Departamento de Matemática Aplicada
Análisis Numérico, IC303

Myrian González Orellana

PACIII2024

Teoremas Preliminares I

Esta presentación esta basada en el texto de [?].

Teorema 1.1 (Criterio del límite)

Sea $f : \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$. *Asuma que* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *existe y es igual a* L. *Entonces la sucesión* $\{a_n\} = \{f(n)\}$ *converge a* L *también.*

Enlace a ejercicio.

Teorema 1.2 (Teorema de convergencia monótona)

Suponga que la sucesión $\{a_n\}$ *es monótona creciente y acotada superiormente, entonces* $\{a_n\}$ *es convergente.*

Enlace a ejercicio.

Teorema 1.3 (Teorema del sándwich)

Suponga que $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *convergen al valor de* L. *Además asuma que* $a_n \leq x_n \leq b_n$, *para* $n > N$ *para algún* N *fijo; entonces* $\{x_n\}$ *converge a* L.

Enlace a ejercicio.

Teoremas Preliminares II

Teorema 1.4 (Teorema del valor medio)

Si $f \in C[a,b]$ *y* f *es diferenciable en* (a,b), *entonces existe un número* c *en* (a,b) *con*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

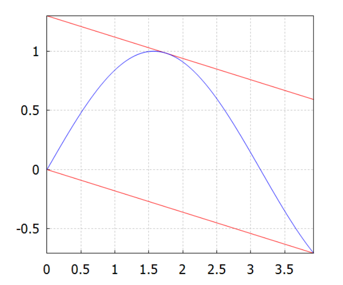


Figura: En la figura se puede ver un ejemplo con $f(x) = \sin(x)$ para $x \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$

Teoremas Preliminares III

Teorema 1.5 (Teorema del valo extremo)

- *Si* $f \in C[a,b]$, *entonces existe* $c_1, c_2 \in [a,b]$ *con* $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),\ x \in [a,b]$.
- *Si además* f *es diferenciable en* (a,b), *entonces* c_1 *y* c_2 *son iguales a los extremos (a o b) o los lugares donde la derivada se hace cero en* (a,b).

Enlace a ejercicio

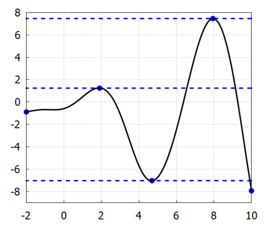
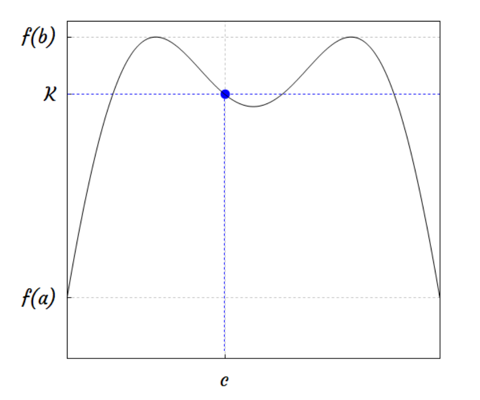


Figura: Se puede apreciar en el ejemplo, que el máximo de la función se alcanza en un lugar donde la derivada es cero y el mínimo en el extremo derecho.

Teorema 1.6 (Teorema del valor intermedio)

Si $f \in C[a,b]$ y K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en (a,b) para el cual $f(c) = K$.

Enlace a ejercicio



Teoremas Preliminares V

Se define $C^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f, f', \cdots, f^{(n)}$ son continuas en $[a,b]\}$.

Teorema 1.7 (Teorema de Taylor)

Supong que:

- $f \in C^n[a,b]$.
- $f^{(n+1)}$ *esta definida en* $[a,b]$.
- $x_0 \in [a,b]$.

Entonces, para cada $x \in [a,b]$, *existe* $\xi(x) \in (x_0, x)$ *(si* $x > x_0$ *y* $\xi(x) \in (x, x_0)$ *en el otro caso) tal que:*

- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ *donde*
- $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ *y*
- $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$.

Enlace a ejercicio

Raíces de ecuaciones I

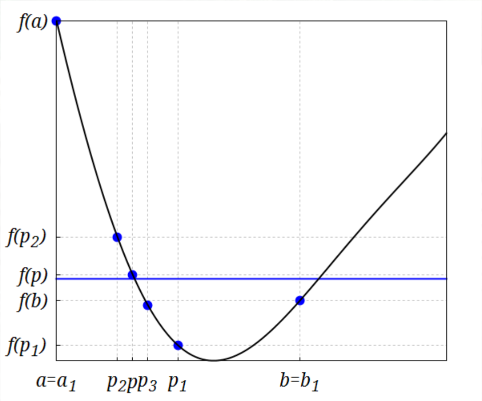


Figura: **Método de Bisección:** En la figura se muestra el mécanismo de la bisección.

Listing 1: "Método de Bisección"

```
function x=Biseccion(f,a,b,TOL,N0)
  i=1;FA=f(a);
  while(i<=N0)
    p=a+(b-a)/2;
    FP=f(p);
    if(FP==0 || (b-a)/2<TOL)
      x=p;
      break;
    endif
    i=i+1;
    if(FA*FP>0)
      a=p;
      FA=FP;
    else
      b=p;
    endif
  endwhile
  if(i>N0)
    x=inf;
  endif
endfunction
```

Raíces de ecuaciones III

Teorema 2.1 (Teorema de convergencia del método de bisección)

Supongamos que $f \in C[a,b]$ *y* $f(a)f(b) < 0$. *El método de bisección genera una sucesión* $\{p_n\}$ *que aproxima a un cero de* p *de* f, *tal que:*

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Enlace a ejercicio

Primero note que $p \in [a_n, b_n]$ (teorema del valor intermedio), entonces

$$|p - (a_n + b_n)/2| \leq (b_n - a_n)/2.$$

Teorema 2.1 (Teorema de convergencia del método de bisección)

Supongamos que $f \in C[a,b]$ *y* $f(a)f(b) < 0$. *El método de bisección genera una sucesión* $\{p_n\}$ *que aproxima a un cero de* p *de* f, *tal que:*

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Enlace a ejercicio

Primero note que $p \in [a_n, b_n]$ (teorema del valor intermedio), entonces

$$|p - (a_n + b_n)/2| \leq (b_n - a_n)/2.$$

De esto se tiene que:

$$|p_n - p| = |(a_n + b_n)/2 - p|$$

Raíces de ecuaciones III

Teorema 2.1 (Teorema de convergencia del método de bisección)

Supongamos que $f \in C[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$. El método de bisección genera una sucesión $\{p_n\}$ que aproxima a un cero de p de f, tal que:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Enlace a ejercicio

Primero note que $p \in [a_n, b_n]$ (teorema del valor intermedio), entonces

$$|p - (a_n + b_n)/2| \leq (b_n - a_n)/2.$$

De esto se tiene que:

$$\begin{aligned} |p_n - p| &= |(a_n + b_n)/2 - p| \\ &\leq \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^{n-1}} (\text{ inducción} : b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}) \end{aligned}$$

Teorema 2.1 (Teorema de convergencia del método de bisección)

Supongamos que $f \in C[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$. El método de bisección genera una sucesión $\{p_n\}$ que aproxima a un cero de p de f, tal que:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Enlace a ejercicio

Primero note que $p \in [a_n, b_n]$ (teorema del valor intermedio), entonces

$$|p - (a_n + b_n)/2| \leq (b_n - a_n)/2.$$

De esto se tiene que:

$$\begin{aligned} |p_n - p| =& |(a_n + b_n)/2 - p| \\ \leq& \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^{n-1}} (\text{ inducción} : b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}) \\ =& \frac{b-a}{2^n}. \end{aligned}$$

Definición 2.1 (Iteración de Newton Raphson)

La iteración de Newton Rapshon se define como:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

Como se suele encontrar en muchos textos y con justa razón, el método de Newton-Raphson es uno de los métodos más poderosos conocidos para la resolución de ecuaciones.

Idea detrás del método: Suponga que se quiere investigar como resolver la ecuación:

$$f(x) = 0$$

Supogan además que la raíz a esta ecuación sucede en $x = p$. Por el teorema de Taylor bajo algunas suposiciones tenemos que:

$$0 = f(p) = f(x) + (p - x)f'(x) + \frac{(p-x)^2}{2} f''(\xi(x))$$

Raíces de ecuaciones V

Si se asume que x está cerca de p entonces, después de despejar arriba se tiene:

$$p \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \ (p-x)^2 \approx 0.$$

Esto último, como se puede notar, tiene la estructura de la iteración del método de Newton presentada al inicio.

El método iterativo de Newton se puede analizar desde el teorema de punto fijo; para ello considere primero el enunciado de dicho teorema:

Teorema 2.2 (Teorema de punto fijo)

Suponga lo siguiente:

- $g \in C[a,b], g(x) \in [a,b]$.
- *Suponga que* g' *existe en* (a,b).
- *Existe una constante positiva* k, *tal que* $|g'(x)| \leq k < 1$ *para toda* $x \in (a,b)$.

Entonces para cualquier $p_0 \in [a,b]$ *la sucesión definida por* $p_n = g(p_{n-1})$ *converge al único punto fijo* p *tal que* $p = g(p)$.

Raíces de ecuaciones VI

En la iteración de Newton, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$; si se asume que $f'(p) \neq 0$ y cumple con todas las condiciones del teorema de punto fijo, entonces la conclusión de este es que la sucesión converge a p y

$$p = g(p) = p - \frac{f(p)}{f'(p)},$$

esto deriva en que $f(p) = 0$; lo que justamente se anda buscando.

Para que se garantice el teorema de punto fijo, se tiene el siguiente teorema sobre el método de Newton:

Teorema 2.3 (Teorema de convergencia del método de Newton)

Suponga que:

- $f \in C^2[a, b]$.
- $p \in [a, b]$.
- $f(p) = 0,\ f'(p) \neq 0$.

Entonces existe un $\delta > 0$ *tal que la sucesión* $\{p_n\}$ *converge a* p *para cualquier aproximación inicial* $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

La demostración del teorema se puede encontrar en [?]. En el podrás observar que se usa el teorema de punto fijo.

Para apreciar la importancia del método de Newton, se necesita la siguiente definición:

Definición 2.2 (Orden de convergencia)

Suponga que $\{p_n\}$ es una sucesión que converge a p y que $p \neq p_n$ para toda n. Además asuma que existen constantes positivas λ y α tales que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda.$$

entonces se dice que:

- *α es le orden de convergencia de la sucesión $\{p_n\}$.*
- *λ es la constante de error asintótica.*

Raíces de ecuaciones VIII

Observaciones:

- La parte más relevante en la definición anterior es el orden de convergencia α; entre más grande sea este, el método convergerá con mayor rapidez.

Enlace a ejercicio

Raíces de ecuaciones VIII

Observaciones:

- La parte más relevante en la definición anterior es el orden de convergencia α; entre más grande sea este, el método convergerá con mayor rapidez.
- El método de bisección tiene un orden de convergencia $\alpha = 1$ (esto se denomina convergencia lineal).

Enlace a ejercicio

Observaciones:

- La parte más relevante en la definición anterior es el orden de convergencia α; entre más grande sea este, el método convergerá con mayor rapidez.
- El método de bisección tiene un orden de convergencia $\alpha = 1$ (esto se denomina convergencia lineal).
- Bajo ciertos supuestos razonables, el método de Newton posee una convergencia de al menos $\alpha = 2$ (esto se denomina convergencia cuadrática). Debido a su valor en el orden de convergencia, a este método se le considera de rápida convergencia.

Enlace a ejercicio

Raíces de ecuaciones VIII

Observaciones:

- La parte más relevante en la definición anterior es el orden de convergencia α; entre más grande sea este, el método convergerá con mayor rapidez.
- El método de bisección tiene un orden de convergencia $\alpha = 1$ (esto se denomina convergencia lineal).
- Bajo ciertos supuestos razonables, el método de Newton posee una convergencia de al menos $\alpha = 2$ (esto se denomina convergencia cuadrática). Debido a su valor en el orden de convergencia, a este método se le considera de rápida convergencia.
- Usualmente se preferirá el método de Newton sobre el método de bisección; sin embargo hay que notar que la desventaja del método de Newton es la escogencia del valor inicial y una combinación de ambos métodos es en general la mejor opción.

Enlace a ejercicio

Definición 2.3 (Sistema de ecuaciones)

Un sistema de ecuaciones, en general tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{bmatrix}$$

El cual se puede expresar de forma compacta como:

$$F(X) = 0,$$

donde $X = [x_1, \cdots, x_n]$ *y* $F(X) = [f_1(X), \cdots, f_n(X)]$.

Todo el análisis que se hizo antes en el caso de una variable, se puede hacer para el caso en el que queremos resolver un sistema de ecuaciones.

Definición 2.4 (Iteración del método de Newton para sistemas)

Se define la iteración de Newton para sistemas como:

$$p_{n+1} = p_n - J^{-1}(p_n)F(p_n),$$

donde:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangledown f_1(X) \\ \vdots \\ \triangledown f_n(X) \end{pmatrix}$$

A J se le conoce como el Jacobiano en la literatura.

Para medir los errores en el caso de sistemas, en lugar del valor absoluto se usa su equivalente, las normas:

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, ||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|, ||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

.

Raíces de ecuaciones XI

Por ejemplo, si se quiere medir el error entre la aproximación p_n de p, donde estos son vectores, entonces:

- Error absoluto en la norma infinito: $||p - p_n||_\infty$
- Error relativo en la norma 1: $\dfrac{||p - p_n||_1}{||p||_1}$

Cuando no se conoce el valor exacto entonces se suelen usar medidas para estimar el valor relativo o absoluto; para ello suponga que se quiere estimar el error para una suceción $\{p_n\}$ vectorial:

- Estimación error absoluto en la norma 2: $||p_{n+1} - p_n||_2$
- Estimación del error relativo en la norma infinito: $\dfrac{||p_{n+1} - p_n||_\infty}{||p_{n+1}||_\infty}$

Enlace a ejercicio

Ejercicios

Ejercicio 3.1 (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Ejercicios

Ejercicio 3.1 (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio 3.1 (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio 3.1 (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) \end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio 3.1 (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) \\
&=1
\end{aligned}$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio 3.1 (Criterio de límite)

Encontrar el límite de la sucesión $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

Usando el criterio del límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n)(-1/n^2)}{(-1/n^2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Entonces el límite buscado es 1.

Teoremas Preliminares.

Ejercicio 3.2 (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

Ejercicio 3.2 (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio 3.2 (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\cos(n)}{n}\right\}$.

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$
$$\Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Ejercicios

Ejercicio 3.2 (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\cos(n)}{n}\right\}$.

$$
\begin{aligned}
&-1 \leq \cos(n) \leq 1\\
\Rightarrow &\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}\\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Ejercicio 3.2 (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{ \dfrac{\cos(n)}{n} \right\}$.

$$
\begin{aligned}
&-1 \leq \cos(n) \leq 1 \\
\Rightarrow &\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
\Rightarrow &0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio 3.2 (Teorema del Sandwich)

Determine el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\cos(n)}{n}\right\}$.

$$
\begin{aligned}
&-1 \leq \cos(n) \leq 1 \\
\Rightarrow &\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
\Rightarrow &0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el límite de la sucesión en cuestión es 0.

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio 3.3 (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ *con* $a_1 = 1$, *asumiendo que* $\{a_n\}$ *es acotada superiormente y es estrictamente creciente.*

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

Ejercicios

Ejercicio 3.3 (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ con $a_1 = 1$, asumiendo que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y es estrictamente creciente.

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

Ejercicio 3.3 (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ *con* $a_1 = 1$, *asumiendo que* $\{a_n\}$ *es acotada superiormente y es estrictamente creciente.*

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

Ejercicios

Ejercicio 3.3 (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ *con* $a_1 = 1$, *asumiendo que* $\{a_n\}$ *es acotada superiormente y es estrictamente creciente.*

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow L &= \sqrt{1 + L} \end{aligned}$$

Ejercicios

Ejercicio 3.3 (Teorema de la sucesión monótona)

Encuentre el límite de la sucesión definida recursivamente por $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ *con* $a_1 = 1$*, asumiendo que* $\{a_n\}$ *es acotada superiormente y es estrictamente creciente.*

Por el teorema de convergencia monótona existe el límite; sea L tal límite, entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_{n-1}} \\ \Rightarrow L &= \sqrt{1 + L} \end{aligned}$$

Resolviendo la última ecuación se obtiene que:

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Ejercicios

Ejercicio 3.4 (Teorema de valores extremos)

Encuentre $\max_{x\in[2,5]} |f(x)|$ *donde* $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x-1))$.

- f es continua y diferenciable en $[2,5]$.

Ejercicios

Ejercicio 3.4 (Teorema de valores extremos)

Encuentre $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)|$ *donde* $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x-1))$.

- f es continua y diferenciable en [2,5].
- Por el teorema de valores extremos, existen c_1, c_2 tales que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$

para todo $x \in [2,5]$ y entonces $\max\limits_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$.

Ejercicios

Ejercicio 3.4 (Teorema de valores extremos)

Encuentre $\max_{x\in[2,5]} |f(x)|$ *donde* $f(x) = 1 - \exp(-\cos(x-1))$.

- f es continua y diferenciable en [2,5].
- Por el teorema de valores extremos, existen c_1, c_2 tales que

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2),$$

para todo $x \in [2,5]$ y entonces $\max_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(c_1)|, |f(c_2)|)$.

- Además dado que la función es diferenciable, se sabe que los posibles valores extremos se alcanzan en 2, 5 o donde la derivada se hace cero.

$$f'(x) = \exp(-\cos(x-1))(\sin(x-1)) = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $x = 1 + n\pi.$, $n \in \mathbb{Z}$. La única solución que se encuentra en el intervalo [2,5] es $x = 1 + \pi$.

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:
  - $f(2) \approx 0{,}42$.
  - $f(5) \approx -0{,}92$.
  - $f(1+\pi) \approx -1{,}72$.

  Entonces $c_1 = 1 + \pi$ y $c_2 = 2$.

Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:
  - $f(2) \approx 0{,}42.$
  - $f(5) \approx -0{,}92.$
  - $f(1+\pi) \approx -1{,}72.$

  Entonces $c_1 = 1+\pi$ y $c_2 = 2$.
- De lo anterior se obtiene que

  $$\max_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(2)|, |f(1+\pi)|) = e - 1.$$

Ejercicios

- Al evaluar en los candidatos, se obtiene:
  - $f(2) \approx 0{,}42$.
  - $f(5) \approx -0{,}92$.
  - $f(1+\pi) \approx -1{,}72$.

  Entonces $c_1 = 1 + \pi$ y $c_2 = 2$.
- De lo anterior se obtiene que

$$\max_{x\in[2,5]} |f(x)| = \max(|f(2)|, |f(1+\pi)|) = e - 1.$$

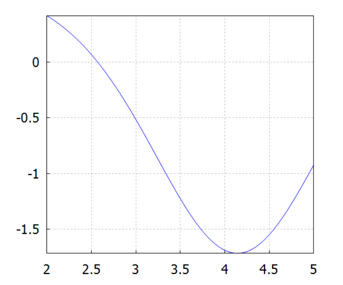


Figura: Gráfica de $f(x)$ en $[2{,}5]$.

Ejercicio 3.5 (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo $[2, 4]$.

Teoremas Preliminares.

Ejercicio 3.5 (Teorema del valor intermedio)

Determine si la siguiente ecuación tiene una solución

$$\sin(x)/\log(x) = 0,$$

en el intervalo $[2, 4]$.

Elija $f(x) = \sin(x)/\log(x)$.

Dado que $f(2) > 0$, $f(4) < 0$, f es continua en [2,4] y $f(4) < 0 < f(2)$, entonces (tomando $K = 0$) por el teorema del valor intermedio existe un c tal que $f(c) = K = 0$.

Teoremas Preliminares.

Ejercicio 3.6 (Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cuál es el valor de n para conseguir un error de a lo mucho 10^{-5}; calcule el error asumiendo que la solución exacta es π. ($f(x) = \sin(x)/\log(x)$, $x \in [2, 4]$.)

n	a	b	p	f(p)	|p−p*|
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	1.284530e−01	1.415927e−01
2	3	3.5	3.5	−2.800077e−01	3.584073e−01
3	3	3.25	3.25	−9.179542e−02	1.084073e−01
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	1.887677e−05	2.160867e−05
17	3.1416	3.1416	3.1416	5.547064e−06	6.349879e−06
18	3.1416	3.1416	3.1416	−1.117744e−06	1.279516e−06
19	3.1416	3.1416	3.1416	2.214656e−06	2.535182e−06

Ejercicio 3.6 (Método de bisección)

Encuentre la aproximación para la solución del problema anterior usando el método de bisección. Además determine cuál es el valor de n para conseguir un error de a lo mucho 10^{-5}; calcule el error asumiendo que la solución exacta es π. ($f(x) = \sin(x)/\log(x)$, $x \in [2,4]$.)

n	a	b	p	f(p)	|p−p*|
0	2	4	*	*	*
1	3	4	3	1.284530e−01	1.415927e−01
2	3	3.5	3.5	−2.800077e−01	3.584073e−01
3	3	3.25	3.25	−9.179542e−02	1.084073e−01
...					
16	3.1416	3.1416	3.1416	1.887677e−05	2.160867e−05
17	3.1416	3.1416	3.1416	5.547064e−06	6.349879e−06
18	3.1416	3.1416	3.1416	−1.117744e−06	1.279516e−06
19	3.1416	3.1416	3.1416	2.214656e−06	2.535182e−06

Se necesita garantizar que $|p - \pi| \leq 10^{-5}$. Por el teorema de bisección, se tiene

$$|p - \pi| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{4-2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-5}$$

Ejercicio 3.7 (Teorema de Taylor)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(x))$. *Determine lo siguiente:*

- *Calcule* $P_3(x)$ *centrada en* $x_0 = 3$.
- *Aproxime* $P_3(1{,}5)$.
- *Encuentre la expresión para* $R_3(x)$.
- *Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.*
- *Aproxime* $\displaystyle\int_2^4 f(x)dx$ *usando* $P_3(x)$.

Ejercicio 3.7 (Teorema de Taylor)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(x))$*. Determine lo siguiente:*

- *Calcule* $P_3(x)$ *centrada en* $x_0 = 3$.
- *Aproxime* $P_3(1{,}5)$.
- *Encuentre la expresión para* $R_3(x)$.
- *Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.*
- *Aproxime* $\displaystyle\int_2^4 f(x)dx$ *usando* $P_3(x)$.

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Ejercicio 3.7 (Teorema de Taylor)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(x))$. *Determine lo siguiente:*

- *Calcule* $P_3(x)$ *centrada en* $x_0 = 3$.
- *Aproxime* $P_3(1{,}5)$.
- *Encuentre la expresión para* $R_3(x)$.
- *Calcule el error absoluto y relativo de la aproximación anterior.*
- *Aproxime* $\int_2^4 f(x)dx$ *usando* $P_3(x)$.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= \frac{f(3)}{0!}(x-3)^0 + \frac{f'(3)}{1!}(x-3)^1 + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3. \end{aligned}$$

Ejercicios

$$= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2$$

$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3$$

Ejercicios

$$= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2$$
$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3$$

$$P_3(1{,}5) = \ln(\ln(3)) + \frac{(1{,}5-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(1{,}5-3)^2$$
$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(1{,}5-3)^3$$
$$\approx -0{,}69955228$$

Ejercicios

$$= \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2$$
$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3$$

$$P_3(1{,}5) = \ln(\ln(3)) + \frac{(1{,}5-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(1{,}5-3)^2$$
$$+ \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(1{,}5-3)^3$$
$$\approx -0{,}69955228$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{(4)!}(x-3)^4$$
$$= -\frac{6\,(\log\xi(x))^3 + 11\,(\log\xi(x))^2 + 12\,\log\xi(x) + 6}{\xi(x)^4\,(\log\xi(x))^4}(x-3)^4.$$

Ejercicios

Observación: Si p^* es una aproximación de p, entonces se definen los errores:

- Error absoluto: $|p - p^*|$.
- Error relativo: $\dfrac{|p - p^*|}{|p|}$.

Error absoluto:

$$|f(1{,}5) - P_3(1{,}5)| \approx 0{,}20316817$$

Error relativo:

Ejercicios

Observación: Si p^* es una aproximación de p, entonces se definen los errores:

- Error absoluto: $|p - p^*|$.
- Error relativo: $\dfrac{|p - p^*|}{|p|}$.

Error absoluto:

$$|f(1{,}5) - P_3(1{,}5)| \approx 0{,}20316817$$

Error relativo:

$$\frac{|f(1{,}5) - P_3(1{,}5)|}{|f(1{,}5)|} \approx 0{,}22506211$$

Ejercicios

$$\int_2^4 f(x)dx \approx \int_2^4 P_3(x)dx$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\
&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3 dx
\end{aligned}
$$

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\
&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3 dx \\
&= \Bigg[\ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-3)^4 \Bigg]_2^4
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 f(x)dx &\approx \int_2^4 P_3(x)dx \\
&= \int_2^4 \ln(\ln(3)) + \frac{(x-3)}{3\ln(3)} - \left(\frac{1}{18\ln(3)} + \frac{1}{18\ln^2(3)}\right)(x-3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{\ln(3)} + \frac{3}{\ln^2(3)} + \frac{2}{\ln^3(3)}\right)(x-3)^3 dx \\
&= \Bigg[\ln(\ln(3))(x-3) + \frac{(x-3)^2}{6\ln(3)} - \left(\frac{1}{54\ln(3)} + \frac{1}{54\ln^2(3)}\right)(x-3)^3 \\
&\quad + \frac{1}{162}\left(\frac{2}{4\ln(3)} + \frac{3}{4\ln^2(3)} + \frac{2}{4\ln^3(3)}\right)(x-3)^4\Bigg]_2^4 \\
&\approx 0{,}1242167
\end{aligned}
$$

Teoremas Preliminares.

Ejercicios

Ejercicio 3.8 (Método de Newton-Raphson,Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ *cambia con una rapidez constante de* $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega < 0$.
Al final de t *segundos, la posición del objeto está dada por:*

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t)\right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez ω *con que cambia* θ. *Asuma que* $g = 32{,}17 pies/s^2$. *Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:*

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.

Ejercicio 3.8 (Método de Newton-Raphson,Examen I, PACI2023)

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ cambia con una rapidez constante de $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$.
Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t)\right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 60 pies en 2s. Encuentre la rapidez ω con que cambia θ. Asuma que $g = 32{,}17 pies/s^2$. Para calcular dicha rapidez realice lo siguiente:

- Plantee la ecuación y determine el intervalo con extremos enteros de menor valor absoluto que contenga la solución de la ecuación.
  Dado que $x(2) = 60$, se sustituye esto en la ecuación ofrecida.

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que $\omega < 0$, entonces rápidamente se puede ver que $f(-1) > 0$ y $f(-2) < 0$. Con esto se escoge el intervalo $[-2, -1]$.

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que $\omega < 0$, entonces rápidamente se puede ver que $f(-1) > 0$ y $f(-2) < 0$. Con esto se escoge el intervalo $[-2, -1]$.

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de 10^{-12} mediante el método de bisección?

Ejercicios

$$60 = -\frac{g}{2\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega))$$

$$120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)) = 0$$

Defina entonces:

$$f(\omega) = 120 + \frac{g}{\omega^2}(\sinh(2\omega) - \sin(2\omega)).$$

Dado que $\omega < 0$, entonces rápidamente se puede ver que $f(-1) > 0$ y $f(-2) < 0$. Con esto se escoge el intervalo $[-2, -1]$.

- ¿Cuántas iteraciones son suficientes para alcanzar una exactitud de 10^{-12} mediante el método de bisección?
  Usando el teorema de cota de error del método de bisección se plantea:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{-1-(-2)}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-12}.$$

$$10^{12} \leq 2^n.$$

Resolviendo la inecuación se obtiene $n \geq 40$.

Ejercicios

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.

Ejercicios

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.
  Cuando no conocemos el valor de la raíz, la estimación del error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

  De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

Ejercicios

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.
  Cuando no conocemos el valor de la raíz, la estimación del error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

  De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

Ejercicios

- Realice tres iteraciones del método de bisección, calcule el error relativo en cada iteración.
  Cuando no conocemos el valor de la raíz, la estimación del error relativo se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$$

  De esta forma se puede generar la siguiente tabla:

n	a	b	p	f(p)	Error relativo
0	−2	−1	*	*	*
1	−1.5	−1	−1.5	−2.121565e+01	*
2	−1.5	−1.25	−1.25	7.755373e+00	2.000000e−01
3	−1.375	−1.25	−1.375	−6.045842e+00	9.090909e−02

- Aplique el método de Newton-Raphson para obtener una aproximación con una exactitud de 10^{-5}. Utilice como aproximación inicial la aproximación encontrada en el iniciso anterior.

```
n       p_n       f(p_n)            Error relativo
0       -1.375    -6.0458           *
1       -1.3226   -1.150768e-01     3.962162e-02
2       -1.3216   -4.145716e-05     7.840103e-04
3       -1.3216   -5.371703e-12     2.826484e-07
```

Primero se requiere calcular la derivada de la función analizada:

$$f'(\omega) = \frac{32{,}17\ (2\cosh(2\,\omega) - 2\cos(2\,\omega))}{\omega^2} - \frac{64{,}34\ (\sinh(2\,\omega) - \sin(2\,\omega))}{\omega^3}$$

Con esto la iteración del método de Newton queda expresado como:

$$\begin{aligned} p_{n+1} =& p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} \\ =& p_n + \\ & \frac{3217\,p_n\ \sinh(2\,p_n) - 3217\,p_n\ \sin(2\,p_n) + 12000\,p_n^3}{6434\ \sinh(2\,p_n) - 6434\ \sin(2\,p_n) - 6434\,p_n\ \cosh(2\,p_n) + 6434\,p_n\ \cos(2\,p_n)} \end{aligned}$$

Para los resultados se uso el error relativo, es decir $\dfrac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_{n+1}|}$.

Ejercicio 3.9 (Ecuaciones no lineales, Ejercicio IIPAC2023)

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{bmatrix} \ln(x^2+y^2) - \sin(xy) & = & \ln(2) - \ln(\pi) \\ x^2 + 4y^2\cos(x) & = & 4 \end{bmatrix}$$

Realice una iteración del método de Newton Raphson para sistemas con la aproximación inicial:

$$p_0 = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix}$$

Además calcule $\| p_k - p_{k-1} \|_\infty$ *y* $\| p_k - p_{k-1} \|_2$.

Ejercicio 3.9 (Ecuaciones no lineales, Ejercicio IIPAC2023)

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{bmatrix} \ln(x^2+y^2) - \sin(xy) & = & \ln(2) - \ln(\pi) \\ x^2 + 4y^2\cos(x) & = & 4 \end{bmatrix}$$

Realice una iteración del método de Newton Raphson para sistemas con la aproximación inicial:

$$p_0 = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix}$$

Además calcule $\| p_k - p_{k-1} \|_\infty$ *y* $\| p_k - p_{k-1} \|_2$.

Primero se definirán la función y el jacobiano para usar el método de Newton:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2+y^2) - \sin(xy) + \ln(\pi) - \ln(2) \\ 4\cos(x)y^2 + x^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

$$J(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{2x}{x^2+y^2}-y\cos(xy) & \frac{2y}{x^2+y^2}-x\cos(xy)\\ 2x-4\sin(x)y^2 & 8\cos(x)y\end{pmatrix}$$

$$J(-1{,}5,-2{,}5)=\begin{pmatrix}-2{,}40433956981949 & -1{,}81907433012698 8\\ 21{,}9373746651013 6 & -1{,}41474403335405 8\end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(-1{,}5,-2{,}5)=\begin{pmatrix}-0{,}0326676100193853 5 & 0{,}0420039310376022 4\\ -0{,}506552127814718 8 & -0{,}0555181895588763 2\end{pmatrix}$$

$$F(-1{,}5,-2{,}5)=\begin{pmatrix}0{,}873750\\ 0{,}018430\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}p_1=&p_0-J^{-1}(p_0)F(p_0)\\ =&\begin{pmatrix}-1{,}5\\ -2{,}5\end{pmatrix}-J^{-1}(-1{,}5,-2{,}5)F(-1{,}5,-2{,}5)=\begin{pmatrix}-1{,}472231\\ -2{,}056377\end{pmatrix}\end{aligned}$$

n	p_n(1)	p_n(2)	f(p_n)	Norma 2	Norma inf
0	−1.5	−2.5	0.87375	*	*
1	−1.4722	−2.0564	−9.606503e−02	4.444916e−01	4.436233e−01
2	−1.4663	−2.1091	−1.654021e−04	5.303760e−02	5.270221e−02
3	−1.4667	−2.1087	−1.031003e−07	5.406173e−04	3.834635e−04

Ejercicio 3.10 (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. *Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo* $[2, 2{,}6]$ *con tres puntos;* $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ *y* $x_2 = 2{,}6$.

Ejercicios

Ejercicio 3.10 (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. *Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo* $[2, 2{,}6]$ *con tres puntos;* $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ *y* $x_2 = 2{,}6$.

- Por el teorema relacionado con el polinomio de Lagrange, se sabe que:

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)\right|,$$

para $x \in [2, 2{,}6]$ y $\xi(x) \in (2, 2{,}6)$

Ejercicio 3.10 (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. *Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo* $[2, 2{,}6]$ *con tres puntos;* $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ *y* $x_2 = 2{,}6$.

- Por el teorema relacionado con el polinomio de Lagrange, se sabe que:

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)\right|,$$

para $x \in [2, 2{,}6]$ y $\xi(x) \in (2, 2{,}6)$

- Para encontrar las cotas sobre la tercera derivada se necesitan los siguientes cálculos:

$$f^{(3)}(z) = \frac{3\sin(\ln(z)) + \cos(\ln(z))}{z^3}$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{10\cos(\ln(z))}{z^4}$$

Ejercicios

- Si se analizan los lugares donde la derivada de la tercera derivada se hacen cero, entonces se obtiene la ecuación:

$$\sin(\ln(z)) = 0,$$

esta ecuación tiene como solución $z = e^{n\pi}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\pi} \notin [2, 2{,}6]$ y por lo tanto los únicos valores extremos de la tercera derivada son 2 y 2.6.

Evaluando la tercera derivada se obtiene que:

$$f^{(3)}(2) \approx 0{,}335765$$

$$f^{(3)}(2{,}6) \approx 0{,}1722$$

y por lo tanto se puede garantizar que:

$$|f^{(3)}(x)| \leq f^{(3)}(2)$$

para todo $x \in [2, 2{,}6]$.

- Si se analizan los lugares donde la derivada de la tercera derivada se hacen cero, entonces se obtiene la ecuación:

$$\sin(\ln(z)) = 0,$$

esta ecuación tiene como solución $z = e^{n\pi}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\pi} \notin [2, 2{,}6]$ y por lo tanto los únicos valores extremos de la tercera derivada son 2 y 2.6.

Evaluando la tercera derivada se obtiene que:

$$f^{(3)}(2) \approx 0{,}335765$$

$$f^{(3)}(2{,}6) \approx 0{,}1722$$

y por lo tanto se puede garantizar que:

$$|f^{(3)}(x)| \leq f^{(3)}(2)$$

para todo $x \in [2, 2{,}6]$.

- Defina ahora la otra parte para la cota de error:

$$g(x) \equiv (x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6) = \frac{25x^3 - 175x^2 + 406x - 312}{25}$$

Ejercicios

- Resolviendo para la ecuación de segundo grado:

$$g'(x) = 0.$$

Se obtiene que $x = \dfrac{35 - \sqrt{7}}{15}$ (una de las dos raíces) es el lugar donde alcanza el valor más alto. Entonces:

$$|g(x)| \leq g\left(\frac{35 - \sqrt{7}}{15}\right)$$

para toda $x \in [2, 2{,}6]$.

- Resolviendo para la ecuación de segundo grado:

$$g'(x) = 0.$$

Se obtiene que $x = \dfrac{35-\sqrt{7}}{15}$ (una de las dos raíces) es el lugar donde alcanza el valor más alto. Entonces:

$$|g(x)| \leq g\left(\frac{35-\sqrt{7}}{15}\right)$$

para toda $x \in [2, 2{,}6]$.

- Finalmente:

$$|f(x)-P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)\right| \leq g\left(\frac{35-\sqrt{7}}{15}\right) f^{(3)}(2)/6 \approx 9{,}4574 \times 10^{-4}$$

La cota de error entonces es aproximadamente $9{,}5 \times 10^{-4}$.

Ejercicio 3.11 (Ejercicio del examen del IIPA2023)

Sea $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ *y* $P_2(x)$ *el polinomio interpolante de Lagrange en* $x_0 = 0$, x_1 *y* $x_2 = 1$. *Calcule el valor de* x_1 *más grande en el intervalo* $(0, 1)$ *para el cual* $f(0{,}5) - P_2(0{,}5) = -0{,}25$

Tip: evalúe en los puntos desde el inicio, así se sabe que términos se cancelaran.

$$f(x_0) = f(0) = 0 \quad f(x_1) = \sqrt{x_1 - x_1^2} \quad f(x_2) = f(x_1) = 0$$

Parte I: Determine el polinomio de Lagrange

$$\begin{aligned}
&P_2(x)\\
&= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)\\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\\
&= \frac{(x-0)(x-1)}{(x_1-0)(x_1-1)}\sqrt{x_1-x_1^2}\\
&= \frac{x(x-1)}{x_1(x_1-1)}\sqrt{x_1-x_1^2}
\end{aligned}$$

Ejercicios

Parte 2: Evalúe en 0.5

$$P_2(0{,}5) = \frac{0{,}5(0{,}5-1)}{x_1(x_1-0{,}5)}\sqrt{x_1 - x_1^2} = -\frac{0{,}25\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1(x_1-1)}$$

Parte 3: Garantizar que $f(0{,}5) - P_2(0{,}5) = -0{,}25$

$$\begin{aligned}
f(0{,}5) - P_2(0{,}5) &= -0{,}25 \\
0{,}5 + \frac{0{,}25\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1(x_1-1)} &= -0{,}25 \\
\frac{0{,}5 + 0{,}25}{0{,}25} &= \frac{\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1(x_1-1)} \\
-3 &= \frac{\sqrt{x_1(1-x_1)}}{-x_1(1-x_1)} = -\frac{1}{\sqrt{x_1(1-x_1)}} \\
9x_1(x_1-1) &= 1 \\
-9x_1^2 + 9x_1 - 1 = 0 &\quad \implies \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6} \approx 0{,}8726779$