

# Departamento de Matemática Aplicada

## Análisis Numérico, MM412

*Lucem Asplein*  
Myrian Gonzalez Orellana

UNAH

PACIII2023

# Tabla de Contenidos

- 1 Preliminares del cálculo
- 2 Raíces de ecuaciones
- 3 Derivación Numérica
- 4 Integración Numérica
- 5 Problemas de valor inicial
- 6 Problemas de valores en la frontera
- 7 Ejercicios

# Teoremas Preliminares I

Esta presentación esta basada en el texto de Burden, 2017.

## Criterio del límite

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Asuma que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existe y es igual a  $L$ . Entonces la sucesión  $\{a_n\} = \{f(n)\}$  converge a  $L$  también.

[Enlace a ejercicio.](#)

## Teorema de convergencia monótona

Suponga que la sucesión  $\{a_n\}$  es monótona creciente y acotada superiormente, entonces  $\{a_n\}$  es convergente.

[Enlace a ejercicio.](#)

## Teorema del sándwich

Suponga que  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  convergen al valor de  $L$ . Además asuma que

$$a_n \leq x_n \leq b_n,$$

para  $n > N$  para algún  $N$  fijo; entonces  $\{x_n\}$  converge a  $L$ .

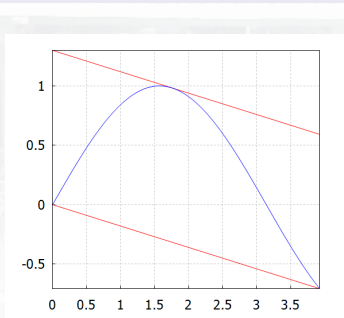
[Enlace a ejercicio.](#)

# Teoremas Preliminares II

## Teorema del valor medio

Si  $f \in C[a, b]$  y  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  con

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



**Figura:** En la figura se puede ver un ejemplo con  $f(x) = \sin(x)$  para  $x \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$

# Teoremas Preliminares III

## Teorema del valor extremo

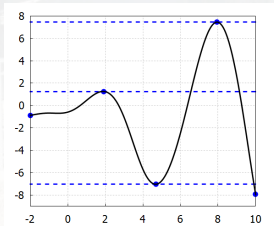
- Si  $f \in C[a, b]$ , entonces existe  $c_1, c_2 \in [a, b]$  con

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

para  $x \in [a, b]$ .

- Si además  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ , entonces  $c_1$  y  $c_2$  son iguales a los extremos ( $a$  o  $b$ ) o los lugares donde la derivada se hace cero en  $(a, b)$ .

[Enlace a ejercicio](#)



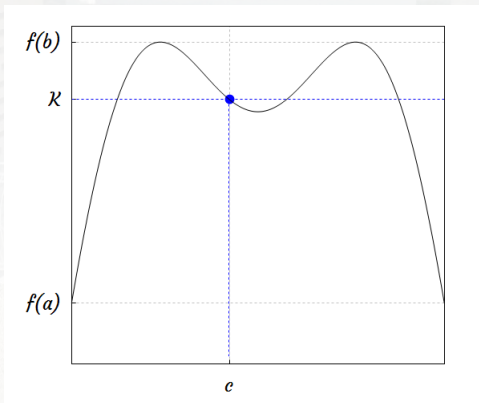
**Figura:** Se puede apreciar en el ejemplo, que el máximo de la función se alcanza en un lugar donde la derivada es cero y el mínimo en el extremo derecho.

# Teoremas Preliminares IV

## Teorema del valor intermedio

Si  $f \in C[a, b]$  y  $K$  es cualquier número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  para el cual  $f(c) = K$ .

[Enlace a ejercicio](#)



# Teoremas Preliminares V

Se define  $C^n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f, f', \dots, f^{(n)} \text{ son continuas en } [a, b]\}$ .

## Teorema de Taylor

Supong que:

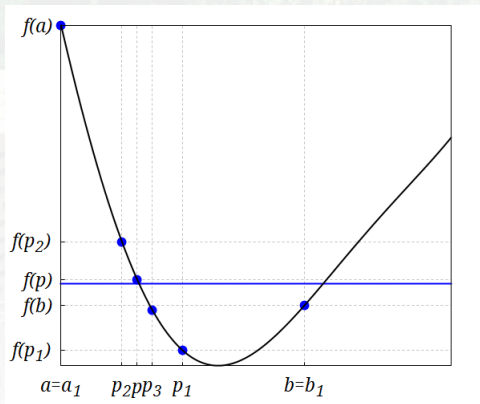
- $f \in C^n[a, b]$ .
- $f^{(n+1)}$  esta definida en  $[a, b]$ .
- $x_0 \in [a, b]$ .

Entonces, para cada  $x \in [a, b]$ , existe  $\xi(x) \in (x_0, x)$  (si  $x > x_0$  y  $\xi(x) \in (x, x_0)$  en el otro caso) tal que:

- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$  donde
- $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  y
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}.$

[Enlace a ejercicio](#)

# Raíces de ecuaciones I



**Figura: Método de Bisección:** En la figura se muestra el mecanismo de la bisección.



Listing 1: "Método de Bisección"

```
1 function x=Biseccion(f,a,b,TOL,N0)
2     i=1;FA=f(a);
3     while(i<=N0)
4         p=a+(b-a)/2;
5         FP=f(p);
6         if(FP==0 || (b-a)/2<TOL)
7             x=p;
8             break;
9         endif
10        i=i+1;
11        if(FA*FP>0)
12            a=p;
13            FA=FP;
14        else
15            b=p;
16        endif
17    endwhile
18    if(i>N0)
19        x=inf;
20    endif
21 endfunction
```

## Teorema de convergencia del método de bisección

Supongamos que  $f \in C[a, b]$  y  $f(a)f(b) < 0$ . El método de bisección genera una sucesión  $\{p_n\}$  que aproxima a un cero de  $f$ , tal que:

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

[Enlace a ejercicio](#)

Primero note que  $p \in [a_n, b_n]$  (teorema del valor intermedio), entonces

$$|p - (a_n + b_n)/2| \leq (b_n - a_n)/2.$$

# Raíces de ecuaciones IV

De esto se tiene que:

$$\begin{aligned}|p_n - p| &= |(a_n + b_n)/2 - p| \\ &\leq \frac{b_n - a_n}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{b - a}{2^{n-1}} \text{ ( inducción : } b_n - a_n \leq \frac{b - a}{2^{n-1}} \text{ )} \\ &= \frac{b - a}{2^n}.\end{aligned}$$

## Iteración de Newton Raphson

La iteración de Newton Rapshon se define como:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

La sucesión  $\{p_n\}$  intenta resolver el problema:

$$f(x) = 0.$$

# Raíces de ecuaciones V

Como se suele encontrar en muchos textos y con justa razón, el método de Newton-Raphson es uno de los métodos más poderosos conocidos para la resolución de ecuaciones.

Idea detrás del método: Suponga que se quiere investigar como resolver la ecuación:

$$f(x) = 0$$

Supongan además que la raíz a esta ecuación sucede en  $x = p$ . Por el teorema de Taylor bajo algunas suposiciones tenemos que:

$$0 = f(p) = f(x) + (p - x)f'(x) + \frac{(p - x)^2}{2}f''(\xi)$$

Si se asume que  $x$  está cerca de  $p$  entonces, después de despejar arriba se tiene:

$$p \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (p - x)^2 \approx 0.$$

Esto último, como se puede notar, tiene la estructura de la iteración del método de Newton presentada al inicio.

El método iterativo de Newton se puede analizar desde el teorema de punto fijo; para ello considere primero el enunciado de dicho teorema:

## Teorema de punto fijo

Suponga lo siguiente:

- $g \in C[a, b]$ .
- $g(x) \in [a, b]$ .
- Suponga que  $g'$  existe en  $(a, b)$ .
- Existe una constante positiva  $k$  menor que 1 tal que  $|g'(x)| \leq k$  para toda  $x \in (a, b)$ .

Entonces para cualquier  $p_0 \in [a, b]$  la sucesión definida por  $p_n = g(p_{n-1})$  converge al único punto fijo  $p$  tal que

$$p = g(p).$$

En la iteración de Newton,  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ; si se asume que  $f'(p) \neq 0$  y cumple con todas las condiciones del teorema de punto fijo, entonces la conclusión de este es que la sucesión converge a  $p$  y

$$p = g(p) = p - \frac{f(p)}{f'(p)},$$

esto deriva en que  $f(p) = 0$ ; lo que justamente se anda buscando.

Para que se garantice el teorema de punto fijo, se tiene el siguiente teorema sobre el método de Newton:

## Teorema de convergencia del método de Newton

Suponga que:

- $f \in C^2[a, b]$ .
- $p \in [a, b]$ .
- $f(p) = 0, f'(p) \neq 0$ .

Entonces existe un  $\delta > 0$  tal que la sucesión  $\{p_n\}$  converge a  $p$  para cualquier aproximación inicial  $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ .

La demostración del teorema se puede encontrar en Burden, 2017. En el podrás observar que se usa el teorema de punto fijo.

Para apreciar la importancia del método de Newton, se necesita la siguiente definición:

## Orden de convergencia

Suponga que  $\{p_n\}$  es una sucesión que converge a  $p$  y que  $p \neq p_n$  para toda  $n$ . Además asuma que existen constantes positivas  $\lambda$  y  $\alpha$  tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda.$$

entonces se dice que:

- $\alpha$  es el orden de convergencia de la sucesión  $\{p_n\}$ .
- $\gamma$  es la constante de error asintótica.

A conitinuación se hacen algunas observaciones:

- La parte más relevante en la definición anterior es el orden de convergencia  $\alpha$ ; entre más grande sea este, el método convergerá con mayor rapidez.
- El método de bisección tiene un orden de convergencia  $\alpha = 1$  (esto se denomina convergencia lineal).

- Bajo ciertos supuestos razonables, el método de Newton posee una convergencia de al menos  $\alpha = 2$  (esto se denomina convergencia cuadrática). Debido a su valor en el orden de convergencia, a este método se le considera de rápida convergencia.
- Usualmente se preferirá el método de Newton sobre el método de bisección; sin embargo hay que notar que la desventaja del método de Newton es la escogencia del valor inicial y una combinación de ambos métodos es en general la mejor opción.

[Enlace a ejercicio](#)



## Sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones, en general tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{bmatrix}$$

El cual se puede expresar de forma compacta como:

$$F(X) = 0,$$

donde  $X = [x_1, \dots, x_n]$  y  $F(X) = [f_1(X), \dots, f_n(X)]$ .

Todo el análisis que se hizo antes en el caso de una variable, se puede hacer para el caso en el que queremos resolver un sistema de ecuaciones.

# Raíces de ecuaciones XI

## Iteración del método de Newton para sistemas

Se define la iteración de Newton para sistemas como:

$$p_{n+1} = p_n - J^{-1}(p_n)F(p_n),$$

donde:

$$\begin{aligned} J(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla f_1(X) \\ \vdots \\ \nabla f_n(X) \end{pmatrix} \\ p_n &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

A  $J$  se le conoce como el jacobiano en la literatura.

Para medir los errores en el caso de sistemas, en lugar del valor absoluto se usa su equivalente, las normas. Las normas que se suelen usar son las siguientes:

- Norma 2:  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ .

- Norma 1:  $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ .
- Norma infinito:  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

Por ejemplo, si se quiere medir el error entre la aproximación  $p_n$  de  $p$ , donde estos son vectores, entonces:

- Error absoluto en la norma infinito:  $\|p - p_n\|_\infty$
- Error relativo en la norma 1:  $\frac{\|p - p_n\|_1}{\|p\|_1}$

Cuando no se conoce el valor exacto entonces se suelen usar medidas para estimar el valor relativo o absoluto; para ello suponga que se quiere estimar el error para una sucesión  $\{p_n\}$  vectorial:

- Estimación error absoluto en la norma 2:  $\|p_{n+1} - p_n\|_2$
- Estimación del error relativo en la norma infinito:  $\frac{\|p_{n+1} - p_n\|_\infty}{\|p_{n+1}\|_\infty}$

[Enlace a ejercicio](#)

## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(1/n) \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(1/n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.



## Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión  $\left\{ n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(1/n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Entonces el límite buscado es 1.  
Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ \Rightarrow -\frac{1}{n} &\leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{-1}{n} &\leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{-1}{n} &\leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ \Rightarrow 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0 \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$ .

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{-1}{n} &\leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ \Rightarrow 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el límite de la sucesión en cuestión es 0.

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

Teoremas Preliminares.



## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow L &= \sqrt{1 + L} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$  con  $a_1 = 1$ , asumiendo que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea  $L$  tal límite, entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow L &= \sqrt{1 + L} \end{aligned}$$

Resolviendo la última ecuación se obtiene que:

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)|$  donde  $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x - 1))$ .

- $f$  es continua y diferenciable en  $[2,5]$ .

## Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)|$  donde  $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x - 1))$ .

- $f$  es continua y diferenciable en  $[2,5]$ .
- Por el teorema de valores extremos, existen  $c_1, c_2$  tales que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$

para todo  $x \in [2, 5]$  y entonces  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$ .

## Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)|$  donde  $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x - 1))$ .

- $f$  es continua y diferenciable en  $[2,5]$ .
- Por el teorema de valores extremos, existen  $c_1, c_2$  tales que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$

para todo  $x \in [2, 5]$  y entonces  $\max_{x \in [2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$ .

- Además dado que la función es diferenciable, se sabe que los posibles valores extremos se alcanzan en 2, 5 o donde la derivada se hace cero.

$$f'(x) = \exp(-\cos(x - 1))(\sin(x - 1)) = 0.$$

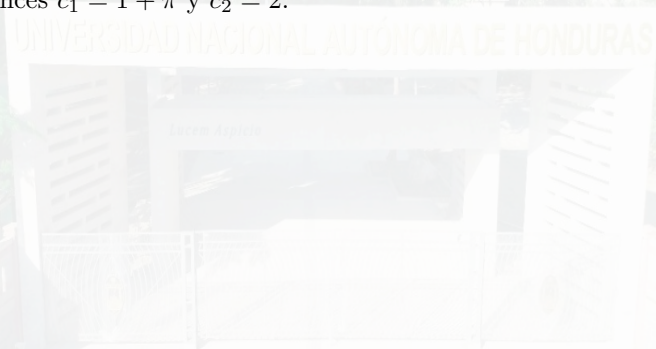
Las soluciones de esta ecuación son  $x = 1 + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . La única solución que se encuentra en el intervalo  $[2,5]$  es  $x = 1 + \pi$ .

# Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:

- $f(2) \approx 0,42$ .
- $f(5) \approx -0,92$ .
- $f(1 + \pi) \approx -1,72$ .

Entonces  $c_1 = 1 + \pi$  y  $c_2 = 2$ .





# Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:

- $f(2) \approx 0,42$ .
- $f(5) \approx -0,92$ .
- $f(1 + \pi) \approx -1,72$ .

Entonces  $c_1 = 1 + \pi$  y  $c_2 = 2$ .

- De lo anterior se obtiene que

$$\max_{x \in [2,5]} |f(x)| = \max(|f(2)|, |f(1 + \pi)|) = e - 1.$$



## Ejercicio (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo  $[2, 4]$ .

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo  $[2, 4]$ .

Elija  $f(x) = \sin(x)/\log(x)$ .

Dado que  $f(2) > 0$ ,  $f(4) < 0$ ,  $f$  es continua en  $[2, 4]$  y  $f(4) < 0 < f(2)$ , entonces (tomando  $K = 0$ ) por el teorema del valor intermedio existe un  $c$  tal que  $f(c) = K = 0$ .

Teoremas Preliminares.

## Ejercicio(Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cuál es el valor de  $n$  para conseguir un error de a lo mucho  $10^{-5}$ ; calcule el error asumiendo que la solución exacta es  $\pi$ . ( $f(x) = \sin(x)/\log(x)$ ,  $x \in [2, 4]$ .)

$n$	$a$	$b$	$p$	$f(p)$	$ p-p^* $
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	1.284530e-01	1.415927e-01
2	3	3.5	3.5	-2.800077e-01	3.584073e-01
3	3	3.25	3.25	-9.179542e-02	1.084073e-01
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	1.887677e-05	2.160867e-05
17	3.1416	3.1416	3.1416	5.547064e-06	6.349879e-06
18	3.1416	3.1416	3.1416	-1.117744e-06	1.279516e-06
19	3.1416	3.1416	3.1416	2.214656e-06	2.535182e-06

## Ejercicio(Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cuál es el valor de  $n$  para conseguir un error de a lo mucho  $10^{-5}$ ; calcule el error asumiendo que la solución exacta es  $\pi$ . ( $f(x) = \sin(x)/\log(x)$ ,  $x \in [2, 4]$ .)

n	a	b	p	f(p)	p-p*
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	1.284530e-01	1.415927e-01
2	3	3.5	3.5	-2.800077e-01	3.584073e-01
3	3	3.25	3.25	-9.179542e-02	1.084073e-01
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	1.887677e-05	2.160867e-05
17	3.1416	3.1416	3.1416	5.547064e-06	6.349879e-06
18	3.1416	3.1416	3.1416	-1.117744e-06	1.279516e-06
19	3.1416	3.1416	3.1416	2.214656e-06	2.535182e-06

Se necesita garantizar que  $|p - \pi| \leq 10^{-5}$ . Por el teorema de bisección, se tiene

$$|p - \pi| \leq \frac{b - a}{2^n} = \frac{4 - 2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-5}$$

Si se resuelve la última desigualdad, se obtiene que  $n \geq 17,61$ , es decir que se puede escoger  $n = 18$ . Raíces de ecuaciones.

## Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función  $f(x) = \ln(\ln(x))$ . Determine lo siguiente:

- Calcule  $P_3(x)$  centrada en  $x_0 = 3$ .
- Aproxime  $P_3(1,5)$ .
- Encuentre la expresión para  $R_3(x)$ .
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime  $\int_2^4 f(x)dx$  usando  $P_3(x)$ .

## Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función  $f(x) = \ln(\ln(x))$ . Determine lo siguiente:

- Calcule  $P_3(x)$  centrada en  $x_0 = 3$ .
- Aproxime  $P_3(1,5)$ .
- Encuentre la expresión para  $R_3(x)$ .
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime  $\int_2^4 f(x)dx$  usando  $P_3(x)$ .

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$



## Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función  $f(x) = \ln(\ln(x))$ . Determine lo siguiente:

- Calcule  $P_3(x)$  centrada en  $x_0 = 3$ .
- Aproxime  $P_3(1,5)$ .
- Encuentre la expresión para  $R_3(x)$ .
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime  $\int_2^4 f(x)dx$  usando  $P_3(x)$ .

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \frac{f(3)}{0!} (x - 3)^0 + \frac{f'(3)}{1!} (x - 3)^1 + \frac{f''(3)}{2!} (x - 3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!} (x - 3)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (x-3)^2 \\ &+ \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (x-3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (x-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (x-3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(1,5) &= \ln(\ln(3)) + \frac{(1,5-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (1,5-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (1,5-3)^3 \\ &\approx -0,69955228 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (x-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (x-3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(1,5) &= \ln(\ln(3)) + \frac{(1,5-3)}{3\ln(3)} - \left( \frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)} \right) (1,5-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{162} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)} \right) (1,5-3)^3 \\ &\approx -0,69955228 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{(4)!} (x-3)^4 \\ &= - \frac{6 (\log \xi(x))^3 + 11 (\log \xi(x))^2 + 12 \log \xi(x) + 6}{\xi(x)^4 (\log \xi(x))^4} (x-3)^4. \end{aligned}$$

Observación: Si  $p^*$  es una aproximación de  $p$ , entonces se definen los errores:

■ Error absoluto:  $|p - p^*|$ .

■ Error relativo:  $\frac{|p - p^*|}{|p|}$ .

Error absoluto:

$$|f(1,5) - P_3(1,5)| \approx 0,20316817$$

Error relativo:

Observación: Si  $p^*$  es una aproximación de  $p$ , entonces se definen los errores:

■ Error absoluto:  $|p - p^*|$ .

■ Error relativo:  $\frac{|p - p^*|}{|p|}$ .

Error absoluto:

$$|f(1,5) - P_3(1,5)| \approx 0,20316817$$

Error relativo:

$$\frac{|f(1,5) - P_3(1,5)|}{|f(1,5)|} \approx 0,22506211$$

$$\int_2^4 f(x)dx \approx \int_2^4 P_3(x)dx$$

Teoremas Preliminares.

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\ &= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3 dx\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.



$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3 dx \\&= \left[ \ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3 \right. \\&\quad \left. + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-3)^4 \right]_2^4\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3 dx \\&= \left[ \ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3 \right. \\&\quad \left. + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-3)^4 \right]_2^4 \\&\approx 0,1242167\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

## Ejercicios (Método de Newton-Raphson, Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo  $\theta$  cambia con una rapidez constante de  $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$ .

Al final de  $t$  segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2} \left( \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t) \right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez  $\omega$  con que cambia  $\theta$ . Asuma que  $g = 32,17 \text{ pies}/s^2$ . Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.

## Ejercicios (Método de Newton-Raphson, Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo  $\theta$  cambia con una rapidez constante de  $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$ .

Al final de  $t$  segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2} \left( \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t) \right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez  $\omega$  con que cambia  $\theta$ . Asuma que  $g = 32,17 \text{ pies}/\text{s}^2$ . Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.

Dado que  $x(2) = 60$ , se sustituye esto en la ecuación ofrecida.

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que  $\omega < 0$ , entonces rápidamente se puede ver que  $f(-1) > 0$  y  $f(-2) < 0$ . Con esto se escoge el intervalo  $[-2, -1]$ .

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que  $\omega < 0$ , entonces rápidamente se puede ver que  $f(-1) > 0$  y  $f(-2) < 0$ . Con esto se escoge el intervalo  $[-2, -1]$ .

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de  $10^{-12}$  mediante el método de bisección?

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que  $\omega < 0$ , entonces rápidamente se puede ver que  $f(-1) > 0$  y  $f(-2) < 0$ . Con esto se escoge el intervalo  $[-2, -1]$ .

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de  $10^{-12}$  mediante el método de bisección?

Usando el teorema de cota de error del método de bisección se plantea:

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n} = \frac{-1 - (-2)}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-12}.$$

$$10^{12} \leq 2^n.$$

Resolviendo la inecuación se obtiene  $n \geq 40$ .



- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.



- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.

Cuando no conocemos el valor de la raíz, la estimación del error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.

Cuando no conocemos el valor de la raíz, la estimación del error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.

Cuando no conocemos el valor de la raíz, la estimación del error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

n	a	b	p	f(p)	Error relativo
0	-2	-1	*	*	*
1	-1.5	-1	-1.5	-2.121565e+01	*
2	-1.5	-1.25	-1.25	7.755373e+00	2.000000e-01
3	-1.375	-1.25	-1.375	-6.045842e+00	9.090909e-02

- Aplique el método de Newton-Raphson para obtener una aproximación con una exactitud de  $10^{-5}$ . Utilice como aproximación inicial la aproximación encontrada en el inciso anterior.

# Ejercicios

n	p <sub>n</sub>	f(p <sub>n</sub> )	Error relativo
0	-1.375	-6.0458	*
1	-1.3226	-1.150768e-01	3.962162e-02
2	-1.3216	-4.145716e-05	7.840103e-04
3	-1.3216	-5.371703e-12	2.826484e-07

Primero se requiere calcular la derivada de la función analizada:

$$f'(\omega) = \frac{32,17 (2 \cosh(2\omega) - 2 \cos(2\omega))}{\omega^2} - \frac{64,34 (\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))}{\omega^3}$$

Con esto la iteración del método de Newton queda expresado como:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} \\ &= p_n + \frac{3217 p_n \sinh(2 p_n) - 3217 p_n \sin(2 p_n) + 12000 p_n^3}{6434 \sinh(2 p_n) - 6434 \sin(2 p_n) - 6434 p_n \cosh(2 p_n) + 6434 p_n \cos(2 p_n)} \end{aligned}$$

Para los resultados se uso el error relativo, es decir  $\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$ .

Raíces de ecuaciones.

## Ejercicio (Ecuaciones no lineales, Ejercicio IIPAC2023)

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{bmatrix} \ln(x^2 + y^2) - \sin(xy) \\ x^2 + 4y^2 \cos(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(2) - \ln(\pi) \\ 4 \end{bmatrix}$$

Realice una iteración del método de Newton Raphson para sistemas con la aproximación inicial:

$$p_0 = \begin{bmatrix} -1,5 \\ -2,5 \end{bmatrix}$$

Además calcule  $\| p_k - p_{k-1} \|_\infty$  y  $\| p_k - p_{k-1} \|_2$ .

## Ejercicio (Ecuaciones no lineales, Ejercicio IIPAC2023)

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{bmatrix} \ln(x^2 + y^2) - \sin(xy) \\ x^2 + 4y^2 \cos(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(2) - \ln(\pi) \\ 4 \end{bmatrix}$$

Realice una iteración del método de Newton Raphson para sistemas con la aproximación inicial:

$$p_0 = \begin{bmatrix} -1,5 \\ -2,5 \end{bmatrix}$$

Además calcule  $\| p_k - p_{k-1} \|_\infty$  y  $\| p_k - p_{k-1} \|_2$ .

Primero se definirán la función y el jacobiano para usar el método de Newton:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2 + y^2) - \sin(xy) + \ln(\pi) - \ln(2) \\ 4 \cos(x)y^2 + x^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2} - y \cos(xy) & \frac{2y}{x^2 + y^2} - x \cos(xy) \\ 2x - 4 \sin(x)y^2 & 8 \cos(x)y \end{pmatrix}$$

$$J(-1,5, -2,5) = \begin{pmatrix} -2,40433956981949 & -1,819074330126988 \\ 21,93737466510136 & -1,414744033354058 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(-1,5, -2,5) = \begin{pmatrix} -0,03266761001938535 & 0,04200393103760224 \\ -0,5065521278147188 & -0,05551818955887632 \end{pmatrix}$$

$$F(-1,5, -2,5) = \begin{pmatrix} 0,873750 \\ 0,018430 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = p_0 - J^{-1}(p_0)F(p_0)$$

$$= \begin{pmatrix} -1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} - J^{-1}(-1,5, -2,5)F(-1,5, -2,5) = \begin{pmatrix} -1,472231 \\ -2,056377 \end{pmatrix}$$

n	p <sub>n</sub> (1)	p <sub>n</sub> (2)	f(p <sub>n</sub> )	Norma 2	Norma inf
0	-1.5	-2.5	0.87375	*	*
1	-1.4722	-2.0564	-9.606503e-02	4.444916e-01	4.436233e-01
2	-1.4663	-2.1091	-1.654021e-04	5.303760e-02	5.270221e-02
3	-1.4667	-2.1087	-1.031003e-07	5.406173e-04	3.834635e-04

Raíces de ecuaciones.





Burden, Richard L y otros (2017). *Analisis numerico*.



Xiao, Xiaoyong y Hongwei Yin (2015). “A simple and efficient method with high order convergence for solving systems of nonlinear equations”. En: *Computers & Mathematics with Applications* 69.10, págs. 1220-1231.