Cours d'analyse numérique
Chapitre 1 : Interpolation polynomiale

Dr. Nehla DEBBABI

21 janvier 2018

Motivation : exemple en météorologie

- Les données : la température maximale moyenne par mois pour les mois de Janvier, Mars, Mai, Juillet, Septembre, Novembre et Décembre.

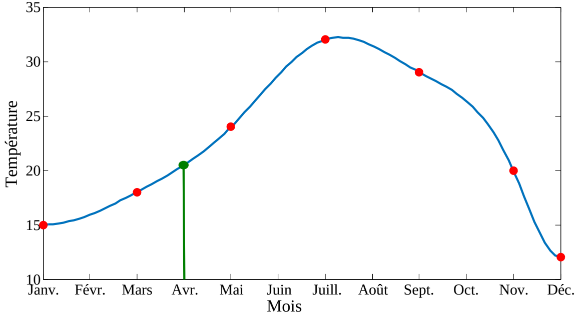


FIGURE : Température maximale moyenne par mois

- Problématique : peut-on estimer la température maximale moyenne du mois d'Avril ?
- Peut-on déterminer l'expression de la fonction dont la courbe représentative passe par les températures déjà observées ?

Interpolation polynomiale $n = 2$

- On considère trois points de coordonnées : (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

- Problématique : on chercher à déterminer un polynôme P de degré 2 : $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$, tel que :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{array} \right.$$

- Écriture matricielle du système (S) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

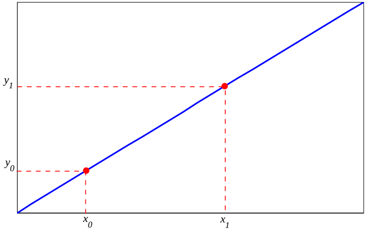
- Le système (S) admet une solution unique, si et seulement si, $det(A) \neq 0$.

Interpolation polynomiale $n = 2$

- $det(A) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)$.
- Pour que $det(A) \neq 0$ il faut que les x_i, $i \in \{0, 1, 2\}$ soient deux à deux distincts.
- Dans ce cas,
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
- Limitation : Lorsque le nombre de points $\nearrow$: le degré du polynôme $\nearrow$ $\Longrightarrow$ la complexité de l'inversion de la matrice A $\nearrow$.
- Alternative : Interpolation par les polynômes de Lagrange.

Interpolation de Lagrange $n = 1$

- On considère deux points de coordonnées : (x_0, y_0), et (x_1, y_1).



- Problématique : on chercher à déterminer un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x$, de degré 1, passant par ces deux points. Cela revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{array}\right.$ dont la solution est donnée par :

$$a_0 = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0} \quad \text{et} \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Interpolation de Lagrange $n = 1$

- $$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x \\ &= \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x \\ &= y_0 \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{L_0(x)} + y_1 \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{L_1(x)} \\ P(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \end{aligned}$$

- $L_0(x)$ et $L_1(x)$ représentent des polynômes de Lagrange de degré 1.
- L_0 et L_1 forment une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
- $L_0(x_0) = 1$, $L_0(x_1) = 0$, $L_1(x_0) = 0$ et $L_1(x_1) = 1$.

Interpolation de Lagrange $n = 2$

- On considère trois points de coordonnées : (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2).
- Problématique : on chercher à déterminer un polynôme P de degré 2 qui interpole ces points.
- Pour ce faire, on détermine trois polynômes L_i, $i \in \{0, 1, 2\}$, de degré 2, tels que :

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de kronecker.

Interpolation de Lagrange $n = 2$

- Pour $i = 0$, L_0 s'annule en x_1 et x_2. Donc, $L_0(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Sachant que $L_0(x_0) = 1$, on trouve $\alpha = \dfrac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$.

- Ainsi, $L_0(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$.

- De la même façon on démontre que :
  $L_1(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$ et $L_2(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$.

- $\{L_0, L_1, L_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$: une famille libre de dimension $3 = dim(\mathbb{R}_2[X])$.

- $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} y_i L_i(x)$: écriture de P dans la base de polynômes de Lagrange.

Exercice 1

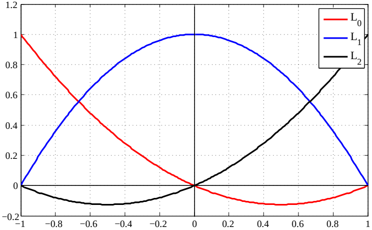
On considère les trois points de coordonnées : $(-1, 8)$, $(0, 3)$ et $(1, 6)$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ interpolant ces points.
2. Déterminer les polynômes de Lagrange associés : L_0, L_1 et L_2.
3. Donner l'allure de la courbe représentative de L_i, $i \in \{0, 1, 2\}$, sur $[-1, 1]$.
4. Déterminer le polynôme de Lagrange interpolant les trois points de l'énoncé.

Correction de l'exercice 1

On considère les trois points de coordonnées : $(-1, 8)$, $(0, 3)$ et $(1, 6)$.

1. Les abscises des trois points sont deux à deux distinctes donc il existe un unique polynôme P interpolant ces points.
2. $L_0(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$, $L_1(x) = 1 - x^2$ et $L_2(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$.
3. Allures des polynômes de Lagrange.

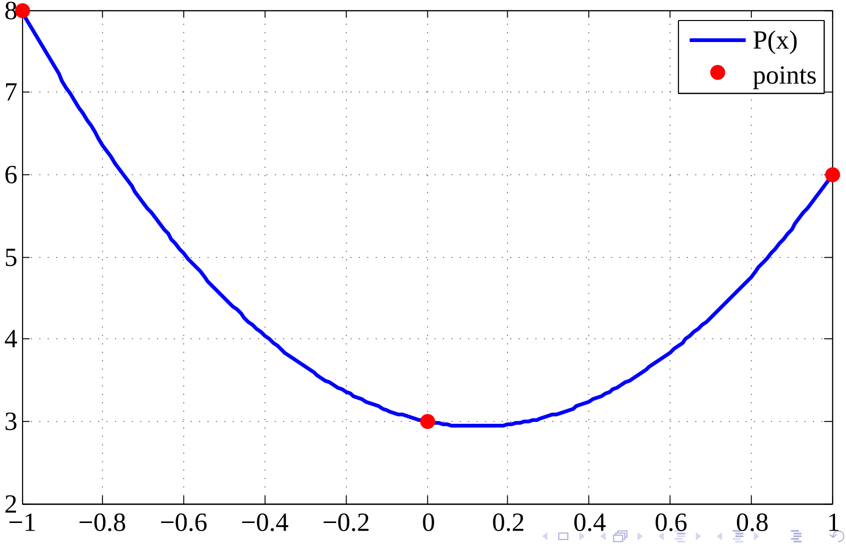


4.

$$\begin{aligned} P(x) &= 8L_0(x) + 3L_1(x) + 6L_2(x) \\ &= 4x(x-1) + 3 - 3x^2 + 3x(x+1) \\ &= 4x^2 - x + 3 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1

Résultat de l'interpolation :



Interpolation de Lagrange : généralisation pour $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème

Soient $n+1$ points de coordonnées (x_i, y_i), $i \in \{0, \cdots, n\}$ tels que $x_i \neq x_j$, pour $0 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$. Il existe alors un unique polynôme d'interpolation de Lagrange $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$, $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$. Ce polynôme s'exprime comme :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x),$$

où $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

La famille $\{L_0, L_1, \cdots, L_n\}$ est une base de l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2

Donner le polynôme d'interpolation de lagrange passant par les points donnés par le tableau suivant :

i	0	1	2	3
x_i	0	2	3	5
y_i	-1	2	9	87

Exercice 3

Écrire un algorithme retournant le polynôme de Lagrange qui interpole $n+1$ points de coordonnées (t_i, y_i), $i \in \{0, \cdots, n\}$ satisfaisant le théorème d'interpolation de Lagrange.

Réponse :

$S \leftarrow 0$
Pour i de 0 à n faire
$P \leftarrow 1$
Pour j de 0 à n faire
Si $i <> j$ faire
$P \leftarrow P \dfrac{x - t[j]}{t[i] - t[j]}$
Fin Si
Fin pour
$S \leftarrow S + y[i]P$
Fin pour

Interpolation d'une fonction continue par un polynôme

On considère la fonction $f(x) = e^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

Donner le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points $-1, 0$ et 1.

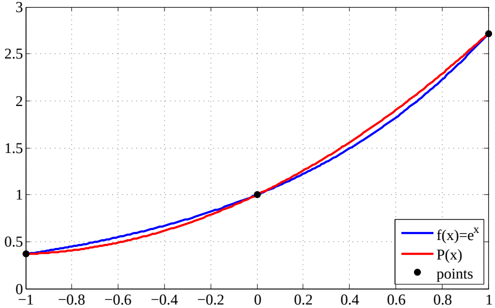
Interpolation d'une fonction continue par un polynôme

On considère la fonction $f(x) = e^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

Donner le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points $-1, 0$ et 1.

Réponse :

$$P(x) = \left(\frac{1}{2e} + \frac{e}{2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{-1}{2e} + \frac{e}{2}\right)x + 1.$$



Erreur d'approximation

Théorème

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([x_0, x_n])$ et P_n son polynôme d'interpolation aux points $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. L'erreur d'approximation de f par P_n est donnée par : $\forall x \in [x_0, x_n]$, $\exists \zeta \in [x_0, x_n]$, tel que

$$E_n(x) = \mid f(x) - P_n(x) \mid = \frac{\mid f^{(n+1)}(\zeta) \mid}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} \mid x - x_i \mid .$$

Cette erreur peut être majorée comme suit :

$$E_n(x) = \mid f(x) - P_n(x) \mid \leq \frac{\max\limits_{t \in [x_0, x_n]} \mid f^{(n+1)}(t) \mid}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} \mid x - x_i \mid .$$

Exemples

Exemple 1 : Avec quelle précision peut-on calculer la valeur de $\log(100.5)$ à l'aide d'une interpolation de Lagrange aux points : 100, 101, 102 et 103 ?.

Exemple 2 : Avec quelle précision peut-on calculer la valeur de $\sin(\frac{\pi}{36})$ à l'aide d'une interpolation de Lagrange aux points : 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$?.

Minimisation de l'erreur d'interpolation

Comment peut-on minimiser l'erreur d'interpolation ?

Réponse intuitive : Augmenter le nombre de points d'interpolation. Cette intuition est vraie pour :

- une grande classe de fonctions continues.
- des points d'interpolation bien choisis.

Contre exemple : Le phénomène de Runge. Par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+(10x)^2}$. La dérivée d'ordre $n+1$, $f^{(n+1)}(x)$ croit plus rapidement que $(n+1)!$ lorsque n augmente.

Minimisation de l'erreur d'interpolation

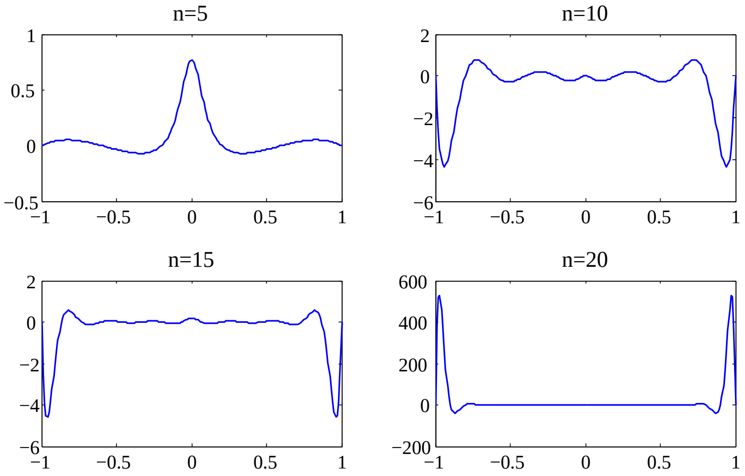


FIGURE : L'erreur $f(x) - P_n(x)$, où P_n désigne le polynôme de Lagrange pour $n \in \{5, 10, 15, 20\}$.

Minimisation de l'erreur d'interpolation

Alternatives :

- Choisir des points d'interpolation non équidistants, de l'intervalle $[a, b]$, selon la méthode de Tchebychev :

$$x_i = a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n+2}\right)\right), \; i \in \{0, 1 \cdots, n\}.$$

- Subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en des sous-intervalles et interpoler la fonction sur chaque sous-intervalle.

Exercice 4

Soient f une fonction continue sur $[-1, 1]$ et P le polynôme de Lagrange interpolant f aux points d'abscisses -1, 0, et 1.

Exprimer $\int_{-1}^{1} P(x)dx$ en fonction de $f(-1)$, $f(0)$, et $f(1)$.

Réponse :

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \frac{1}{3}\big[f(-1) + 4f(0) + f(1)\big].$$

La formule trouvée correspond à la formule de quadrature de Simpson de l'intégration numérique d'une fonction sur un intervalle.