Departamento de Matemática Aplicada
Análisis Numérico, IC303

Myrian González Orellana

UNAH

PACIII2023

Tabla de Contenidos

1 Ejercicios

Teoremas preliminares

Teorema de Weierestrass

Suponga que f está definida y es continua en $[a, b]$. Para cada $\epsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$, con la propiedad de que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

Utilidad de los polinomios para aproximar funciones

Los polinomios son ampliamente utilizados para la interpolación numérica porque:

- Aproximan de manera uniforme a las funciones conitnuas.
- Tienen derivadas e integrales fáciles de calcular. Además, sus integrales y derivadas también son polinomios.

Limitaciones de los polinomios de Taylor para la interpolación

Las principales limitaciones de los polinomios de Taylor son:

- Generalmente no ofrecen una buena aproximación en todo un intervalo, sino que la aproximación se concentra alrededor de x_0.
- Aumentar el grado del polinomio de Taylor no necesariamente brindará una mejor aproximación.
- No utilizan más que un único punto para definir el polonomio.

Debido a las limitaciones expuestas, los polinomios de Taylor se usan principalmente para:

1. Derivación de otros métodos numéricos, como el método de diferencias finitas.
2. Estimación del error

Polinomio interpolante de Lagrange

Teorema: polinomios de Lagrange

Si $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ son $n+1$ números distintos y si f es una función cuyos valores están dados en esos números, entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado a lo más n, con la propiedad:

$$f(x_k) = P(x_k) \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

El polinomio $P(x)$ se define como sigue:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x) \qquad k = 0, 1, \ldots, n \\ &= f(x_0) L_{n,0} + f(x_1) L_{n,2} + \cdots + f(x_n) L_{n,n} \end{aligned}$$

donde

$$L_{n,k} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k+1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

Término del error del polinomio de Lagrange

Suponga que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números distintintos en el intervalo $[a, b]$ y que $f \in C^{n+1}[a, b]$. Entonces, para cada x en $[a, b]$ existe in número $\xi(x)$ en (a, b) con

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

donde $P(x)$ es el polinomio interpolante de Lagrange.

Considere el siguiente ajuste polinomial:

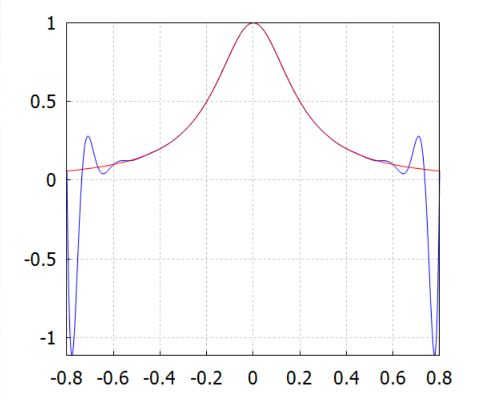

Figura: En la figura se observa la interpolación por polinomios de Lagrange para $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ para $x \in [-1, 1]$ con 30 puntos equidistante comenzando en -1 y finalizando en 1.

Interpolación, Spline Cúbicos II

El ejemplo anterior demuestra que los polinomios de alto orden (en el ejemplo de la figura tendríamos un polinomio de orden 31) pueden oscilar erráticamente. Evidentemente esta característica es indeseable en muchas situaciones; en este apartado se mostrará una técnica que puede evitar este problema siempre con la idea de hacer un ajuste polinomial.

Los ingredientes para construir un **spline** (esta palabra no tiene traducción al español, su significado es "larga tira flexible") **cúbico interpolante** S de alguna función f se basan en las siguiente consideraciones:

- Una función f de variable real definida en el intervalo $[a, b]$.
- Una partición del intervalo $[a, b]$; $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
- $S(x)$ restringido a $[x_j, x_{j+1}]$ es un polinomio cúbico para cada $j = 0, \cdots, n-1$. A esta parte se le denota por $S_j(x)$.
- $S_j(x_j) = f(x_j)$ y $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ para cada $j = 0, \cdots, n-1$.
- $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, \cdots, n-2$.
- $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, \cdots, n-2$.
- Si $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ se dice que es un **Spline de frontera natural**. Si $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ se dice que es un **Spline con frontera sujeta**.

Interpolación, Spline Cúbicos III

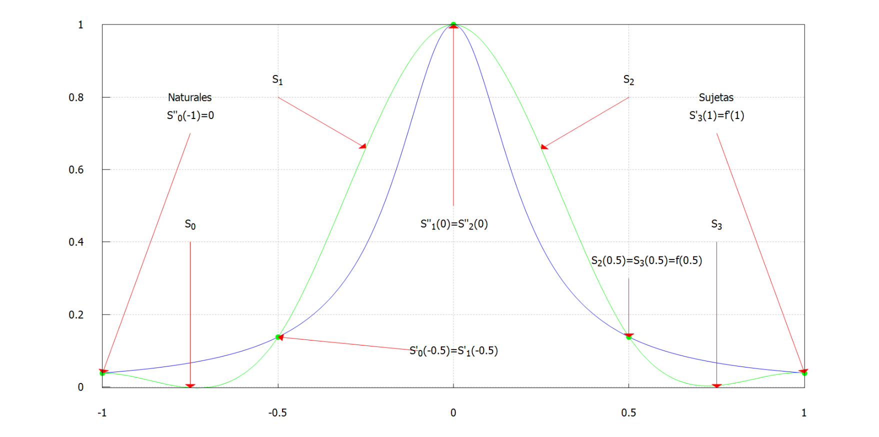

Figura: Aquí se muestran algunas condiciones de los spline. La función que se ve arriba en azul es $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$. En verde se observan los splines cúbicos.

Mínimos cuadrados I

Considere el siguiente conjunto de datos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ asociados:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 9 & 11 & 15 & 17 & 20 & 24 & 26 & 29 \end{bmatrix}$$

Abajo se aprecian los pares ordenados correspondientes a cada par asociado:

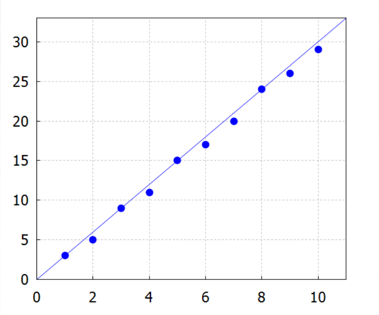

Figura: Recta de aproximación a los pares ordenados.

Mínimos cuadrados II

El objetivo consiste en determinar la recta $Y = a_1 X + a_0$ que mejor modele al conjunto de datos asociados.

Existen algunos enfoques para encontrar esta recta:

Problema Minimax

$$\min_{a_0, a_1} \max_{1 \leq i \leq 10} |y_i - (a_1 x_i - a_0)|$$

Problema de desviación absoluta

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1 x_i - a_0)|$$

Problema de mínimos cuadrados

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1 x_i - a_0)|^2 = \min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{10} (y_i - (a_1 x_i - a_0))^2$$

Deducción del método de mínimos cuadrados

Defina los siguientes vectores:

$$X = [x_1, \cdots, x_n]^T$$

$$Y = [y_1, \cdots, y_n]^T$$

$$U = [1, \cdots, 1]^T$$

Entonces podemos pensar en el problema de ajuste de la siguiente manera: Deseamos encontrar a_0 y a_1 tales que

$$a_1 X + a_0 U = Y$$

De forma matricial esto sería:

$$(X|U)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = Y$$

Deducción del método de mínimos cuadrados

Si ahora se multiplica por la transpuesta de la primer matriz, se obtine:

$$\begin{pmatrix} X^T \\ U^T \end{pmatrix} (X|U) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T \\ U^T \end{pmatrix} Y$$

Esto es equivalente a lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} X^T X & X^T U \\ U^T X & U^T U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T Y \\ U^T Y \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar, resolviendo este sistema podemos encontrar las soluciones para los coeficientes de la regresión lineal.

Generalización a ajustes de tipo polinomial.

Ahora considere le problema siguiente: Se desan encontrar los valores $[a_m, a_{m-1}, \cdots, a_0]$ de manera tal que:

$$a_m X^m + \cdots + a_1 X + a_0 U = Y$$

Donde $X^k = [x_1^k, \cdots, x_n^k]^T$. Nuevamente esto se puede escribir como el siguiente sistema:

$$(X^m | X^{m-1} | \cdots X | U) \begin{pmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = Y$$

Multiplicando por la transpuesta...

Generalización de ajuste de tipo polinomial

$$\begin{pmatrix} (X^m)^T \\ \vdots \\ (X)^T \\ U^T \end{pmatrix} (X^m | X^{m-1} | \cdots X | U) \begin{pmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X^m)^T \\ \vdots \\ (X)^T \\ U^T \end{pmatrix} Y$$

Lo que termina siendo equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} (X^m)^T X^m & (X^m)^T X^{m-1} & \dots & (X^m)^T U \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X)^T X^m & (X)^T X^{m-1} & \dots & (X)^T U \\ U^T X^m & U^T X^{m-1} & \dots & U^T U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X^m)^T Y \\ \vdots \\ (X)^T Y \\ U^T Y \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos(1/n)
\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) \\
&=1
\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Entonces el límite buscado es 1.
Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$
$$\Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\cos(n)}{n}\right\}$.

$$
\begin{aligned}
&-1 \leq \cos(n) \leq 1\\
\Rightarrow &\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}\\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\\
\Rightarrow &0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\cos(n)}{n}\right\}$.

$$
\begin{aligned}
&-1 \leq \cos(n) \leq 1 \\
\Rightarrow &\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
\Rightarrow &0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el límite de la sucesión en cuestión es 0.
Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$
\begin{aligned}
& a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \\
\Rightarrow & \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\
\Rightarrow & L = \sqrt{1 + L}
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\
\Rightarrow L &= \sqrt{1 + L}
\end{aligned}
$$

Resolviendo la última ecuación se obtiene que:

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)|$ donde $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x-1))$.

- f es continua y diferenciable en [2,5].

Ejercicios

Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre $\max_{x\in[2,5]} |f(x)|$ donde $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x-1))$.

- f es continua y diferenciable en [2,5].
- Por el teorema de valores extremos, existen c_1, c_2 tales que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$

para todo $x \in [2,5]$ y entonces $\max_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$.

Ejercicios

Ejercicio(Teorema de valores extremos)

Encuentre $\max_{x\in[2,5]} |f(x)|$ donde $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x-1))$.

- f es continua y diferenciable en [2,5].
- Por el teorema de valores extremos, existen c_1, c_2 tales que
$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$
para todo $x \in [2,5]$ y entonces $\max_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$.
- Además dado que la función es diferenciable, se sabe que los posibles valores extremos se alcanzan en 2, 5 o donde la derivada se hace cero.
$$f'(x) = \exp(-\cos(x-1))(\sin(x-1)) = 0.$$
Las soluciones de esta ecuación son $x = 1 + n\pi.$, $n \in \mathbb{Z}$. La única solución que se encuentra en el intervalo [2,5] es $x = 1 + \pi$.

Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:
  - $f(2) \approx 0{,}42$.
  - $f(5) \approx -0{,}92$.
  - $f(1+\pi) \approx -1{,}72$.

  Entonces $c_1 = 1+\pi$ y $c_2 = 2$.

Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:
  - $f(2) \approx 0{,}42$.
  - $f(5) \approx -0{,}92$.
  - $f(1+\pi) \approx -1{,}72$.

  Entonces $c_1 = 1+\pi$ y $c_2 = 2$.
- De lo anterior se obtiene que
  $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(2)|, |f(1+\pi)|) = e - 1.$

Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:
  - $f(2) \approx 0{,}42$.
  - $f(5) \approx -0{,}92$.
  - $f(1+\pi) \approx -1{,}72$.

  Entonces $c_1 = 1+\pi$ y $c_2 = 2$.
- De lo anterior se obtiene que $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(2)|, |f(1+\pi)|) = e-1$.

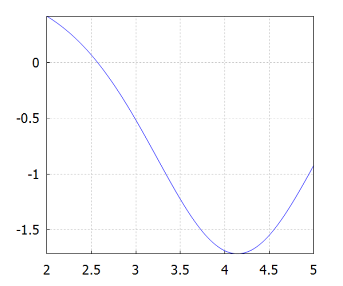

Figura: Gráfica de $f(x)$ en $[2,5]$.

Ejercicio (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo $[2, 4]$.

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo $[2, 4]$.

Elija $f(x) = \sin(x)/\log(x)$.

Dado que $f(2) > 0$, $f(4) < 0$, f es continua en [2,4] y $f(4) < 0 < f(2)$, entonces (tomando $K = 0$) por el teorema del valor intermedio existe un c tal que $f(c) = K = 0$.

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio(Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cuál es el valor de n para conseguir un error de a lo mucho 10^{-5}; calcule el error asumiendo que la solución exacta es π. ($f(x) = \sin(x)/\log(x)$, $x \in [2, 4]$.)

n	a	b	p	f(p)	|p−p*|
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	1.284530e−01	1.415927e−01
2	3	3.5	3.5	−2.800077e−01	3.584073e−01
3	3	3.25	3.25	−9.179542e−02	1.084073e−01
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	1.887677e−05	2.160867e−05
17	3.1416	3.1416	3.1416	5.547064e−06	6.349879e−06
18	3.1416	3.1416	3.1416	−1.117744e−06	1.279516e−06
19	3.1416	3.1416	3.1416	2.214656e−06	2.535182e−06

Ejercicios

Ejercicio(Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cuál es el valor de n para conseguir un error de a lo mucho 10^{-5}; calcule el error asumiendo que la solución exacta es π. ($f(x) = \sin(x)/\log(x)$, $x \in [2, 4]$.)

n	a	b	p	f(p)	|p−p*|
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	1.284530e−01	1.415927e−01
2	3	3.5	3.5	−2.800077e−01	3.584073e−01
3	3	3.25	3.25	−9.179542e−02	1.084073e−01
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	1.887677e−05	2.160867e−05
17	3.1416	3.1416	3.1416	5.547064e−06	6.349879e−06
18	3.1416	3.1416	3.1416	−1.117744e−06	1.279516e−06
19	3.1416	3.1416	3.1416	2.214656e−06	2.535182e−06

Se necesita garantizar que $|p - \pi| \leq 10^{-5}$. Por el teorema de bisección, se tiene

$$|p - \pi| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{4-2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-5}$$

Si se resuleve la última desigualdad, se obtiene que $n \geq 17{,}61$, es decir que se puede escoger $n = 18$.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(x))$. Determine lo siguiente:

- Calcule $P_3(x)$ centrada en $x_0 = 3$.
- Aproxime $P_3(1{,}5)$.
- Encuentre la expresión para $R_3(x)$.
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime $\int_2^4 f(x)dx$ usando $P_3(x)$.

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(x))$. Determine lo siguiente:

- Calcule $P_3(x)$ centrada en $x_0 = 3$.
- Aproxime $P_3(1{,}5)$.
- Encuentre la expresión para $R_3(x)$.
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime $\int_2^4 f(x)dx$ usando $P_3(x)$.

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Ejercicios

Ejercicio (Teorema de Taylor)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(x))$. Determine lo siguiente:

- Calcule $P_3(x)$ centrada en $x_0 = 3$.
- Aproxime $P_3(1{,}5)$.
- Encuentre la expresión para $R_3(x)$.
- Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.
- Aproxime $\int_2^4 f(x)dx$ usando $P_3(x)$.

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \frac{f(3)}{0!}(x-3)^0 + \frac{f'(3)}{1!}(x-3)^1 + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3.
\end{aligned}
$$

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
&= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3
\end{aligned}
$$

Ejercicios

$$= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3$$

$$\begin{aligned} P_3(1{,}5) &= \ln(\ln(3)) + \frac{(1{,}5-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(1{,}5-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(1{,}5-3)^3 \\ &\approx -0{,}69955228 \end{aligned}$$

Ejercicios

$$= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3$$

$$P_3(1{,}5) = \ln(\ln(3)) + \frac{(1{,}5-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(1{,}5-3)^2 + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(1{,}5-3)^3$$
$$\approx -0{,}69955228$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{(4)!}(x-3)^4 = -\frac{6\,(\log\xi(x))^3 + 11\,(\log\xi(x))^2 + 12\,\log\xi(x) + 6}{\xi(x)^4\,(\log\xi(x))^4}(x-3)^4.$$

Observación: Si p^* es una aproximación de p, entonces se definen los errores:

- Error absoluto: $|p - p^*|$.
- Error relativo: $\dfrac{|p - p^*|}{|p|}$.

Error absoluto:

$$|f(1{,}5) - P_3(1{,}5)| \approx 0{,}20316817$$

Error relativo:

Ejercicios

Observación: Si p^* es una aproximación de p, entonces se definen los errores:

- Error absoluto: $|p - p^*|$.
- Error relativo: $\dfrac{|p - p^*|}{|p|}$.

Error absoluto:

$$|f(1{,}5) - P_3(1{,}5)| \approx 0{,}20316817$$

Error relativo:

$$\frac{|f(1{,}5) - P_3(1{,}5)|}{|f(1{,}5)|} \approx 0{,}22506211$$

Ejercicios

$$\int_2^4 f(x)dx \approx \int_2^4 P_3(x)dx$$

Teoremas Preliminares.

$$\int_2^4 f(x)dx \approx \int_2^4 P_3(x)dx$$
$$= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2$$
$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3 dx$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 f(x)dx \approx& \int_2^4 P_3(x)dx \\
=& \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\
&+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3 dx \\
=& \left[\ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3\right. \\
&\left. + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-3)^4\right]_2^4
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

$$\begin{aligned}
\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\
&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3 dx \\
&= \left[\ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-3)^4\right]_2^4 \\
&\approx 0{,}1242167
\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios (Método de Newton-Raphson,Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ cambia con una rapidez constante de $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega < 0$.
Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t)\right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez ω con que cambia θ. Asuma que $g = 32{,}17 pies/s^2$. Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.

Ejercicios (Método de Newton-Raphson,Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ cambia con una rapidez constante de $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$.
Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t)\right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez ω con que cambia θ. Asuma que $g = 32{,}17 pies/s^2$. Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.
  Dado que $x(2) = 60$, se sustituye esto en la ecuación ofrecida.

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que $\omega < 0$, entonces rápidamente se puede ver que $f(-1) > 0$ y $f(-2) < 0$. Con esto se escoge el intervalo $[-2, -1]$.

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que $\omega < 0$, entonces rápidamente se puede ver que $f(-1) > 0$ y $f(-2) < 0$. Con esto se escoge el intervalo $[-2, -1]$.

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de 10^{-12} mediante el método de bisección?

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$
$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que $\omega < 0$, entonces rápidamente se puede ver que $f(-1) > 0$ y $f(-2) < 0$. Con esto se escoge el intervalo $[-2, -1]$.

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de 10^{-12} mediante el método de bisección?
  Usando el teorema de cota de error del método de bisección se plantea:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{-1-(-2)}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-12}.$$
$$10^{12} \leq 2^n.$$

Resolviendo la inecuación se obtiene $n \geq 40$.

Ejercicios

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.
  Cuando no conocemos el valor de la raíz, la estimación del error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

  De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

Ejercicios

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.
  Cuando no conocemos el valor de la raíz, la estimación del error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

  De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.
  Cuando no conocemos el valor de la raíz, la estimación del error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

  De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

n	a	b	p	f(p)	Error relativo
0	−2	−1	*	*	*
1	−1.5	−1	−1.5	−2.121565e+01	*
2	−1.5	−1.25	−1.25	7.755373e+00	2.000000e−01
3	−1.375	−1.25	−1.375	−6.045842e+00	9.090909e−02

- Aplique el método de Newton-Raphson para obtener una aproximación con una exactitud de 10^{-5}. Utilice como aproximación inicial la aproximación encontrada en el iniciso anterior.

n	p_n	f(p_n)	Error relativo
0	−1.375	−6.0458	*
1	−1.3226	−1.150768e−01	3.962162e−02
2	−1.3216	−4.145716e−05	7.840103e−04
3	−1.3216	−5.371703e−12	2.826484e−07

Primero se requiere calcular la derivada de la función analizada:

$$f'(\omega) = \frac{32{,}17\ (2\ \cosh(2\,\omega) - 2\ \cos(2\,\omega))}{\omega^2} - \frac{64{,}34\ (\sinh(2\,\omega) - \sin(2\,\omega))}{\omega^3}$$

Con esto la iteración del método de Newton queda expresado como:

$$\begin{aligned} p_{n+1} =& p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} \\ =& p_n + \end{aligned}$$

$$\frac{3217\,p_n\ \sinh(2\,p_n) - 3217\,p_n\ \sin(2\,p_n) + 12000\,p_n^3}{6434\ \sinh(2\,p_n) - 6434\ \sin(2\,p_n) - 6434\,p_n\ \cosh(2\,p_n) + 6434\,p_n\ \cos(2\,p_n)}$$

Para los resultados se uso el error relativo, es decir $\dfrac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$.

Ejercicio (Ecuaciones no lineales, Ejercicio IIPAC2023)

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{bmatrix} \ln(x^2+y^2) - \sin(xy) & = & \ln(2) - \ln(\pi) \\ x^2 + 4y^2\cos(x) & = & 4 \end{bmatrix}$$

Realice una iteración del método de Newton Raphson para sistemas con la aproximación inicial:

$$p_0 = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix}$$

Además calcule $\| p_k - p_{k-1} \|_\infty$ y $\| p_k - p_{k-1} \|_2$.

Ejercicio (Ecuaciones no lineales, Ejercicio IIPAC2023)

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{bmatrix} \ln(x^2+y^2) - \sin(xy) & = & \ln(2) - \ln(\pi) \\ x^2 + 4y^2\cos(x) & = & 4 \end{bmatrix}$$

Realice una iteración del método de Newton Raphson para sistemas con la aproximación inicial:

$$p_0 = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix}$$

Además calcule $\| p_k - p_{k-1} \|_\infty$ y $\| p_k - p_{k-1} \|_2$.

Primero se definirán la función y el jacobiano para usar el método de Newton:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2+y^2) - \sin(xy) + \ln(\pi) - \ln(2) \\ 4\cos(x)y^2 + x^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$J(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{2x}{x^2+y^2}-y\cos(xy) & \frac{2y}{x^2+y^2}-x\cos(xy)\\ 2x-4\sin(x)y^2 & 8\cos(x)y\end{pmatrix}$$

$$J(-1{,}5,-2{,}5)=\begin{pmatrix}-2{,}40433956981949 & -1{,}81907433012698\\ 21{,}9373746651013 & -1{,}41474403335405\end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(-1{,}5,-2{,}5)=\begin{pmatrix}-0{,}0326676100193853 & 0{,}0420039310376022\\ -0{,}5065521278147188 & -0{,}0555181895588763\end{pmatrix}$$

$$F(-1{,}5,-2{,}5)=\begin{pmatrix}0{,}873750\\ 0{,}018430\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}p_1=&p_0-J^{-1}(p_0)F(p_0)\\ =&\begin{pmatrix}-1{,}5\\ -2{,}5\end{pmatrix}-J^{-1}(-1{,}5,-2{,}5)F(-1{,}5,-2{,}5)=\begin{pmatrix}-1{,}472231\\ -2{,}056377\end{pmatrix}\end{aligned}$$

n	p_n(1)	p_n(2)	f(p_n)	Norma 2	Norma inf
0	-1.5	-2.5	0.87375	*	*
1	-1.4722	-2.0564	-9.606503e-02	4.444916e-01	4.436233e-01
2	-1.4663	-2.1091	-1.654021e-04	5.303760e-02	5.270221e-02
3	-1.4667	-2.1087	-1.031003e-07	5.406173e-04	3.834635e-04

Raices de ecuaciones.

Ejercicios

Ejercicio (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo $[2, 2{,}6]$ con tres puntos; $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ y $x_2 = 2{,}6$.

Ejercicio (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo $[2, 2{,}6]$ con tres puntos; $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ y $x_2 = 2{,}6$.

- Por el teorema relacionado con el polinomio de Lagrange, se sabe que:

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6) \right|,$$

para $x \in [2, 2{,}6]$ y $\xi(x) \in (2, 2{,}6)$

Ejercicios

Ejercicio (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo $[2, 2{,}6]$ con tres puntos; $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ y $x_2 = 2{,}6$.

- Por el teorema relacionado con el polinomio de Lagrange, se sabe que:

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)\right|,$$

para $x \in [2, 2{,}6]$ y $\xi(x) \in (2, 2{,}6)$

- Para encontrar las cotas sobre la tercera derivada se necesitan los siguientes cálculos:

$$f^{(3)}(z) = \frac{3\sin(\ln(z)) + \cos(\ln(z))}{z^3}$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{10\cos(\ln(z))}{z^4}$$

Ejercicios

- Si se analizan los lugares donde la derivada de la tercera derivada se hacen cero, entonces se obtiene la ecuación:

$$\sin(\ln(z)) = 0,$$

esta ecuación tiene como solución $z = e^{n\pi}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\pi} \notin [2, 2{,}6]$ y por lo tanto los únicos valores extremos de la tercera derivada son 2 y 2.6.

Evaluando la tercera derivada se obtiene que:

$$f^{(3)}(2) \approx 0{,}335765$$

$$f^{(3)}(2{,}6) \approx 0{,}1722$$

y por lo tanto se puede garantizar que:

$$|f^{(3)}(x)| \leq f^{(3)}(2)$$

para todo $x \in [2, 2{,}6]$.

Ejercicios

- Si se analizan los lugares donde la derivada de la tercera derivada se hacen cero, entonces se obtiene la ecuación:

$$\sin(\ln(z)) = 0,$$

esta ecuación tiene como solución $z = e^{n\pi}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\pi} \notin [2, 2{,}6]$ y por lo tanto los únicos valores extremos de la tercera derivada son 2 y 2.6.

Evaluando la tercera derivada se obtiene que:

$$f^{(3)}(2) \approx 0{,}335765$$

$$f^{(3)}(2{,}6) \approx 0{,}1722$$

y por lo tanto se puede garantizar que:

$$|f^{(3)}(x)| \leq f^{(3)}(2)$$

para todo $x \in [2, 2{,}6]$.

- Defina ahora la otra parte para la cota de error:

$$g(x) \equiv (x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6) = \frac{25x^3 - 175x^2 + 406x - 312}{25}$$

Ejercicios

- Resolviendo para la ecuación de segundo grado:

$$g'(x) = 0.$$

Se obtiene que $x = \dfrac{35 - \sqrt{7}}{15}$ (una de las dos raíces) es el lugar donde alcanza el valor más alto. Entonces:

$$|g(x)| \leq g\left(\frac{35 - \sqrt{7}}{15}\right)$$

para toda $x \in [2, 2{,}6]$.

Ejercicios

- Resolviendo para la ecuación de segundo grado:

$$g'(x) = 0.$$

Se obtiene que $x = \dfrac{35-\sqrt{7}}{15}$ (una de las dos raíces) es el lugar donde alcanza el valor más alto. Entonces:

$$|g(x)| \leq g\left(\frac{35-\sqrt{7}}{15}\right)$$

para toda $x \in [2, 2{,}6]$.

- Finalmente:

$$|f(x)-P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)\right| \leq g\left(\frac{35-\sqrt{7}}{15}\right) f^{(3)}(2)/6 \approx 9{,}4574\times 10^{-4}$$

La cota de error entonces es aproximadamente $9{,}5 \times 10^{-4}$.

Ejercicios

Ejercicio del examen del IIPA2023

Sea $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ y $P_2(x)$ el polinomio interpolante de Lagrange en $x_0 = 0$, x_1 y $x_2 = 1$. Calcule el valor de x_1 más grande en el intervalo $(0, 1)$ para el cual $f(0{,}5) - P_2(0{,}5) = -0{,}25$

Tip: evalúe en los puntos desde el inicio, así se sabe que términos se cancelaran.

$$f(x_0) = f(0) = 0 \quad f(x_1) = \sqrt{x_1 - x_1^2} \quad f(x_2) = f(x_1) = 0$$

Parte I: Determine el polinomio de Lagrange

$$\begin{aligned}
&P_2(x)\\
&= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)\\
&= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}f(x_0) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}f(x_2)\\
&= \frac{(x - 0)(x - 1)}{(x_1 - 0)(x_1 - 1)}\sqrt{x_1 - x_1^2}\\
&= \frac{x(x - 1)}{x_1(x_1 - 1)}\sqrt{x_1 - x_1^2}
\end{aligned}$$

Ejercicios

Parte 2: Evalúe en 0.5

$$P_2(0{,}5) = \frac{0{,}5(0{,}5-1)}{x_1(x_1-0{,}5)}\sqrt{x_1 - x_1^2} = -\frac{0{,}25\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1(x_1-1)}$$

Parte 3: Garantizar que $f(0{,}5) - P_2(0{,}5) = -0{,}25$

$$f(0{,}5) - P_2(0{,}5) = -0{,}25$$

$$0{,}5 + \frac{0{,}25\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1(x_1-1)} = -0{,}25$$

$$\frac{0{,}5+0{,}25}{0{,}25} = \frac{\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1(x_1-1)}$$

$$-3 = \frac{\sqrt{x_1(1-x_1)}}{-x_1(1-x_1)} = -\frac{1}{\sqrt{x_1(1-x_1)}}$$

$$9x_1(x_1-1) = 1$$

$$-9x_1^2 + 9x_1 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Por lo tanto, $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6} \approx 0{,}8726779$

Referencias

Burden, Richard L y otros (2017). *Analisis numerico.*

Xiao, Xiaoyong y Hongwei Yin (2015). “A simple and efficient method with high order convergence for solving systems of nonlinear equations”. En: *Computers & Mathematics with Applications* 69.10, págs. 1220-1231.