Departamento de Matemática Aplicada
Análisis Numérico, MM412

Myrian Gonzalez Orellana

UNAH

PACIII2023

Tabla de Contenidos

1 Preliminares del cálculo

2 Raíces de ecuaciones

3 Aproximación de funciones

4 Derivación Numérica

5 Integración Numérica

6 Problemas de valor inicial

7 Problemas de valores en la frontera

8 Ejercicios

Teoremas Preliminares I

Esta presentación esta basada en el texto de Burden, 2017.

Criterio del límite

Sea $f : \mathbb{R} :\rightarrow \mathbb{R}$. Asuma que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y es igual a L. Entonces la sucesión $\{a_n\} = \{f(n)\}$ converge a L también.

Enlace a ejercicio.

Teorema de convergencia monótona

Suponga que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

Enlace a ejercicio.

Teorema del sándwich

Suponga que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen al valor de L. Además asuma que

$$a_n \leq x_n \leq b_n,$$

para $n > N$ para algún N fijo; entonces $\{x_n\}$ converge a L.

Enlace a ejercicio.

Teorema del valor medio

Si $f \in C[a,b]$ y f es diferenciable en (a,b), entonces existe un número c en (a,b) con

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

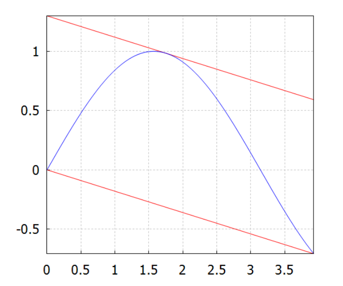


Figura: En la figura se puede ver un ejemplo con $f(x) = \sin(x)$ para $x \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$

Teoremas Preliminares III

Teorema del valo extremo

- Si $f \in C[a,b]$, entonces existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ con
$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$
para $x \in [a,b]$.
- Si además f es diferenciable en (a,b), entonces c_1 y c_2 son iguales a los extremos (a o b) o los lugares donde la derivada se hace cero en (a,b).

Enlace a ejercicio

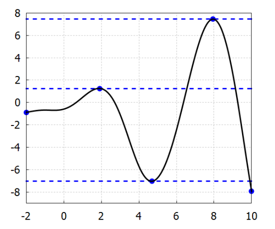


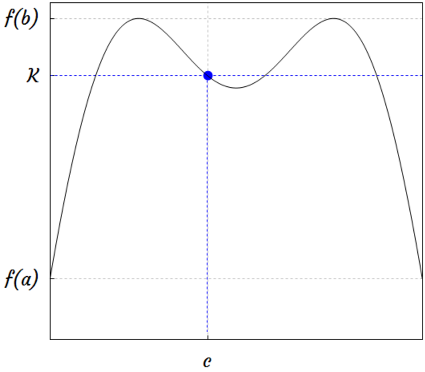
Figura: Se puede apreciar en el ejemplo, que el máximo de la función se alcanza en un lugar donde la derivada es cero y el mínimo en el extremo derecho.

Teoremas Preliminares IV

Teorema del valor intermedio

Si $f \in C[a,b]$ y K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en (a,b) para el cual $f(c) = K$.

Enlace a ejercicio



Teoremas Preliminares V

Se define $C^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f, f', \cdots, f^{(n)}$ son continuas en $[a,b]\}$.

Teorema de Taylor

Supong que:

- $f \in C^n[a,b]$.
- $f^{(n+1)}$ esta definida en $[a,b]$.
- $x_0 \in [a,b]$.

Entonces, para cada $x \in [a,b]$, existe $\xi(x) \in (x_0, x)$ (si $x > x_0$ y $\xi(x) \in (x, x_0)$ en el otro caso) tal que:

- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ donde
- $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ y
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$.

Enlace a ejercicio

Raíces de ecuaciones I

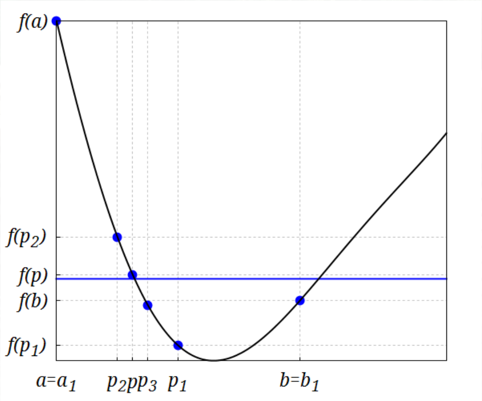


Figura: **Método de Bisección:** En la figura se muestra el mécanismo de la bisección.

Listing 1: "Método de Bisección"

```
function x=Biseccion(f,a,b,TOL,N0)
  i=1;FA=f(a);
  while(i<=N0)
    p=a+(b-a)/2;
    FP=f(p);
    if(FP==0 || (b-a)/2<TOL)
      x=p;
      break;
    endif
    i=i+1;
    if(FA*FP>0)
      a=p;
      FA=FP;
    else
      b=p;
    endif
  endwhile
  if(i>N0)
    x=inf;
  endif
endfunction
```

Teorema de convergencia del método de bisección

Supongamos que $f \in C[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$. El método de bisección genera una sucesión $\{p_n\}$ que aproxima a un cero de p de f, tal que:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Enlace a ejercicio

Primero note que $p \in [a_n, b_n]$ (teorema del valor intermedio), entonces

$$|p - (a_n + b_n)/2| \leq (b_n - a_n)/2.$$

De esto se tiene que:

$$\begin{aligned} |p_n - p| &= |(a_n + b_n)/2 - p| \\ &\leq \frac{b_n - a_n}{2} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^{n-1}} (\text{ inducción} : b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}) \\ &= \frac{b-a}{2^n}. \end{aligned}$$

Raíces de ecuaciones IV

Considere el siguiente conjunto de datos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ asociados:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 9 & 11 & 15 & 17 & 20 & 24 & 26 & 29 \end{bmatrix}$$

Abajo se aprecian los pares ordenados correspondientes a cada par asociado:

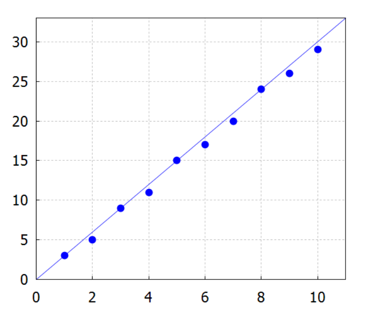


Figura: Recta de aproximación a los pares ordenados.

Mínimos cuadrados II

El objetivo consiste en determinar la recta $Y = a_1 X + a_0$ que mejor modele al conjunto de datos asociados.

Existen algunos enfoques para encontrar esta recta:

Problema Minimax

$$\min_{a_0, a_1} \max_{1 \le i \le 10} |y_i - (a_1 x_i - a_0)|$$

Problema de desviación absoluta

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1 x_i - a_0)|$$

Problema de mínimos cuadrados

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1 x_i - a_0)|^2 = \min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{10} (y_i - (a_1 x_i - a_0))^2$$

Deducción del método de mínimos cuadrados

Defina los siguientes vectores:

$$X = [x_1, \cdots, x_n]^T$$

$$Y = [y_1, \cdots, y_n]^T$$

$$U = [1, \cdots, 1]^T$$

Entonces podemos pensar en el problema de ajuste de la siguiente manera: Deseamos encontrar a_0 y a_1 tales que

$$a_1 X + a_0 U = Y$$

De forma matricial esto sería:

$$(X|U) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = Y$$

Deducción del método de mínimos cuadrados

Si ahora se multiplica por la transpuesta de la primer matriz, se obtine:

$$\begin{pmatrix} X^T \\ U^T \end{pmatrix} (X|U) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T \\ U^T \end{pmatrix} Y$$

Esto es equivalente a lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} X^T X & X^T U \\ U^T X & U^T U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T Y \\ U^T Y \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar, resolviendo este sistema podemos encontrar las soluciones para los coeficientes de la regresión lineal.

Generalización a ajustes de tipo polinomial.

Ahora considere le problema siguiente: Se desan encontrar los valores $[a_m, a_{m-1}, \cdots, a_0]$ de manera tal que:

$$a_m X^m + \cdots + a_1 X + a_0 U = Y$$

Donde $X^k = [x_1^k, \cdots, x_n^k]^T$. Nuevamente esto se puede escribir como el siguiente sistema:

$$(X^m | X^{m-1} | \cdots X | U) \begin{pmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = Y$$

Multiplicando por la transpuesta...

Generalización de ajuste de tipo polinomial

$$\begin{pmatrix} (X^m)^T \\ \vdots \\ (X)^T \\ U^T \end{pmatrix} (X^m | X^{m-1} | \cdots X | U) \begin{pmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X^m)^T \\ \vdots \\ (X)^T \\ U^T \end{pmatrix} Y$$

Lo que termina siendo equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} (X^m)^T X^m & (X^m)^T X^{m-1} & \dots & (X^m)^T U \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X)^T X^m & (X)^T X^{m-1} & \dots & (X)^T U \\ U^T X^m & U^T X^{m-1} & \dots & U^T U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X^m)^T Y \\ \vdots \\ (X)^T Y \\ U^T Y \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos(1/n)
\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Entonces el límite buscado es 1.
Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

$$
\begin{aligned}
& -1 \leq \cos(n) \leq 1 \\
\Rightarrow & \frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

$$
\begin{aligned}
& -1 \leq \cos(n) \leq 1 \\
\Rightarrow & \frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\
\Rightarrow & \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\cos(n)}{n}\right\}$.

$$
\begin{aligned}
&-1 \leq \cos(n) \leq 1\\
\Rightarrow &\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}\\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\\
\Rightarrow &0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\cos(n)}{n}\right\}$.

$$
\begin{aligned}
& -1 \leq \cos(n) \leq 1 \\
\Rightarrow & \frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\
\Rightarrow & \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
\Rightarrow & 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el límite de la sucesión en cuestión es 0.
Teoremas Preliminares.

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$
\begin{aligned}
& a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \\
\Rightarrow\ & \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\
\Rightarrow\ & L = \sqrt{1 + L}
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$
\begin{aligned}
& a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \\
\Rightarrow & \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\
\Rightarrow & L = \sqrt{1 + L}
\end{aligned}
$$

Resolviendo la última ecuación se obtiene que:

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)|$ donde $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x-1))$.

- f es continua y diferenciable en [2,5].

Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)|$ donde $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x-1))$.

- f es continua y diferenciable en [2,5].
- Por el teorema de valores extremos, existen c_1, c_2 tales que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$

para todo $x \in [2,5]$ y entonces $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$.

Ejercicios

Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)|$ donde $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x-1))$.

- f es continua y diferenciable en [2,5].
- Por el teorema de valores extremos, existen c_1, c_2 tales que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$

  para todo $x \in [2,5]$ y entonces $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$.
- Además dado que la función es diferenciable, se sabe que los posibles valores extremos se alcanzan en 2, 5 o donde la derivada se hace cero.

$$f'(x) = \exp(-\cos(x-1))(\sin(x-1)) = 0.$$

  Las soluciones de esta ecuación son $x = 1 + n\pi.$, $n \in \mathbb{Z}$. La única solución que se encuentra en el intervalo [2,5] es $x = 1 + \pi$.

Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:
  - $f(2) \approx 0{,}42$.
  - $f(5) \approx -0{,}92$.
  - $f(1+\pi) \approx -1{,}72$.

  Entonces $c_1 = 1 + \pi$ y $c_2 = 2$.

Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:
  - $f(2) \approx 0{,}42$.
  - $f(5) \approx -0{,}92$.
  - $f(1+\pi) \approx -1{,}72$.

  Entonces $c_1 = 1+\pi$ y $c_2 = 2$.
- De lo anterior se obtiene que
  $\max_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(2)|, |f(1+\pi)|) = e-1.$

Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:
  - $f(2) \approx 0{,}42$.
  - $f(5) \approx -0{,}92$.
  - $f(1+\pi) \approx -1{,}72$.

  Entonces $c_1 = 1 + \pi$ y $c_2 = 2$.
- De lo anterior se obtiene que $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(2)|, |f(1+\pi)|) = e - 1$.

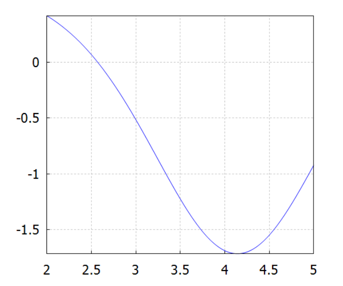


Figura: Gráfica de $f(x)$ en $[2{,}5]$.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo $[2, 4]$.

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo $[2, 4]$.

Elija $f(x) = \sin(x)/\log(x)$.

Dado que $f(2) > 0$, $f(4) < 0$, f es continua en [2,4] y $f(4) < 0 < f(2)$, entonces (tomando $K = 0$) por el teorema del valor intermedio existe un c tal que $f(c) = K = 0$.

Teoremas Preliminares.

Ejercicio(Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cual es el valor de n para conseguir un error de a lo mucho 10^{-5}. ($f(x) = \sin(x)/\log(x)$, $x \in [2,5]$.)

n	a	b	p	f(p)	|p−p*|
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	1.284530e−01	1.415927e−01
2	3	3.5	3.5	−2.800077e−01	3.584073e−01
3	3	3.25	3.25	−9.179542e−02	1.084073e−01
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	1.887677e−05	2.160867e−05
17	3.1416	3.1416	3.1416	5.547064e−06	6.349879e−06
18	3.1416	3.1416	3.1416	−1.117744e−06	1.279516e−06
19	3.1416	3.1416	3.1416	2.214656e−06	2.535182e−06

Ejercicio(Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cual es el valor de n para conseguir un error de a lo mucho 10^{-5}. ($f(x) = \sin(x)/\log(x)$, $x \in [2, 5]$.)

n	a	b	p	f(p)	|p−p∗|
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	1.284530e−01	1.415927e−01
2	3	3.5	3.5	−2.800077e−01	3.584073e−01
3	3	3.25	3.25	−9.179542e−02	1.084073e−01
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	1.887677e−05	2.160867e−05
17	3.1416	3.1416	3.1416	5.547064e−06	6.349879e−06
18	3.1416	3.1416	3.1416	−1.117744e−06	1.279516e−06
19	3.1416	3.1416	3.1416	2.214656e−06	2.535182e−06

Se necesita garantizar que $|p - \pi| <= 10^{-5}$. Por el teorema de bisección, se tiene

$$|p - \pi| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{5-2}{2^n} = \frac{3}{2^n} \leq 10^{-5}$$

Si se resuleve la última desigualdad, se obtiene que $n \geq 18{,}19$, es decir que se puede escoger $n = 19$.Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(x))$. Determine lo siguiente:

- Calcule $P_3(x)$ centrada en $x_0 = 3$.
- Aproxime $P_3(1{,}5)$.
- Encuentre la expresión para $R_3(x)$.
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime $\int_2^4 f(x)dx$ usando $P_3(x)$.

Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(x))$. Determine lo siguiente:

- Calcule $P_3(x)$ centrada en $x_0 = 3$.
- Aproxime $P_3(1{,}5)$.
- Encuentre la expresión para $R_3(x)$.
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime $\int_2^4 f(x)dx$ usando $P_3(x)$.

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(x))$. Determine lo siguiente:

- Calcule $P_3(x)$ centrada en $x_0 = 3$.
- Aproxime $P_3(1{,}5)$.
- Encuentre la expresión para $R_3(x)$.
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime $\int_2^4 f(x)dx$ usando $P_3(x)$.

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\
&= \frac{f(3)}{0!}(x-3)^0 + \frac{f'(3)}{1!}(x-3)^1 + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3.
\end{aligned}
$$

Ejercicios

$$= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2$$

$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3$$

Ejercicios

$$= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2$$
$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3$$

$$P_3(1{,}5) = \ln(\ln(3)) + \frac{(1{,}5-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(1{,}5-3)^2$$
$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(1{,}5-3)^3$$
$$\approx -0{,}69955228$$

Ejercicios

$$= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3$$

$$P_3(1{,}5) = \ln(\ln(3)) + \frac{(1{,}5-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(1{,}5-3)^2 + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(1{,}5-3)^3 \approx -0{,}69955228$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{(4)!}(x-3)^4 = -\frac{6\,(\log\xi(x))^3 + 11\,(\log\xi(x))^2 + 12\,\log\xi(x) + 6}{\xi(x)^4\,(\log\xi(x))^4}(x-3)^4.$$

Ejercicios

Observación: Si p^* es una aproximación de p, entonces se definen los errores:

- Error absoluto: $|p - p^*|$.
- Error relativo: $\dfrac{|p - p^*|}{p}$.

Error absoluto:

$$|f(1{,}5) - P_3(1{,}5)| \approx 0{,}20316817$$

Error relativo:

Ejercicios

Observación: Si p^* es una aproximación de p, entonces se definen los errores:

- Error absoluto: $|p - p^*|$.
- Error relativo: $\dfrac{|p - p^*|}{p}$.

Error absoluto:

$$|f(1{,}5) - P_3(1{,}5)| \approx 0{,}20316817$$

Error relativo:

$$\frac{|f(1{,}5) - P_3(1{,}5)|}{|f(1{,}5)|} \approx 0{,}22506211$$

Ejercicios

$$\int_2^4 f(x)dx \approx \int_2^4 P_3(x)dx$$

Teoremas Preliminares.

$$\int_2^4 f(x)dx \approx \int_2^4 P_3(x)dx$$
$$= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2$$
$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3 dx$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 f(x)dx \approx \int_2^4 P_3(x)dx \\
&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3 dx \\
&= \Bigg[\ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-2)^4\Bigg]_2^4
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\
&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-2)^3 dx \\
&= \Bigg[\ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-2)^4\Bigg]_2^4 \\
&\approx 0{,}1242167
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicios (Método de Newton-Raphson,Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ cambia con una rapidez constante de $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega < 0$.
Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t)\right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez ω con que cambia θ. Asuma que $g = 32{,}17 pies/s^2$. Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.

Ejercicios (Método de Newton-Raphson,Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ cambia con una rapidez constante de $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega < 0$.
Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t)\right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez ω con que cambia θ. Asuma que $g = 32{,}17 pies/s^2$. Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.
  Dado que $x(2) = 60$, se sustituye esto en la ecuación ofrecida.

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que $\omega < 0$, entonces rápidamente se puede ver que $f(-1) > 0$ y $f(-2) < 0$. Con esto se escoge el intervalo $[-2, -1]$.

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que $\omega < 0$, entonces rápidamente se puede ver que $f(-1) > 0$ y $f(-2) < 0$. Con esto se escoge el intervalo $[-2, -1]$.

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de 10^{-12} mediante el método de bisección?

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$
$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que $\omega < 0$, entonces rápidamente se puede ver que $f(-1) > 0$ y $f(-2) < 0$. Con esto se escoge el intervalo $[-2, -1]$.

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de 10^{-12} mediante el método de bisección?
  Usando el teorema de cota de error del método de bisección se plantea:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{-1-(-2)}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-12}.$$
$$10^{12} \leq 2^n.$$

  Resolviendo la inecuación se obtiene $n \geq 40$.

Ejercicios

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.

Ejercicios

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.
- Aplique el método de Newton-Raphson para obtener una aproximación con una exactitud de 10^{-5}. Utilice como aproximación inicial la aproximación encontrada en el iniciso anterior.

Referencias

Burden, Richard L y otros (2017). *Analisis numerico.*