

Colle 6 - Rozenn PENARD

MPSI2

Année 2021-2022

9 novembre 2021

Question de cours . Enoncer et démontrer la formule de changement de variable.

Exercice 1. Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

$$h(x) = \frac{x+2}{x+1} \quad \text{et} \quad i(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 2. Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 \cos(x) \quad ; \quad g(x) = \ln(x^2 - 1) \quad \text{et} \quad h(x) = \sin(x) \sin(3x).$$

Exercice 3. Calculer

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$$

Exercice 4. Soient $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^n (t - \beta)^n dt.$$

Exercice 5. Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
2. Montrer que la suite (I_n) est strictement décroissante.
3. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Montrer que

$$I_n \leq \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)^n + \varepsilon.$$

(b) En déduire que (I_n) converge vers 0.