Departamento de Matemática Aplicada
Análisis Numérico, IC303

Myrian González Orellana

PACIII2024

Motivación

Ecuaciones diferenciales en la ciencia

En la ciencia se pueden encontrar diferentes ecuaciones que modelan ciertos fenómenos de la física:

Motivación

Ecuaciones diferenciales en la ciencia

En la ciencia se pueden encontrar diferentes ecuaciones que modelan ciertos fenómenos de la física:

- Crecimiento exponencial: $\dfrac{dy}{dx} = ky$
- Ley de enfriamiento de Newton: $\dfrac{dy}{dx} = k(A - y)$
- Vibraciones mecánicas: $m\dfrac{d^2y}{dx^2} + c\dfrac{dy}{dx} + ky = f(x)$
- Problema de los N cuerpos (**Sistemas**):
  $\dfrac{d^2y_i}{dx^2} = G\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \dfrac{m_j}{|y_j - y_i|^3}(y_j - y_i)$

Motivación

Ecuaciones diferenciales en la ciencia

En la ciencia se pueden encontrar diferentes ecuaciones que modelan ciertos fenómenos de la física:

- Crecimiento exponencial: $\dfrac{dy}{dx} = ky$
- Ley de enfriamiento de Newton: $\dfrac{dy}{dx} = k(A - y)$
- Vibraciones mecánicas: $m\dfrac{d^2y}{dx^2} + c\dfrac{dy}{dx} + ky = f(x)$
- Problema de los N cuerpos (**Sistemas**):
  $\dfrac{d^2y_i}{dx^2} = G\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \dfrac{m_j}{|y_j - y_i|^3}(y_j - y_i)$

Ecuación diferencial ordinaria lineal

Una ecuación diferencial se dice lineal si esta se puede expresar como:

$$L(y) = b(x).$$

Donde L es de la forma $a_n(x)\dfrac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)$.

Clasificación

Si la ecuación diferencial no se puede escribir como en la definición anterior, entonces se dice que es una ecuación de diferencial no lineal. Un ejemplo de una ecuación diferencial no lineal se muestra a continuación:

$$y''y' + xy = 0.$$

Orden

Se dice que una ecuación diferencial es de orden n si la derivada más alta en la ecuación es de orden n.

Clasificación

Si la ecuación diferencial no se puede escribir como en la definición anterior, entonces se dice que es una ecuación de diferencial no lineal. Un ejemplo de una ecuación diferencial no lineal se muestra a continuación:

$$y''y' + xy = 0.$$

Orden

Se dice que una ecuación diferencial es de orden n si la derivada más alta en la ecuación es de orden n.

- $3x + y = y'$ (Orden 1, lineal).
- $3xyy'' + y' = 0$ (Orden 2, no lineal).

Proposición

Toda ecuación diferencial de orden n puede ser expresado como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo

Considere la ecuación diferencial no lineal de segundo orden:

$$3xyy'' + y' = 0.$$

Muestre que esta ecuación se puede plantear como un sistema de ecuaciones de primer orden.

Si se hace $y_0 = y$ y $y_1 = y'$, entonces el problema se puede plantear de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y_1 = y_0' \\ 3xy_0y_1' + y_0' = 0 \end{cases}$$

Esto se puede reescribir como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3xy_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto a su vez se puede escribir en la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3xy_0} & \frac{1}{3xy_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix}$$

$$Y = f(x, Y).$$

Donde $Y = (y_0, y_1)$.

Existencia y unicidad

Ejemplo (Infinitas soluciones)

Considere el problema de valor inicial:

$$y' = |y|^{\alpha}.\alpha \in (0,1)$$

$$y(0) = 0.$$

Muestre que para cualquier c positiva, la función $y_c(x)$ es una solución al problema de valor inicial:

$$y_c(x) = \begin{cases} (1-\alpha)^{\dfrac{1}{1-\alpha}}(x-c)^{\dfrac{1}{1-\alpha}} & x \in [c, \infty[\\ 0 & x \in [0, c[\end{cases}$$

Existencia y unicidad

Suponga que $x > c$:

$$\frac{d}{dx}\left((1-\alpha)^{\dfrac{1}{1-\alpha}}(x-c)^{\dfrac{1}{1-\alpha}}\right) = \left((1-\alpha)^{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}(x-c)^{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}\right)$$
$$= |y_c(x)|^{\alpha}.$$

Si $x < c$:

$$\frac{d}{dx}(0) = |0|^{\alpha}.$$

Finalmente en el caso $x = c$:

$$y_c'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f_c(c+h) - f_c(c)}{h} = 0 = |y_c(c)|^{\alpha}$$

Suponga que $x > c$:

$$\frac{d}{dx}\left((1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(x-c)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) = \left((1-\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x-c)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)$$
$$= |y_c(x)|^{\alpha}.$$

Si $x < c$:

$$\frac{d}{dx}(0) = |0|^{\alpha}.$$

Finalmente en el caso $x = c$:

$$y_c'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f_c(c+h)-f_c(c)}{h} = 0 = |y_c(c)|^{\alpha}$$

Se puede probar que si $\alpha \geq 1$ entonces la solución es única.

Existencia y unicidad

Condición de Lipschitz

Una función $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice de Lipschitz en la segunda variable si existe una constante positiva L (conocida como constante de Lipschitz) y se verifica la siguiente desigualdad:

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v|$$

para todo u, v en los reales y para todo $x \in [a, b]$.

Teorema de existencia y unicidad

Sean $D = [a, b] \times \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Suponga que f satifasce la condición de Lipschitz en la segunda variable; entonces el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(a) = y_0$ tiene solución única.

Definición 0.1 (Conjunto Convexo)

Un conjunto D es convexo si para cualesquiera x, y en D se tiene que

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in D.$$

Teorema 0.1 (Criterio)

Sea $f(t, y)$ definida en un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$ con:

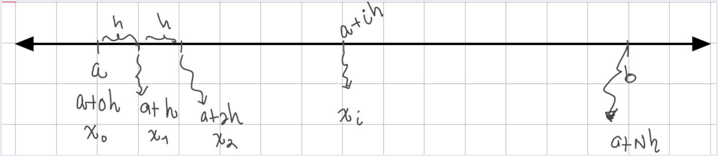
$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq L$$

entonces f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y con la constante L de Lipschitz.

Partición del intervalo

Una partición del intervalo $[a, b]$ de tamaño de paso $h > 0$ es un conjunto de puntos $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ donde $x_i = x_{i-1} + h$ para $i = 1, \cdots, N$. y $h = \dfrac{b-a}{N}$, $x_0 = a$ y $x_N = b$.

Partición de un intervalo



De la definición anterior se puede ver que $x_k = a + kh$ para $k = 0, \cdots, N$.

Partición del intervalo con N puntos

Suponga que se quiere tener N puntos de aproximación en $[a, b]$ a una distancia h entre cada dos puntos. Entonces, la partición del intervalo se hará con

$$t_i = a + jh \text{ tal que } h = \frac{b-a}{N}$$

Ejemplos:

1. Si se tiene el intervalo $[0, 3]$ y se quieren tener 15 puntos, entonces, la distancia entre cada dos puntos será:

$$h = \frac{3-0}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

2. Considere que se tiene el intervalo $[1, 4]$ y se hará una partición del intervalo con una distancia entre dos puntos $h = 0{,}3$. Entonces, la cantidad de puntos en la partición será:

$$N = \frac{4-1}{0{,}3} = 10$$

Métodos de un solo paso

Método de un solo paso explícito

Un *método de un solo paso explícito* es un método numérico en el que se aproximan las soluciones a un problema de valor inicial con la siguiente estructura:

$$w_k = w_{k-1} + h\phi(x_k, w_k; h)$$

donde x_k (Como se definio arriba) representa los elementos en un partición y $w_k \approx y_k = y(x_k)$.

Método de Euler

Deducción de método de Euler:

$$y_{k+1} = y(x_{k+1})$$

Método de Euler

Deducción de método de Euler:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y(x_{k+1}) \\
&= y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + h^2/2y''(\xi)
\end{aligned}
$$

Método de Euler

Deducción de método de Euler:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y(x_{k+1}) \\
&= y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + h^2/2y''(\xi) \\
&= y_k + hf(y_k, x_k) + h^2/2y''(\xi)
\end{aligned}
$$

Deducción de método de Euler:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y(x_{k+1}) \\ &= y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + h^2/2y''(\xi) \\ &= y_k + hf(y_k, x_k) + h^2/2y''(\xi) \end{aligned}$$

Método de Euler

El método de Euler consiste en generar los valores $\{w_k\}$ de manera tal que:

$$w_{k+1} = w_k + hf(x_k, w_k)$$

para $k = 0, \cdots, N$.

En este caso las w_k intentan aproximar a las y_k.

Error del método de Euler

Teorema

Considere las siguientes hipótesis:

- f es continua en $D = [a, b] \times \mathbb{R}$.
- f satisface la condición de Lipschitz con constante L.
- Existe una constante M con la propiedad $|y''(x)| \leq M$ en $[a, b]$.
- Sea y la solución única del problema de valor inicial:

  $$y' = f(x, y)$$

  y con $y(a) = y_0$.
- Sea $\{w_k\}_{k=0}^{N}$ la sucesión generada por el método de Euler.

Entonces:

$$|y(x_k) - w_k| \leq \frac{hM}{2L}[\exp(L(x_k - a)) - 1]$$

Observación: Note que la cota de error en la estimación anterior es lineal en h.

Errores de redondeo en el método de Euler

Método de Euler considerando los errores de redondeo δ_k:

$$u_0 = a + \delta_0$$

Errores de redondeo en el método de Euler

Método de Euler considerando los errores de redondeo δ_k:

$$\begin{aligned} u_0 &= a + \delta_0 \\ u_1 &= u_0 + hf(x_0, u_0) + \delta_1 \end{aligned}$$

Errores de redondeo en el método de Euler

Método de Euler considerando los errores de redondeo δ_k:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \quad a + \delta_0 \\
u_1 &= \quad u_0 + hf(x_0, u_0) + \delta_1 \\
\vdots &= \quad \vdots \\
u_{k+1} &= \quad u_k + hf(x_k, u_k) + \delta_{k+1}
\end{aligned}
$$

Errores de redondeo en el método de Euler

Método de Euler considerando los errores de redondeo δ_k:

$$\begin{aligned}
u_0 &= a + \delta_0 \\
u_1 &= u_0 + hf(x_0, u_0) + \delta_1 \\
\vdots &= \vdots \\
u_{k+1} &= u_k + hf(x_k, u_k) + \delta_{k+1} \\
\vdots &= \vdots \\
u_N &= u_{N-1} + hf(x_{N-1}, u_{N-1}) + \delta_N
\end{aligned}$$

Error del método de Euler con errores de redondeo

Teorema

Considere las siguientes hipótesis:

- f es continua en $D = [a,b] \times \mathbb{R}$.
- f satisface la condición de Lipschitz con constante L.
- Existe una constante M con la propiedad $|y''(x)| \leq M$ en $[a,b]$.
- Sea y la solución única del problema de valor inicial:

  $$y' = f(x,y)$$

  y con $y(a) = y_0$.
- Sea $\{u_k\}_{k=0}^{N}$ la sucesión generada por el método de Euler con errores de redondeo.
- $|\delta_k| \leq \delta$ para δ fijo.

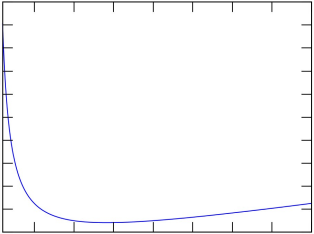
Entonces:

$$|y(x_k) - u_k| \leq \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)[\exp(L(x_k - a)) - 1] + |\delta_0| \exp(L(x_k - a)).$$

Note que la cota de error ya no depende linealmente de h. De hecho

Errores de redondeo en el método de Euler.

Si se grafica la expresión $g(h) = \frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}$ se obtendría una gráfica como la siguiente:



Se puede probar que el punto más bajo de esta grafica ocurre en $h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$. Y se puede ver que esta cantidad crece cuando $h < \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$. Entonces se puede imponer la condición de h no sea mucho más pequeño que $\sqrt{\frac{2\delta}{M}}$. En la práctica esto es plausible dado que el error de redonde es considerablemente pequeño.

Métodos de Taylor de orden superior

Error local de truncamiento

Considere el método de aproximación:

$$\begin{aligned} w_0 &= y(x_0) \\ w_{k+1} &= w_k + h\phi(x_k, w_k) \end{aligned}$$

Se define el error local de truncamiento por:

$$\tau_{k+1}(h) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \phi(x_k, y_k)$$

Para $k = 0, \cdots, N-1$.

Notación O

Se dice que una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es $O(h^p)$ si existe una constante positiva M tal que $f(h) \leq Mh^p$ para toda $h \in A$.

En los métodos númericos para problemas de valor inicial se busca que $\tau_k(h)$ sea $O(h^p)$ para algún p positivo.

Métodos de Taylor de orden superior

Error local de truncamiento

Considere el método de aproximación:

$$\begin{aligned} w_0 =& y(x_0) \\ w_{k+1} =& w_k + h\phi(x_k, w_k) \end{aligned}$$

Se define el error local de truncamiento por:

$$\tau_{k+1}(h) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \phi(x_k, y_k)$$

Para $k = 0, \cdots, N-1$.

Notación O

Se dice que una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es $O(h^p)$ si existe una constante positiva M tal que $f(h) \leq Mh^p$ para toda $h \in A$.

En los métodos númericos para problemas de valor inicial se busca que $\tau_k(h)$ sea $O(h^p)$ para algún p positivo.

El método se considera de mejor orden de convergencia en tanto el valor de p sea mas grande.

Ejemplo 1

Ejercicio teórico

Pruebe que el método de Euler es un método con un error de truncamiento $O(h)$ cuando su segunda derivada esta acotada por una constante M.

$$\tau_{k+1}(h) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \phi(x_k, y_k)$$

Ejemplo 1

Ejercicio teórico

Pruebe que el método de Euler es un método con un error de truncamiento $O(h)$ cuando su segunda derivada esta acotada por una constante M.

$$
\begin{aligned}
\tau_{k+1}(h) &= \frac{y_{k+1}-y_k}{h} - \phi(x_k, y_k) \\
&= \frac{y_{k+1}-y_k}{h} - f(x_k, y_k)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Ejercicio teórico

Pruebe que el método de Euler es un método con un error de truncamiento $O(h)$ cuando su segunda derivada esta acotada por una constante M.

$$
\begin{aligned}
\tau_{k+1}(h) &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \phi(x_k, y_k) \\
&= \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - f(x_k, y_k) \\
&= \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - f(x_k, y(x_k))
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Ejercicio teórico

Pruebe que el método de Euler es un método con un error de truncamiento $O(h)$ cuando su segunda derivada esta acotada por una constante M.

$$
\begin{aligned}
\tau_{k+1}(h) &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \phi(x_k, y_k) \\
&= \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - f(x_k, y_k) \\
&= \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - f(x_k, y(x_k)) \\
&= \frac{y(x_k + h) - y(x_k)}{h} - y'(x_k)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Ejercicio teórico

Pruebe que el método de Euler es un método con un error de truncamiento $O(h)$ cuando su segunda derivada esta acotada por una constante M.

$$
\begin{aligned}
\tau_{k+1}(h) &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \phi(x_k, y_k) \\
&= \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - f(x_k, y_k) \\
&= \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - f(x_k, y(x_k)) \\
&= \frac{y(x_k + h) - y(x_k)}{h} - y'(x_k) \\
&= \frac{y(x_k) + hy'(x_k) + h^2/2y''(\xi) - y(x_k)}{h} - y'(x_k)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Ejercicio teórico

Pruebe que el método de Euler es un método con un error de truncamiento $O(h)$ cuando su segunda derivada esta acotada por una constante M.

$$
\begin{aligned}
\tau_{k+1}(h) &= \frac{y_{k+1}-y_k}{h} - \phi(x_k, y_k) \\
&= \frac{y_{k+1}-y_k}{h} - f(x_k, y_k) \\
&= \frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h} - f(x_k, y(x_k)) \\
&= \frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h} - y'(x_k) \\
&= \frac{y(x_k)+hy'(x_k)+h^2/2y''(\xi)-y(x_k)}{h} - y'(x_k) \\
&= y'(x_k) + h/2y''(x_k) - y'(x_k)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Ejercicio teórico

Pruebe que el método de Euler es un método con un error de truncamiento $O(h)$ cuando su segunda derivada esta acotada por una constante M.

$$
\begin{aligned}
\tau_{k+1}(h) &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \phi(x_k, y_k) \\
&= \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - f(x_k, y_k) \\
&= \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - f(x_k, y(x_k)) \\
&= \frac{y(x_k + h) - y(x_k)}{h} - y'(x_k) \\
&= \frac{y(x_k) + hy'(x_k) + h^2/2y''(\xi) - y(x_k)}{h} - y'(x_k) \\
&= y'(x_k) + h/2y''(x_k) - y'(x_k) \\
&\leq hM/2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Ejercicio teórico

Pruebe que el método de Euler es un método con un error de truncamiento $O(h)$ cuando su segunda derivada esta acotada por una constante M.

$$
\begin{aligned}
\tau_{k+1}(h) &= \frac{y_{k+1}-y_k}{h} - \phi(x_k, y_k) \\
&= \frac{y_{k+1}-y_k}{h} - f(x_k, y_k) \\
&= \frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h} - f(x_k, y(x_k)) \\
&= \frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h} - y'(x_k) \\
&= \frac{y(x_k)+hy'(x_k)+h^2/2y''(\xi)-y(x_k)}{h} - y'(x_k) \\
&= y'(x_k)+h/2y''(x_k)-y'(x_k) \\
&\leq hM/2 \\
&\in O(h).
\end{aligned}
$$

Métodos de orden superior

Método de Taylor de orden n

El método de Taylor de orden n para un problema de valor inicial se define como:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha \\
w_{k+1} &= w_k + hT^{(n)}(x_k, w_k) \\
&= w_k + h\left[f(x_k, w_k) + \frac{h}{2}[\frac{d}{dx}f(x_k, w_k)] + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[f(x_k, w_k)\right]
\end{aligned}
$$

Teorema

Si se utiliza el método de Taylor de orden n con paso h para aproximar la solución del problema de valor incial:

- $y(x_0) = y_0$
- $y'(x) = f(x, y)$
- $x \in [a, b]$
- $y \in C^{n+1}[a, b]$

Entonces el error de truncamiento es $O(h^n)$

Método de Taylor de orden n

Ejercicios

Aplique el método de Taylor de orden 3 para aproximar la solución del problema de valor incial:

- $y(0) = 1$, h=0.25
- $y'(x) = -xy + 4x/y$. $x \in [0, 1]$.

$$\frac{df(x,y(x))}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} y'(x)$$

Método de Taylor de orden n

Ejercicios

Aplique el método de Taylor de orden 3 para aproximar la solución del problema de valor incial:

- $y(0) = 1$, h=0.25
- $y'(x) = -xy + 4x/y$. $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}\frac{df(x,y(x))}{dx} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} y'(x) \\ &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} f(x,y)\end{aligned}$$

Ejercicios

Aplique el método de Taylor de orden 3 para aproximar la solución del problema de valor incial:

- $y(0) = 1$, h=0.25
- $y'(x) = -xy + 4x/y$. $x \in [0, 1]$.

$$
\begin{aligned}
\frac{df(x, y(x))}{dx} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} y'(x) \\
&= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} f(x,y) \\
&= x^2 y - y + \frac{4}{y} - \frac{16x^2}{y^3}
\end{aligned}
$$

Método de Taylor de orden n

Ejercicios

Aplique el método de Taylor de orden 3 para aproximar la solución del problema de valor incial:

- $y(0) = 1$, h=0.25
- $y'(x) = -xy + 4x/y$. $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\frac{df(x,y(x))}{dx} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} y'(x) \\
&= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} f(x,y) \\
&= x^2 y - y + \frac{4}{y} - \frac{16x^2}{y^3} \\
\frac{d^2 f(x,y(x))}{dx^2} &= f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + f_y^2 f
\end{aligned}$$

Método de Taylor de orden n

Ejercicios

Aplique el método de Taylor de orden 3 para aproximar la solución del problema de valor incial:

- $y(0) = 1$, h=0.25
- $y'(x) = -xy + 4x/y$. $x \in [0,1]$.

$$
\begin{aligned}
\frac{df(x,y(x))}{dx} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} y'(x) \\
&= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} f(x,y) \\
&= x^2 y - y + \frac{4}{y} - \frac{16x^2}{y^3} \\
\frac{d^2 f(x,y(x))}{dx^2} &= f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + f_y^2 f \\
&= \frac{8\,xy}{y^2} + \frac{8\,x\,xy^2}{y^3} - \frac{48\,x}{y^3} - \frac{80\,x^2\,xy}{y^4} + \frac{192\,x^3}{y^5}
\end{aligned}
$$

Método de Taylor de orden 3

$$
\begin{aligned}
T^{(3)}(x,y) = &\quad f(x,y) + \frac{h}{2}\left[\frac{d}{dx}f(x,y)\right] + \frac{h^2}{3!}\frac{d^2}{dx^2}[f(x,y)].\\
= &\quad \frac{\left(h\,x^2 - 2\,x - h\right)\,y^4 + \left(8\,x + 4\,h\right)\,y^2 - 16\,h\,x^2}{2\,y^3}\\
&- \frac{\left(h^2\,x^3 - 3\,h^2\,x\right)\,y^6 - 4\,h^2\,x^3\,y^4 + \left(48\,h^2\,x^3 + 48\,h^2\,x\right)\,y^2 - 192\,h^2\,x^3}{6\,y^5}
\end{aligned}
$$

Finalmente el método numérico queda expresado en la siguiente forma:

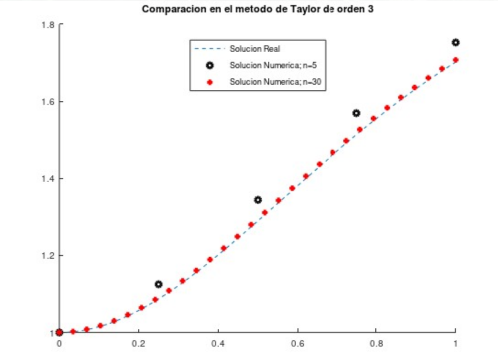
$$
\begin{aligned}
w_{k+1} = &\quad w_k - \frac{h\,\left({w_k}^2 - 4\right)\,x_k}{w_k} +\\
&\frac{h^2\,\left(\left({w_k}^4 - 16\right)\,{x_k}^2 - {w_k}^4 + 4\,{w_k}^2\right)}{2\,{w_k}^3}\\
&- \frac{h^3\,\left(\left({w_k}^6 - 4\,{w_k}^4 + 48\,{w_k}^2 - 192\right)\,{x_k}^3 + \left(48\,{w_k}^2 - 3\,{w_k}^6\right)\,x_k\right)}{6\,{w_k}^5}
\end{aligned}
$$

Soluciones numéricas del método de Taylor de orden 3

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0.25	0.5	0.75	1
w_k	1	1.125	1.3442	1.5693	1.7528

Cuadro: Iteraciones del método de orden 3.

Solución numérica del método de Taylor de orden 3



Método de Runge-Kutta

Estudiaremos dos categorias de los métodos de Runge-Kutta:

1. Metodos de Runge-Kutta de orden 2, donde encontramos los métodos
   - Método de punto medio
   - Método de Euler modificado
   - Método de Heun
2. Metodos de Runge-Kutta de orden 4

Métodos de Runge-Kutta de Orden 2

Método del punto medio

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha, \\
w_{i+1} &= w_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)) \\
&\text{para cada } i = 0, 1, 2, ..., N-1
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Ejercicio tomado del libro de R. Burden, Sec. 5.4

Resuelva aplicando el **método de punto medio** el problema de valor inicial

$$y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \leq t \leq 2{,}9 \quad y(2) = 1, \quad N = 7.$$

Además, estime el error $|w_i - y(t_i)|$ de las aproximaciones encontradas por medio de la solución real

$$y = t + \frac{1}{1 - t}$$

i	t_i	w_i	$\lvert w_i - y(t_i)\rvert$
0	2	1	0
1	2,1286	1,2411	0,0013519
2	2,2571	1,4597	0,001943
3	2,3857	1,6619	0,0021633
4	2,5143	1,8517	0,002199
5	2,6429	2,032	0,0021428
6	2,7714	2,2049	0,002043
7	2,9	2,3718	0,0019248

Métodos de Runge-Kutta de Orden 2

Método de Euler Modificado

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))]$$

para cada $i = 0, 1, 2, ..., N - 1$

Ejemplo

Ejercicio tomado del libro de R. Burden, Sec. 5.4

Resuelva aplicando el **método de Euler modificado** el problema de valor inicial

$$y' = \cos(2t) + \mathrm{sen}(3t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1, \quad N = 7.$$

Además, estime el error $|w_i - y(t_i)|$ de las aproximaciones encontradas por medio de la solución real

$$y = \frac{1}{2} sen(2t) - \frac{1}{3} cos(3t) + \frac{4}{3}$$

i	t_i	w_i	$\|w_i - y(t_i)\|$
0	0	1	0
1	0,14286	1,1696	0,0014228
2	0,28571	1,3819	0,0036097
3	0,42857	1,6113	0,0062533
4	0,57143	1,827	0,0089484
5	0,71429	1,9975	0,01126

Métodos de Runge-Kutta de Orden 2

Método de Heun

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4}[f(t_i, w_i) + 3f(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}hf(t_i, w_i))]$$

$$\text{para cada } i = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Ejemplo

Ejercicio tomado del libro de R. Burden, Sec. 5.4

Resuelva aplicando el **método de Heun** el problema de valor inicial

$$y' = 1 + \frac{y}{t} + (\frac{y}{t})^2, \quad 0 \leq t \leq 3 \quad y(1) = 0, \quad N = 7.$$

Además, estime el error $|w_i - y(t_i)|$ de las aproximaciones encontradas por medio de la solución real

$$y = t\tan(lnt)$$

i	t_i	w_i	$\lvert w_i - y(t_i)\rvert$
0	1	0	0
1	1,2857	0,32549	0,0046118
2	1,5714	0,7502	0,012739
3	1,8571	1,2968	0,026327
4	2,1429	1,9965	0,048909
5	2,4286	2,895	0,086822
6	2,7143	4,0616	0,15195
7	3	5,6061	0,26802

Gráficas de la solución y su aproximación

A continuación se muestra una gráfica que presenta la aproximación obtenida usando el método de punto medio, método de Euler modificado y el método de Heun, de izquierda a derecha.

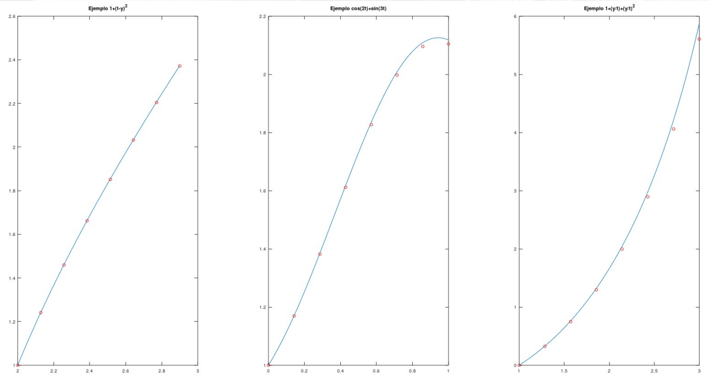


Figura: La solución real está graficada con una linea continua y la aproximación por medio de los puntos rojos

Método de Runge-Kutta de orden 4

Método

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha \\
k_1 &= hf(t_i, w_i) \\
k_2 &= hf(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= hf(t_{i+1}, w_i + k_3) \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

para cada $i = 0, 1, 2, ..., N - 1$

Método de Runge-Kutta para sistema de ecuaciones

Sea w_{ij} una aproximación de $u_i(t_i)$ para cada $j = 0, 1, 2, ..., N$ y cada $i = 1, 2, ..., m$ del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= f_1(t, u_1, u_2, ...u_m), \\ \frac{du_2}{dt} &= f_2(t, u_1, u_2, ...u_m), \\ &\vdots \\ \frac{du_m}{dt} &= f_m(t, u_1, u_2, ...u_m), \end{aligned}$$

tal que $a \leq t \leq b$ y satisface las condiciones iniciales:

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \ldots, u_m(a) = \alpha_m$$

Sean $w_{10} = \alpha_1$, $w_{20} = \alpha_2$, ..., $w_{m0} = \alpha_m$ las condiciones iniciales del sistema de ecuaciones.

Definción del método

Para i fijo en cada iteración, con $j = 0, 1, \ldots, N$ y con $i = 1, 2, ..., m$

$$
\begin{aligned}
k_{1i} &= hf_i(t_j, w_{10}, w_{20}, \ldots, w_{m0}),\\
k_{2i} &= hf_i(t_i + \frac{1}{2}h, w_{1j} + \frac{1}{2}k_{11}, w_{2j} + \frac{1}{2}k_{12}, \ldots, w_{mj} + \frac{1}{2}k_{1m}),\\
k_{3i} &= hf(t_i + \frac{1}{2}h, w_{1j} + \frac{1}{2}k_{21}, w_{2j} + \frac{1}{2}k_{22}, \ldots, w_{mj} + \frac{1}{2}k_{2m}),\\
k_{4i} &= hf_i(t_i + h, w_{1j} + k_{31}, w_{2j} + k_{32}, \ldots, w_{mj} + k_{3m}),\\
w_{i(j+1)} &= w_{ij} + \frac{1}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Ejericio tomado del libro de R. Burden, Sec. 5.9, 2.c

Utilice el método de Runge-Kutta para sistemas de ecuaciones diferenciales para encontrar la aproximación de

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t$$

en $0 \leq t \leq 3$ y $h = 0{,}2$.
Considere las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$.

Introducimos la variable $u_i(t)$ para generar el sistema de ecuaciones de primer orden deseado, entonces:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= y(t), \\ u_2(t) &= y'(t), \\ u_3(t) &= y''(t), \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene el siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
u_1' &= u_2, \\
u_2' &= u_3, \\
u_3' &= e^t + 2u_1 + u_2 - 2u_3
\end{aligned}
$$

Para aplicar el método, introducimos las variables de aproximación w_{ij}, se definen las condiciones iniciales asi:

$$
\begin{aligned}
w_{10} &= u_1(0) = 1, \\
w_{20} &= u_2(0) = 2, \\
w_{30} &= u_3(0) = 0
\end{aligned}
$$

Además se definen las funciones f_i como sigue

$$
\begin{aligned}
f_1(t, w_1, w_2, w_3) &= w_2, \\
f_2(t, w_1, w_2, w_3) &= w_3, \\
f_3(t, w_1, w_2, w_3) &= e^t + 2w_1 + w_2 - 2w_3,
\end{aligned}
$$

Iteración 1 ($i = 1, j = 1$)

Haciendo los respectivos cálculos se obtiene:

$$k_{11} = hf_1(t_0, w_{10}, w_{20}, w_{30}) = 0{,}4$$
$$k_{12} = hf_2(t_0, w_{10}, w_{20}, w_{30}) = 0$$
$$k_{13} = hf_3(t_0, w_{10}, w_{20}, w_{30}) = 1$$
$$k_{21} = hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{11}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{12}, w_{30} + \frac{1}{2}k_{13}) = 0{,}4$$
$$k_{22} = hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{11}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{12}, w_{30} + \frac{1}{2}k_{13}) = 0{,}1$$
$$k_{23} = hf_3(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{11}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{12}, w_{30} + \frac{1}{2}k_{13}) = 0{,}901034$$
$$k_{31} = hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{21}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{22}, w_{30} + \frac{1}{2}k_{23}) = 0{,}41$$
$$k_{32} = hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{21}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{22}, w_{30} + \frac{1}{2}k_{23}) = 0{,}0901034$$
$$k_{33} = hf_3(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{21}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{22}, w_{30} + \frac{1}{2}k_{23}) = 0{,}930827$$

$$k_{41} = hf_1(t_0 + h, w_{10} + k_{31}, w_{20} + k_{32}, w_{30} + k_{33}) = 0{,}41802068$$
$$k_{42} = hf_2(t_0 + h, w_{10} + k_{31}, w_{20} + k_{32}, w_{30} + k_{33}) = 0{,}1861654$$
$$k_{43} = hf_3(t_0 + h, w_{10} + k_{31}, w_{20} + k_{32}, w_{30} + k_{33}) = 0{,}853970$$

Entonces, las estimaciones obtenidas en la primera iteración son:

$$w_{11} = w_{10} + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) = 1{,}4063$$
$$w_{21} = w_{20} + \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) = 2{,}0944$$
$$w_{31} = w_{30} + \frac{1}{6}(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43}) = 0{,}9196$$

Todas las iteraciones del método

i	w_{1i}	w_{2i}	w_{3i}
0	1.0000	2.0000	0
1	1.4063	2.0944	0.9196
2	1.8492	2.3619	1.7472
3	2.3619	2.7929	2.5676
4	2.9776	3.3931	3.4501
5	3.7316	4.1812	4.4572
6	4.6646	5.1884	5.6503
7	5.8244	6.4581	7.0951
8	7.2691	8.0480	8.8658
9	9.0698	10.0318	11.0500
10	11.3142	12.5024	13.7530
11	14.1109	15.5759	17.1030

Ejemplo 2

Ejercicio tomado de un examen de reposición del IIPA2022

Resuelva la ecuación diferencial $ty'' + t^2y' + ty = e^t$ en $1 \leq t \leq 1{,}5$ con $y(1) = 0$ y $y'(1) = 1$. Usando el método de Runge-Kutta de orden 4 para sistemas de ecuaciones diferenciales. Tome $h = 0{,}5$.

Introducimos el cambio de variable siguiente con el propósito de generar el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} &u_1 = y \implies u_1' = y' \implies u_1' \implies u_2 \\ &u_2 = y' \end{aligned}$$

Entonces, si se despeja para la segunda derivada en $ty'' + t^2y' + ty = e^t$ y luego se sustituye y y sus derivadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -u_1 + tu_2 + \frac{e^t}{t} \end{aligned}$$

Finalmente, definimos $f_1(t, u_1, u_2) = u_2$ y $f_2(t, u_1, u_2) = -u_1 + tu_2 + e^t/t$

Iteración 1 ($i = 1, j = 1$)

Dadas las condiciones iniciales se tiene que $t_0 = 1$, $u_1(1) = 0 = w_{10}$ y $u_2(1) = 1 = w_{20}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
k_{11} &= hf_1(t_0, w_{10}, w_{20}) = 0{,}5 \\
k_{12} &= hf_2(t_0, w_{10}, w_{20}) = 1{,}859141 \\
k_{21} &= hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{11}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{12}) = 0{,}964785 \\
k_{22} &= hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{11}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{12}) = 2{,}477119 \\
k_{31} &= hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{21}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{22}) = 1{,}119280 \\
k_{32} &= hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{10} + \frac{1}{2}k_{21}, w_{20} + \frac{1}{2}k_{22}) = 2{,}554041 \\
k_{41} &= hf_1(t_0 + h, w_{10} + k_{31}, w_{20} + k_{32}) = 1{,}777021 \\
k_{42} &= hf_2(t_0 + h, w_{10} + k_{31}, w_{20} + k_{32}) = 3{,}599787
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{11} &= w_{10} + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) = 1{,}0742 \\
w_{21} &= w_{20} + \frac{1}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) = 3{,}5869
\end{aligned}$$

Tabla de iteraciones para $1 \leq t \leq 5$

i	w_{1i}	w_{2i}
0	0	1.0000
1	1.0742	3.5869
2	4.1150	9.5110
3	1.2320e+01	2.6704e+01
4	3.7590e+01	8.9199e+01
5	1.3384e+02	3.7509e+02
6	6.0344e+02	2.0257e+03
7	3.5549e+03	1.4028e+04
8	2.7261e+04	1.2333e+05

Nota: la notación e+α, denota una potencia de 10, es decir

$$1.2320e + 01 = 1.2320 \times 10^{01} = 1.2320 \times 10 = 12.320$$

Deducción del método

Problema

Se desea encontrar una aproximación por el método de diferencias finitas para el problema de valor en la frontera de segundo orden

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

para $a \leq x \leq b$, con las condiciones en la frontera $y(a) = \alpha$ y $y(b) = \beta$

Región de aproximación

La aproximación se hará en una partición del intervalo $[a, b]$ en $N + 1$ intervalos, tal que :

- Los extremos de los intervalos de la partición son los puntos $x_i = a + ih$.
- Todos los puntos x_i estan separados a una distancia $h = \frac{b-a}{N+1}$

Recordando el polinomio de Taylor

Suponga que $f \in C^n[a,b]$, que $f^{(n+1)}$ existe en $[a,b]$ y $x_0 \in [a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^k$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Polinomio de Taylor para diferencias finitas

1. Se desarrolla el tercer polinomio de Taylor

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

2. Se sustituye $y(x) = f(x)$ y se evalua en x_i

$$P_3(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x - x_i)^3$$

3. Se evalua en x_{i+1} tomando en cuenta que $x_{i+1} = x_i + h$

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + y'(x_i)((x_i + h) - x_i) \\ &\quad + \frac{y''(x_i)}{2!}((x_i + h) - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}((x_i + h) - x_i)^3 \\ &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) \end{aligned}$$

4. Se evalua en x_{i-1} con $x_{i-1} = x_i - h$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i)$$

Sumando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2 y''(x_i)$$

Finalmente, se despeja para $y''(x_i)$ para obtener la aproximación en diferencias para la segunda derivada:

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} \tag{1}$$

De manera similar se puede obtener la aproximación para la primera derivada

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i+1})}{2h} \tag{2}$$

Tomando la ecuación del problema inicial

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

y sustituyendo (1) y (2), se obtiene

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i+1})}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

Método de diferencias finitas con error de truncamiento de orden $O(h^2)$

Para $i = 1, 2, 3, \ldots, N$

$$\left[\frac{-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1}}{h^2}\right] + p(x_i)\left[\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right] + q(x_i)w_i = -r(x_i)$$

con las condiciones de frontera $w_0 = \alpha$ y $w_{N+1} = \beta$

La ecuación anterior se puede reescribir así:

$$-\left[1+\frac{h}{2}p(x_i)\right]w_{i-1}+[2+h^2q(x_i)]w_i-\left[1-\frac{h}{2}p(x_i)\right]w_{i+1}=-h^2r(x_i) \quad (3)$$

La ecuación (3) genera un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{Aw}=\mathbf{b}.$$

Donde A es una matriz tridiagonal de $N \times N$ teniendo siempre a $N \geq 2$.

A continuación se descibirá la forma matricial del método de diferencias finitas.

Forma matricial del método de diferencias finitas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2} p(x_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2} p(x_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 - \frac{h}{2} p(x_N) & 2 + h^2 q(x_N) \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_1)\right) w_0 \\ -h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 r(x_{N-1}) \\ -h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N)\right) w_{N+1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Ejercicio tomado del libro de R. Burden, Sec. 11.3, ejercicio 2

Considere el problema con valor de frontera

$$y'' = y' + 2y + cosx$$

definido en $0 \leq x \leq \pi/2$ y con las condiciones $y(0) = -0{,}3$ y $y(\pi/2) = -0{,}1$. Use el método de Diferencias Finitas para aproximar la solución para $h = \pi/4$ y $h = \pi/8$

Tomando a $h = \pi/4$
Sabemos que h se define como $h = \frac{b-a}{N+1}$, sustituyendo $a = 0$, $b = \pi/2$ y $h = \pi/4$, se obtiene que $N = 1$, por lo cual no se puede aplicar el método de diferencias finitas. Ya que requiere una partición del intervalo donde se tenga, al menos, dos puntos además de los puntos de la frontera.

Tomando a $h = \pi/8$

- Tenemos que $p(x) = 1$, $q(x) = 2$ y $r(x) = cosx$
- Dado que $h = \pi/8$ el intervalo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ se divide con los puntos

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = \frac{\pi}{8} \qquad x_2 = \frac{\pi}{4} \qquad x_3 = \frac{3\pi}{8} \qquad x_4 = \frac{\pi}{2}$$

- Debido a las condiciones de frontera conocidas $y(0)$ y $y(\pi/2)$, se desea encontrar una aproximación para

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(\pi/8) & \approx w_1 \\ y(x_2) &= y(\pi/4) & \approx w_2 \\ y(x_3) &= y(3\pi/8) & \approx w_3 \end{aligned}$$

Aplicando el método de diferencias finitas se obtiene el sistema $\mathbf{Aw} = \mathbf{b}$ donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 + (\frac{\pi}{8})^2(2) & -1 + \frac{\pi}{16} & 0 \\ -1 - \frac{\pi}{16} & 2 + (\frac{\pi}{8})^2(2) & -1 + \frac{\pi}{16} \\ 0 & -1 - \frac{\pi}{16} & 2 + (\frac{\pi}{8})^2(2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -(\frac{\pi}{8})^2 cos(\frac{\pi}{8}) + (1 + \frac{\pi}{16})(-0{,}3) \\ -(\frac{\pi}{8})^2 cos(\frac{\pi}{4}) \\ -(\frac{\pi}{8})^2 cos(\frac{3\pi}{8}) + (1 - \frac{\pi}{16})(-0{,}1) \end{pmatrix}$$

Las aproximaciones encontradas con el método son

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}3157 \\ -0{,}2829 \\ -0{,}2070 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Ejercicio tomado de un examen de reposición del IIPA2022

Dada la ecuación diferencial

$$y'' + ey' - e^x y = e, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

usando el método de diferencias finitas con $h = 0{,}25$

Primero, reescribimos la ecuación diferencial como sigue:

$$y'' = -ey' + e^x y + e$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p(x) &= -e \\ q(x) &= e^x \\ r(x) &= e \end{aligned}$$

Considerando a $h = 0{,}25$, en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ se hace la partición con los puntos:

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = 0{,}25 \qquad x_2 = 0{,}5 \qquad x_3 = 0{,}75 \qquad x_4 = 1$$

Dado que se conoce el valor exacto de y en la frontera, es decir en x_0 y x_4. Se desea encontrar una aproximación de la solución en los 3 puntos restantes de la partición:

$$\begin{aligned} y(x_1) = y(0{,}25) \approx w_1 \\ y(x_2) = y(0{,}50) \approx w_2 \\ y(x_3) = y(0{,}75) \approx w_3 \end{aligned}$$

Aplicando el método de diferencias finitas obtenemos el sistema $\mathbf{Aw} = \mathbf{b}$ asiguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (e^{0{,}25}) & -1 + \frac{\frac{1}{4}}{2}(-e) & 0 \\ -1 - \frac{\frac{1}{4}}{2}(-e) & 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (e^{0{,}5}) & -1 + \frac{\frac{1}{4}}{2}(-e) \\ 0 & -1 - \frac{\frac{1}{4}}{2}(-e) & 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (e^{7{,}5}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{4}\right)^2 (e) + \left(1 + \frac{\frac{1}{4}}{2}(-e)\right)(0) \\ -\left(\frac{1}{4}\right)^2 (e) \\ -\left(\frac{1}{4}\right)^2 (e) + \left(1 - \frac{\frac{1}{4}}{2}(-e)\right)(0) \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}250242 \\ -0{,}261738 \\ -0{,}160728 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.1 (Ejercicio del examen del IIPA2023)

Sea $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ *y* $P_2(x)$ *el polinomio interpolante de Lagrange en* $x_0 = 0$, x_1 *y* $x_2 = 1$. *Calcule el valor de* x_1 *más grande en el intervalo* $(0, 1)$ *para el cual* $f(0{,}5) - P_2(0{,}5) = -0{,}25$

Tip: evalúe en los puntos desde el inicio, así se sabe que términos se cancelaran.

$$f(x_0) = f(0) = 0 \quad f(x_1) = \sqrt{x_1 - x_1^2} \quad f(x_2) = f(x_1) = 0$$

Parte I: Determine el polinomio de Lagrange

$$\begin{aligned}
&P_2(x)\\
&= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)\\
&= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)\\
&= \frac{(x - 0)(x - 1)}{(x_1 - 0)(x_1 - 1)} \sqrt{x_1 - x_1^2}\\
&= \frac{x(x - 1)}{x_1(x_1 - 1)} \sqrt{x_1 - x_1^2}
\end{aligned}$$

Ejercicios

Parte 2: Evalúe en 0.5

$$P_2(0{,}5) = \frac{0{,}5(0{,}5-1)}{x_1(x_1-0{,}5)}\sqrt{x_1-x_1^2} = -\frac{0{,}25\sqrt{x_1-x_1^2}}{x_1(x_1-1)}$$

Parte 3: Garantizar que $f(0{,}5) - P_2(0{,}5) = -0{,}25$

$$\begin{aligned}
f(0{,}5) - P_2(0{,}5) &= -0{,}25 \\
0{,}5 + \frac{0{,}25\sqrt{x_1-x_1^2}}{x_1(x_1-1)} &= -0{,}25 \\
\frac{0{,}5+0{,}25}{0{,}25} &= \frac{\sqrt{x_1-x_1^2}}{x_1(x_1-1)} \\
-3 &= \frac{\sqrt{x_1(1-x_1)}}{-x_1(1-x_1)} = -\frac{1}{\sqrt{x_1(1-x_1)}} \\
9x_1(x_1-1) &= 1 \\
-9x_1^2 + 9x_1 - 1 = 0 &\implies x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6} \approx 0{,}8726779$

Teoremas Preliminares.

Ejercicio 4.2 (Spline Cúbico)

Encuentre los splines cúbicos para la función $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ *en los puntos* $\{x_0, \cdots, x_4\} = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. *Suponga condiciones naturales en -1 y fijas en 1.*

Ejercicio 4.2 (Spline Cúbico)

Encuentre los splines cúbicos para la función $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ *en los puntos* $\{x_0, \cdots, x_4\} = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. *Suponga condiciones naturales en -1 y fijas en 1.*

Note que $h_j = \dfrac{1}{2}$ para todo j. Del númeral 5 en las fórmulas de recurrencia se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) =& h_0 c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 \\
\frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) =& h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2 c_3 \\
\frac{3}{h_3}(a_4 - a_3) - \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) =& h_2 c_2 + 2(h_2 + h_3)c_3 + h_3 c_4
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Sustituyendo los valores conocidos:

$$
\begin{aligned}
6(f(0)-f(-1/2))-6(f(-1/2)-f(-1)) &= c_0/2+2c_1+c_2/2\\
6(f(1/2)-f(0))-6(f(0)-f(-1/2)) &= c_1/2+2c_2+c_3/2\\
6(f(1)-f(1/2))-6(f(1/2)-f(0)) &= c_2/2+2c_3+c_4/2
\end{aligned}
$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$
\begin{aligned}
6(f(0)-f(-1/2))-6(f(-1/2)-f(-1)) =& c_0/2+2c_1+c_2/2\\
6(f(1/2)-f(0))-6(f(0)-f(-1/2)) =& c_1/2+2c_2+c_3/2\\
6(f(1)-f(1/2))-6(f(1/2)-f(0)) =& c_2/2+2c_3+c_4/2
\end{aligned}
$$

Simplificando:

$$
\begin{aligned}
\frac{3450}{377} =& c_0+4c_1+c_2\\
-\frac{600}{29} =& c_1+4c_2+c_3\\
\frac{3450}{377} =& c_2+4c_4+c_4
\end{aligned}
$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\begin{aligned}
6(f(0) - f(-1/2)) - 6(f(-1/2) - f(-1)) =& c_0/2 + 2c_1 + c_2/2 \\
6(f(1/2) - f(0)) - 6(f(0) - f(-1/2)) =& c_1/2 + 2c_2 + c_3/2 \\
6(f(1) - f(1/2)) - 6(f(1/2) - f(0)) =& c_2/2 + 2c_3 + c_4/2
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{3450}{377} =& c_0 + 4c_1 + c_2 \\
-\frac{600}{29} =& c_1 + 4c_2 + c_3 \\
\frac{3450}{377} =& c_2 + 4c_4 + c_4
\end{aligned}$$

En este punto se necesitan agregar las condiciones de frontera. Si se empieza por las naturales se tendría que $S''(-1) = S_0''(-1) = 2c_0 = 0$, lo cuál implica que $c_0 = 0$.

La condición en el extremo derecho exige que $f'(1) = -\dfrac{25}{338} = b_4$. Si se agrupan las últimas ecuaciones en las fórmulas de recurrencia, se obtendría:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 + d_{n-1}h_{n-1}^3 \\ b_n &= b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 \\ c_n &= c_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1} \end{aligned}$$

Si se despeja b_{n-1} y d_{n-1} desde la segunda y tercera ecuación respectivamente y luego se sustituye y se simplifica en la primera ecuación, se obtiene que:

$$2h_{n-1}c_n + h_{n-1}c_{n-1} = \frac{3}{h_{n-1}}(a_{n-1} - a_n),\ \ 2h_3c_4 + h_3c_3 = \frac{3}{h_3}(a_3 - a_4)$$

Sustituyendo los valores conocidos se obtiene que:

$$c_4 + c_3/2 = 6(f(1/2) - f(1)),\ \ 2c_4 + c_3 = \frac{450}{377}$$

Ejercicios

Juntando las condiciones de frontera obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 =& c_0 \\
\frac{450}{377} =& 2c_4 + c_3 \\
\frac{3450}{377} =& c_0 + 4c_1 + c_2 \\
-\frac{600}{29} =& c_1 + 4c_2 + c_3 \\
\frac{3450}{377} =& c_2 + 4c_3 + c_4
\end{aligned}
$$

Juntando las condiciones de frontera obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 =& c_0\\
\frac{450}{377} =& 2c_4 + c_3\\
\frac{3450}{377} =& c_0 + 4c_1 + c_2\\
-\frac{600}{29} =& c_1 + 4c_2 + c_3\\
\frac{3450}{377} =& c_2 + 4c_3 + c_4
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] &= \left[\frac{1}{26}, \frac{4}{29}, 1, \frac{4}{29}, \frac{1}{26}\right]\\
[b_0, b_1, b_2, b_3] &= \left[-\frac{17850}{36569}, \frac{4425}{2813}, -\frac{1275}{36569}, -\frac{52425}{36569}\right]\\
[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4] &= \left[0, \frac{150750}{36569}, -\frac{268350}{36569}, \frac{166050}{36569}, -\frac{61200}{36569}\right]\\
[d_0, d_1, d_2, d_3] &= \left[\frac{100500}{36569}, -\frac{279400}{36569}, \frac{289600}{36569}, -\frac{151500}{36569}\right]
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.3 (Ejercicio de Richard Burden, Sección de trazadores cúbicos)

Un trazador cúbico sujeto S de la función f está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & x \in [0,1] \\ S_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

Ejercicio 4.3 (Ejercicio de Richard Burden, Sección de trazadores cúbicos)

Un trazador cúbico sujeto S de la función f está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & x \in [0,1] \\ S_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

Dado que estos representa trazadores cúbicos entonces se cumplen las siguientes condiciones:

$$S_0(1) = S_1(1)$$
$$S_0'(1) = S_1'(1)$$

Ejercicios

Ejercicio 4.3 (Ejercicio de Richard Burden, Sección de trazadores cúbicos)

Un trazador cúbico sujeto S de la función f está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & x \in [0,1] \\ S_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

Dado que estos representa trazadores cúbicos entonces se cumplen las siguientes condiciones:

$$S_0(1) = S_1(1)$$
$$S_0'(1) = S_1'(1)$$

La primera ecuación deja como resultado:

$$1 + B = S_0(1) = S_1(1) = 1 \Longrightarrow B = 0.$$

La segunda ecuación dá como resultado:

$$-2 = S_0'(1) = S_1'(1) = b \Longrightarrow b = -2.$$

Con esto se puede calcular $f'(0) = S_0'(0) = 0$ y $f'(2) = S_1'(2) = 11.$

Ejercicios

Ejercicio 4.4 (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$*. Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo* $[2, 2{,}6]$ *con tres puntos;* $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ *y* $x_2 = 2{,}6$.

Ejercicios

Ejercicio 4.4 (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. *Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo* $[2, 2{,}6]$ *con tres puntos;* $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ *y* $x_2 = 2{,}6$.

- Por el teorema relacionado con el polinomio de Lagrange, se sabe que:

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)\right|,$$

para $x \in [2, 2{,}6]$ y $\xi(x) \in (2, 2{,}6)$

Ejercicio 4.4 (Cota de error interpolación de Lagrange)

Considere la siguiente función $f(x) = \sin(\ln(x))$. *Encuentre una cota para el error de aproximación del polinomio interpolante de Lagrange en el intervalo* $[2, 2{,}6]$ *con tres puntos;* $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}4$ *y* $x_2 = 2{,}6$.

- Por el teorema relacionado con el polinomio de Lagrange, se sabe que:

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)\right|,$$

para $x \in [2, 2{,}6]$ y $\xi(x) \in (2, 2{,}6)$

- Para encontrar las cotas sobre la tercera derivada se necesitan los siguientes cálculos:

$$f^{(3)}(z) = \frac{3\sin(\ln(z)) + \cos(\ln(z))}{z^3}$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{10\sin(\ln(z))}{z^4}$$

- Si se analizan los lugares donde la derivada de la tercera derivada se hacen cero, entonces se obtiene la ecuación:

$$\sin(\ln(z)) = 0,$$

esta ecuación tiene como solución $z = e^{n\pi}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\pi} \notin [2, 2{,}6]$ y por lo tanto los únicos valores extremos de la tercera derivada son 2 y 2.6.

Evaluando la tercera derivada se obtiene que:

$$f^{(3)}(2) \approx 0{,}335765$$

$$f^{(3)}(2{,}6) \approx 0{,}1722$$

y por lo tanto se puede garantizar que:

$$|f^{(3)}(x)| \leq f^{(3)}(2)$$

para todo $x \in [2, 2{,}6]$.

Ejercicios

- Si se analizan los lugares donde la derivada de la tercera derivada se hacen cero, entonces se obtiene la ecuación:

$$\sin(\ln(z)) = 0,$$

esta ecuación tiene como solución $z = e^{n\pi}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\pi} \notin [2, 2{,}6]$ y por lo tanto los únicos valores extremos de la tercera derivada son 2 y 2.6.

Evaluando la tercera derivada se obtiene que:

$$f^{(3)}(2) \approx 0{,}335765$$

$$f^{(3)}(2{,}6) \approx 0{,}1722$$

y por lo tanto se puede garantizar que:

$$|f^{(3)}(x)| \leq f^{(3)}(2)$$

para todo $x \in [2, 2{,}6]$.

- Defina ahora la otra parte para la cota de error:

$$g(x) \equiv (x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6) = \frac{25x^3 - 175x^2 + 406x - 312}{25}$$

Ejercicios

- Resolviendo para la ecuación de segundo grado:

$$g'(x) = 0.$$

Se obtiene que $x = \dfrac{35 - \sqrt{7}}{15}$ (una de las dos raíces) es el lugar donde alcanza el valor más alto. Entonces:

$$|g(x)| \leq g\left(\frac{35 - \sqrt{7}}{15}\right)$$

para toda $x \in [2, 2{,}6]$.

- Resolviendo para la ecuación de segundo grado:

$$g'(x) = 0.$$

Se obtiene que $x = \dfrac{35-\sqrt{7}}{15}$ (una de las dos raíces) es el lugar donde alcanza el valor más alto. Entonces:

$$|g(x)| \le g\left(\frac{35-\sqrt{7}}{15}\right)$$

para toda $x \in [2, 2{,}6]$.

- Finalmente:

$$|f(x)-P(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)\right| \le g\left(\frac{35-\sqrt{7}}{15}\right) f^{(3)}(2)/6 \approx 9{,}4574\times 10^{-4}$$

La cota de error entonces es aproximadamente $9{,}5 \times 10^{-4}$.

Ejercicio 4.5 (Ajuste lineal)

Considere el siguiente conjunto de datos:

x_i	y_i
1	6.612
2	9.742
3	10.455
4	14.545
5	17.293
6	19.544
7	21.279
8	26.167
9	28.341
10	29.158

Por medio del método de mínimos cuadrados encuentre la pendiente (a_1) *y el intercepto* (a_0) *del ajuste lineal.*

Ejercicios

Después de plantear el problema con los datos anteriores se obtiene la siguiente gráfica:

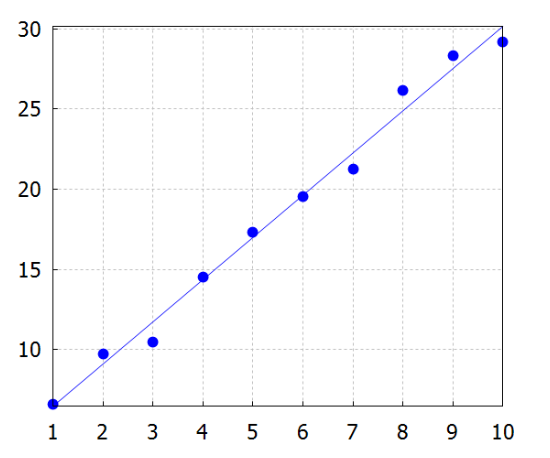


Figura: En el ajuste se obtubieron los coeficientes $a_1 = 2{,}631$, $a_0 = 3{,}843$.

Ejercicio 4.6 (Derivación de fórmula numérica)

Derive una fórmula de cinco puntos $O(h^4)$ para aproximar $f'(x)$ que utilice $f(x-h), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h)$.

El problema se puede plantear de la siguiente forma; encontrar constantes A, B, C y D tales que:

$$f'(x) = Af(x-h) + Bf(x+h) + Cf(x+2h) + Df(x+3h) + Ef(x). \qquad (5)$$

Dado que se requiere una fórmula de orden 4, entonces se usará la fórmula de Taylor hasta el orden 5. Dejando de lado los residuos (estos tendrán como factor común a h^5), al hacer la suma y agrupar la parte derecha (5) como un polinomio cuártico en términos de h, se obtienen los siguientes coeficientes:

- Coeficiente independiente: $(A+B+C+D+E)f(x)$.
- Coeficiente de h: $(3D+2C+B-A)f'(x)$.
- Coeficiente de h^2: $(9D+4C+B+A)/2f''(x)$.
- Coeficiente de h^3: $(27D+8C+B-A)/6f^{(3)}(x)$.
- Coeficiente de h^4: $(81D+16C+B+A)/24f^{(4)}(x)$.

Para que se cumpla (5) (salvo por los residuos producto del polinomio de Taylor) se impondrá que todos los coeficientes del polinomio cuártico sean cero con excepción de el coeficiente de h y h^0 (ya que se desea que sea igual a $f'(x)$).

Ejercicios

El coeficiente de h, convenientemente se hace igual a $\frac{1}{h}$ para que sea igual a $f'(x)$ en lado izquierdo de(5). El sistema que resulta de los planteamientos que se hicieron antes, queda expresado de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
0 =& E + D + C + B + A \\
\frac{1}{h} =& 3D + 2C + B - A \\
0 =& 9D + 4C + B + A \\
0 =& 27D + 8C + B - A \\
0 =& 81D + 16C + B + A
\end{aligned}
$$

Después de resolver el sistema obtenemos.

$$A = -\frac{1}{4h}, B = \frac{3}{2h}, C = -\frac{1}{2h}, D = \frac{1}{12h}, E = -\frac{5}{6h}.$$

Sustituyendo se obtiene:

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x-h) + 18f(x+h) - 6f(x+2h) + f(x+3h) - 10f(x)}{12h}$$

Ejercicio 4.7 (Regla del trapecio)

Por medio del teorema del valor medio y la cuadratura con polinomios de Lagrange, pruebe la regla del trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(b) + f(a)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

Donde $h = b - a$, $\xi \in (a, b)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \quad & \int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)dx \\ & + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(x-b)dx\end{aligned}$$

Ejercicio 4.7 (Regla del trapecio)

Por medio del teorema del valor medio y la cuadratura con polinomios de Lagrange, pruebe la regla del trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(b)+f(a)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

Donde $h = b - a$, $\xi \in (a, b)$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx = & \int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)dx \\
& + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(x-b)dx \\
= & \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - f''(\xi)\int_a^b (x-a)(x-b)dx \\
= & \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{6}f''(\xi).
\end{aligned}$$

Regreso a Técnicas de Cuadraturas.

Ejercicio 4.8 (Cuadratura Gaussiana)

Encuentre la fórmula de cuadratura Gaussiana para $n = 2$.

Incialmente calculamos el polinomio de Legendre $P_2(x)$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 (x+1)^{2-k}(x-1)^k$$

Ejercicio 4.8 (Cuadratura Gaussiana)

Encuentre la fórmula de cuadratura Gaussiana para $n = 2$.

Incialmente calculamos el polinomio de Legendre $P_2(x)$

$$\begin{aligned} P_2(x) = & \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 (x+1)^{2-k}(x-1)^k \\ = & \frac{1}{4}\left(\binom{2}{0}^2 (x+1)^2(x-1)^0 + \binom{2}{1}^2 (x+1)(x-1) + \binom{2}{2}^2 (x+1)^0(x-1)^2\right. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.8 (Cuadratura Gaussiana)

Encuentre la fórmula de cuadratura Gaussiana para $n = 2$.

Incialmente calculamos el polinomio de Legendre $P_2(x)$

$$
\begin{aligned}
P_2(x) = & \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 (x+1)^{2-k}(x-1)^k \\
= & \frac{1}{4}\left(\binom{2}{0}^2 (x+1)^2(x-1)^0 + \binom{2}{1}^2 (x+1)(x-1) + \binom{2}{2}^2 (x+1)^0(x-1)^2\right) \\
= & \frac{1}{4}\left((x+1)^2 + 4(x+1)(x-1) + (x-1)^2\right)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.8 (Cuadratura Gaussiana)

Encuentre la fórmula de cuadratura Gaussiana para $n = 2$.

Incialmente calculamos el polinomio de Legendre $P_2(x)$

$$
\begin{aligned}
P_2(x) = & \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 (x+1)^{2-k}(x-1)^k \\
= & \frac{1}{4}\left(\binom{2}{0}^2 (x+1)^2(x-1)^0 + \binom{2}{1}^2 (x+1)(x-1) + \binom{2}{2}^2 (x+1)^0(x-1)^2\right. \\
= & \frac{1}{4}((x+1)^2 + 4(x+1)(x-1) + (x-1)^2) \\
= & \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1 + 4(x^2-1) + x^2 - 2x + 1)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.8 (Cuadratura Gaussiana)

Encuentre la fórmula de cuadratura Gaussiana para $n = 2$.

Incialmente calculamos el polinomio de Legendre $P_2(x)$

$$\begin{aligned}
P_2(x) = & \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}^2(x+1)^{2-k}(x-1)^k \\
= & \frac{1}{4}\left(\binom{2}{0}^2(x+1)^2(x-1)^0+\binom{2}{1}^2(x+1)(x-1)+\binom{2}{2}^2(x+1)^0(x-1)^2\right) \\
= & \frac{1}{4}((x+1)^2+4(x+1)(x-1)+(x-1)^2) \\
= & \frac{1}{4}(x^2+2x+1+4(x^2-1)+x^2-2x+1) \\
= & \frac{1}{4}(6x^2-2)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.8 (Cuadratura Gaussiana)

Encuentre la fórmula de cuadratura Gaussiana para $n = 2$.

Incialmente calculamos el polinomio de Legendre $P_2(x)$

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}^2 (x+1)^{2-k}(x-1)^k \\
&= \frac{1}{4}\left(\binom{2}{0}^2 (x+1)^2(x-1)^0 + \binom{2}{1}^2 (x+1)(x-1) + \binom{2}{2}^2 (x+1)^0(x-1)^2\right. \\
&= \frac{1}{4}((x+1)^2 + 4(x+1)(x-1) + (x-1)^2) \\
&= \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1 + 4(x^2-1) + x^2 - 2x + 1) \\
&= \frac{1}{4}(6x^2 - 2) \\
&= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.8 (Cuadratura Gaussiana)

Encuentre la fórmula de cuadratura Gaussiana para $n = 2$.

Incialmente calculamos el polinomio de Legendre $P_2(x)$

$$\begin{aligned}
P_2(x) = \quad & \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 (x+1)^{2-k}(x-1)^k \\
= \quad & \frac{1}{4}\left(\binom{2}{0}^2 (x+1)^2(x-1)^0 + \binom{2}{1}^2 (x+1)(x-1) + \binom{2}{2}^2 (x+1)^0(x-1)^2\right. \\
= \quad & \frac{1}{4}((x+1)^2 + 4(x+1)(x-1) + (x-1)^2) \\
= \quad & \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1 + 4(x^2-1) + x^2 - 2x + 1) \\
= \quad & \frac{1}{4}(6x^2 - 2) \\
= \quad & \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ejercicios

Por otro lado se deben calcular los c_i.

$$c_1 = \int_{-1}^{1} \prod_{j=1, j\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} dx$$

Ejercicios

Por otro lado se deben calcular los c_i.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \int_{-1}^{1} \prod_{j=1, j\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\, dx
\end{aligned}
$$

Por otro lado se deben calcular los c_i.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \int_{-1}^{1} \prod_{j=1, j\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} dx
\end{aligned}
$$

Por otro lado se deben calcular los c_i.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \int_{-1}^{1} \prod_{j=1, j\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} [\frac{x^2}{2} + \frac{x}{\sqrt{3}}]_{-1}^{1}
\end{aligned}
$$

Por otro lado se deben calcular los c_i.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \int_{-1}^{1} \prod_{j=1, j\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} [\frac{x^2}{2} + \frac{x}{\sqrt{3}}]_{-1}^{1} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

De forma similar se puede encontrar que $c_2 = 1$. De esta forma se obtiene la fórmula:

$$
f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
$$

Ejercicios

Por otro lado se deben calcular los c_i.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \int_{-1}^{1} \prod_{j=1, j\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} [\frac{x^2}{2} + \frac{x}{\sqrt{3}}]_{-1}^{1} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

De forma similar se puede encontrar que $c_2 = 1$. De esta forma se obtiene la fórmula:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Según el teorema, esta fórmula de cuadratura tiene precisión 3. En este sentido tiene el mismo grado de precisión que la regla de simpson con menos puntos.

Ejercicio 4.9 (Cuadratura Gaussiana, continuación)

Utilice la fórmula de cuadratura anterior para encontrar:

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2(x)dx$$

Primero se necesita hacer el cambio de variable para que la integral quede definida en el intervalo de [-1,1]. Es bien conocido que el cambio de variable necesesario es:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)t + a + b] = \frac{1}{2}[\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}$$

Con la fórmula anterior se obtiene lo siguiente:

Ejercicio 4.9 (Cuadratura Gaussiana, continuación)

Utilice la fórmula de cuadratura anterior para encontrar:

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2(x)dx$$

Primero se necesita hacer el cambio de variable para que la integral quede definida en el intervalo de [-1,1]. Es bien conocido que el cambio de variable necesesario es:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)t + a + b] = \frac{1}{2}[\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}$$

Con la fórmula anterior se obtiene lo siguiente:

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2(x)dx = \quad \int_{-1}^{1} \cos^2(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8})\frac{\pi}{8}dt$$

Ejercicio 4.9 (Cuadratura Gaussiana, continuación)

Utilice la fórmula de cuadratura anterior para encontrar:

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2(x)dx$$

Primero se necesita hacer el cambio de variable para que la integral quede definida en el intervalo de [-1,1]. Es bien conocido que el cambio de variable necesesario es:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)t + a + b] = \frac{1}{2}[\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}$$

Con la fórmula anterior se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \cos^2(x)dx = & \int_{-1}^{1} \cos^2(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8})\frac{\pi}{8}dt \\ \approx & \frac{\pi}{8}(\cos^2(\frac{\pi}{8\sqrt{3}} + \frac{\pi}{8}) + \cos^2(-\frac{\pi}{8\sqrt{3}} + \frac{\pi}{8})) = 0{,}642317 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2(x)dx = [\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}]_0^{\pi/4} \approx 0{,}6426990816987241$$

Por otro lado:

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2(x)dx = [\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}]_0^{\pi/4} \approx 0{,}6426990816987241$$

El error de aproximación se cálcula acontinuación:

$$E(cos^2(x)) = 3{,}81846 10^{-4}$$

Ejercicio 4.10 (Fórmula de cuadratura)

Determine las constantes a, b, c, d y e que producirán una fórmula de cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf(1) + df'(-1) + ef'(1)$$

cuya precisión es 4.

Ejercicios

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = \quad a + b + c$$

Ejercicios

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} 1dx = 2 = &\quad a + b + c \\ \int_{-1}^{1} xdx = 0 = &\quad -a + c + d + e \end{aligned}$$

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = &\quad a+b+c \\
\int_{-1}^{1} xdx = 0 = &\quad -a+c+d+e \\
\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = &\quad a+c-2d+2e
\end{aligned}
$$

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = &\quad a + b + c \\
\int_{-1}^{1} xdx = 0 = &\quad -a + c + d + e \\
\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = &\quad a + c - 2d + 2e \\
\int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = &\quad -a + c + 3d + 3e
\end{aligned}
$$

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = & \quad a+b+c \\
\int_{-1}^{1} xdx = 0 = & \quad -a+c+d+e \\
\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = & \quad a+c-2d+2e \\
\int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = & \quad -a+c+3d+3e \\
\int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5} = & \quad a+c-4d+4e
\end{aligned}
$$

Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = & \quad a + b + c \\
\int_{-1}^{1} xdx = 0 = & \quad -a + c + d + e \\
\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = & \quad a + c - 2d + 2e \\
\int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = & \quad -a + c + 3d + 3e \\
\int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5} = & \quad a + c - 4d + 4e
\end{aligned}
$$

Resolviendo este sistema se obtiene:

$$
a = \frac{7}{15}, b = \frac{16}{15}, c = \frac{7}{15}, d = \frac{1}{15}, e = -\frac{1}{15}
$$

Ejercicio 4.11 (Regla compuesta del trapecio)

Determine los valores de n y h de manera que la integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}dx,$$

se pueda aproximar con una excatitud de 10^{-5} y calcule la aproximación. Aplique la regla compuesta del trapecio.

$$E(f) = \left|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right| = \left|\frac{2-0}{12}h^2 \frac{2}{(\mu+4)^3}\right| \left(f''(x) = \frac{2}{(x+4)^3}\right)$$

Ejercicios

Ejercicio 4.11 (Regla compuesta del trapecio)

Determine los valores de n y h de manera que la integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}\,dx,$$

se pueda aproximar con una excatitud de 10^{-5} *y calcule la aproximación. Aplique la regla compuesta del trapecio.*

$$\begin{aligned} E(f) = \left|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right| &= \left|\frac{2-0}{12}h^2\frac{2}{(\mu+4)^3}\right| \left(f''(x) = \frac{2}{(x+4)^3}\right) \\ &= \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(\mu+4)^3}\right| \left(\frac{1}{(x+4)^3} \leq \frac{1}{4^3}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 4.11 (Regla compuesta del trapecio)

Determine los valores de n y h de manera que la integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}dx,$$

se pueda aproximar con una excatitud de 10^{-5} y calcule la aproximación. Aplique la regla compuesta del trapecio.

$$\begin{aligned}
E(f) = \left|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right| &= \left|\frac{2-0}{12}h^2\frac{2}{(\mu+4)^3}\right| \left(f''(x) = \frac{2}{(x+4)^3}\right)\\
&= \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(\mu+4)^3}\right| \left(\frac{1}{(x+4)^3} \leq \frac{1}{4^3}\right)\\
&\leq \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(4)^3}\right|
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.11 (Regla compuesta del trapecio)

Determine los valores de n y h de manera que la integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}\,dx,$$

se pueda aproximar con una excatitud de 10^{-5} y calcule la aproximación. Aplique la regla compuesta del trapecio.

$$\begin{aligned}
E(f) = \left|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right| &= \left|\frac{2-0}{12}h^2\frac{2}{(\mu+4)^3}\right| \quad \left(f''(x) = \frac{2}{(x+4)^3}\right)\\
&= \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(\mu+4)^3}\right| \quad \left(\frac{1}{(x+4)^3} \leq \frac{1}{4^3}\right)\\
&\leq \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(4)^3}\right|\\
&\leq 10^{-5}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

Ejercicio 4.11 (Regla compuesta del trapecio)

Determine los valores de n y h de manera que la integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}dx,$$

se pueda aproximar con una excatitud de 10^{-5} y calcule la aproximación. Aplique la regla compuesta del trapecio.

$$\begin{aligned}
E(f) = \left|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right| &= \left|\frac{2-0}{12}h^2\frac{2}{(\mu+4)^3}\right| \left(f''(x) = \frac{2}{(x+4)^3}\right)\\
&= \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(\mu+4)^3}\right| \left(\frac{1}{(x+4)^3} \le \frac{1}{4^3}\right)\\
&\le \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(4)^3}\right|\\
&\le 10^{-5}.\\
\Rightarrow \qquad h &\le 10^{-5/2}2^3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.11 (Regla compuesta del trapecio)

Determine los valores de n y h de manera que la integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}\,dx,$$

se pueda aproximar con una excatitud de 10^{-5} y calcule la aproximación. Aplique la regla compuesta del trapecio.

$$\begin{aligned}
E(f) = \left|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right| &= \left|\frac{2-0}{12}h^2\frac{2}{(\mu+4)^3}\right| \quad \left(f''(x) = \frac{2}{(x+4)^3}\right)\\
&= \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(\mu+4)^3}\right| \quad \left(\frac{1}{(x+4)^3} \leq \frac{1}{4^3}\right)\\
&\leq \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(4)^3}\right|\\
&\leq 10^{-5}.\\
\Rightarrow \qquad h &\leq 10^{-5/2}2^3\sqrt{3}\\
\Rightarrow \qquad \frac{2}{n} = \frac{b-a}{n} = h &\leq 10^{-5/2}2^3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.11 (Regla compuesta del trapecio)

Determine los valores de n y h de manera que la integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}dx,$$

se pueda aproximar con una excatitud de 10^{-5} y calcule la aproximación. Aplique la regla compuesta del trapecio.

$$\begin{aligned}
E(f) = \left|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right| &= \left|\frac{2-0}{12}h^2\frac{2}{(\mu+4)^3}\right| \quad \left(f''(x) = \frac{2}{(x+4)^3}\right)\\
&= \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(\mu+4)^3}\right| \quad \left(\frac{1}{(x+4)^3} \leq \frac{1}{4^3}\right)\\
&\leq \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(4)^3}\right|\\
&\leq 10^{-5}.\\
\Rightarrow \qquad h &\leq 10^{-5/2}2^3\sqrt{3}\\
\Rightarrow \qquad \frac{2}{n} = \frac{b-a}{n} = h &\leq 10^{-5/2}2^3\sqrt{3}\\
\Rightarrow \qquad 45{,}64354 &\leq n \Rightarrow n = 46.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.11 (Regla compuesta del trapecio)

Determine los valores de n y h de manera que la integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}\,dx,$$

se pueda aproximar con una excatitud de 10^{-5} y calcule la aproximación. Aplique la regla compuesta del trapecio.

$$\begin{aligned}
E(f) = \left|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right| &= \left|\frac{2-0}{12}h^2\frac{2}{(\mu+4)^3}\right| \quad \left(f''(x) = \frac{2}{(x+4)^3}\right)\\
&= \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(\mu+4)^3}\right| \quad \left(\frac{1}{(x+4)^3} \leq \frac{1}{4^3}\right)\\
&\leq \left|\frac{1}{3}h^2\frac{1}{(4)^3}\right|\\
&\leq 10^{-5}.\\
\Rightarrow \qquad h &\leq 10^{-5/2}2^3\sqrt{3}\\
\Rightarrow \qquad \frac{2}{n} = \frac{b-a}{n} = h &\leq 10^{-5/2}2^3\sqrt{3}\\
\Rightarrow \qquad 45{,}64354 &\leq n \Rightarrow n = 46.
\end{aligned}$$

Ejercicios

$$0{,}40546510810 \approx \ln(6) - \ln(4) = \int_0^2 \frac{dx}{x+4} \approx (R.C.T.\ con\ n = 46) 0{,}405470577804$$