Corrigé - Colle 8 (Sujet 2)

BCPST1B

Année 2021-2022

23 novembre 2021

Exercice 1. Ecrire un programme Python permettant de calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^5.$$

Solution de l'exercice 1. On a

Algorithme 1 : Calcul de S_n

Entrées : Un entier n
Sorties : S_n.

$S = 0$;
pour k *de* 0 *à* n **faire**
  $S = S + k^5$
fin
retourner S

Exercice 2. On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai de l'équation.
2. Déterminer $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z - ai)(z^2 + bz + c).$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation.

Solution de l'exercice 2. 1. ai est solution de l'équation si et seulement si

$$-i + (i-1)ai - (1+i)a^2 - ia^3 = (-a - a^2) + i(-1 - a - a^2 - a^3) = 0.$$

La partie réelle et la partie imaginaire de ce nombre complexe doivent être nuls, et ai est donc solution de l'équation si et seulement si

$$a + a^2 = 0 \quad \text{et} \quad 1 + a + a^2 + a^3 = 0.$$

La première équation donne $a = 0$ ou $a = -1$, et seul -1 convient pour la deuxième équation. Donc $-i$est solution de l'équation.

2. On cherche b et c tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2 + bz + c).$$

Pour cela, on développe le second membre et on trouve

$$(z+i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b+i)z^2 + (ib+c)z + ic.$$

Par identification, on doit avoir

$$b + i = 1 + i \quad ; \quad ib + c = i - 1 \quad \text{et} \quad ic = -i.$$

On trouve donc $b = 1$ et $c = -1$ et donc la factorisation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2 + z - 1).$$

3. z est solution de l'équation si et seulement si $z = -i$ ou $z^2 + z - 1 = 0$. Les racines de cette équation sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. L'équation admet donc trois solutions, qui sont $-i$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1}.

Solution de l'exercice 3. La première chose à remarquer est que f s'écrit plus facilement

$$f(x) = e^{2x} + 2e^x.$$

Soit $y > 0$. Alors on a

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} + 2e^x - y = 0.$$

On pose alors $X = e^x$ et l'équation est équivalente à l'équation du second degré

$$X^2 + 2X - y = 0$$

dont les racines sont
$$X_1 = -1 - \sqrt{1+y} \quad \text{et} \quad X_2 = -1 + \sqrt{1+y}.$$
Mais $e^x > 0$, et donc on a
$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^x = -1 + \sqrt{1+y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(-1 + \sqrt{1+y}).$$
L'équation $y = f(x)$ admet donc toujours une unique solution. La fonction f est bijective et
$$f^{-1}(y) = \ln(-1 + \sqrt{1+y}).$$

Exercice 4. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation
$$\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi].$$
2. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation
$$|3 + iz| = |3 - iz|.$$

Solution de l'exercice 4. 1. Soit C le point d'affixe $2i$ et D le point d'affixe $1 - i$. Alors,
$$\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \arg\left(\frac{z-2i}{z-(1-i)}\right) = (\overrightarrow{MD}, \overleftarrow{MC}) \quad [2\pi].$$
Ainsi,
$$\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{MD}, \overleftarrow{MC}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$
L'ensemble recherché est donc l'ensemble des points M tel que le triangle MBC soit rectangle en M (sauf les points C et D). Autrement dit, il s'agit du cercle de diamètre $[CD]$ privé de C et D.

2. On a $3 + iz = i(-3i + z)$ et $3 - iz = -i(3i + z)$ et donc l'équation est équivalente à
$$|z - 3i| = |z - (-3i)|.$$
Autrement dit, le point M d'affixe z est à égale distance du point A d'affixe $3i$ et du point B d'affixe $-3i$. Le point M est donc sur la médiatrice de $[AB]$ c'est-à-dire sur l'axe des abscisses.

Exercice 5. Déterminer tous les couples (n, p) d'entiers naturels non nuls tels que $n^p = p^n$ et $n \neq p$.

Solution de l'exercice 5. Le point de départ est de remarquer que
$$n^p = p^n \quad \Leftrightarrow \quad p\ln(n) = n\ln(p) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(p)}{p}.$$
Ceci nous amène à étudier la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Cette fonction est

dérivable sur son domaine de définition, de dérivée

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

La fonction est donc strictement croissante sur $[1, e]$, et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Si les entiers naturels (n, p) vérifient $f(n) = f(p)$, l'un de ces deux entiers, disons n, doit être dans $[1, e]$, et l'autre doit être dans $[e, +\infty[$. Or, dans $[1, e]$, il n'y a que deux entiers : $n = 1$ et $n = 2$. Pour $n = 1$, $f(1) = 0$, et la valeur nulle n'est pas prise par la fonction f sur $[e, +\infty[$. Pour $n = 2$, on a $f(2) = \frac{\ln(2)}{2} = f(4)$. La seule solution pour cette équation est donc $2^4 = 4^2$.