Corrigé - Colle 9 (Sujet 2)

MPSI2
Année 2021-2022

30 novembre 2021

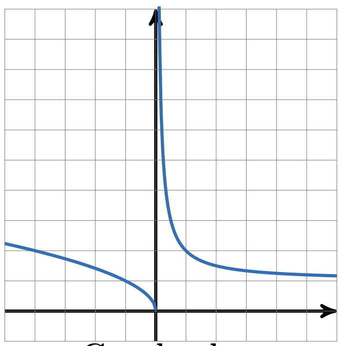
Question de cours . Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1. 1. Représenter graphiquement la fonction suivante sur son domaine de définition :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

2. Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes concernées :
   (a) Donner $g(]0, 2])$ et $g([1, +\infty[)$.
   (b) $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ est-elle surjective ? injective ? Déterminer deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset [0, +\infty[$ tels que $g : I \to J$ soit bijective.

Solution de l'exercice 1. 1. On a



Graphe de g

2. (a) $g(]0, 2]) = [2, +\infty[$ et $g([1, +\infty[) =]1, 2]$.
   (b) g est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$. En effet, si $y \in [0, +\infty[$ alors $g(-y^2) = \sqrt{-(-y^2)} = \sqrt{y^2} = y$ car $y \geqslant 0$. En revanche, g n'est pas injective, par exemple car $g(-4) = 2 = g(1)$. g est, par exemple, bijective de $]0, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également A et B deux parties de F.

1. Démontrer que $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est-elle vraie ?

2. Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Démontrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Solution de l'exercice 2.
1. Prenons $x \in f^{-1}(A)$. Alors $f(x) \in A$ et donc $f(x) \in B$, et donc $x \in f^{-1}(B)$, ce qui prouve l'inclusion $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons $E = \{1\}$, $F = \{1, 2\}$, $f : E \to F$ définie par $f(1) = 1$, $A = \{2\}$ et $B = \{1\}$. Alors $f^{-1}(A) = \emptyset \subset f^{-1}(B) = \{1\}$. Et pourtant, A n'est pas inclus dans B.
2. On a $A \cap B \subset A$, et donc $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A)$. De même, $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(B)$, et donc $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Alors on a à la fois $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, ce qui entraîne $f(x) \in A \cap B$. Ainsi, $x \in f^{-1}(A \cap B)$, et donc $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.
3. On a $A \subset A \cup B$ et donc $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$. De même, $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$ et donc $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.
   Réciproquement, si $x \in f^{-1}(A \cup B)$, alors $f(x) \in A \cup B$. Ainsi, ou bien $f(x) \in A$, ou bien $f(x) \in B$. Mais si $f(x) \in A$, on a $x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et de même, si $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Dans tous les cas, on a prouvé que $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et donc l'inclusion $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 3. On considère $A = \left\{ \frac{n}{mn+1},\ (m,n) \in \mathbb{N}^\star \right\}$. A est-elle majorée, minorée ? Déterminer, s'il y a lieu, la borne inférieure et la borne supérieure et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

Solution de l'exercice 3. On a, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^\star$,

$$0 \leqslant \frac{n}{nm+1} \leqslant \frac{n}{nm} \leqslant \frac{1}{m} \leqslant 1.$$

A est donc minorée par 0 et majorée par 1. Montrons que $\inf(A) = 0$. Si $c > 0$ est un minorant de A, alors pour tout couple $(m, n) \in (\mathbb{N}^\star)2$, on a

$$c \leqslant \frac{n}{nm+1}.$$

Prenons $n = 1$, on obtient

$$c \leqslant \frac{1}{m+1} \quad \Leftrightarrow \quad m \leqslant \frac{1}{c} - 1.$$

Comme ceci doit être vrai pour tout entier $m \geqslant 1$, c'est une contradiction car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Ainsi, 0 est le plus grand des minorants de A, et $\inf(A) = 0$. Démontrons de même que $1 = \sup(A)$. Si $d < 1$ est un majorant de A, alors pour tout couple $(m, n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, on a

$$d \geqslant \frac{n}{nm+1}.$$

Pour $m = 1$, on obtient

$$d \geqslant \frac{n}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad d \geqslant n(1-d) \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant \frac{d}{1-d}.$$

Cette inégalité est impossible à réaliser pour tout entier n, et donc $\sup(A) = 1$. De plus, 0 n'est pas un élément de A (c'est trivial), et 1 non plus car on a toujours $nm + 1 > n$ pour $n, m \geqslant 1$.

Exercice 4. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1+ix}{1-ix} \end{array}.$$

1. Montrer que f est bien définie. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1,\ z \neq -1\}$.

Solution de l'exercice 4. 1. f est bien définie car le dénominateur ne s'annule pas. En effet, puisque $x \in \mathbb{R}$, $ix \in i\mathbb{R}$ et donc $1 - ix \neq 0$.
Etudions l'injectivité de f. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors

$$\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1+iy}{1-iy} \quad \Leftrightarrow \quad (1+ix)(1-iy) = (1-ix)(1+iy) \quad \Leftrightarrow \quad 1+ix-iy+xy = 1-ix+iy+xy.$$

On a donc $2i(x - y) = 0$ ce qui impose que $x = y$. f est donc injective.
Etudions à présent la surjectivité de f. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$ alors $1 + ix = 0$ ce qui impose que $x = i$ ce qui est absurde puisque x est réel. f n'est donc pas surjective.

2. On chercher l'ensemble des éléments $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \in \mathbb{R}$. Or,

$$f(x) = a \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + ix = a(1 - ix) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + ix = a - iax.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaire on arrive à $a = 1$ et $ax = -x$ ce qui peut être satisfait seulement si $x = 0$ (puisque $a = 1$). On peut alors vérifier que $f(0) = 1 \in \mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{0\}$.

3. Procédons par double-inclusion.
   - **Sens direct.** Soit $z \in f(\mathbb{R})$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = f(x)$. Autrement dit, $z = \frac{1+ix}{1-ix}$. Montrons à présent que $|z| = 1$ et que $z \neq -1$. On a,

   $$|z| = \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

   De plus, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -1$. Alors,

   $$f(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+ix}{1-ix} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + ix = -1 + ix \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0$$

   ce qui est bien entendu absurde. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq -1$. On a donc montré l'inclusion directe.
   - **Sens réciproque.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq -1$. Pour montrer que $z \in f(\mathbb{R})$ nous

devons trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = z$. Or,

$$f(x) = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+ix}{1-ix} = z \quad \Leftrightarrow \quad 1 + ix = (1 - ix)z \quad \Leftrightarrow \quad x(i + iz) = -1 + z.$$

Puisque $z \neq -1$, on obtient

$$x = \frac{-1+z}{i(1+z)}.$$

Donc, $z \in f(\mathbb{R})$.

On a donc bien montré que $f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1,\ z \neq -1\}$ par double-inclusion.

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On note $E = \{x \in [0,1];\ f(x) \geqslant x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure b.
2. Prouver que $f(b) = b$.

Solution de l'exercice 5.

1. E est une partie non-vide (car elle contient 0), et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure que l'on note b.
2. On va raisonner par l'absurde pour démontrer que $f(b) = b$.
   - **Si** $f(b) < b$**.** Comme b est le plus petit des majorants de E, $f(b)$ ne majore pas E. Il existe donc un élément c de E tel que $f(b) < c \leqslant b$. Mais alors $f(c) \geqslant c > f(b)$ alors que $c \leqslant b$. Ceci contredit que f est croissante.
   - **Si** $f(b) > b$**.** Comme f est croissante, on a $f(f(b)) \leqslant f(b)$, et donc $f(b) \in E$, ce qui est impossible puisque $f(b)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de E.