Corrigé - Colle 3 (Sujet 3)

BCPST1B

Année 2021-2022

5 octobre septembre 2021

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$x^4 - 3x^2 + 1 < 0.$$

Solution de l'exercice 1. $x^4 - 3x^2 + 1$ n'est pas un trinôme en x mais en x^2 (on parle de trinôme bicarré). Posons donc $X = x^2$. Alors,

$$x^4 - 3x^2 + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - 3X + 1 < 0.$$

Or, nous avons montré à la question précédente que

$$X^2 - 3X + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \in \left] \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right[.$$

Ainsi, puisque $X = x^2$, on en déduit que $|x| = \sqrt{X}$ et donc que

$$x^4 - 3x^2 + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \in \left] \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right[$$

et finalement

$$x^4 - 3x^2 + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left] -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \right[\cup \left] \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right[.$$

Exercice 2.

1. Démontrer que

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} - x.$$

2. En déduire que si $x > 1000$ alors,

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} < 0,0005.$$

Solution de l'exercice 2. 1. En multipliant des deux côtés de l'égalité par $x+\sqrt{x^2+1}$, qui est différent de 0 car $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$, on obtient

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}-x \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (\sqrt{x^2+1}-x)(x+\sqrt{x^2+1}) = x^2+1-x^2 = 1$$

et cette dernière égalité étant vraie, le résultat est ainsi démontré.

2. Si $x > 1000$ alors,

$$\sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{1000+\sqrt{1000+1}} < \frac{1}{1000+\sqrt{1000^2}} = \frac{1}{2000} = 0,0005.$$

Exercice 3. Résoudre

$$\sqrt{3}\cos(\theta)-\sin(\theta) = \sqrt{2}.$$

sous la forme d'un sinus.

Solution de l'exercice 3. On commence par déterminer l'amplitude du signal :

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

On note alors que,

$$\sqrt{3}\cos(\theta)-\sin(\theta) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta)-\frac{1}{2}\sin(\theta)\right) = \sqrt{2}.$$

On arrive donc à

$$\sqrt{3}\cos(\theta)-\sin(\theta) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\theta)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

puis à

$$\sqrt{3}\cos(\theta)-\sin(\theta) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Finalement,

$$\theta+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

d'où

$$\theta = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2k\pi = \frac{\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 4. On considère la fonction $f\colon x \mapsto x-E(x)$ où E désigne la fonction partie entière.

1. Rappeler la définition de E.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a l'égalité suivante :

$$E(x+1) = E(x)+1\ .$$

En déduire que f est périodique.

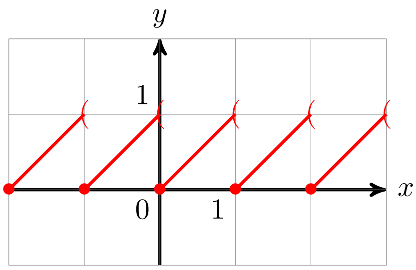
3. Tracer la partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans la bande de plan d'inéquations
$$-2 \leqslant x < 3 \ .$$

Solution de l'exercice 4. 1. $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

2. On a
$$E(x+1) = \max(n \in \mathbb{Z},\, n \leqslant x+1) = \max(n \in \mathbb{Z},\, n-1 \leqslant x) = \max(m \in \mathbb{Z},\, m \leqslant x) + 1.$$
Ainsi, on a démontré que
$$E(x+1) = E(x) + 1 \ .$$

3. On note que
$$f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = (x+1) - (E(x)+1) = x - E(x) = f(x)$$
donc f est 1-périodique.

4. On a



Exercice 5. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$. Démontrer que g est positive ou nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Solution de l'exercice 5. On va étudier g. Pour cela, il faut aller jusqu'à la dérivée seconde ! En effet, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, avec $g'(x) = (x-1)e^x + 1$. Il ne semble pas facile d'étudier directement le signe de g'. On va donc calculer la dérivée de g', qui est $g''(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}^+$. g'' est positive sur $\mathbb{R}^+$, donc g' est croissante sur cet intervalle. De plus, $g'(0) = 0$ donc g' est positive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0) = 0$, g est positive sur $\mathbb{R}^+$.