Corrigé - Colle 6 (Sujet 3)

BCPST1B
Année 2021-2022

9 novembre 2021

Exercice 1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution de l'exercice 1.

- **Annonce :** Prouvons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

  La propriété est donc vraie au rang 1.

- **Hérédité :** Supposons que la propriété est vraie à un certain rang n. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

  Or,

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

  La propriété est donc vrai au rang $n+1$.

- **Conclusion :** On a donc montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2. On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.

2. Déterminer l'image de h, i.e. $f(\mathcal{D}_h)$.
3. L'application h est-elle injective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$? Surjective ? Bijective ?

Solution de l'exercice 2. 1. L'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. L'image de h n'est pas si évidente à trouver. Soit $y \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe x tel que $h(x) = y$. Alors,

$$\frac{x^2+1}{2x-1} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2+1 = y(2x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2yx + 1 + y = 0.$$

On obtient donc un trinôme en x. Pour déterminer si ce trinôme possède des racines (et donc si y possède un antécédent), on calcule son discriminant. On a

$$\Delta = 4y^2 - 4(1+y) = 4y^2 - 4y - 4.$$

Ce discriminant est à nouveau un trinôme. Pour déterminer son signe, nous devons à présent calculer le discriminant de ce dernier trinôme. On obtient

$$\Delta' = 16 + 64 = 80 > 0.$$

Le trinôme $4y^2 - 4y - 4$ possède donc deux racines réelles distinctes

$$y_1 = \frac{4-\sqrt{80}}{8} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{4+4\sqrt{80}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, on a deux situations possibles :
- Si $y \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ alors Δ est strictement négatif (car il est du signe de $a = 4$ sauf entre les racines). Dans ce cas, l'équation $x^2 - 2yx + 1 + y = 0$ ne possède pas de solution et y n'a donc pas d'antécédent.
- Si $y \notin \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ alors $\Delta \geqslant 0$ et dans ce cas, l'équation $x^2 - 2yx + 1 + y = 0$ possède une (si $y = y_1$ ou $y = y_2$ et donc $\Delta = 0$) ou deux solutions et y a donc bien d'antécédent.

En conclusion, on a

$$\mathrm{Im}(h) = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[.$$

3. h n'est pas injective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$ car $h(1) = 2 = h(3)$. On pourrait utiliser le fait que l'image de h n'est pas $\mathbb{R}$ pour conclure immédiatement que h n'est pas surjective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$. Néanmoins, pour montrer que l'application h n'est pas surjective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$ il n'est pas utile de connaître son image. En effet, 0 n'a pas d'antécédent par h car $h(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 1 = 0$ qui n'a pas de solution réelle. h n'est pas bijective car non surjective.

Exercice 3. 1. Démontrer que, pour tout entier n, on a

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n.$$

2. Démontrer que, pour tout entier n, on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = 0.$$

Solution de l'exercice 3. 1. Pour tout entier n, on a $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p} 2^p = (1+2)^n$.

2. On a

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} 2^k$$

car pour tout entier k, k et $2n-k$ ont même parité, ce qui nous donne

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2}(-1+2)^{2n} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit alors que

$$\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} - \frac{1}{2} = 0 \ .$$

Exercice 4. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

2. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k k.$$

Solution de l'exercice 4.

1. On pose $A_{-1} = 0$ et on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
&= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\
&= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k \ .
\end{aligned}$$

2. On pose $a_k = 2^k$ et $B_k = k$. Alors $A_n = 2^{n+1} - 1$ et $b_k = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k 2^k &= (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (Z^{k+1} - 1) \\
&= (2^{n+1} - 1)n - 2(2^n - 1) + n \\
&= 2^{n+1}(n-1) + 2 \ .
\end{aligned}$$