Departamento de Matemática Aplicada
Análisis Numérico, IC303

Myrian González Orellana

UNAH

PACIII2023

Tabla de Contenidos

Teoremas preliminares

Teorema (Weierestrass)

Suponga que f está definida y es continua en $[a, b]$. Para cada $\epsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$, con la propiedad de que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

Los polinomios son ampliamente utilizados para la interpolación numérica porque:

- Aproximan de manera uniforme a las funciones conitnuas.
- Tienen derivadas e integrales fáciles de calcular. Además, sus integrales y derivadas también son polinomios.

Las principales limitaciones de los polinomios de Taylor son:

- Generalmente no ofrecen una buena aproximación en todo un intervalo, sino que la aproximación se concentra alrededor de x_0.
- Aumentar el grado del polinomio de Taylor no necesariamente brindará una mejor aproximación.
- No utilizan más que un único punto para definir el polonomio.

Limitaciones de los polinomios de Taylor para la interpolación

Debido a las limitaciones expuestas, los polinomios de Taylor se usan principalmente para:

1. Derivación de otros métodos numéricos, como el método de diferencias finitas.
2. Estimación del error

Teorema de Taylor

Suponga que $f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ esta definida en $[a,b]$ y $x_0 \in [a,b]$. Entonces, para cada $x \in [a,b]$, existe $\xi(x) \in (x_0, x)$ (si $x > x_0$ y $\xi(x) \in (x, x_0)$ en el otro caso) tal que:

- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ donde
- $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ y
- $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$.

Regreso a fórmula de segundo orden.

Polinomio interpolante de Lagrange

Teorema (Polinomios de Lagrange)

Si f es una funcion definida en los diferentes valores $\{x_0, \cdots, x_n\}$, entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado a lo más n, con la propiedad:

$$f(x_k) = P(x_k) \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

El polinomio $P(x)$ se define como sigue:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x) = f(x_0) L_{n,0} + \cdots + f(x_n) L_{n,n}$$

donde

$$L_{n,k} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k+1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}$$

Teorema (Error del polinomio de Lagrange)

Suponga que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números distintintos en el intervalo $[a, b]$ y que $f \in C^{n+1}[a, b]$. Entonces, para cada x en $[a, b]$ existe in número $\xi(x)$ en (a, b) con

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

donde $P(x)$ es el polinomio interpolante de Lagrange.

Enlace a ejercicio.

Interpolación, Spline Cúbicos I

Considere el siguiente ajuste polinomial:

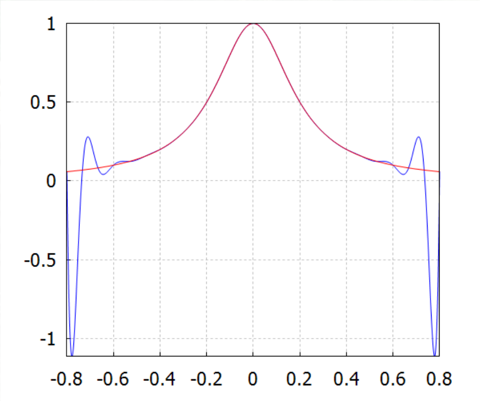


Figura: En la figura se observa la interpolación por polinomios de Lagrange para $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ para $x \in [-1, 1]$ con 30 puntos equidistante comenzando en -1 y finalizando en 1.

Interpolación, Spline Cúbicos II

El ejemplo anterior demuestra que los polinomios de alto orden (en el ejemplo de la figura tendríamos un polinomio de orden 31) pueden oscilar erráticamente. Evidentemente esta característica es indeseable en muchas situaciones; en este apartado se mostrará una técnica que puede evitar este problema siempre con la idea de hacer un ajuste polinomial.

Los ingredientes para construir un **spline** (esta palabra no tiene traducción al español, su significado es "larga tira flexible") **cúbico interpolante** S de alguna función f se basan en las siguiente consideraciones:

- Una función f de variable real definida en el intervalo $[a, b]$.
- Una partición del intervalo $[a, b]$; $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
- $S(x)$ restringido a $[x_j, x_{j+1}]$ es un polinomio cúbico para cada $j = 0, \cdots, n-1$. A esta parte se le denota por $S_j(x)$.
- $S_j(x_j) = f(x_j)$ y $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ para cada $j = 0, \cdots, n-1$.
- $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, \cdots, n-2$.
- $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, \cdots, n-2$.
- Si $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ se dice que es un **Spline de frontera natural**. Si $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ se dice que es un **Spline con frontera sujeta**.

Interpolación, Spline Cúbicos III

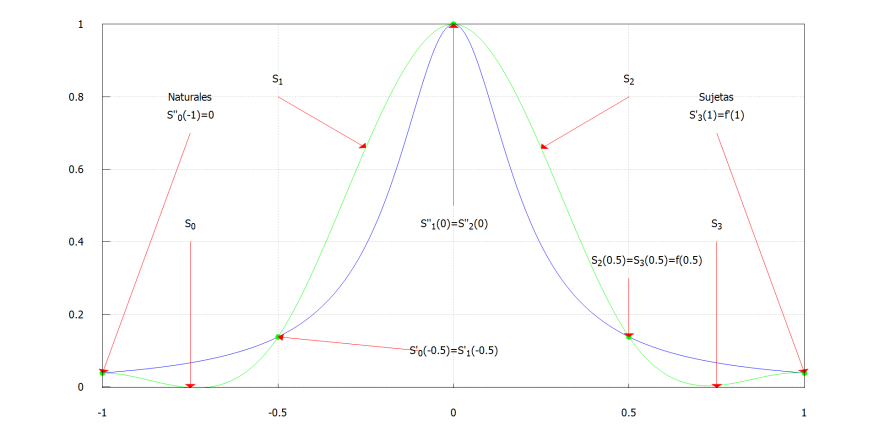


Figura: Aquí se muestran algunas condiciones de los spline. La función que se ve arriba en azul es $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$. En verde se observan los splines cúbicos.

Interpolación, Spline Cúbicos IV

Fórmulas de recurrencia para los Splines Cúbicos

Definanse los Splines Cúbicos de la función f definida en $[x_0, x_n]$:

$$S(x) = S_j(x) \equiv a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$
$$\text{para } x \in [x_j, x_{j+1}] \text{ donde } j = 0, \cdots, n-1.$$

Por comodidad definanse los siguientes elementos:

$$a_n \equiv f(x_n),\ b_n \equiv f'(x_n),\ c_n \equiv f''(x_n)/2,\ h_j \equiv x_{j+1} - x_j,\ j = 0, \cdots, n-1.$$

Las siguientes ecuaciones de recurrencia deben ser verificadas para que los S_j cumplan con las condiciones de un Spline Cúbico.

1. $a_j \equiv f(x_j)$ para $j = 0, \cdots, n-1$.
2. $a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = a_{j+1}$ para $j = 0, \cdots, n-1$.
3. $b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_{j+1}$ para $j = 0, \cdots, n-1$.
4. $c_j + 3d_j h_j = c_{j+1}$ para $j = 0, \cdots, n-1$.
5. $\dfrac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \dfrac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) = h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1}$ para $j = 1, \cdots, n-1$.

Las ecuaciones en el numeral 5 permiten resolver para los $\{c_j\}$; luego en el numeral 4 se pueden resolver los $\{d_j\}$ y con el numeral 2 se pueden encontrar los $\{b_j\}$. Los $\{a_j\}$ son conocidos desde el principio y con ello se pueden encontrar los Splines Cúbicos.

Si se recuerda, c_j está definido para $j = 0, \cdots n$. Entonces es necesario encontrar $n + 1$ valores. La ecuación en el numeral 5 solo provee de $n - 1$ ecuaciones; por lo tanto faltan dos ecuaciones más que se podrán obtener de considerar las condiciones en la frontera (naturales o fijas).

Mínimos cuadrados I

Considere el siguiente conjunto de datos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ asociados:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 9 & 11 & 15 & 17 & 20 & 24 & 26 & 29 \end{bmatrix}$$

Abajo se aprecian los pares ordenados correspondientes a cada par asociado:

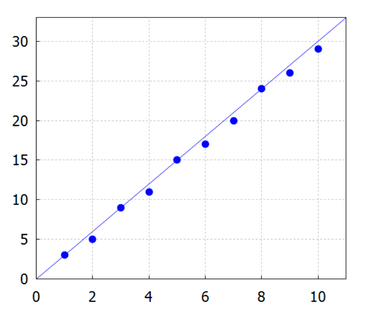


Figura: Recta de aproximación a los pares ordenados.

Mínimos cuadrados II

El objetivo consiste en determinar la recta $Y = a_1 X + a_0$ que mejor modele al conjunto de datos asociados.

Existen algunos enfoques para encontrar esta recta:

Problema Minimax

$$\min_{a_0, a_1} \max_{1 \leq i \leq 10} |y_i - (a_1 x_i - a_0)|$$

Problema de desviación absoluta

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1 x_i - a_0)|$$

Problema de mínimos cuadrados

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1 x_i - a_0)|^2 = \min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{10} (y_i - (a_1 x_i - a_0))^2$$

Deducción del método de mínimos cuadrados

Defina los siguientes vectores:

$$X = [x_1, \cdots, x_n]^T$$

$$Y = [y_1, \cdots, y_n]^T$$

$$U = [1, \cdots, 1]^T$$

Entonces podemos pensar en el problema de ajuste de la siguiente manera: Deseamos encontrar a_0 y a_1 tales que

$$a_1 X + a_0 U = Y$$

De forma matricial esto sería:

$$(X|U)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = Y$$

Deducción del método de mínimos cuadrados

Si ahora se multiplica por la transpuesta de la primer matriz, se obtine:

$$\begin{pmatrix} X^T \\ U^T \end{pmatrix} (X|U) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T \\ U^T \end{pmatrix} Y$$

Esto es equivalente a lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} X^T X & X^T U \\ U^T X & U^T U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T Y \\ U^T Y \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar, resolviendo este sistema podemos encontrar las soluciones para los coeficientes de la regresión lineal.

Generalización a ajustes de tipo polinomial.

Ahora considere le problema siguiente: Se desan encontrar los valores $[a_m, a_{m-1}, \cdots, a_0]$ de manera tal que:

$$a_m X^m + \cdots + a_1 X + a_0 U = Y$$

Donde $X^k = [x_1^k, \cdots, x_n^k]^T$. Nuevamente esto se puede escribir como el siguiente sistema:

$$(X^m | X^{m-1} | \cdots X | U) \begin{pmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = Y$$

Multiplicando por la transpuesta...

Generalización de ajuste de tipo polinomial

$$\begin{pmatrix} (X^m)^T \\ \vdots \\ (X)^T \\ U^T \end{pmatrix} (X^m | X^{m-1} | \cdots X | U) \begin{pmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X^m)^T \\ \vdots \\ (X)^T \\ U^T \end{pmatrix} Y$$

Lo que termina siendo equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} (X^m)^T X^m & (X^m)^T X^{m-1} & \dots & (X^m)^T U \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X)^T X^m & (X)^T X^{m-1} & \dots & (X)^T U \\ U^T X^m & U^T X^{m-1} & \dots & U^T U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X^m)^T Y \\ \vdots \\ (X)^T Y \\ U^T Y \end{pmatrix}$$

Derivación Numérica

Enlace al teorema de Taylor. Aquí se mostrará una manera estándar de deducir la fórmula numérica para la aproximación de la segunda derivada por medio de la fórmula de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4.$$

Derivación Numérica

Enlace al teorema de Taylor. Aquí se mostrará una manera estándar de deducir la fórmula numérica para la aproximación de la segunda derivada por medio de la fórmula de Taylor:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4. \\
f(x-h) &= f(x) + f'(x)(-h) + \frac{f''(x)}{2}(-h)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}(-h)^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}(-h)^4
\end{aligned}
$$

Derivación Numérica

Enlace al teorema de Taylor. Aquí se mostrará una manera estándar de deducir la fórmula numérica para la aproximación de la segunda derivada por medio de la fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned}
f(x+h) = & \quad f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4. \\
f(x-h) = & \quad f(x) + f'(x)(-h) + \frac{f''(x)}{2}(-h)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}(-h)^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}(-h)^4 \\
= & \quad f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}h^4
\end{aligned}$$

Enlace al teorema de Taylor. Aquí se mostrará una manera estándar de deducir la fórmula numérica para la aproximación de la segunda derivada por medio de la fórmula de Taylor:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) = & \quad f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4. \\
f(x-h) = & \quad f(x) + f'(x)(-h) + \frac{f''(x)}{2}(-h)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}(-h)^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}(-h)^4 \\
= & \quad f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}h^4 \\
\hline
f(x+h) + f(x-h) = & \quad 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}h^4 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4
\end{aligned}
$$

Enlace al teorema de Taylor. Aquí se mostrará una manera estándar de deducir la fórmula numérica para la aproximación de la segunda derivada por medio de la fórmula de Taylor:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4. \\
f(x-h) &= f(x) + f'(x)(-h) + \frac{f''(x)}{2}(-h)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}(-h)^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}(-h)^4 \\
&= f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}h^4 \\
\hline
f(x+h)+f(x-h) &= 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}h^4 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4 \\
&= 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f^{(4)}(\eta)+f^{(4)}(\xi)}{2}\,\frac{1}{12}h^4
\end{aligned}
$$

Derivación Numérica

Enlace al teorema de Taylor. Aquí se mostrará una manera estándar de deducir la fórmula numérica para la aproximación de la segunda derivada por medio de la fórmula de Taylor:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4. \\
f(x-h) &= f(x) + f'(x)(-h) + \frac{f''(x)}{2}(-h)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}(-h)^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}(-h)^4 \\
&= f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}h^4 \\
\hline
f(x+h) + f(x-h) &= 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}h^4 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4 \\
&= 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f^{(4)}(\eta) + f^{(4)}(\xi)}{2}\,\frac{1}{12}h^4 \\
&= 2f(x) + f''(x)h^2 + f^{(4)}(\theta)\frac{1}{12}h^4
\end{aligned}
$$

Despejando finalmente para $f''(x)$ se obtiene una aproximación a la segunda deriva:

Aproximación de la segunda derivada

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Suponga que se quiere encontrar el valor de la siguiente integral usando los métodos vistos en cálculo (integración por partes, cambio de variables,...etc):

$$\int_0^a \sqrt{1+\cos^2(x)}dx$$

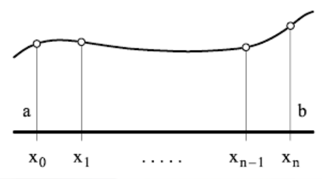
Si se intentara hacer, nos daríamos cuenta de que es un problema bastante complicado; de hecho se puede demostrar formalmente que el problema es irresoluble planteado en estos términos.

Técnica de cuadratura

Suponga que se desea encontrar $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Se necesitan encontrar $\{x_0, \cdots, x_n\}$ en el intervalo $[a, b]$ y unos pesos $\{a_0, \cdots, a_n\}$ de manera que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)$$

Integración Numérica II



Cuadratura, Polinomios de Lagrange

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)dx + \int_a^b \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

Cuadratura, Polinomios de Lagrange

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx = &\int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x)dx + \int_a^b \prod_{k=0}^n (x-x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \\
= &\sum_{k=0}^n f(x_k)\int_a^b L_k(x)dx + \int_a^b \prod_{k=0}^n (x-x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Cuadratura, Polinomios de Lagrange

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = &\quad \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x)dx + \int_a^b \prod_{k=0}^n (x-x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \\ = &\quad \sum_{k=0}^n f(x_k)\int_a^b L_k(x)dx + \int_a^b \prod_{k=0}^n (x-x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Comparando con la ténica de cuadratura, se observa que se pueden escoger los a_k de manera tal que:

$$a_k = \int_a^b L_k(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = &\int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x)dx + \int_a^b \prod_{k=0}^n (x-x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \\ = &\sum_{k=0}^n f(x_k)\int_a^b L_k(x)dx + \int_a^b \prod_{k=0}^n (x-x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Comparando con la ténica de cuadratura, se observa que se pueden escoger los a_k de manera tal que:

$$a_k = \int_a^b L_k(x)dx$$

El error como se puede ver es igual a:

$$E(f) = \int_a^b \prod_{k=0}^n (x-x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

Teorema del valor medio

Teorema 1.11 (Teorema del valor medio ponderado para integrales)
Suponga que $f \in C[a, b]$, que la integral de Riemann de g existe en $[a, b]$ y que $g(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio

Utilice el teorema del valor encontrar una expresión equivalente de la siguiente integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)dx$$

Teorema del valor medio

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)dx = \quad f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)dx$$

Teorema del valor medio

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx &= f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx\\ &= -\frac{(x_1-x_0)^3}{6}f''(\xi).\end{aligned}$$

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) dx$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1) dx$$

Regla del trapecio

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx = & \int_{x_0}^{x_1} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx \\
= & \frac{x_1-x_0}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi).
\end{aligned}
$$

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{x_1-x_0}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

Fórmula de tres puntos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3\right]$$
$$+\frac{f^{(3)}(x_1)}{24}(x-x_1)^4 + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx$$

Fórmula de tres puntos

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = & \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 \right] \\
& + \frac{f^{(3)}(x_1)}{24}(x-x_1)^4 + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx \\
= & \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 \right] \\
& + \frac{f^{(3)}(x_1)}{24}(x-x_1)^4 + f^{(4)}(\xi)\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)^4 dx
\end{aligned}
$$

Fórmula de tres puntos

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = & \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 \right. \\
& \left. + \frac{f^{(3)}(x_1)}{24}(x-x_1)^4 + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx \right. \\
= & \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 \right. \\
& \left. + \frac{f^{(3)}(x_1)}{24}(x-x_1)^4 + f^{(4)}(\xi)\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)^4 dx \right. \\
= & \; 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{60}h^5
\end{aligned}$$

Fórmula de tres puntos

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \quad & \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 \right] \\
& + \frac{f^{(3)}(x_1)}{24}(x-x_1)^4 + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx \\
= \quad & \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 \right] \\
& + \frac{f^{(3)}(x_1)}{24}(x-x_1)^4 + f^{(4)}(\xi)\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)^4 dx \\
= \quad & 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{60}h^5 \\
= \quad & 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\theta)\right) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{60}h^5 \\
\approx \quad & \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]
\end{aligned}
$$

Regla de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Grado de precisión de cuadratura

Grado de Precisión

Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** n si n es el entero positivo más grande tal que esta fórmula es exacta para x^k para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Grado de precisión de cuadratura

Grado de Precisión

Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** n si n es el entero positivo más grande tal que esta fórmula es exacta para x^k para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplo

¿Cuál es el grado de precisión de la regla de Simpson?

Grado de precisión de cuadratura

Grado de Precisión

Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** n si n es el entero positivo más grande tal que esta fórmula es exacta para x^k para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplo

¿Cuál es el grado de precisión de la regla de Simpson?

Se puede verificar que:

Grado de precisión de cuadratura

Grado de Precisión

Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** n si n es el entero positivo más grande tal que esta fórmula es exacta para x^k para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplo

¿Cuál es el grado de precisión de la regla de Simpson?

Se puede verificar que:

$$\int_{x-h}^{x+h} s^0 ds = \frac{h}{3}((x-h)^0 + 4x^0 + (x+h)^0) = 2h$$

Grado de precisión de cuadratura

Grado de Precisión

Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** n si n es el entero positivo más grande tal que esta fórmula es exacta para x^k para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplo

¿Cuál es el grado de precisión de la regla de Simpson?

Se puede verificar que:

$$\begin{aligned}
\int_{x-h}^{x+h} s^0 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^0 + 4x^0 + (x+h)^0) = & 2h \\
\int_{x-h}^{x+h} s ds &= \frac{h}{3}((x-h) + 4x + (x+h)) = & 2hx
\end{aligned}$$

Grado de precisión de cuadratura

Grado de Precisión

Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** n si n es el entero positivo más grande tal que esta fórmula es exacta para x^k para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplo

¿Cuál es el grado de precisión de la regla de Simpson?

Se puede verificar que:

$$\begin{aligned}
\int_{x-h}^{x+h} s^0 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^0 + 4x^0 + (x+h)^0) = & 2h \\
\int_{x-h}^{x+h} s ds &= \frac{h}{3}((x-h) + 4x + (x+h)) = & 2hx \\
\int_{x-h}^{x+h} s^2 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^2 + 4x^2 + (x+h)^2) = & \frac{6hx^2 + 2h^3}{3}
\end{aligned}$$

Grado de precisión de cuadratura

Grado de Precisión

Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** n si n es el entero positivo más grande tal que esta fórmula es exacta para x^k para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplo

¿Cuál es el grado de precisión de la regla de Simpson?

Se puede verificar que:

$$\begin{aligned}
\int_{x-h}^{x+h} s^0 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^0 + 4x^0 + (x+h)^0) = 2h \\
\int_{x-h}^{x+h} s ds &= \frac{h}{3}((x-h) + 4x + (x+h)) = 2hx \\
\int_{x-h}^{x+h} s^2 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^2 + 4x^2 + (x+h)^2) = \frac{6hx^2 + 2h^3}{3} \\
\int_{x-h}^{x+h} s^3 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^3 + 4x^3 + (x+h)^3) = \frac{6hx^2 + 2h^3}{3}
\end{aligned}$$

Grado de precisión de cuadratura

Grado de Precisión

Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** n si n es el entero positivo más grande tal que esta fórmula es exacta para x^k para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplo

¿Cuál es el grado de precisión de la regla de Simpson?

Se puede verificar que:

$$
\begin{aligned}
\int_{x-h}^{x+h} s^0 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^0 + 4x^0 + (x+h)^0) = & 2h \\
\int_{x-h}^{x+h} s ds &= \frac{h}{3}((x-h) + 4x + (x+h)) = & 2hx \\
\int_{x-h}^{x+h} s^2 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^2 + 4x^2 + (x+h)^2) = & \frac{6hx^2 + 2h^3}{3} \\
\int_{x-h}^{x+h} s^3 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^3 + 4x^3 + (x+h)^3) = & \frac{6hx^2 + 2h^3}{3} \\
\int_{x-h}^{x+h} s^4 ds &= \frac{10hx^4 + 20h^3x^2 + 2h^5}{5} & \neq
\end{aligned}
$$

Grado de precisión de cuadratura

Grado de Precisión

Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** n si n es el entero positivo más grande tal que esta fórmula es exacta para x^k para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplo

¿Cuál es el grado de precisión de la regla de Simpson?

Se puede verificar que:

$$\begin{aligned}
\int_{x-h}^{x+h} s^0 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^0 + 4x^0 + (x+h)^0) = 2h \\
\int_{x-h}^{x+h} s ds &= \frac{h}{3}((x-h) + 4x + (x+h)) = 2hx \\
\int_{x-h}^{x+h} s^2 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^2 + 4x^2 + (x+h)^2) = \frac{6hx^2 + 2h^3}{3} \\
\int_{x-h}^{x+h} s^3 ds &= \frac{h}{3}((x-h)^3 + 4x^3 + (x+h)^3) = \frac{6hx^2 + 2h^3}{3} \\
\int_{x-h}^{x+h} s^4 ds &= \frac{10hx^4 + 20h^3x^2 + 2h^5}{5} \neq \\
\frac{h}{3}((x-h)^4 + 4x^4 + (x+h)^4) &= \frac{6hx^4 + 12h^3x^2 + 2h^5}{3}
\end{aligned}$$

Como se puede apreciar, el grado de precisión de la regla de Simpson es de 3.

Fórmulas de Newton-Cotes

Error de cuadratura

Sea $\sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)$ una fórmula de cuadratura para $\int_a^b f(x)dx$. Se define el error de la fórmula de cuadratura por

$$E(f(x)) = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k) - \int_a^b f(x)dx \right|$$

Caracterización de exactitud

Una fórmula de cuadratura tiene precisión n si y solo si $E(f(x)) = 0$ para todo polinomio $f(x)$ de grado n y $E(x^{n+1}) \neq 0$.

Teorema(Fórmula cerrada de Newton-Cotes)

Suponga que se divide el intervalor $[a, b]$ en los nodos x_k para $k = 0, \cdots, n$. Donde $a = x_0$, $b = x_n$ y $x_i = x_{i-1} + h$ para $h = \dfrac{b-a}{n}$. Entonces existe un $\xi \in (a, b)$ de manera tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)dx + \frac{h^{n+c+1} f^{(n+c)}(\xi)}{(n+c)!} \int_0^n t^c (t-1) \cdots (t-n)dt$$

donde $f \in C^{n+c}[a, b]$, $c = 2 - n \ mod \ 2$ y $a_k = \int_a^b L_k)(x)dx$.

Fórmulas de Newton-Cotes

Teorema(Fórmula cerrada de Newton-Cotes)

Suponga que se divide el intervalor $[a,b]$ en los nodos x_k para $k = 0, \cdots, n$. Donde $a = x_0$, $b = x_n$ y $x_i = x_{i-1} + h$ para $h = \dfrac{b-a}{n}$. Entonces existe un $\xi \in (a,b)$ de manera tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)dx + \frac{h^{n+c+1} f^{(n+c)}(\xi)}{(n+c)!} \int_0^n t^c (t-1) \cdots (t-n) dt$$

donde $f \in C^{n+c}[a,b]$, $c = 2 - n \; mod \; 2$ y $a_k = \displaystyle\int_a^b L_k)(x)dx$.

Fórmulas de Newton-Cotes

Teorema(Fórmula cerrada de Newton-Cotes)

Suponga que se divide el intervalor $[a, b]$ en los nodos x_k para $k = 0, \cdots, n$. Donde $a = x_0$, $b = x_n$ y $x_i = x_{i-1} + h$ para $h = \dfrac{b-a}{n}$. Entonces existe un $\xi \in (a, b)$ de manera tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)dx + \frac{h^{n+c+1} f^{(n+c)}(\xi)}{(n+c)!} \int_0^n t^c(t-1)\cdots(t-n)dt$$

donde $f \in C^{n+c}[a, b]$, $c = 2 - n \ mod \ 2$ y $a_k = \displaystyle\int_a^b L_k)(x)dx$.

Combinando los dos últimos resultados se puede argumentar que la regla de Simpson tiene grado de precisión 3 de una manera más sencilla.

Fórmulas de Newton-Cotes

Teorema(Fórmula cerrada de Newton-Cotes)

Suponga que se divide el intervalor $[a, b]$ en los nodos x_k para $k = 0, \cdots, n$. Donde $a = x_0$, $b = x_n$ y $x_i = x_{i-1} + h$ para $h = \dfrac{b-a}{n}$. Entonces existe un $\xi \in (a, b)$ de manera tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)dx + \frac{h^{n+c+1} f^{(n+c)}(\xi)}{(n+c)!} \int_0^n t^c(t-1)\cdots(t-n)dt$$

donde $f \in C^{n+c}[a, b]$, $c = 2 - n \ mod \ 2$ y $a_k = \displaystyle\int_a^b L_k)(x)dx$.

Combinando los dos últimos resultados se puede argumentar que la regla de Simpson tiene grado de precisión 3 de una manera más sencilla.
La regla de Simpson se deduce del teorema con $n = 2$; en este caso $c = 2 - 2mod2 = 2$. De esta forma se tendría que:

Fórmulas de Newton-Cotes

Teorema(Fórmula cerrada de Newton-Cotes)

Suponga que se divide el intervalor $[a, b]$ en los nodos x_k para $k = 0, \cdots, n$. Donde $a = x_0$, $b = x_n$ y $x_i = x_{i-1} + h$ para $h = \dfrac{b-a}{n}$. Entonces existe un $\xi \in (a, b)$ de manera tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)dx + \frac{h^{n+c+1} f^{(n+c)}(\xi)}{(n+c)!} \int_0^n t^c (t-1)\cdots(t-n)dt$$

donde $f \in C^{n+c}[a, b]$, $c = 2 - n \ mod \ 2$ y $a_k = \displaystyle\int_a^b L_k)(x)dx$.

Combinando los dos últimos resultados se puede argumentar que la regla de Simpson tiene grado de precisión 3 de una manera más sencilla.
La regla de Simpson se deduce del teorema con $n = 2$; en este caso $c = 2 - 2mod2 = 2$. De esta forma se tendría que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{2} a_k f(x_k)dx + \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^2 t^2 (t-1)(t-2)dt$$

Fórmulas de Newton-Cotes

Teorema(Fórmula cerrada de Newton-Cotes)

Suponga que se divide el intervalor $[a, b]$ en los nodos x_k para $k = 0, \cdots, n$. Donde $a = x_0$, $b = x_n$ y $x_i = x_{i-1} + h$ para $h = \dfrac{b-a}{n}$. Entonces existe un $\xi \in (a, b)$ de manera tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)dx + \frac{h^{n+c+1} f^{(n+c)}(\xi)}{(n+c)!} \int_0^n t^c (t-1) \cdots (t-n)dt$$

donde $f \in C^{n+c}[a, b]$, $c = 2 - n \ mod \ 2$ y $a_k = \displaystyle\int_a^b L_k)(x)dx$.

Combinando los dos últimos resultados se puede argumentar que la regla de Simpson tiene grado de precisión 3 de una manera más sencilla.
La regla de Simpson se deduce del teorema con $n = 2$; en este caso $c = 2 - 2mod2 = 2$. De esta forma se tendría que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{2} a_k f(x_k)dx + \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^2 t^2 (t-1)(t-2)dt$$

Fórmulas de Newton-Cotes

Se deduce que $E(f(x)) = |\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^2 t^2(t-1)(t-2)dt|$, por lo tanto $E(f(x)) = 0$ para cualquier polinomio $f(x)$ de grado 3 ya que $f^{(4)}(\xi) = 0$ en este caso, y además $f^{(4)}(\xi) = 4!$ para $f(x) = x^4$ y por lo tanto $E(x^4) \neq 0$.
Finalmente por la caracterización de la precisión se tendría que el grado de exactitud de la regla de Simpson es 3.

Fórmulas de Newton-Cotes

Se deduce que $E(f(x)) = |\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^2 t^2(t-1)(t-2)dt|$, por lo tanto $E(f(x)) = 0$ para cualquier polinomio $f(x)$ de grado 3 ya que $f^{(4)}(\xi) = 0$ en este caso, y además $f^{(4)}(\xi) = 4!$ para $f(x) = x^4$ y por lo tanto $E(x^4) \neq 0$.
Finalmente por la caracterización de la precisión se tendría que el grado de exactitud de la regla de Simpson es 3.

Teorema(Fórmula abierta de Newton-Cotes)

Suponga que se divide el intervalor $[a, b]$ en los nodos x_k para $k = 0, \cdots, n$. Donde $a + h = x_0$, $b - h = x_n$ y $x_i = x_{i-1} + h$ para $h = \dfrac{b-a}{n+2}$. Entonces existe un $\xi \in (a, b)$ de manera tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)dx + \frac{h^{n+c+1} f^{(n+c)}(\xi)}{(n+c)!} \int_{-1}^{n+1} t^c(t-1)\cdots(t-n)dt$$

donde $f \in C^{n+c}[a, b]$, $c = 2 - n \ mod \ 2$ y $a_k = \displaystyle\int_a^b L_k)(x)dx$.

Ejercicio del examen del IIPA2023

Sea $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ y $P_2(x)$ el polinomio interpolante de Lagrange en $x_0 = 0$, x_1 y $x_2 = 1$. Calcule el valor de x_1 más grande en el intervalo $(0, 1)$ para el cual $f(0{,}5) - P_2(0{,}5) = -0{,}25$

Tip: evalúe en los puntos desde el inicio, así se sabe que términos se cancelaran.

$$f(x_0) = f(0) = 0 \quad f(x_1) = \sqrt{x_1 - x_1^2} \quad f(x_2) = f(x_1) = 0$$

Parte I: Determine el polinomio de Lagrange

$$\begin{aligned}
&P_2(x) \\
&= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\
&= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \\
&= \frac{(x - 0)(x - 1)}{(x_1 - 0)(x_1 - 1)} \sqrt{x_1 - x_1^2} \\
&= \frac{x(x - 1)}{x_1(x_1 - 1)} \sqrt{x_1 - x_1^2}
\end{aligned}$$

Ejercicios

Parte 2: Evalúe en 0.5

$$P_2(0{,}5) = \frac{0{,}5(0{,}5-1)}{x_1(x_1-0{,}5)}\sqrt{x_1 - x_1^2} = -\frac{0{,}25\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1(x_1-1)}$$

Parte 3: Garantizar que $f(0{,}5) - P_2(0{,}5) = -0{,}25$

$$\begin{aligned}
f(0{,}5) - P_2(0{,}5) &= -0{,}25 \\
0{,}5 + \frac{0{,}25\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1(x_1-1)} &= -0{,}25 \\
\frac{0{,}5+0{,}25}{0{,}25} &= \frac{\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1(x_1-1)} \\
-3 &= \frac{\sqrt{x_1(1-x_1)}}{-x_1(1-x_1)} = -\frac{1}{\sqrt{x_1(1-x_1)}} \\
9x_1(x_1-1) &= 1 \\
-9x_1^2 + 9x_1 - 1 = 0 &\implies x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6} \approx 0{,}8726779$
Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio Spline Cúbico

Encuentre los splines cúbicos para la función $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ en los puntos $\{x_0, \cdots, x_4\} = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Suponga condiciones naturales en -1 y fijas en 1.

- Note que $h_j = \dfrac{1}{2}$ para todo j. Del númeral 5 en las fórmulas de recurrencia se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) =& h_0 c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 \\
\frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) =& h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2 c_3 \\
\frac{3}{h_3}(a_4 - a_3) - \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) =& h_2 c_2 + 2(h_2 + h_3)c_3 + h_3 c_4
\end{aligned}$$

- Sustituyendo los valores conocidos:

$$
\begin{aligned}
6(f(0)-f(-1/2))-6(f(-1/2)-f(-1)) =& c_0/2+2c_1+c_2/2 \\
6(f(1/2)-f(0))-6(f(0)-f(-1/2)) =& c_1/2+2c_2+c_3/2 \\
6(f(1)-f(1/2))-6(f(1/2)-f(0)) =& c_2/2+2c_3+c_4/2
\end{aligned}
$$

Ejercicios

- Sustituyendo los valores conocidos:

$$
\begin{aligned}
6(f(0)-f(-1/2))-6(f(-1/2)-f(-1)) =& c_0/2+2c_1+c_2/2 \\
6(f(1/2)-f(0))-6(f(0)-f(-1/2)) =& c_1/2+2c_2+c_3/2 \\
6(f(1)-f(1/2))-6(f(1/2)-f(0)) =& c_2/2+2c_3+c_4/2
\end{aligned}
$$

- Simplificando:

$$
\begin{aligned}
\frac{3450}{377} =& c_0+4c_1+c_2 \\
-\frac{600}{29} =& c_1+4c_2+c_3 \\
\frac{3450}{377} =& c_2+4c_4+c_4
\end{aligned}
$$

Ejercicios

- Sustituyendo los valores conocidos:

$$\begin{aligned} 6(f(0)-f(-1/2))-6(f(-1/2)-f(-1)) =& c_0/2+2c_1+c_2/2 \\ 6(f(1/2)-f(0))-6(f(0)-f(-1/2)) =& c_1/2+2c_2+c_3/2 \\ 6(f(1)-f(1/2))-6(f(1/2)-f(0)) =& c_2/2+2c_3+c_4/2 \end{aligned}$$

- Simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{3450}{377} =& c_0+4c_1+c_2 \\ -\frac{600}{29} =& c_1+4c_2+c_3 \\ \frac{3450}{377} =& c_2+4c_4+c_4 \end{aligned}$$

- En este punto se necesitan agregar las condiciones de frontera. Si se empieza por las naturales se tendría que $S''(-1)=S_0''(-1)=2c_0=0$, lo cuál implica que $c_0=0$.

- La condición en el extremo derecho exige que $f'(1) = -\frac{25}{338} = b_4$.

Si se agrupan las últimas ecuaciones en las fórmulas de recurrencia, se obtendría:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 + d_{n-1}h_{n-1}^3 \\ b_n &= b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 \\ c_n &= c_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1} \end{aligned}$$

Si se despeja b_{n-1} y d_{n-1} desde la segunda y tercera ecuación respectivamente y luego se sustituye y se simplifica en la primera ecuación, se obtiene que:

$$2h_{n-1}c_n + h_{n-1}c_{n-1} = \frac{3}{h_{n-1}}(a_{n-1} - a_n)$$

$$2h_3c_4 + h_3c_3 = \frac{3}{h_3}(a_3 - a_4)$$

Sustituyendo los valores conocidos se obtiene que:

$$c_4 + c_3/2 = 6(f(1/2) - f(1))$$

$$2c_4 + c_3 = \frac{450}{377}$$

Ejercicios

- Juntando las condiciones de frontera obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 &= c_0 \\
\frac{450}{377} &= 2c_4 + c_3 \\
\frac{3450}{377} &= c_0 + 4c_1 + c_2 \\
-\frac{600}{29} &= c_1 + 4c_2 + c_3 \\
\frac{3450}{377} &= c_2 + 4c_3 + c_4
\end{aligned}
$$

Ejercicios

- Juntando las condiciones de frontera obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 =& c_0 \\
\frac{450}{377} =& 2c_4 + c_3 \\
\frac{3450}{377} =& c_0 + 4c_1 + c_2 \\
-\frac{600}{29} =& c_1 + 4c_2 + c_3 \\
\frac{3450}{377} =& c_2 + 4c_3 + c_4
\end{aligned}
$$

- Resolviendo el sistema anterior se obtiene que:

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] = \left[\frac{1}{26}, \frac{4}{29}, 1, \frac{4}{29}, \frac{1}{26}\right]$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3] = \left[-\frac{17850}{36569}, \frac{4425}{2813}, -\frac{1275}{36569}, -\frac{52425}{36569}\right]$$

$$[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4] = \left[0, \frac{150750}{36569}, -\frac{268350}{36569}, \frac{166050}{36569}, -\frac{61200}{36569}\right]$$

$$[d_0, d_1, d_2, d_3] = \left[\frac{100500}{36569}, -\frac{279400}{36569}, \frac{289600}{36569}, -\frac{151500}{36569}\right]$$

Ejercicio de Richard Burden, Sección de trazadores cúbicos

Un trazador cúbico sujeto S de la función f está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & x \in [0,1] \\ S_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

Ejercicios

Ejercicio de Richard Burden, Sección de trazadores cúbicos

Un trazador cúbico sujeto S de la función f está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & x \in [0,1] \\ S_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

- Dado que estos representa trazadores cúbicos entonces se cumplen las siguientes condiciones:

$$S_0(1) = S_1(1)$$

$$S_0'(1) = S_1'(1)$$

Ejercicios

Ejercicio de Richard Burden, Sección de trazadores cúbicos

Un trazador cúbico sujeto S de la función f está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & x \in [0,1] \\ S_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

- Dado que estos representa trazadores cúbicos entonces se cumplen las siguientes condiciones:

$$S_0(1) = S_1(1)$$
$$S_0'(1) = S_1'(1)$$

Ejercicios

Ejercicio de Richard Burden, Sección de trazadores cúbicos

Un trazador cúbico sujeto S de la función f está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & x \in [0,1] \\ S_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

- Dado que estos representa trazadores cúbicos entonces se cumplen las siguientes condiciones:

$$S_0(1) = S_1(1)$$
$$S_0'(1) = S_1'(1)$$

- La primera ecuación deja como resultado:

$$1 + B = S_0(1) = S_1(1) = 1 \Longrightarrow B = 0.$$

La segunda ecuación dá como resultado:

$$-2 = S_0'(1) = S_1'(1) = b \Longrightarrow b = -2.$$

Con esto se puede calcular $f'(0) = S_0'(0) = 0$ y $f'(2) = S_1'(2) = 11$.

Ejercicio (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo $[2, 2{,}6]$ con tres puntos; $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ y $x_2 = 2{,}6$.

Ejercicio (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo $[2, 2{,}6]$ con tres puntos; $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ y $x_2 = 2{,}6$.

- Por el teorema relacionado con el polinomio de Lagrange, se sabe que:

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6) \right|,$$

para $x \in [2, 2{,}6]$ y $\xi(x) \in (2, 2{,}6)$

Ejercicio (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo $[2, 2{,}6]$ con tres puntos; $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ y $x_2 = 2{,}6$.

- Por el teorema relacionado con el polinomio de Lagrange, se sabe que:

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6) \right|,$$

para $x \in [2, 2{,}6]$ y $\xi(x) \in (2, 2{,}6)$

- Para encontrar las cotas sobre la tercera derivada se necesitan los siguientes cálculos:

$$f^{(3)}(z) = \frac{3\sin(\ln(z)) + \cos(\ln(z))}{z^3}$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{10\sin(\ln(z))}{z^4}$$

Ejercicios

- Si se analizan los lugares donde la derivada de la tercera derivada se hacen cero, entonces se obtiene la ecuación:

$$\sin(\ln(z)) = 0,$$

esta ecuación tiene como solución $z = e^{n\pi}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\pi} \notin [2, 2{,}6]$ y por lo tanto los únicos valores extremos de la tercera derivada son 2 y 2.6.

Evaluando la tercera derivada se obtiene que:

$$f^{(3)}(2) \approx 0{,}335765$$

$$f^{(3)}(2{,}6) \approx 0{,}1722$$

y por lo tanto se puede garantizar que:

$$|f^{(3)}(x)| \leq f^{(3)}(2)$$

para todo $x \in [2, 2{,}6]$.

- Si se analizan los lugares donde la derivada de la tercera derivada se hacen cero, entonces se obtiene la ecuación:

$$\sin(\ln(z)) = 0,$$

esta ecuación tiene como solución $z = e^{n\pi}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\pi} \notin [2, 2{,}6]$ y por lo tanto los únicos valores extremos de la tercera derivada son 2 y 2.6.

Evaluando la tercera derivada se obtiene que:

$$f^{(3)}(2) \approx 0{,}335765$$

$$f^{(3)}(2{,}6) \approx 0{,}1722$$

y por lo tanto se puede garantizar que:

$$|f^{(3)}(x)| \leq f^{(3)}(2)$$

para todo $x \in [2, 2{,}6]$.

- Defina ahora la otra parte para la cota de error:

$$g(x) \equiv (x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6) = \frac{25x^3 - 175x^2 + 406x - 312}{25}$$

Ejercicios

- Resolviendo para la ecuación de segundo grado:

$$g'(x) = 0.$$

Se obtiene que $x = \dfrac{35-\sqrt{7}}{15}$ (una de las dos raíces) es el lugar donde alcanza el valor más alto. Entonces:

$$|g(x)| \leq g\left(\frac{35-\sqrt{7}}{15}\right)$$

para toda $x \in [2, 2{,}6]$.

- Resolviendo para la ecuación de segundo grado:

$$g'(x) = 0.$$

Se obtiene que $x = \dfrac{35-\sqrt{7}}{15}$ (una de las dos raíces) es el lugar donde alcanza el valor más alto. Entonces:

$$|g(x)| \leq g\left(\frac{35-\sqrt{7}}{15}\right)$$

para toda $x \in [2, 2{,}6]$.

- Finalmente:

$$|f(x)-P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)\right| \leq g\left(\frac{35-\sqrt{7}}{15}\right) f^{(3)}(2)/6 \approx 9{,}4574\times 10^{-4}$$

La cota de error entonces es aproximadamente $9{,}5 \times 10^{-4}$.

Ejercicio (Ajuste lineal)

Considere el siguiente conjunto de datos:

x_i	y_i
1	6.612
2	9.742
3	10.455
4	14.545
5	17.293
6	19.544
7	21.279
8	26.167
9	28.341
10	29.158

Por medio del método de mínimos cuadrados encuentre la pendiente (a_1) y el intercepto (a_0) del ajuste lineal.

Ejercicios

Después de plantear el problema con los datos anteriores se obtiene la siguiente gráfica:

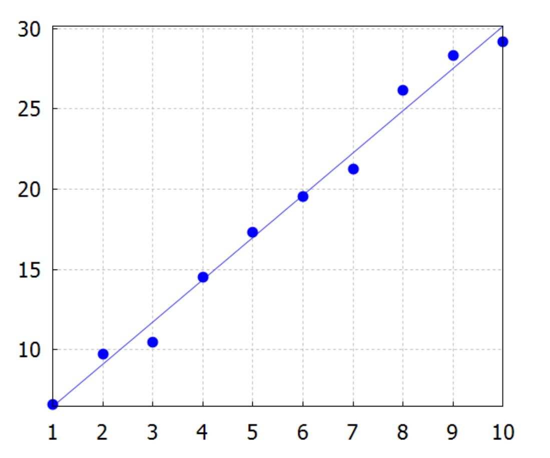


Figura: En el ajuste se obtubieron los coeficientes $a_1 = 2{,}631$, $a_0 = 3{,}843$.

Ejercicios

Ejercicio (Derivación de fórmula numérica)

Derive una fórmula de cinco puntos $O(h^4)$ para aproximar $f'(x)$ que utilice $f(x-h), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h)$.

El problema se puede plantear de la siguiente forma; encontrar constantes A, B, C y D tales que:

$$f'(x) = Af(x-h) + Bf(x+h) + Cf(x+2h) + Df(x+3h) + Ef(x). \tag{1}$$

Dado que se requiere una fórmula de orden 4, entonces se usará la fórmula de Taylor hasta el orden 5. Dejando de lado los residuos (estos tendrán como factor común a h^5), al hacer la suma y agrupar la parte derecha (1) como un polinomio cuártico en términos de h, se obtienen los siguientes coeficientes:

- Coeficiente independiente: $(A+B+C+D+E)f(x)$.
- Coeficiente de h: $(3D+2C+B-A)f'(x)$.
- Coeficiente de h^2: $(9D+4C+B+A)/2f''(x)$.
- Coeficiente de h^3: $(27D+8C+B-A)/6f^{(3)}(x)$.
- Coeficiente de h^4: $(81D+16C+B+A)/24f^{(4)}(x)$.

Para que se cumpla (1) (salvo por los residuos producto del polinomio de Taylor) se impondrá que todos los coeficientes del polinomio cuártico sean cero con excepción de el coeficiente de h y h^0 (ya que se desea que sea igual a $f'(x)$).

Ejercicios

El coeficiente de h, convenientemente se hace igual a $\frac{1}{h}$ para que sea igual a $f'(x)$ en lado izquierdo de(1). El sistema que resulta de los planteamientos que se hicieron antes, queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
0 &= E + D + C + B + A \\
\frac{1}{h} &= 3D + 2C + B - A \\
0 &= 9D + 4C + B + A \\
0 &= 27D + 8C + B - A \\
0 &= 81D + 16C + B + A
\end{aligned}$$

Después de resolver el sistema obtenemos.

$$A = -\frac{1}{4h}, B = \frac{3}{2h}, C = -\frac{1}{2h}, D = \frac{1}{12h}, E = -\frac{5}{6h}.$$

Sustituyendo se obtiene:

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x-h) + 18f(x+h) - 6f(x+2h) + f(x+3h) - 10f(x)}{12h}$$

Referencias

Burden, Richard L y otros (2017). *Analisis numerico.*

Xiao, Xiaoyong y Hongwei Yin (2015). “A simple and efficient method with high order convergence for solving systems of nonlinear equations”. En: *Computers & Mathematics with Applications* 69.10, págs. 1220-1231.