Corrigé - Colle 2 (Sujet 1)

MPSI2

Année 2021-2022

28 septembre 2021

Exercice 1. Soit $a \geqslant 0$. Montrer que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+an$.

Solution de l'exercice 1. Montrons par récurrence que la propriété (P_n) : $(1+a)^n \geqslant 1+an$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Pour $n=0$, on a bien $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1+0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité.** Soit $n \geqslant 0$ un entier fixé. Supposons que la propriété (P_n) est vraie au rang n, i.e. que
$$(1+a)^n \geqslant 1+an.$$
Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$. On a, grâce à l'hypothèse de récurrence,
$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+an) = 1+a+an+a^2n = 1+a(n+1)+a^2n.$$
Or, $a^2n \geqslant 0$ et on a donc montré que
$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a(n+1).$$
Ceci achève de démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion.** On a donc bien démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+an$.

Exercice 2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
2. En déduire la valeur de
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k.$$

Solution de l'exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $x = 1$, alors $S_n = n$. Si $x \neq 1$, la somme S_n est la somme des n premier termes d'une suite géométrique d'où
$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \ .$$
2. Pour tout n et pour tout x, S_n est une fonction dérivable (c'est un polynôme) donc, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x \neq 1$
$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on note
$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?
2. Démontrer que pour tout réel non-nul x, on a
$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$
3. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, écrire $P_n(p)$ comme un coefficient binomial.

Solution de l'exercice 3. 1. On a $P_n(0) = 1$ (on ne fait que des produits de 1), $Pn(-n) = 0$, car alors $1 + \frac{-n}{n} = 0$ et donc on a un terme nul dans le produit. Enfin,
$$P_n(1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2 \times 3 \times ... \times (n+1)}{1 \times 2 \times ... \times n} = n + 1.$$
2. On a
$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} = \frac{(x+1)(x+2)...(x+n)}{1 \times 2 \times ... \times n} = \frac{x+n}{P}{}_n(x-1).$$
3. On a
$$P_n(p) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+p}{k} = \frac{(p+1)...(p+n)}{n!} = \frac{(n+p)!}{n!p!} \binom{n+p}{p}.$$

Exercice 4. Soient n et p deux entiers tels que $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant p \leqslant n$.

1. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant p + 1$,
$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Solution de l'exercice 4. 1. On rappelle que

$$\binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}.$$

Ainsi,

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)!}{(p+1)!(k+1-(p+1))!} - \frac{k!}{(p+1)!(k-(p+1))!}$$

et donc

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)!}{(p+1)!(k-p)!} - \frac{k!}{(p+1)!(k-p-1)!}.$$

On met donc sur le même dénominateur et on obtient

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)! - k!(k-p)}{(p+1)!(k-p)!} = \frac{k!(k+1-(k-p))}{(p+1)!(k-p)!} = \frac{k!(p+1)}{(p+1)!(k-p)!}.$$

On arrive donc bien à

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{k}{p}.$$

2. On note que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right)$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} &= 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p} \\
&= 1 + \left(\binom{p+2}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \right) + \left(\binom{p+3}{p+1} - \binom{p+2}{p+1} \right) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \left(\binom{n}{p+1} - \binom{n-1}{p+1} \right) + \left(\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1} \right) \\
&= 1 + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \\
&= \binom{n+1}{p+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Déterminer toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Solution de l'exercice 5. Procédons par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Supposons que f est une fonction telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$n

  $$f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

  Appliquons cette relation au cas où $y = f(x)$. Alors,

  $$f(f(x) - f(x)) = 2 - x - f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 2 - x - f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -x + 2 - f(0).$$

  De plus, en appliquant la formule $f(x) = -x + 2 - f(0)$ en $x = 0$ on arrive à

  $$f(0) = 2 - f(0) \quad \Leftrightarrow \quad 2f(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 1.$$

  On en déduit que si f est une fonction vérifiant la propriété en question, alors nécessairement

  $$f(x) = -x + 2 - 1 = -x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- **Synthèse.** Supposons que f et définie sur $\mathbb{R}$ par

  $$f(x) = -x + 2 - 1 = -x + 1$$

  et montrons qu'elle vérifie bien $f(y - f(x)) = 2 - x - y$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a,

  $$f(y - f(x)) = -(y - f(x)) + 1 = -y + f(x) + 1 = -y + (-x + 1) + 1 = -y - x + 2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nous avons donc démontré par analyse-synthèse que la seule fonction vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x + 1.$$