

# Departamento de Matemática Aplicada

## Análisis Numérico, MM412

*Lucem Asplem*  
Myrian Gonzalez Orellana

UNAH

PACIII2023

# Tabla de Contenidos

- 1 Preliminares del cálculo
- 2 Raíces de ecuaciones
- 3 Aproximación de funciones
- 4 Derivación Numérica
- 5 Integración Numérica
- 6 Problemas de valor inicial
- 7 Problemas de valores en la frontera
- 8 Ejercicios

# Teoremas Preliminares I

Esta presentación esta basada en el texto de Burden, 2017.

## Criterio del límite

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Asuma que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existe y es igual a  $L$ . Entonces la sucesión  $\{a_n\} = \{f(n)\}$  converge a  $L$  también.

[Enlace a ejercicio.](#)

## Teorema de convergencia monótona

Suponga que la sucesión  $\{a_n\}$  es monótona creciente y acotada superiormente, entonces  $\{a_n\}$  es convergente.

[Enlace a ejercicio.](#)

## Teorema del sándwich

Suponga que  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  convergen al valor de  $L$ . Además asuma que

$$a_n \leq x_n \leq b_n,$$

para  $n > N$  para algún  $N$  fijo; entonces  $\{x_n\}$  converge a  $L$ .

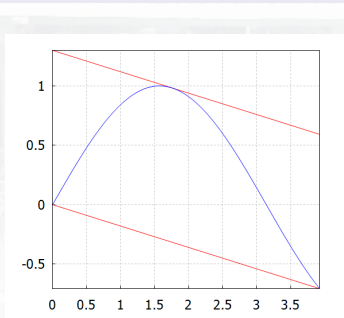
[Enlace a ejercicio.](#)

# Teoremas Preliminares II

## Teorema del valor medio

Si  $f \in C[a, b]$  y  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  con

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



**Figura:** En la figura se puede ver un ejemplo con  $f(x) = \sin(x)$  para  $x \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$

# Teoremas Preliminares III

## Teorema del valor extremo

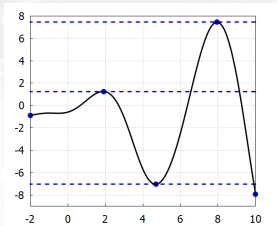
- Si  $f \in C[a, b]$ , entonces existe  $c_1, c_2 \in [a, b]$  con

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

para  $x \in [a, b]$ .

- Si además  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ , entonces  $c_1$  y  $c_2$  son iguales a los extremos ( $a$  o  $b$ ) o los lugares donde la derivada se hace cero en  $(a, b)$ .

[Enlace a ejercicio](#)



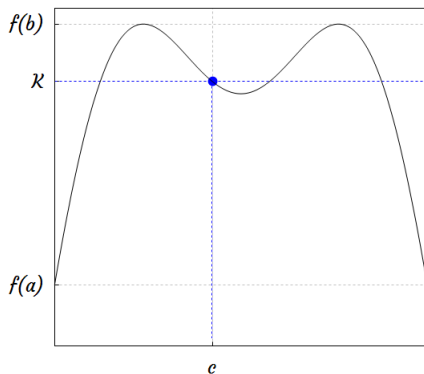
**Figura:** Se puede apreciar en el ejemplo, que el máximo de la función se alcanza en un lugar donde la derivada es cero y el mínimo en el extremo derecho.

# Teoremas Preliminares IV

## Teorema del valor intermedio

Si  $f \in C[a, b]$  y  $K$  es cualquier número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  para el cual  $f(c) = K$ .

[Enlace a ejercicio](#)



# Teoremas Preliminares V

Se define  $C^n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f, f', \dots, f^{(n)} \text{ son continuas en } [a, b]\}$ .

## Teorema de Taylor

Supong que:

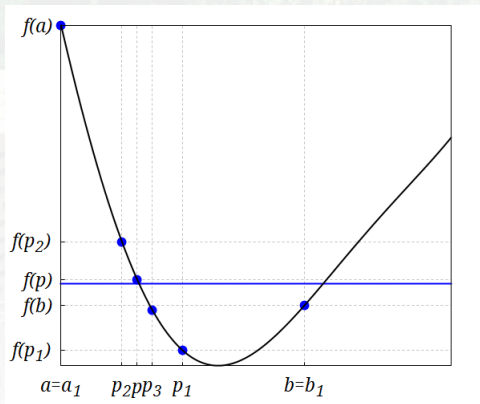
- $f \in C^n[a, b]$ .
- $f^{(n+1)}$  esta definida en  $[a, b]$ .
- $x_0 \in [a, b]$ .

Entonces, para cada  $x \in [a, b]$ , existe  $\xi(x) \in (x_0, x)$  (si  $x > x_0$  y  $\xi(x) \in (x, x_0)$  en el otro caso) tal que:

- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$  donde
- $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  y
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}.$

[Enlace a ejercicio](#)

# Raíces de ecuaciones I



**Figura: Método de Bisección:** En la figura se muestra el mecanismo de la bisección.



Listing 1: "Método de Bisección"

```
1 function x=Biseccion(f,a,b,TOL,N0)
2     i=1;FA=f(a);
3     while(i<=N0)
4         p=a+(b-a)/2;
5         FP=f(p);
6         if(FP==0 || (b-a)/2<TOL)
7             x=p;
8             break;
9         endif
10        i=i+1;
11        if(FA*FP>0)
12            a=p;
13            FA=FP;
14        else
15            b=p;
16        endif
17    endwhile
18    if(i>N0)
19        x=inf;
20    endif
21 endfunction
```

# Raíces de ecuaciones III

## Teorema de convergencia del método de bisección

Supongamos que  $f \in C[a, b]$  y  $f(a)f(b) < 0$ . El método de bisección genera una sucesión  $\{p_n\}$  que aproxima a un cero de  $f$ , tal que:

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

### Enlace a ejercicio

Primero note que  $p \in [a_n, b_n]$  (teorema del valor intermedio), entonces

$$|p - (a_n + b_n)/2| \leq (b_n - a_n)/2.$$

De esto se tiene que:

$$\begin{aligned} |p_n - p| &= |(a_n + b_n)/2 - p| \\ &\leq \frac{b_n - a_n}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{b - a}{2^{n-1}} \text{ ( inducción : } b_n - a_n \leq \frac{b - a}{2^{n-1}} \text{ )} \\ &= \frac{b - a}{2^n}. \end{aligned}$$

# Raíces de ecuaciones IV



## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(1/n) \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(1/n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.



## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(1/n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Entonces el límite buscado es 1.  
Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ \Rightarrow -\frac{1}{n} &\leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{-1}{n} &\leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{-1}{n} &\leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ \Rightarrow 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0 \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{-1}{n} &\leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ \Rightarrow 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el límite de la sucesión en cuestión es 0.  
Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

Teoremas Preliminares.



## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow L &= \sqrt{1 + L} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow L &= \sqrt{1 + L} \end{aligned}$$

Resolviendo la última ecuación se obtiene que:

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)|$  donde  $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x - 1))$ .

- $f$  es continua y diferenciable en  $[2,5]$ .

## Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)|$  donde  $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x - 1))$ .

- $f$  es continua y diferenciable en  $[2,5]$ .
- Por el teorema de valores extremos, existen  $c_1, c_2$  tales que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$

para todo  $x \in [2, 5]$  y entonces  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$ .

## Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)|$  donde  $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x - 1))$ .

- $f$  es continua y diferenciable en  $[2,5]$ .
- Por el teorema de valores extremos, existen  $c_1, c_2$  tales que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$

para todo  $x \in [2, 5]$  y entonces  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$ .

- Además dado que la función es diferenciable, se sabe que los posibles valores extremos se alcanzan en 2, 5 o donde la derivada se hace cero.

$$f'(x) = \exp(-\cos(x - 1))(\sin(x - 1)) = 0.$$

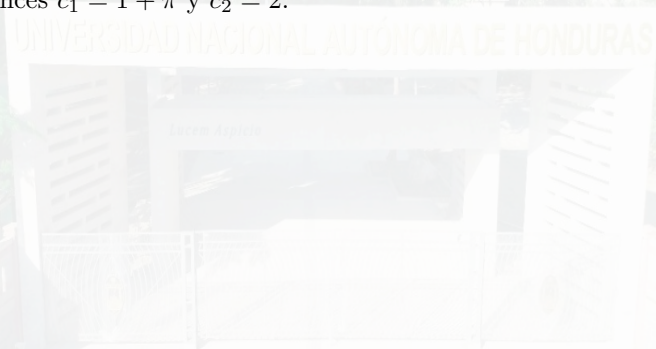
Las soluciones de esta ecuación son  $x = 1 + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . La única solución que se encuentra en el intervalo  $[2,5]$  es  $x = 1 + \pi$ .

# Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:

- $f(2) \approx 0,42$ .
- $f(5) \approx -0,92$ .
- $f(1 + \pi) \approx -1,72$ .

Entonces  $c_1 = 1 + \pi$  y  $c_2 = 2$ .





# Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:

- $f(2) \approx 0,42.$
- $f(5) \approx -0,92.$
- $f(1 + \pi) \approx -1,72.$

Entonces  $c_1 = 1 + \pi$  y  $c_2 = 2.$

- De lo anterior se obtiene que

$$\max_{x \in [2,5]} |f(x)| = \max(|f(2)|, |f(1 + \pi)|) = e - 1.$$

# Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:

- $f(2) \approx 0,42$ .

■  $f(5) \approx -0,92$ .

- $f(1 + \pi) \approx -1,72$ .

Entonces  $c_1 = 1 + \pi$  y  $c_2 = 2$ .

- De lo anterior se obtiene que

$$\max_{x \in [2, 5]} |f(x)| = \max(|f(2)|, |f(1 + \pi)|) = e - 1.$$

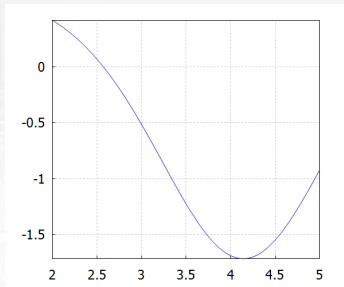


Figura: Gráfica de  $f(x)$  en  $[2,5]$ .

## Ejercicio (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo  $[2, 4]$ .

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo  $[2, 4]$ .

Elija  $f(x) = \sin(x)/\log(x)$ .

Dado que  $f(2) > 0$ ,  $f(4) < 0$ ,  $f$  es continua en  $[2, 4]$  y  $f(4) < 0 < f(2)$ , entonces (tomando  $K = 0$ ) por el teorema del valor intermedio existe un  $c$  tal que  $f(c) = K = 0$ .

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio(Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cual es el valor de  $n$  para conseguir un error de a lo mucho  $10^{-5}$ . ( $f(x) = \sin(x)/\log(x)$ ,  $x \in [2, 5]$ .)

$n$	$a$	$b$	$p$	$f(p)$	$ p-p^* $
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	$1.284530e-01$	$1.415927e-01$
2	3	3.5	3.5	$-2.800077e-01$	$3.584073e-01$
3	3	3.25	3.25	$-9.179542e-02$	$1.084073e-01$
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	$1.887677e-05$	$2.160867e-05$
17	3.1416	3.1416	3.1416	$5.547064e-06$	$6.349879e-06$
18	3.1416	3.1416	3.1416	$-1.117744e-06$	$1.279516e-06$
19	3.1416	3.1416	3.1416	$2.214656e-06$	$2.535182e-06$

## Ejercicio(Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cual es el valor de  $n$  para conseguir un error de a lo mucho  $10^{-5}$ . ( $f(x) = \sin(x)/\log(x)$ ,  $x \in [2, 5]$ .)

n	a	b	p	f(p)	p-p*
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	1.284530e-01	1.415927e-01
2	3	3.5	3.5	-2.800077e-01	3.584073e-01
3	3	3.25	3.25	-9.179542e-02	1.084073e-01
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	1.887677e-05	2.160867e-05
17	3.1416	3.1416	3.1416	5.547064e-06	6.349879e-06
18	3.1416	3.1416	3.1416	-1.117744e-06	1.279516e-06
19	3.1416	3.1416	3.1416	2.214656e-06	2.535182e-06

Se necesita garantizar que  $|p - \pi| \leq 10^{-5}$ . Por el teorema de bisección, se tiene

$$|p - \pi| \leq \frac{b - a}{2^n} = \frac{5 - 2}{2^n} = \frac{3}{2^n} \leq 10^{-5}$$

Si se resuelve la última desigualdad, se obtiene que  $n \geq 18,19$ , es decir que se puede escoger  $n = 19$ . Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función  $f(x) = \ln(\ln(x))$ . Determine lo siguiente:

- Calcule  $P_3(x)$  centrada en  $x_0 = 3$ .
- Aproxime  $P_3(1,5)$ .
- Encuentre la expresión para  $R_3(x)$ .
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime  $\int_2^4 f(x)dx$  usando  $P_3(x)$ .

## Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función  $f(x) = \ln(\ln(x))$ . Determine lo siguiente:

- Calcule  $P_3(x)$  centrada en  $x_0 = 3$ .
- Aproxime  $P_3(1,5)$ .
- Encuentre la expresión para  $R_3(x)$ .
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime  $\int_2^4 f(x)dx$  usando  $P_3(x)$ .

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$



## Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función  $f(x) = \ln(\ln(x))$ . Determine lo siguiente:

- Calcule  $P_3(x)$  centrada en  $x_0 = 3$ .
- Aproxime  $P_3(1,5)$ .
- Encuentre la expresión para  $R_3(x)$ .
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime  $\int_2^4 f(x)dx$  usando  $P_3(x)$ .

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \frac{f(3)}{0!} (x - 3)^0 + \frac{f'(3)}{1!} (x - 3)^1 + \frac{f''(3)}{2!} (x - 3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!} (x - 3)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (x-3)^2 \\ &+ \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (x-2)^3 \end{aligned}$$

$$= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (x-3)^2 \\ + \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (x-3)^3$$

$$P_3(1,5) = \ln(\ln(3)) + \frac{(1,5-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (1,5-3)^2 \\ + \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (1,5-3)^3 \\ \approx -0,69955228$$

$$\begin{aligned} &= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (x-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (x-2)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(1,5) &= \ln(\ln(3)) + \frac{(1,5-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (1,5-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (1,5-3)^3 \\ &\approx -0,69955228 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{(4)!} (x-3)^4 \\ &= - \frac{6 (\log \xi(x))^3 + 11 (\log \xi(x))^2 + 12 \log \xi(x) + 6}{\xi(x)^4 (\log \xi(x))^4} (x-3)^4. \end{aligned}$$

Observación: Si  $p^*$  es una aproximación de  $p$ , entonces se definen los errores:

■ Error absoluto:  $|p - p^*|$ .

■ Error relativo:  $\frac{|p - p^*|}{p}$ .

Error absoluto:

$$|f(1,5) - P_3(1,5)| \approx 0,20316817$$

Error relativo:

Observación: Si  $p^*$  es una aproximación de  $p$ , entonces se definen los errores:

■ Error absoluto:  $|p - p^*|$ .

■ Error relativo:  $\frac{|p - p^*|}{p}$ .

Error absoluto:

$$|f(1,5) - P_3(1,5)| \approx 0,20316817$$

Error relativo:

$$\frac{|f(1,5) - P_3(1,5)|}{|f(1,5)|} \approx 0,22506211$$

$$\int_2^4 f(x)dx \approx \int_2^4 P_3(x)dx$$

Teoremas Preliminares.

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\ &= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3 dx\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.



$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3 dx \\&= \left[ \ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3 \right. \\&\quad \left. + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-2)^4 \right]_2^4\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3 dx \\&= \left[ \ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3 \right. \\&\quad \left. + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-2)^4 \right]_2^4 \\&\approx 0,1242167\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicios (Método de Newton-Raphson, Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo  $\theta$  cambia con una rapidez constante de  $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$ .

Al final de  $t$  segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2} \left( \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t) \right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez  $\omega$  con que cambia  $\theta$ . Asuma que  $g = 32,17 \text{ pies}/\text{s}^2$ . Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.

## Ejercicios (Método de Newton-Raphson, Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo  $\theta$  cambia con una rapidez constante de  $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$ .

Al final de  $t$  segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2} \left( \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t) \right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez  $\omega$  con que cambia  $\theta$ . Asuma que  $g = 32,17 \text{ pies}/\text{s}^2$ . Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.

Dado que  $x(2) = 60$ , se sustituye esto en la ecuación ofrecida.

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que  $\omega < 0$ , entonces rápidamente se puede ver que  $f(-1) > 0$  y  $f(-2) < 0$ . Con esto se escoge el intervalo  $[-2, -1]$ .

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que  $\omega < 0$ , entonces rápidamente se puede ver que  $f(-1) > 0$  y  $f(-2) < 0$ . Con esto se escoge el intervalo  $[-2, -1]$ .

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de  $10^{-12}$  mediante el método de bisección?

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que  $\omega < 0$ , entonces rápidamente se puede ver que  $f(-1) > 0$  y  $f(-2) < 0$ . Con esto se escoge el intervalo  $[-2, -1]$ .

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de  $10^{-12}$  mediante el método de bisección?

Usando el teorema de cota de error del método de bisección se plantea:

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n} = \frac{-1 - (-2)}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-12}.$$

$$10^{12} \leq 2^n.$$

Resolviendo la inecuación se obtiene  $n \geq 40$ .



- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.



- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.

Cuando no conocemos el valor de la raíz, el error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.

Cuando no conocemos el valor de la raíz, el error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.

Cuando no conocemos el valor de la raíz, el error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

n	a	b	p	f(p)	Error relativo
0	-2	-1	*	*	*
1	-1.5	-1	-1.5	-2.121565e+01	*
2	-1.5	-1.25	-1.25	7.755373e+00	2.000000e-01
3	-1.375	-1.25	-1.375	-6.045842e+00	9.090909e-02

- Aplique el método de Newton-Raphson para obtener una aproximación con una exactitud de  $10^{-5}$ . Utilice como aproximación inicial la aproximación encontrada en el inciso anterior.



Burden, Richard L y otros (2017). *Analisis numerico*.