

Colle 4 - Nathan DUROT

MPSI2

Année 2021-2022

12 octobre 2021

Question de cours . Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$|x - 2| - 2|x + 1| - 3|x| = 0.$$

Solution de l'exercice 1. On procède par disjonction de cas :

- **Si $x < -1$:** Alors $|x - 2| = -(x - 2)$, $|x + 1| = -(x + 1)$ et $|x| = -x$ et donc

$$|x - 2| - 2|x + 1| - 3|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2 + 2(x + 1) + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

mais -1 ne satisfait pas la condition $x < -1$. Nous ne tenons donc pas compte de cette solution.

- **Si $-1 \leq x \leq 0$:** Alors $|x - 2| = -(x - 2)$, $|x + 1| = x + 1$ et $|x| = -x$ et donc

$$|x - 2| - 2|x + 1| - 3|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2 - 2(x + 1) + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

ce qui est vrai pour tout $x \in [-1, 0]$.

- **Si $0 < x \leq 2$:** Alors $|x - 2| = -(x - 2)$, $|x + 1| = x + 1$ et $|x| = x$ et donc

$$|x - 2| - 2|x + 1| - 3|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2 - 2(x + 1) - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6x = 0$$

mais -1 ne satisfait pas la condition $0 < x \leq 2$. Nous ne tenons donc pas compte de cette solution.

- **Si $x > 2$:** Alors $|x - 2| = x - 2$, $|x + 1| = x + 1$ et $|x| = x$ et donc

$$|x - 2| - 2|x + 1| - 3|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 - 2(x + 1) - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

mais -1 ne satisfait pas la condition $x > 2$. Nous ne tenons donc pas compte de cette solution.

Finalement, nous avons montré que les solutions de l'équation $|x - 2| - 2|x + 1| - 3|x| = 0$ sont les x appartenant à l'intervalle $[-1, 0]$.

Exercice 2. Trouver toutes les solutions réelles de l'équation suivante :

$$2 \ln(x) + \ln(2x - 1) = \ln(2x + 8) + 2 \ln(x - 1) .$$

Solution de l'exercice 2. On commence par remarquer que cette égalité n'est bien définie que pour $x > 1$ car \ln n'est bien définie que sur \mathbb{R}_+^* . De plus,

$$2 \ln x + \ln(2x - 1) = \ln(2x + 8) + 2 \ln(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) + \ln(2x - 1) = \ln(2x + 8) + \ln((x - 1)^2)$$

et, toujours en utilisant les propriétés de la fonction \ln ,

$$2 \ln x + \ln(2x - 1) = \ln(2x + 8) + 2 \ln(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2(2x - 1)) = \ln((2x + 8)(x - 1)^2).$$

Ainsi, après calcul on arrive à l'inéquation

$$\ln(2x^3 - x^2) = \ln(2x^3 + 4x^2 - 14x + 8).$$

On applique alors la fonction exponentielle et on obtient

$$2x^3 - x^2 = 2x^3 + 4x^2 - 14x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 - 14x + 8 = 0.$$

Or, le discriminant de ce trinôme est donné par $\Delta = 196 - 160 = 36$ et les racines de ce trinôme sont donc

$$x_1 = \frac{14 - \sqrt{36}}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{14 + \sqrt{36}}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Or, $x_1 \leq 1$ donc la seule solution de l'équation étudiée est $x = 2$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$$

où l'on rappelle que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Étudier la parité de f .
2. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$ et en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer sa dérivée.
4. Justifier que pour tout $y \geq 0$, $\tanh(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f puis tracer la courbe représentative de f .

Solution de l'exercice 3. 1. f est paire car c'est le produit de deux fonctions impaires. On peut donc se restreindre à étudier f sur $]0, +\infty[$.

2. On pose $y = \frac{1}{x}$. Alors

$$f(x) = \frac{\sinh(y)}{y} = \frac{\sinh(y) - \sinh(0)}{y - 0}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, y tend vers 0, et cette quantité tend vers la dérivée de \sinh en 0, c'est-à-dire $\cosh(0) = 1$.

La limite en $-\infty$ s'obtient par parité. Enfin, en 0^+ , on a toujours en posant $y = \frac{1}{x}$,

$$f(x) = \frac{\sinh(y)}{y} = \frac{e^y}{2y} - \frac{e^{-y}}{2y}.$$

Par croissance comparée, $\frac{e^y}{y} \rightarrow +\infty$ lorsque $y \rightarrow +\infty$, alors que $\frac{e^{-y}}{2y} \rightarrow 0$ (ce n'est pas une forme indéterminée). On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

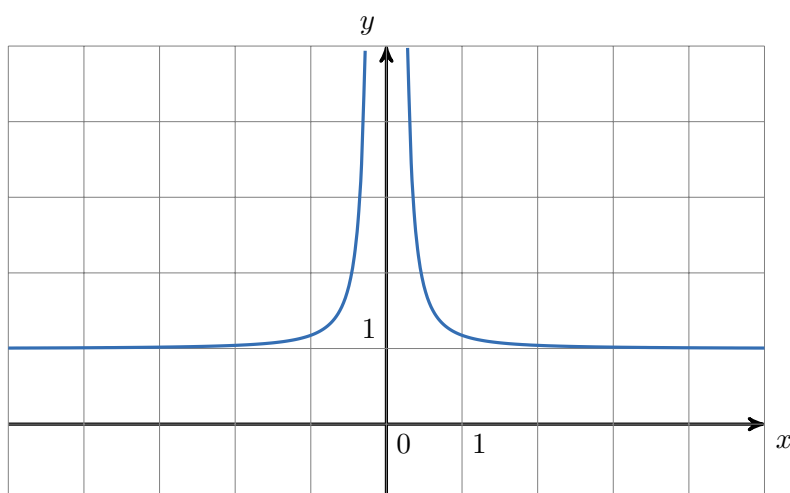
3. f est dérivable sur \mathbb{R}^* car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et $y \mapsto \sinh(y)$ est dérivable sur \mathbb{R} . La dérivée, obtenue par la formule de dérivation d'une composée, vaut :

$$f'(x) = \sinh(1/x) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \cosh\left(\frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\frac{1}{x}\right) \left(\tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right).$$

4. On commence par étudier la fonction auxiliaire $g(y) = \tanh(y) - y$. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$, et sa dérivée vaut

$$g'(y) = (1 - \tanh^2(y)) - 1 = -\tanh^2(y) \leq 0.$$

g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$, et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que $g(y) \leq 0$ pour tout $y \geq 0$. On en déduit que f' est négative sur $]0, +\infty[$, et donc que f est décroissante sur cet intervalle. On obtient donc :



Exercice 4. Montrer que l'équation

$$\ln(1 + |x|) = \frac{1}{x - 1}$$

possède exactement une solution α dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $1 < \alpha < 2$.

Solution de l'exercice 4. Posons, pour $x \neq 1$,

$$f(x) = \ln(1 + |x|) + \frac{1}{1-x}.$$

L'équation initiale est équivalente à l'équation $f(x) = 0$. Remarquons que si $x < 1$, alors $f(x) > 0$ et donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutions dans l'intervalle $] -\infty, 1[$. Nous allons ensuite étudier la fonction f sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Elle y est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1-x)^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]1, +\infty[$. De plus, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(2) = \ln(3) - 1 > 0.$$

f , qui est de plus continue, réalise une bijection de l'intervalle $]1, +\infty[$ sur \mathbb{R} . L'équation admet donc une unique solution α dans $]1, +\infty[$. Le calcul de $f(2)$ et de la limite de f en 1 permettent de conclure que $1 < \alpha < 2$.

Exercice 5. Déterminer tous les couples (n, p) d'entiers naturels non nuls tels que $n^p = p^n$ et $n \neq p$.

Solution de l'exercice 5. Le point de départ est de remarquer que

$$n^p = p^n \quad \Leftrightarrow \quad p \ln(n) = n \ln(p) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(p)}{p}.$$

Ceci nous amène à étudier la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Cette fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$			$\frac{1}{e}$	0

La fonction est donc strictement croissante sur $[1, e]$, et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Si les entiers naturels (n, p) vérifient $f(n) = f(p)$, l'un de ces deux entiers, disons n , doit être dans $[1, e]$, et l'autre doit être dans $[e, +\infty[$. Or, dans $[1, e]$, il n'y a que deux entiers : $n = 1$ et $n = 2$. Pour

$n = 1$, $f(1) = 0$, et la valeur nulle n'est pas prise par la fonction f sur $[e, +\infty[$. Pour $n = 2$, on a $f(2) = \frac{\ln(2)}{2} = f(4)$. La seule solution pour cette équation est donc $2^4 = 4^2$.