Corrigé - Colle 5 (Sujet 2)

BCPST1B
Année 2021-2022

19 octobre 2021

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On définit ainsi la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. La suite (v_n) est-elle arithmétique, géométrique ?
2. En déduire une expression de (u_n) en fonction de n.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 < u_n \leqslant \frac{1}{3}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Solution de l'exercice 1.

1. On a

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + 1}{u_n} = 2 + \frac{1}{u_n} = 2 + v_n$$

donc v_n est arithmétique de raison 2 et $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

2. $v_n = 1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1+2n}$.
3. On a $n \geqslant 1$, $1 + 2n \geqslant 3$ et donc $u_n \leqslant \frac{1}{3}$.
4. On a $1+2(n+1) = 1+2n+2 \geqslant 1+2n$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est donc décroissante.

Exercice 2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

2. En déduire la valeur de

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k.$$

Solution de l'exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $x = 1$, alors $S_n = n$. Si $x \neq 1$, la somme S_n est la somme des n premier termes d'une suite géométrique d'où
$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} .$$
2. Pour tout n et pour tout x, S_n est une fonction dérivable (c'est un polynôme) donc, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x \neq 1$
$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (k-1)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on note
$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?
2. Démontrer que pour tout réel non-nul x, on a
$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$
3. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, écrire $P_n(p)$ comme un coefficient binomial.

Solution de l'exercice 3. 1. On a $P_n(0) = 1$ (on ne fait que des produits de 1), $Pn(-n) = 0$, car alors $1 + \frac{-n}{n} = 0$ et donc on a un terme nul dans le produit. Enfin,
$$P_n(1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2 \times 3 \times ... \times (n+1)}{1 \times 2 \times ... \times n} = n + 1.$$
2. On a
$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} = \frac{(x+1)(x+2)...(x+n)}{1 \times 2 \times ... \times n} = \frac{x+n}{P} {}_n(x-1).$$
3. On a
$$P_n(p) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+p}{k} = \frac{(p+1)...(p+n)}{n!} = \frac{(n+p)!}{n!p!} \binom{n+p}{p}.$$

Exercice 4. Soient n et p deux entiers tels que $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant p \leqslant n$.

1. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant p + 1$,
$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Solution de l'exercice 4. 1. On rappelle que

$$\binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}.$$

Ainsi,

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)!}{(p+1)!(k+1-(p+1))!} - \frac{k!}{(p+1)!(k-(p+1))!}$$

et donc

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)!}{(p+1)!(k-p)!} - \frac{k!}{(p+1)!(k-p-1)!}.$$

On met donc sur le même dénominateur et on obtient

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)! - k!(k-p)}{(p+1)!(k-p)!} = \frac{k!(k+1-(k-p))}{(p+1)!(k-p)!} = \frac{k!(p+1)}{(p+1)!(k-p)!}.$$

On arrive donc bien à

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{k}{p}.$$

2. On note que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right)$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} &= 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p} \\
&= 1 + \left(\binom{p+2}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \right) + \left(\binom{p+3}{p+1} - \binom{p+2}{p+1} \right) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \left(\binom{n}{p+1} - \binom{n-1}{p+1} \right) + \left(\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1} \right) \\
&= 1 + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \\
&= \binom{n+1}{p+1}.
\end{aligned}$$