Corrigé - Colle 8 (Sujet 3)

BCPST1B
Année 2021-2022

23 novembre 2021

Exercice 1. Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = x^{-\ln(x)}.$$

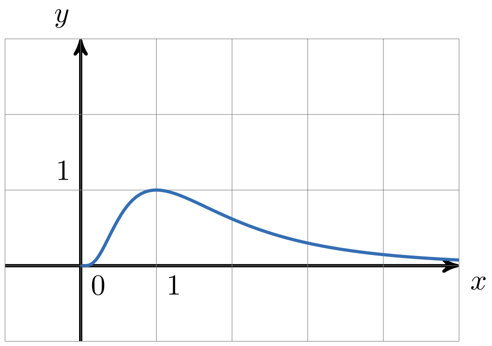
Solution de l'exercice 1. On commence par écrire que $f(x) = e^{-(\ln(x))^2}$. Ainsi, on en déduit que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Sa dérivée est

$$f'(x) = -2x(\ln(x))e^{-(\ln(x))^2}.$$

f' est donc positive sur $]0, 1[$ et négative sur $]1, +\infty[$. De plus, quand $x \to 0$, on a successivement $\ln(x) \to -\infty$, $-(\ln(x))^2 \to +\infty$ et par composition $f(x) \to 0$. De la même façon, on a $f(x) \to 0$. Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

La courbe obtenue est :



Exercice 2. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation
$$\arg(iz) = \frac{\pi}{4} \quad [\pi].$$
2. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation
$$\frac{|z-3+i|}{|z+5-2i|} = 1.$$

Solution de l'exercice 2. 1. On a
$$\arg(iz) = \arg(i) + \arg(z) = \frac{\pi}{2} + arg(z) \quad [2\pi].$$
Ainsi,
$$\arg(iz) = \frac{\pi}{4} \quad [\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = -\frac{\pi}{4} \quad [\pi].$$
L'ensemble recherché est donc la droite d'équation $y = -x$ privé de l'origine du repère.

2. $z = -5 + 2i$ n'est pas solution et l'équation est équivalente à
$$|z-3+i| = |z+5-2i|$$
ou encore à
$$|z-(3-i)| = |z-(-5+2i)|.$$
Autrement dit, le point M d'affixe z est à égale distance du point A d'affixe $3-i$ et du point B d'affixe $-5+2i$. L'ensemble des points recherché est donc la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 3. Écrire une fonction prenant en arguments trois réels a, b et c et renvoyant les solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Solution de l'exercice 3. On a

Algorithme 1 : Résolution d'une équation du second degré

Entrées : les coefficients a, b et c

Sorties : Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

```
delta = b**2 - 4*a*c ;
solutions = [] ;
si delta == 0 alors
    solutions = [-b/(2*a)]
    sinon
        si delta < 0 alors
            solutions = []
            sinon
                si delta < 0 alors
                    solutions = [(-b - m.sqrt(delta))/(2*a), (-b + m.sqrt(delta))/(2*a)]
                fin
            fin
        fin
    fin
fin
retourner solutions
```

Exercice 4. Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 4. Supposons d'abord que $|z| = 1$. Alors z s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On peut alors écrire :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

qui est bien un élément de $i\mathbb{R}$ (on note que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$).

Réciproquement, supposons que $\frac{1+z}{1-z} = ia$, avec a un réel alors,

$$\frac{1+z}{1-z} = ia \quad \Leftrightarrow \quad 1+z = ia(1-z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-1+ia}{1+ia}.$$

Ainsi,

$$|z| = \left|\frac{-1+ia}{1+ia}\right| = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$$

ce qui prouve la réciproque.

Exercice 5. Discuter, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = a.$$

Solution de l'exercice 5. Posons, pour $x \neq \pm 1$,

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - a.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. De plus, sa dérivée (qui ne dépend pas du signe de la quantité à l'intérieur de la valeur absolue dans le logarithme) est égale, après mise au même dénominateur, à

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1-x)^2(1+x)}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction (le calcul des limites ne pose pas de difficultés particulières ; en particulier, il n'y a pas de formes indéterminées) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-a$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-a-1$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-a$

Par continuité de f, en utilisant de plus sa stricte monotonie sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, on discute le nombre de solutions suivant la valeur de a :

- Si $a = 0$, l'équation n'admet pas de solutions.
- Si $a > 0$, l'équation admet une unique solution qui est située dans l'intervalle $]1,+\infty[$.
- Si $a \in]-1,0[$, l'équation admet une unique solution qui est située dans l'intervalle $]-\infty,-1[$.
- Si $a = -1$, l'équation admet deux solutions. L'une de ces solutions est 0, l'autre est située dans l'intervalle $]-\infty,-1[$.
- Si $a < -1$, l'équation admet exactement trois solutions. L'une est située dans l'intervalle $]-\infty,-1[$, la seconde dans l'intervalle $]-1,0[$ et la troisième dans l'intervalle $]0,1[$.