Corrigé - Colle 7 (Sujet 3)

BCPST1B
Année 2021-2022

16 novembre 2021

Exercice 1. Soit $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$. Exprimer $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}(x)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 1. Montrons par récurrence que la propriété $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$ le résultat provient immédiatement de la définition de f.
- **Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$ fixé. Supposons que le résultat est vrai au rang n, i.e. que $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$. Alors,

  $$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f\left(\frac{x}{nx+1}\right) = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} = \frac{x}{x+(nx+1)} = \frac{x}{(n+1)x+1}.$$

  Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.
- **Conclusion.** On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$.

Exercice 2. Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = x^{-\ln(x)}.$$

Solution de l'exercice 2. On commence par écrire que $f(x) = e^{-(\ln(x))^2}$. Ainsi, on en déduit que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Sa dérivée est

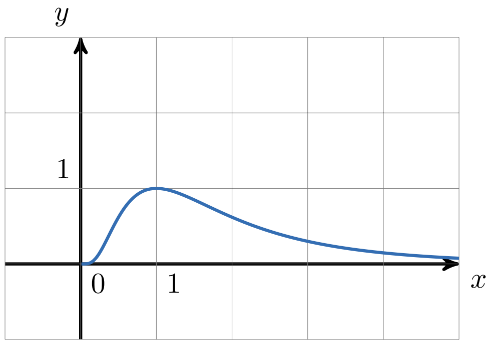
$$f'(x) = -2x(\ln(x))e^{-(\ln(x))^2}.$$

f' est donc positive sur $]0, 1[$ et négative sur $]1, +\infty[$. De plus, quand $x \to 0$, on a successivement $\ln(x) \to -\infty$, $-(\ln(x))^2 \to +\infty$ et par composition $f(x) \to 0$. De la même façon, on a $f(x) \to 0$.

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

La courbe obtenue est :



Exercice 3. On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
2. Déterminer l'image de h, i.e. $f(\mathcal{D}_h)$.
3. L'application h est-elle injective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$? Surjective ? Bijective ?

Solution de l'exercice 3.

1. L'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
2. L'image de h n'est pas si évidente à trouver. Soit $y \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe x tel que $h(x) = y$. Alors,

$$\frac{x^2+1}{2x-1} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = y(2x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2yx + 1 + y = 0.$$

On obtient donc un trinôme en x. Pour déterminer si ce trinôme possède des racines (et donc si y possède un antécédent), on calcule son discriminant. On a

$$\Delta = 4y^2 - 4(1+y) = 4y^2 - 4y - 4.$$

Ce discriminant est à nouveau un trinôme. Pour déterminer son signe, nous devons à présent calculer le discriminant de ce dernier trinôme. On obtient

$$\Delta' = 16 + 64 = 80 > 0.$$

Le trinôme $4y^2 - 4y - 4$ possède donc deux racines réelles distinctes

$$y_1 = \frac{4 - \sqrt{80}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{4 + 4\sqrt{80}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, on a deux situations possibles :

- Si $y \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ alors Δ est strictement négatif (car il est du signe de $a = 4$ sauf entre les racines). Dans ce cas, l'équation $x^2 - 2yx + 1 + y = 0$ ne possède pas de solution et y n'a donc pas d'antécédent.
- Si $y \notin \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ alors $\Delta \geqslant 0$ et dans ce cas, l'équation $x^2 - 2yx + 1 + y = 0$ possède une (si $y = y_1$ ou $y = y_2$ et donc $\Delta = 0$) ou deux solutions et y a donc bien d'antécédent.

En conclusion, on a

$$\mathrm{Im}(h) = \left]-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right[.$$

3. h n'est pas injective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$ car $h(1) = 2 = h(3)$. On pourrait utiliser le fait que l'image de h n'est pas $\mathbb{R}$ pour conclure immédiatement que h n'est pas surjective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$. Néanmoins, pour montrer que l'application h n'est pas surjective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$ il n'est pas utile de connaître son image. En effet, 0 n'a pas d'antécédent par h car $h(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 1 = 0$ qui n'a pas de solution réelle. h n'est pas bijective car non surjective.

Exercice 4. Écrire une fonction prenant en arguments trois réels a, b et c et renvoyant les solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Solution de l'exercice 4. On a

Algorithme 1 : Résolution d'une équation du second degré

Entrées : les coefficients a, b et c

Sorties : Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

```
delta = b ∗ ∗2 − 4 ∗ a ∗ c ;
solutions = [] ;
si delta == 0 alors
    solutions = [−b/(2 ∗ a)]
    sinon
        si delta < 0 alors
            solutions = []
            sinon
                si delta < 0 alors
                    solutions = [(−b − m.sqrt(delta))/(2 ∗ a), (−b + m.sqrt(delta))/(2 ∗ a)]
                fin
            fin
        fin
    fin
fin
retourner solutions
```

Exercice 5. Discuter, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = a.$$

Solution de l'exercice 5. Posons, pour $x \neq \pm 1$,

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - a.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$. De plus, sa dérivée (qui ne dépend pas du signe de la quantité à l'intérieur de la valeur absolue dans le logarithme) est égale, après mise au même dénominateur, à

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1-x)^2(1+x)}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction (le calcul des limites ne pose pas de difficultés particulières ; en particulier, il n'y a pas de formes indéterminées) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-a$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$-a-1$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-a$

Par continuité de f, en utilisant de plus sa stricte monotonie sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, on discute le nombre de solutions suivant la valeur de a :

- Si $a = 0$, l'équation n'admet pas de solutions.
- Si $a > 0$, l'équation admet une unique solution qui est située dans l'intervalle $]1, +\infty[$.
- Si $a \in]-1, 0[$, l'équation admet une unique solution qui est située dans l'intervalle $]-\infty, -1[$.
- Si $a = -1$, l'équation admet deux solutions. L'une de ces solutions est 0, l'autre est située dans l'intervalle $]-\infty, -1[$.
- Si $a < -1$, l'équation admet exactement trois solutions. L'une est située dans l'intervalle $]-\infty, -1[$, la seconde dans l'intervalle $]-1, 0[$ et la troisième dans l'intervalle $]0, 1[$.