Corrigé - Colle 8 (Sujet 1)

MPSI2
Année 2021-2022

23 novembre 2021

Question de cours . Démontrer que pour trois parties A, B et C d'un ensemble E,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 1. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer l'image de f, i.e. $f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'application f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$?

Solution de l'exercice 1.

1. L'ensemble de définition de f est l'ensemble des points x tels que $x^2 + x - 2 \geqslant 0$. Or, $x^2 + x - 2$ est un trinôme dont le discriminant est $\Delta = 9$ et dont les racines sont donc $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. De plus, $x^2 + x - 2$ est positif sauf entre les racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.
2. L'image de f est donnée par $f(\mathcal{D}_f) = [0, +\infty[$ (car le trinôme s'annule en -2 et en 1, $x^2+x-2 \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et la fonction racine est continue sur $\mathbb{R}^+$).
3. Non, l'application f n'est pas injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$. En effet, $f(-2) = f(1) = 0$.

Exercice 2. Soient

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} - x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1-x^2}{2x} \end{array}.$$

1. Montrer que tout réel x, $f(x) > 0$.
2. Montrer que la composée $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout $x > 0$.
3. De même, montrer que la composée $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Que peut-on en conclure ?

Solution de l'exercice 2.

1. On a

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+1} > x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 > x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 0$$

ce qui est bien sûr vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $f \circ g$ est bien définie lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ puisque f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et donc sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2 + 1} - \frac{1-x^2}{2x} = \sqrt{\frac{1-2x^2+x^4}{4x^2} + 1} - \frac{1-x^2}{2x}.$$

Après calcul, on arrive à

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{4x^2}} - \frac{1-x^2}{2x} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{4x^2}} - \frac{1-x^2}{2x}.$$

Or, $\sqrt{(1+x^2)^2} = |(1+x^2)^2| = (1+x^2)^2$ car $(1+x^2)^2 \geqslant 0$ et de plus, puisque $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\sqrt{4x^2} = |2x| = 2x$. Ainsi, on a finalement,

$$(f \circ g)(x) = \frac{1+x^2}{2x} - \frac{1-x^2}{2x} = x.$$

3. La composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ car f est définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et g est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et donc sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1-(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{1-(x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2)}{2(\sqrt{x^2+1}-x)}.$$

Après calcul, on arrive à

$$(g \circ f)(x) = \frac{1-x^2-1+2x\sqrt{x^2+1}-x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{2x(\sqrt{x^2+1}-x)}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = x.$$

4. On a montré que

$$\begin{array}{rcccc} f \circ g & : & \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ & & x & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccc} g \circ f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \end{array}.$$

Autrement dit,

$$f \circ g = Id_{\mathbb{R}_+^\star} \qquad \text{et} \qquad g \circ f = Id_{\mathbb{R}}.$$

On peut en déduire que l'on a en réalité montré que f et g sont des applications réciproques l'une de l'autre.

Exercice 3. On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
2. Déterminer $\text{Im}(h) = h(\mathcal{D}_h)$ et montrer que h est bijective de $\mathcal{D}_h$ dans $\text{Im}(h)$.
3. Donner son application réciproque.

Solution de l'exercice 3. 1. $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ car c'est le seul endroit où le dénominateur s'annule (et le numérateur ne s'y annule pas).

2. Si $y \in \mathrm{Im}(h)$, alors il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ tel que $h(x) = y$. Or,

$$h(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+2} = y \quad \Leftrightarrow \quad 2x+1 = y(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad (2-y)x = 2y-1.$$

Ainsi, si $y \neq 2$, $x = \frac{2y-1}{2-y}$ est un antécédent de y. Ceci montre que $\mathbb{R} \setminus \{2\} \subset \mathrm{Im}(h)$. Afin de montrer que c'est une égalité, montrons à présent que 2 n'a pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde qu'il existe x tel que $h(x) = 2$. Alors,

$$h(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+1 = 2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 4$$

ce qui est absurde. On a ainsi montré que $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Montrons à présent que h est bijective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathrm{Im}(h)$. Cela revient à montré que h est injective. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{-2\})^2$ tel que $h(x) = h(y)$. Alors,

$$h(x) = h(y) \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+2} = \frac{2y+1}{y+2} \quad \Leftrightarrow \quad (2x+1)(y+2) = (2y+1)(x+2).$$

Ainsi,

$$h(x) = h(y) \quad \Leftrightarrow \quad 2xy + 4x + y + 2 = 2xy + 4y + x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-y) = 0.$$

On en déduit que $h(x) = h(y)$ si et seulement si $x = y$. h est donc bijective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathrm{Im}(h)$.

3. Nous avons déjà montré que pour tout $y \neq 2$,

$$h(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2y-1}{2-y}.$$

L'application réciproque de h est donc donnée par

$$h^{-1} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ x & \mapsto & \frac{2x-1}{2-x} \end{array}.$$

Exercice 4. Soit $f : E \to F$ et $A \subset F$. Montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Trouver un contre-exemple pour l'autre inclusion. Que peut-on dire si f est de plus surjective ?

Solution de l'exercice 4.

1. Si $y \in f(f^{-1}(A))$ alors il existe $x \in f^{-1}(A)$ tel que $y = f(x)$. $x \in f^{-1}(A)$ donc $f(x) \in A$ d'où $y \in A$ donc on a bien $f(f^{-1}(A)) \subset A$.
2. Donnons un contre-exemple lorsque f n'est pas surjective. On peut choisir $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$. Pour $A = [1, +\infty[$ on a $f^{-1}(A) = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $f(f^{-1}(A)) = \{1\}$. Donc A n'est pas inclu dans $f(f^{-1}(A))$.
3. Supposons que f est surjective. Soit $y \in A$. Alors, comme $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ par surjectivité de f. Pour montrer que $y \in f(f^{-1}(A))$ il reste à prouver que $x \in f^{-1}(A)$ c'est-à-dire que $f(x) \in A$. Or $f(x) = y \in A$ donc on a bien $A \subset f(f^{-1}(A))$. Ainsi, lorsque f est surjective on a donc $f(f^{-1}(A)) = A$.

Exercice 5. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit la droite $\mathcal{D}_m$ par l'équation

$$\mathcal{D}_m \; : \; 12mx - 9y = 3m + 6.$$

Montrer que toutes les droites $\mathcal{D}_m$ sont concourantes en un unique point.

Solution de l'exercice 5. On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse :** Soient $m \neq m'$ deux valeurs du paramètre. Un point appartient aux deux droites $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}_{m'}$ si et seulement il vérifie les deux conditions simultanément. Autrement, dit

$$(x, y) \in \mathcal{D}_m \cap \mathcal{D}_{m'} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 12mx - 9y & = & 3m + 6 \\ 12m'x - 9y & = & 3m' + 6 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 12mx - 9y & = & 3m + 6 \\ 12(m - m')x & = & 3(m - m') \end{array} \right. .$$

  Avec la deuxième ligne on obtient

$$12(m - m')x = 3(m - m') \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

  et en injectant dans la première ligne on arrive à

$$12m\frac{1}{4} - 9y = 3m + 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}.$$

  Ainsi, si (x, y) appartient à toutes les droites $\mathcal{D}_m$ alors $(x, y) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}\right)$.

- **Synthèse.** Vérifions que si $(x, y) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}\right)$ alors ce point appartient à toutes les droites $\mathcal{D}_m$:

$$12mx - 9y = 12m\frac{1}{4} + 9\frac{2}{3} = 3m + 6.$$

  Donc $(x, y) \in \mathcal{D}_m$.

On a donc bien montré que toutes les droites $\mathcal{D}_m$ sont concourantes au point $\left(\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}\right)$.