Colle 1 - Tristan BEIN

MPSI2
Année 2021-2022

21 septembre 2021

Question de cours . Donner des critères de colinéarité et d'orthogonalité à l'aide des nombres complexes. Prouvez-les.

Exercice 1. On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai de l'équation.
2. Déterminer $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z - ai)(z^2 + bz + c).$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation.

Exercice 2. Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

Exercice 3. Résoudre l'équation

$$z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}.$$

Exercice 4. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation

$$\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi].$$

2. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation

$$|3 + iz| = |3 - iz|.$$

Exercice 5. Soit a un complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \overline{a}z \neq 0$,

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant 1.$$