[5cm]

Mathématiques pour le P.A.S.S 1

FILIÈRE : P.A.S.S.
ANNÉE : L1.

DAMIEN GOBIN
Mail : damien.gobin@univ-nantes.fr

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
Université de Nantes

Année académique 2021-2022

Exercice 0.0.1

Soient $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n (t-\beta)^n \, dt.$$

Solution 0.0.2

Exercice 0.0.3

Soit $p \geqslant 2$ un entier et $0 < a_1 < \cdots < a_p$ des nombres réels positifs.

1. Montrer que, pour tout $a > a_p$, l'équation

$$a_1^x + \cdots + a_p^x = a^x$$

admet une unique racine x_a.

2. Étudier le sens de variation de $a \mapsto x_a$.
3. Déterminer l'existence et calculer

$$\lim_{a \to +\infty} x_a \quad \text{et} \quad \lim_{a \to +\infty} x_a \ln(a).$$

Solution 0.0.4

1. On introduit la fonction

$$f_a(x) = \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \cdots + \left(\frac{a_1}{a}\right)^x = \sum_{k=1}^p e^{x \ln\left(\frac{a_k}{a}\right)}.$$

Puisque $\ln\left(\frac{a_k}{a}\right) < 0$, $x \mapsto x \ln\left(\frac{a_k}{a}\right)$ est strictement décroissante, et donc f_a est strictement décroissante. Or, $f_a(0) = p$ et

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = 0.$$

L'équation $f_a(x) = 1$ admet donc une unique racine $x_a > 0$.

2. Soit $a < b$. En reprenant la notation de la question précédente, pour tout $x > 0$, on a $f_a(x) \geqslant f_b(x)$. En particulier $f_b(x_b) = f_a(x_a) = 1 \geqslant f_b(x_a)$. Par décroissance de f_b, on en déduit que $x_a \geqslant x_b$ et donc $a \mapsto x_a$ est décroissante.

3. Puisque $a \mapsto x_a$ est décroissante et minorée par 0, elle admet une limite $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$. Supposons $\ell > 0$. Alors, en passant à la limite dans

$$a_1^{x_a} + \cdots + a_p^{x_a} = a^{x_a},$$

on trouve

$$a_1^\ell + \cdots + a_p^\ell = +\infty,$$

une contradiction. Donc $\ell = 0$. Ainsi, il vient également

$$x_a \ln(a) = \ln\left(a_1^{x_a} + \cdots + a_p^{x_a}\right),$$

ce qui prouve que $x_a \ln(a)$ tend vers $\ln(p)$.

Exercice 0.0.5

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|.$$

Solution 0.0.6

Soit $k \in \{0, ..., n-1\}$ et soit $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Alors

$$|\omega_k - 1| = |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{i0}| = 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|$$

en factorisant par l'angle moitié. De plus, pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$ et le sinus est positif. On en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1| &= 2\sum_{z \in \mathbb{U}_n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= 2\mathrm{Im}\left(\sum_{z \in \mathbb{U}_n} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\
&= 2\mathrm{Im}\left(1 \times \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \\
&= 4\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \\
&= 4\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{\frac{i\pi}{2n}}}\right) \\
&= 2\mathrm{Im}\left(\frac{ie^{\frac{-i\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right) \\
&= 2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 0.0.7

Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \quad \Leftrightarrow 3\ \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Solution 0.0.8

Supposons d'abord que $|z| = 1$. Alors z s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On peut alors écrire :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

qui est bien un élément de $i\mathbb{R}$ (on note que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$).
Réciproquement, supposons que $\frac{1+z}{1-z} = ia$, avec a un réel alors,

$$\frac{1+z}{1-z} = ia \quad \Leftrightarrow \quad 1+z = ia(1-z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-1+ia}{1+ia}.$$

Ainsi,

$$|z| = \left|\frac{-1+ia}{1+ia}\right| = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$$

ce qui prouve la réciproque.

Exercice 0.0.9

Calculer

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx.$$

Solution 0.0.10

Exercice 0.0.11

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

$$h(x) = \frac{x+2}{x+1} \quad \text{et} \quad i(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Solution 0.0.12