Corrigé - Colle 6 (Sujet 1)

BCPST1B

Année 2021-2022

9 novembre 2021

Exercice 1. Simplifier l'expression suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) .$$

Solution de l'exercice 1. C'est une somme télescopique. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(k+1\right) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) .$$

Exercice 2. Soient

$$f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} - x \end{array} \quad \text{et} \quad g \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1-x^2}{2x} \end{array} .$$

1. Montrer que tout réel x, $f(x) > 0$.
2. Montrer que la composée $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout $x > 0$.
3. De même, montrer que la composée $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Que peut-on en conclure ?

Solution de l'exercice 2.

1. On a

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+1} > x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+1 > x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 0$$

ce qui est bien sûr vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $f \circ g$ est bien définie lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ puisque f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et donc sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2 + 1} - \frac{1-x^2}{2x} = \sqrt{\frac{1-2x^2+x^4}{4x^2} + 1} - \frac{1-x^2}{2x}.$$

Après calcul, on arrive à

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{4x^2}} - \frac{1-x^2}{2x} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{4x^2}} - \frac{1-x^2}{2x}.$$

Or, $\sqrt{(1+x^2)^2} = |(1+x^2)^2| = (1+x^2)^2$ car $(1+x^2)^2 \geqslant 0$ et de plus, puisque $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\sqrt{4x^2} = |2x| = 2x$. Ainsi, on a finalement,

$$(f \circ g)(x) = \frac{1+x^2}{2x} - \frac{1-x^2}{2x} = x.$$

3. La composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ car f est définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et g est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et donc sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1-(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{1-(x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2)}{2(\sqrt{x^2+1}-x)}.$$

Après calcul, on arrive à

$$(g \circ f)(x) = \frac{1-x^2-1+2x\sqrt{x^2+1}-x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{2x(\sqrt{x^2+1}-x)}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = x.$$

4. On a montré que

$$\begin{array}{rcccc} f \circ g & : & \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ & & x & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccc} g \circ f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \end{array}.$$

Autrement dit,

$$f \circ g = Id_{\mathbb{R}_+^\star} \qquad \text{et} \qquad g \circ f = Id_{\mathbb{R}}.$$

On peut en déduire que l'on a en réalité montré que f et g sont des applications réciproques l'une de l'autre.

Exercice 3. 1. Soit $f : E \to F$ et $A \subset F$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Trouver un contre-exemple pour l'autre inclusion. Que peut-on dire si f est de plus injective ?

2. Soit $f : E \to F$ et $A \subset F$. Montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Trouver un contre-exemple pour l'autre inclusion. Que peut-on dire si f est de plus surjective ?

Solution de l'exercice 3. 1. (a) Soit $x \in A$. Alors, $x \in f^{-1}(f(A))$ équivaut à $f(x) \in f(A)$. Or $f(x) \in f(A)$ puisque $x \in A$ donc on a bien $A \subset f^{-1}(f(A)$.

(b) Donnons un contre-exemple lorsque f n'est pas injective. On peut choisir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$. Pour $A = [0, 2\pi]$ on a $f(A) = [-1, 1]$ et $f^{-1}f(A)) = \mathbb{R}$. Donc $f^{-1}(f(A))$ n'est pas inclu dans A.

(c) Supposons que f est injective. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors, $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f, on a donc $x = x'$. D'où $x \in A$ et $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Ainsi, lorsque f est injective on a $f^{-1}(f(A)) = A$.

2. (a) Si $y \in f(f^{-1}(A))$ alors il existe $x \in f^{-1}(A)$ tel que $y = f(x)$. $x \in f^{-1}(A)$ donc $f(x) \in A$ d'où $y \in A$ donc on a bien $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

   (b) Donnons un contre-exemple lorsque f n'est pas surjective. On peut choisir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$. Pour $A = [1, +\infty[$ on a $f^{-1}(A) = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $f(f^{-1}(A)) = \{1\}$. Donc A n'est pas inclu dans $f(f^{-1}(A))$.

   (c) Supposons que f est surjective. Soit $y \in A$. Alors, comme $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ par surjectivité de f. Pour montrer que $y \in f(f^{-1}(A))$ il reste à prouver que $x \in f^{-1}(A)$ c'est-à-dire que $f(x) \in A$. Or $f(x) = y \in A$ donc on a bien $A \subset f(f^{-1}(A))$. Ainsi, lorsque f est surjective on a donc $f(f^{-1}(A)) = A$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k \quad , \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 \ .$$

On admet que

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad c_n = a_n^2.$$

Calculer

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant i \leqslant n} ij \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j).$$

Solution de l'exercice 4. 1. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i \leqslant i \leqslant n} ij &= \sum_{j=1}^{n} j \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j a_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^3 + j^2 \\
&= \frac{b_n + c_n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.
\end{aligned}$$

2. Posons, pour i fixé, $S_i = \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$ et commençons par calculer la valeur de S_i. Alors, on a

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i = \left(n + \frac{1}{2} \right) i - \frac{i^2}{2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n} S_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(n+\frac{1}{2}\right)i - \frac{i^2}{2} \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$