Corrigé - Colle 7 (Sujet 2)

MPSI2
Année 2021-2022

16 novembre 2021

Question de cours . Énoncer et démontrer le théorème donnant la forme générale des solutions d'une équations différentielle linéaire du premier ordre à l'aide d'une solution particulière.

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos(x).$$

Solution de l'exercice 1. On résout l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$. On introduit l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$. Ses racines sont 1 et 3. On en déduit que la solution générale de l'équation sans second membre est

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière en utilisant le principe de superposition des solutions. On cherche donc d'abord une solution de $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x$. Puisque 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_1(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$. En dérivant et en identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} -6a & = 1 \\ 6a - 4b & = 0 \\ 2b - 2c & = 0 \end{cases}.$$

Une solution particulière est donc obtenue par

$$y_1(x) = -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}\cos(x)$. On va en fait chercher une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{(2+i)x}$ et on en prendra la partie réelle. $2 + i$ n'étant pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_2(x) = (ax + b)e^{(2+i)x}$.

Après dérivation et identification, on trouve le système

$$\begin{cases} -2a & = 1 \\ 2ia - 2b & = 0 \end{cases}.$$

On trouve $y_2(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{i}{2}\right) e^{(2+i)x}$. Prenant la partie réelle, une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}\cos(x)$ est obtenue par

$$x \mapsto \left(-\frac{x}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right) e^{2x}.$$

Les solutions de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right) e^x + \left(-\frac{x}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right) e^{2x}\lambda e^x + \mu e^{3x}.$$

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle

$$y' + y = xe^{-x}.$$

Solution de l'exercice 2. On résout d'abord l'équation sans second membre $y' + y = 0$. La solution générale est de la forme $y(x) = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y(x) = P(x)e^{-x}$ avec P un polynôme. Puisque dans ce cas $y'(x) = P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x}$, on trouve que y est une solution de l'équation si et seulement si

$$P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} + P(x)e^{-x} = xe^{-x}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ soit

$$P'(x)e^{-x} = xe^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad P'(x) = x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le polynôme $P(x) = \frac{x^2}{2}$ convient et une solution particulière de l'équation est donc donnée par $P(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{-x} + Ke^{-x} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle

$$(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x) \quad \text{sur} \quad]-1, +\infty[.$$

Solution de l'exercice 3. On commence par résoudre l'équation homogène $(1 + x)y' + y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y(x) = \frac{\lambda}{1+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \lambda(x)1 + x$, de sorte que

$$y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{1 + x} - \frac{\lambda(x)}{(1 + x)^2}.$$

En introduisant ceci dans l'équation différentielle, on trouve

$$(1+x)\left(\frac{\lambda'(x)}{1+x}-\frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}\right)+\frac{\lambda(x)}{1+x}=1+\ln(1+x)$$

ce qui donne après simplifications

$$\lambda'(x)=1+\ln(1+x).$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x)=(1+x)\ln(1+x)$, et les solution de l'équation avec second membre sont donc les fonctions de la forme

$$x\mapsto\frac{\lambda}{1+x}+\ln(1+x)\quad\lambda\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4. 1. Soient $C,D\in\mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $R^\star$ par

$$f(x)=\begin{cases}Ce^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0\\ De^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x<0\end{cases}.$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.

(b) Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

2. On considère l'équation différentielle $x^2y'-y=0$. Résoudre cette équation sur les intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.
3. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 4. 1. (a) Il est clair que $f(x)\to 0$ quand $x\to 0^+$, indépendamment de la valeur de C, et que $f(x)\to\pm\infty$ quand $x\to 0^-$ si $D\neq 0$, et $f(x)\to 0$ quand $x\to 0^-$ si $D=0$. Ainsi, on a un prolongement continu en 0 si et seulement si $D=0$. Dans ce cas, on a $f(0)=0$.

(b) On suppose donc que $D=0$. La fonction f étant identiquement nulle à gauche de 0, elle est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée est nulle. Pour $x>0$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{C}{x}e^{-\frac{1}{x}}.$$

Posons $u=\frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0^+, u tend vers $+\infty$ et

$$\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=ue^{-u}.$$

Par comparaison des fonctions polynômes et exponentielle, on en déduit que $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+, et donc f' est dérivable à droite en 0, de dérivée nulle. Ainsi, on a bien que f est dérivable en 0, avec $f'(0)=0$. La continuité à gauche de f' en 0 ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la dérivée à droite, on remarque que, pour

$x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{C}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = Cu^2e^{-u}$$

toujours avec le même changement de variables. Comme précédemment, on en tire que $f'(x) \to 0$ lorsque $x \to 0^+$, et donc que f est continue en 0.

2. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction x^2 ne s'annule pas et l'équation est équivalente à y

$$y' = \frac{1}{x^2}y.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(x) = Ce^{-\frac{1}{x}}$, où $C \in \mathbb{R}$. La résolution sur l'intervalle $] - \infty, 0[$ donne exactement le même ensemble de solutions.

3. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Sa restriction à $]0, +\infty[$ est solution sur $]0, +\infty[$, et donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, $y(x) = Ce^{-\frac{1}{x}}$. La restriction de y à $] - \infty, 0[$ est aussi solution sur $] - \infty, 0[$, et donc il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x < 0$, $y(x) = De^{-\frac{1}{x}}$. Remarquons ici que C et D n'ont aucune raison d'être égaux. En effet, les résolutions sur $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ se font totalement indépendamment. D'ailleurs, le résultat des premières questions entraîne que, pour que y soit continue en 0, il est nécessaire que $D = 0$. Dans ce cas, la fonction y est de classe C^1, et elle vérifie bien l'équation différentielle : c'est clair pour $x \neq 0$, et c'est aussi vrai en 0 par continuité de y et y' en 0.

Exercice 5. Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période 1. A quelle(s) condition(s) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ admet-elle des solutions 1-périodiques. Les déterminer.

Solution de l'exercice 5. La solution générale de l'équation s'écrit

$$y(x) = \left(\alpha + \int_0^x b(t)e^{-A(t)}\,dt\right)e^{A(x)}$$

où $A(x) = \int_0^x a(t)\,dt$. Notons que

$$A(x+1) = A(x) + \int_x^{x+1} a(t)\,dt = A(x) + \int_0^1 a(t)\,dt,$$

et posons $\lambda = \int_0^1 a(t)\,dt$. On a ainsi :

$$y(x+1) = \left(\alpha + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}\,dt + \int_1^{x+1} b(t)e^{-A(t)}\,dt\right)e^{A(x+1)}$$

i.e.

$$y(x+1) = \left(\alpha + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}\,dt + \int_0^x b(t)e^{-A(t)}\,dt\right)e^{A(x)+\lambda}$$

et donc

$$y(x+1) = y(x) + (\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda)e^{A(x)}.$$

où on a posé $\mu = \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}\,dt$. Autrement dit, f est $1-$périodique si et seulement si

$$\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda = 0.$$

Si $\lambda \neq 0$, l'équation admet une unique solution $1-$périodique, donnée par

$$\alpha = \frac{\mu e^\lambda}{1 - e^\lambda}.$$

Si $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, alors toute solution est $1-$périodique.
Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, alors il n'y a aucune solution $1-$périodique.