[5cm]

# Mathématiques pour le P.A.S.S 1

Filière : P.A.S.S.
Année : L1.

Damien GOBIN
Mail : damien.gobin@univ-nantes.fr

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
Université de Nantes

Année académique 2021-2022

**Question de cours**

*Ceci est une question de cours*

**Exercice 0.0.1**

Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

**Solution 0.0.2**

Supposons d'abord que $|z| = 1$. Alors $z$ s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On peut alors écrire :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

qui est bien un élément de $i\mathbb{R}$ (on note que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$).
Réciproquement, supposons que $\frac{1+z}{1-z} = ia$, avec $a$ un réel alors,

$$\frac{1+z}{1-z} = ia \quad \Leftrightarrow \quad 1+z = ia(1-z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-1+ia}{1+ia}.$$

Ainsi,

$$|z| = \left|\frac{-1+ia}{1+ia}\right| = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$$

ce qui prouve la réciproque.