b-a).$$

Rd : *R*ectangle à *d*roite.

Méthodes d'intégration simples : Méthode du rectangle du milieu

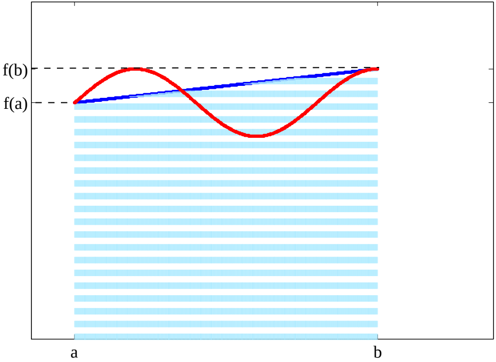
Formule :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq I^s_{Rm}(f) = f(\frac{a+b}{2})(b-a).$$

Rm : Rectangle du $m$ilieu.

Méthodes d'intégration simples : Méthode du trapèze

Principe :



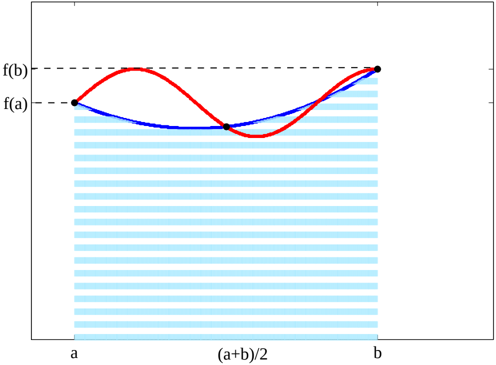
Formule :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq I_T^s(f) = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

T : Trapèze.

Méthodes d'intégration simples : Méthode de Simpson

Principe :



Formule :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq I_S^s(f) = \frac{1}{3}(\frac{b-a}{2})\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right].$$

S : Simpson.

Exemple

Donne une valeur approchée de $\int_{-1}^{1} e^{-t^2}\,dt$ par la méthode du :

- rectangle du milieu.
- trapèze.
- Simpson.

Méthodes d'intégration composites

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On cherche à trouver une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$. Pour ce faire, nous subdivisons $[a, b]$ en n sous-intervalles uniformes $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{0, n-1\}$: en utilisant un pas fixe $h = \frac{b-a}{n}$.

$x_0 = a + 0.h$, $x_1 = a + 1.h = \frac{b-a}{n}$, ... , $x_n = a + nh = a + n\frac{b-a}{n} = b$.

Nous approchons $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$, où pour $i \in \{0, \cdots, n-1\}$,

$\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$ est approchée par les méthodes d'intégrations simples déjà vues.

Méthodes d'intégration composites

1-Méthode du rectangle à gauche composite :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq I^c_{Rg}(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}).$$

2-Méthode du rectangle à droite composite :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq I^c_{Rd}(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + (i+1)\frac{b-a}{n}).$$

3-Méthode du rectangle du milieu composite :

Si l'expression de f est connue :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq I^c_{Rm}(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{2i+1}{2}\frac{b-a}{n}).$$

c : $c$omposite.

Méthodes d'intégration composites

Sinon, pour $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$:

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq I_{Rm}^c(f) = 2\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{p-1} f(a + (2i+1)\frac{b-a}{n}).$$

3-Méthode du trapèze composite :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq I_T^c(f) = h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\Big(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Big)$$

4-Méthode de Simpson composite :

Pour cette méthode $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$, est pair (le nombre de points $n+1$ est impair).

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq I_S^c(f) = \frac{b-a}{3n}\Big(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{p-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{p-1} f(x_{2i})\Big).$$

Exercice

Soit $I = \int_0^{\pi} \sin(t)dt$.

- Calculer la valeur exacte de I.
- Approcher la valeur de I par les méthodes d'intégration composites suivantes : rectangle à gauche, trapèze et Simpson, pour $n = 4$ et $n = 8$.

Réponse :

$$I = \int_0^{\pi} \sin(t)dt = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

Pour $n = 4$, $h = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$.

La méthode du rectangle à gauche :

$$I \simeq \frac{\pi}{4}\sum_{i=0}^{3} \sin(i\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2} + 1\right] = 1.8961.$$

Exercice

La méthode du trapèze :

$$I \simeq \frac{\pi}{4}\Big(\frac{\sin(0)+\sin(\pi)}{2} + \sum_{i=1}^{3} \sin(i\frac{\pi}{4})\Big) = \frac{\pi}{4}\big[\sqrt{2}+1\big] = 1.8961.$$

La méthode de Simpson :

$$I \simeq \frac{\pi}{12}\big(\sin(0)+\sin(\pi) + 4\sum_{i=0}^{1} \sin((2i+1)\frac{\pi}{4}) + 2\sum_{i=1}^{1} \sin(2i\frac{\pi}{4})\big) = 2.0046.$$

Pour $n = 8$, $h = \dfrac{\pi - 0}{8} = \dfrac{\pi}{8}$.

La méthode du rectangle à gauche : $I \simeq 1.9742$.

La méthode du trapèze : $I \simeq 1.9742$.

La méthode de Simpson : $I \simeq 2.0002$

Formules de quadrature

Définition 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$.
On appelle formule de quadrature toute somme finie de la forme :

$$\widetilde{I}(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i),$$

donnant une valeur approchée de $I(f)$, où les constantes ω_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$ désignent les poids de la formule de quadrature et x_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$, ses points.

Exercice :

Montrer que les méthodes composites vues dans ce cours sont des formules de quadrature.

Degré d'exactitude d'une formule de quadrature

Définition 2

Une formule de quadrature est dite exacte sur un ensemble F ($\mathbb{R}_n[X]$ par exemple) si et seulement si pour toute fonction f appartenant à F, l'erreur $E(f) = |I(f) - \widetilde{I}(f)| = 0$.

Définition 3

On dit qu'une formule de quadrature est à n degré d'exactitude si elle est exacte pour tout polynôme $P \in \{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$, mais non exacte pour le polynôme X^{n+1}.

Exercice :

Déterminer le degré d'exactitude des méthodes simples vues dans ce cours pour approcher $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ avec f est continue sur $[-1, 1]$.

Résumé

f est continue sur $[a, b]$.

Formule	Deg d'exact	points	poids
Rg	0	$x_0 = a$	$\omega_0 = b - a$
Rd	0	$x_0 = b$	$\omega_0 = b - a$
Rm	1	$x_0 = \frac{a+b}{2}$	$\omega_0 = b - a$
T	1	$x_0 = a,\ x_1 = b$	$\omega_0 = \omega_1 = \frac{b-a}{2}$
S	3	$x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b$	$\omega_0 = \omega_2 = \frac{b-a}{6}$, $\omega_1 = 4\omega_0$

Exercice

On considère la formule de quadrature suivante :

$$I_{GL}(f) = f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Déterminer le degré d'exactitude de cette méthode pour approcher $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$.

Il s'agit de la méthode de Gauss-Légendre.

Erreur d'intégration

Soient $I(f) = \int_a^b f(t)dt$, et $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ alors :

$$|I(f) - I^c_{Rg}(f)| \leq \frac{b-a}{2} h \max_{x\in[a,b]} |f^{'}(x)|.$$

$$|I(f) - I^c_{Rd}(f)| \leq \frac{b-a}{2} h \max_{x\in[a,b]} |f^{'}(x)|.$$

Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ alors :

$$|I(f) - I^c_{Rm}(f)| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f^{''}(x)|.$$

$$|I(f) - I^c_{T}(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f^{''}(x)|.$$

Si $f \in \mathcal{C}^{(4)}([a,b])$ alors :

$$|I(f) - I^c_{S}(f)| \leq \frac{b-a}{180 \times 16} h^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Exercice

On considère l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

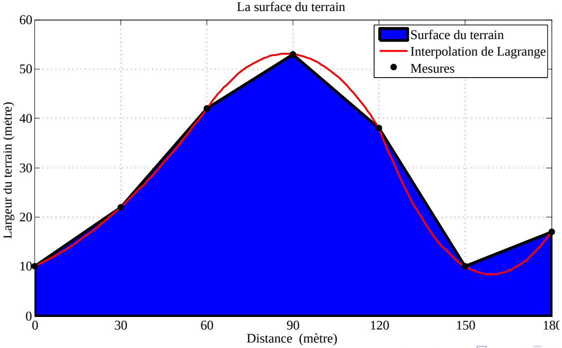
1. Calculer la valeur exacte de cette intégrale.
2. Approcher la valeur de cette intégrale par la méthode du trapèze composite pour $n = 3$ sous-intervalles.
3. Quel est le nombre de sous-intervalles n à considérer pour avoir une erreur d'intégration inférieure à 10^{-4} ?

Exercice

On se propose de déterminer une valeur approchée de la surface d'un terrain situé au bord d'une rivière. La seule information qu'on a sur ce terrain est sa largeur mesurée chaque 30 mètres comme indiquée dans le tableau ci-dessous.

Distance (mètre)	0	30	60	90	120	150	180
Largeur (mètre)	10	22	42	53	38	10	17

Utiliser la méthode de Simpson composite pour ce faire.



Exercice

Soient α un réel appartenant à l'intervalle $]0,1]$, et $x_0 = -\alpha$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \alpha$, trois valeurs de l'intervalle $[-1,1]$. On considère I_3, la formule de quadrature définie par :

$$I_3(f) = af(x_0) + bf(x_1) + cf(x_2).$$

I_3 est supposée une approximation de $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, où f est une fonction continue sur $[-1,1]$, et a, b et c sont des réels inconnus.

1. Déterminer a, b et c afin que I_3 soit exacte de degré minimal égal à 2.
2. Pour les valeurs trouvées de a, b et c, discuter suivant la valeur de α le degré d'exactitude de la formule de quadrature I_3.