# Corrigé - Colle 9 (Sujet 3)

BCPST1B
Année 2021-2022

30 novembre 2021

---

**Exercice 1.** Écrire une fonction prenant en arguments trois réels $a$, $b$ et $c$ et renvoyant la liste des solutions réelles ou complexes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

**Solution de l'exercice 1.** On a

**Algorithme 1 :** Résolution d'une équation du second degré

**Entrées :** les coefficients $a$, $b$ et $c$
**Sorties :** Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

```
delta = b ∗ ∗2 − 4 ∗ a ∗ c ;
solutions = [] ;
si delta == 0 alors
    solutions = [−b/(2 ∗ a)]
    sinon
        si delta < 0 alors
            solutions = []
            sinon
                si delta < 0 alors
                    solutions = [(−b − m.sqrt(delta))/(2 ∗ a), (−b + m.sqrt(delta))/(2 ∗ a)]
                fin
            fin
        fin
    fin
fin
retourner solutions
```

**Exercice 2.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}\,dx$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.
3. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{1+x}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_1^e \sin(\ln(x))\,dx$.

**Solution de l'exercice 2.** 1. On remarque qu'en posant $u(x) = x^2 + 6\,x$, on a $u'(x) = 2(x+3)$, de sorte que $g(x) = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u^{\frac{1}{2}}(x)}$. On a alors

$$g(x) = \frac{1}{2}\,u'(x)\,u^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{d}{dx}\left(u^{\frac{1}{2}}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left((x^2+6\,x)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Donc,

$$\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}\,dx = \left[(x^2+6x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{7}.$$

2. On a

$$i(x) = \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{d}{dx}\left(x - \ln(e^x+1)\right).$$

Donc,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = [x-\ln(e^x+1)]_0^1 = 1 - \ln(e+1) + \ln(2).$$

3. On fait l'i.p.p. suivante, en remarquant que $\sqrt{1+x} = w'(x)\,\sqrt{w(x)}$, où $w(x) = 1+x$ :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\,\sqrt{1+x}\,dx &= \int_1^2 u(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x) = x\,, \text{ donc } u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{2}{3}\,(1+x)^{\frac{3}{2}}\,, \text{ donc } v'(x) = \sqrt{1+x} \end{cases} \\
&= \left[\frac{2}{3}\,x\,(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2 (1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \frac{4}{3}3^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}\right]_1^2 = \frac{4}{3}3^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}3^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{15}2^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

4. L'astuce consiste ici à faire deux i.p.p. successives afin de faire apparaître $-\int h(x)\,dx$ dans la deuxième i.p.p.

$$\begin{aligned}
\int_1^e \sin(\ln|x|)\,dx &= \int_1^e u(x)v'(x)\,dx \qquad \text{avec } u(x) = \sin(\ln|x|), v(x) = x \\
&= u(x)v(x) - \int_1^e u'(x)v(x) \\
&= [x\sin(\ln|x|)]_1^e - \int_1^e x\cos(\ln|x|)\,\frac{1}{x}\,dx \\
&= e\sin(1) - \int_1^e \cos(\ln|x|)\,dx.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_1^e \cos(\ln|x|)\,dx &= \int_1^e u(x)v'(x)\,dx \qquad \text{avec } u(x) = \cos(\ln|x|), v(x) = x \\
&= u(x)v(x) - \int_1^e u'(x)v(x)\,dx \\
&= [\cos(\ln|x|)]_1^e - \int_1^e x(-\sin(\ln|x|))\,\frac{1}{x}\,dx = \cos(1) - 1 + \int_1^e \sin(\ln|x|)\,dx
\end{aligned}$$

et donc
$$\int_1^e \sin(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{2}(e\sin(1) - \cos(1) + 1).$$

**Exercice 3.** Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :
$$|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

**Solution de l'exercice 3.** Supposons d'abord que $|z| = 1$. Alors $z$ s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On peut alors écrire :
$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

qui est bien un élément de $i\mathbb{R}$ (on note que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$).
Réciproquement, supposons que $\frac{1+z}{1-z} = ia$, avec $a$ un réel alors,
$$\frac{1+z}{1-z} = ia \quad \Leftrightarrow \quad 1+z = ia(1-z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-1+ia}{1+ia}.$$

Ainsi,
$$|z| = \left|\frac{-1+ia}{1+ia}\right| = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$$

ce qui prouve la réciproque.

**Exercice 4.** Calculer
$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx.$$

**Solution de l'exercice 4.** On procède au changement de variable $t = \sqrt{2x+1}$. Alors, $dt = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$, $x = \frac{1}{2}(t^2-1)$ et donc
$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{\frac{1}{2}(t^2-1)}\,dt = 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t^2-1}\,dt = 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\,dt.$$

Finalement,
$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,dt = [\ln(|t-1|) - \ln(|t+1|)]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}$$

et donc
$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx = \ln(\sqrt{5}-1) - \ln(\sqrt{5}+1) - \ln(\sqrt{3}-1) + \ln(\sqrt{3}+1) = \ln\left(\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1)}\right).$$

**Exercice 5.** Résoudre l'équation
$$z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}.$$

**Solution de l'exercice 5.** On a

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2} = \frac{2^4\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}2\right)^4}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2^3\frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{i\frac{2\pi}{4}}} = 2^3\frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2^3 e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Ainsi,

$$z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2} = 2^3 e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad z = 2^{\frac{3}{5}} e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{5}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$