Corrigé - Colle 8 (Sujet 2)

MPSI2
Année 2021-2022

23 novembre 2021

Question de cours . Démontrer que la composée de deux injections est une injection.

Exercice 1. On considère $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 4t+3) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

Solution de l'exercice 1. On procède par double inclusion. Le plus simple est de prouver que $B \subset A$. En effet, soit $(x, y) \in B$, alors il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$. Ainsi,

$$4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1.$$

On a donc bien $(x, y) \in A$.
Réciproquement, prenons $(x, y) \in A$ et prouvons que $(x, y) \in B$. C'est plus difficile car il faut construire un réel t. On procède par analyse-synthèse. Si un tel t existe, alors nécessairement on doit avoir $t = x - 1$. Posons donc $t = x - 1$. Alors,

$$y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3.$$

On a alors bien (synthèse)

$$(x, y) = (t + 1, 4t + 3) \in B.$$

Ceci achève de montre que $A \subset B$ et on a donc bien montré par double-inclusion que $A = B$.

Exercice 2. Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(n) = 2n$ et

$$g : n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. La fonction f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier.
3. La fonction g est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier.

Solution de l'exercice 2. 1. On a

$$(g \circ f)(n) = g(2n) = \frac{2n}{2} = n$$

car $2n$ est pair. De plus, si n est pair,

$$(f \circ g)(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) = 2 \times \frac{n}{2} = n$$

et si n est impair,

$$(f \circ g)(n) = f(0) = 0.$$

2. f n'est pas surjective, car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises par f. En revanche, f est injective car si $f(n) = f(m)$, on a $2n = 2m$ et donc $n = m$. Puisqu'elle n'est pas surjective, f n'est donc pas bijective.
3. g n'est pas injective, car $g(1) = g(3) = 0$ alors que $1 \neq 3$. En revanche, g est surjective. Prenons en effet m n'importe quel entier naturel. Alors, $2m$ est pair et $g(2m) = \frac{2m}{2} = m$. Puisqu'elle n'est pas injective, g n'est donc pas bijective.

Exercice 3. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. D peut-il s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$?

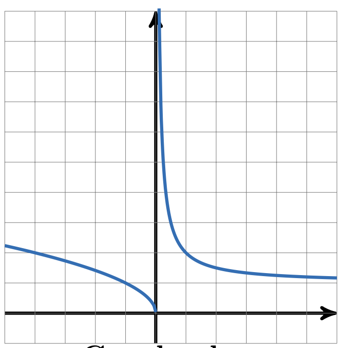
Solution de l'exercice 3. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $E, F \subset \mathbb{R}$ tels que $D = E \times F$. Alors le point $(1,0) \in D$ et donc $1 \in E$. De même, $(0,1) \in D$ et donc $1 \in F$. On en déduit que $(1,1) \in E \times F = D$ ce qui n'est pas le cas. D n'est donc pas le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. 1. Représenter graphiquement la fonction suivante sur son domaine de définition :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

2. Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes concernées :
   (a) Donner $g(]0,2])$ et $g([1,+\infty[)$.
   (b) $g : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ est-elle surjective ? injective ? Déterminer deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset [0,+\infty[$ tels que $g : I \to J$ soit bijective.

Solution de l'exercice 4. 1. On a



Graphe de g

2. (a) $g(]0,2]) = [2,+\infty[$ et $g([1,+\infty[) =]1,2]$.

(b) g est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[0,+\infty[$. En effet, si $y \in [0,+\infty[$ alors $g(-y^2) = \sqrt{-(-y^2)} = \sqrt{y^2} = y$ car $y \geqslant 0$. En revanche, g n'est pas injective, par exemple car $g(-4) = 2 = g(1)$. g est, par exemple, bijective de $]0,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$.

Exercice 5. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1+ix}{1-ix} \end{array}.$$

1. Montrer que f est bien définie. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1,\ z \neq -1\}$.

Solution de l'exercice 5. 1. f est bien définie car le dénominateur ne s'annule pas. En effet, puisque $x \in \mathbb{R}$, $ix \in i\mathbb{R}$ et donc $1 - ix \neq 0$.

Etudions l'injectivité de f. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors

$$\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1+iy}{1-iy} \quad \Leftrightarrow \quad (1+ix)(1-iy) = (1-ix)(1+iy) \quad \Leftrightarrow \quad 1+ix-iy+xy = 1-ix+iy+xy.$$

On a donc $2i(x-y) = 0$ ce qui impose que $x = y$. f est donc injective.

Etudions à présent la surjectivité de f. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$ alors $1 + ix = 0$ ce qui impose que $x = i$ ce qui est absurde puisque x est réel. f n'est donc pas surjective.

2. On chercher l'ensemble des éléments $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \in \mathbb{R}$. Or,

$$f(x) = a \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + ix = a(1 - ix) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + ix = a - iax.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaire on arrive à $a = 1$ et $ax = -x$ ce qui peut être satisfait seulement si $x = 0$ (puisque $a = 1$). On peut alors vérifier que $f(0) = 1 \in \mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{0\}$.

3. Procédons par double-inclusion.
   - **Sens direct.** Soit $z \in f(\mathbb{R})$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = f(x)$. Autrement dit, $z = \frac{1+ix}{1-ix}$. Montrons à présent que $|z| = 1$ et que $z \neq -1$. On a,

   $$|z| = \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

   De plus, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -1$. Alors,

   $$f(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+ix}{1-ix} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + ix = -1 + ix \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0$$

   ce qui est bien entendu absurde. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq -1$. On a donc montré l'inclusion directe.
   - **Sens réciproque.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq -1$. Pour montrer que $z \in f(\mathbb{R})$ nous

devons trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = z$. Or,

$$f(x) = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+ix}{1-ix} = z \quad \Leftrightarrow \quad 1 + ix = (1-ix)z \quad \Leftrightarrow \quad x(i+iz) = -1+z.$$

Puisque $z \neq -1$, on obtient

$$x = \frac{-1+z}{i(1+z)}.$$

Donc, $z \in f(\mathbb{R})$.

On a donc bien montré que $f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1,\ z \neq -1\}$ par double-inclusion.