Colle 1 - Tristan BEIN

MPSI2
Année 2021-2022

21 septembre 2021

Question de cours . Démontrer l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.

Exercice 1. On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai de l'équation.
2. Déterminer $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z - ai)(z^2 + bz + c).$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation.

Solution de l'exercice 1. 1. ai est solution de l'équation si et seulement si

$$-i + (i-1)ai - (1+i)a^2 - ia^3 = (-a - a^2) + i(-1 - a - a^2 - a^3) = 0.$$

La partie réelle et la partie imaginaire de ce nombre complexe doivent être nuls, et ai est donc solution de l'équation si et seulement si

$$a + a^2 = 0 \quad \text{et} \quad 1 + a + a^2 + a^3 = 0.$$

La première équation donne $a = 0$ ou $a = -1$, et seul -1 convient pour la deuxième équation. Donc $-i$est solution de l'équation.

2. On cherche b et c tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2 + bz + c).$$

Pour cela, on développe le second membre et on trouve

$$(z+i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b+i)z^2 + (ib + c)z + ic.$$

Par identification, on doit avoir

$$b+i=1+i \quad ; \quad ib+c=i-1 \quad \text{et} \quad ic=-i.$$

On trouve donc $b=1$ et $c=-1$ et donc la factorisation

$$z^3+(1+i)z^2+(i-1)z-i=(z+i)(z^2+z-1).$$

3. z est solution de l'équation si et seulement si $z=-i$ ou $z^2+z-1=0$. Les racines de cette équation sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. L'équation admet donc trois solutions, qui sont $-i$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2. Déterminer les nombres complexes non nuls z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

Solution de l'exercice 2. De $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|$, on déduit que $|z|^2=1$ et donc que $|z|=1$. Ainsi, $z=e^{i\theta}$, où $\theta\in[0,2\pi[$. Calculons maintenant le module de $1-z$. On écrit

$$1-z=1-e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}})=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Ainsi, le module de $1-z$ vaut donc 1 si et seulement si $\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}$. Or, l'équation $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}$, avec $\theta\in[0,2\pi[$ donne $\theta=\frac{\pi}{3}$ ou $\theta=\frac{5\pi}{3}$ alors que l'équation $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ avec $\theta\in[0,2\pi[$ n'a pas de solutions. L'ensemble des solutions est donc $\left\{e^{\frac{i\pi}{3}},e^{\frac{5i\pi}{3}}\right\}$.

Exercice 3. Résoudre l'équation

$$z^5=\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}.$$

Solution de l'exercice 3. On a

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}=\frac{2^4\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}2\right)^4}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2^3\frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{i\frac{2\pi}{4}}}=2^3\frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}=2^3e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Ainsi,

$$z^5=\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}=2^3e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad z=2^{\frac{3}{5}}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{5}\right)}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Exercice 4. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation

$$\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right)=\frac{\pi}{2} \quad [\pi].$$

2. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation

$$|3+iz|=|3-iz|.$$

Solution de l'exercice 4. 1. Soit C le point d'affixe $2i$ et D le point d'affixe $1-i$. Alors,

$$\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \arg\left(\frac{z-2i}{z-(1-i)}\right) = (\overrightarrow{MD}, \overleftarrow{MC}) \quad [2\pi].$$

Ainsi,

$$\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{MD}, \overleftarrow{MC}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

L'ensemble recherché est donc l'ensemble des points M tel que le triangle MBC soit rectangle en M (sauf les points C et D). Autrement dit, il s'agit du cercle de diamètre $[CD]$ privé de C et D.

2. On a $3+iz = i(-3i+z)$ et $3-iz = -i(3i+z)$ et donc l'équation est équivalente à

$$|z-3i| = |z-(-3i)|.$$

Autrement dit, le point M d'affixe z est à égale distance du point A d'affixe $3i$ et du point B d'affixe $-3i$. Le point M est donc sur la médiatrice de $[AB]$ c'est-à-dire sur l'axe des abscisses.

Exercice 5. Soit a un complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1-\overline{a}z \neq 0$,

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant 1.$$

Solution de l'exercice 5. 1. On a fan

2. On commence par remarquer que :

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 \leqslant 1.$$

Or, d'après la question précédente,

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Ainsi,

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} \geqslant 0.$$

Or, $1-|a|^2 \geqslant 0$ et $|1-\overline{a}z|^2 \geqslant 0$. On a donc,

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1-|z|^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z| \leqslant 1.$$