Colle 4 - Justin DELAILLE

MPSI2
Année 2021-2022

12 octobre 2021

Question de cours . Etudier et tracer la fonction $x \mapsto a^x$ où $a > 0$.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(3x)\cos(x)^3.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Vérifier que $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$ et en déduire le sens de variation de f sur I.
3. Tracer la courbe représentative de f.

Solution de l'exercice 1. 1. On a

$$f(-x) = \cos(-3x)(\cos(-x))^3 = \cos(3x)\cos(x)^3 = f(x).$$

La fonction f est donc paire. De plus,

$$f(x+\pi) = \cos(3x+3\pi)\cos(x+\pi)^3 = -\cos(3x)(-cos(x))^3 = f(x).$$

f est donc π-périodique. Finalement, on peut se contenter d'étudier f sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtiendra alors la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par parité. Cet intervalle est de longueur π et la fonction est π-périodique. On va donc déduire le reste de la courbe par des translations de vecteur $k\pi\bar{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a

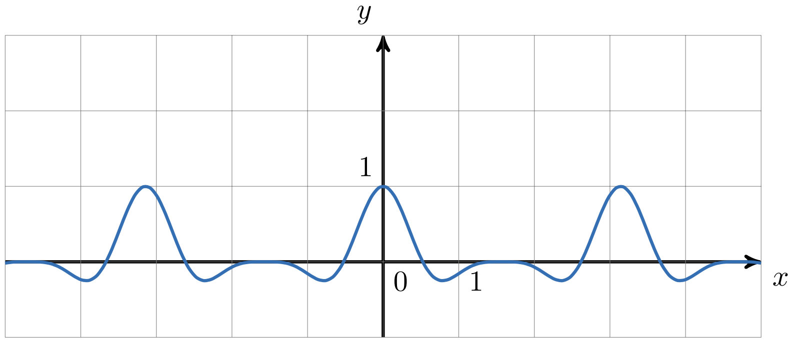
$$f'(x) = -3\sin(3x)\cos(x)^3 - 3\cos(3x)\sin(x)\cos(x)^2 = -3cos(x)^2(\sin(3x)\cos(x) + \sin(x)\cos(3x))$$

et donc

$$f'(x) = -3\cos(x)^2\sin(4x).$$

Puisque $\cos(x)^2 \geqslant 0$, f' est bien du signe de $-\sin(4x)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En particulier, si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) \leqslant 0$ et f est décroissante et si $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante.

3. On obtient le dessin suivant :



Exercice 2. Discuter, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = a.$$

Solution de l'exercice 2. Posons, pour $x \neq \pm 1$,

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - a.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. De plus, sa dérivée (qui ne dépend pas du signe de la quantité à l'intérieur de la valeur absolue dans le logarithme) est égale, après mise au même dénominateur, à

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1-x)^2(1+x)}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction (le calcul des limites ne pose pas de difficultés particulières ; en particulier, il n'y a pas de formes indéterminées) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-a$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-a-1$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-a$

Par continuité de f, en utilisant de plus sa stricte monotonie sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, on discute le nombre de solutions suivant la valeur de a :

- Si $a = 0$, l'équation n'admet pas de solutions.
- Si $a > 0$, l'équation admet une unique solution qui est située dans l'intervalle $]1,+\infty[$.
- Si $a \in]-1,0[$, l'équation admet une unique solution qui est située dans l'intervalle $]-\infty,-1[$.
- Si $a = -1$, l'équation admet deux solutions. L'une de ces solutions est 0, l'autre est située dans l'intervalle $]-\infty,-1[$.

- Si $a < -1$, l'équation admet exactement trois solutions. L'une est située dans l'intervalle $]-\infty, -1[$, la seconde dans l'intervalle $]-1, 0[$ et la troisième dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 3. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$. Démontrer que g est positive ou nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Solution de l'exercice 3. On va étudier g. Pour cela, il faut aller jusqu'à la dérivée seconde ! En effet, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, avec $g'(x) = (x-1)e^x + 1$. Il ne semble pas facile d'étudier directement le signe de g'. On va donc calculer la dérivée de g', qui est $g''(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}^+$. g'' est positive sur $\mathbb{R}^+$, donc g' est croissante sur cet intervalle. De plus, $g'(0) = 0$ donc g' est positive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0) = 0$, g est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4. Résoudre l'équation
$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x.$$

Solution de l'exercice 4. Remarquons d'abord que cette équation n'a de sens que sur $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle, en passant par l'écriture exponentielle des puissances, on a
$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}).$$
On arrive donc à
$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\ln(x) = \frac{1}{2}x\ln(x).$$
On obtient donc $\ln(x) = 0$ ou $x = 2\sqrt{x}$. Ainsi, les solutions sont $x = 1$ et $x = 4$.

Exercice 5. Soit $p \geqslant 2$ un entier et $0 < a_1 < \cdots < a_p$ des nombres réels positifs.

1. Montrer que, pour tout $a > a_p$, l'équation
$$a_1^x + \cdots + a_p^x = a^x$$
admet une unique racine x_a.
2. Étudier le sens de variation de $a \mapsto x_a$.
3. Déterminer l'existence et calculer
$$\lim_{a\to+\infty} x_a \quad \text{et} \quad \lim_{a\to+\infty} x_a \ln(a).$$

Solution de l'exercice 5.

1. On introduit la fonction
$$f_a(x) = \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \cdots + \left(\frac{a_1}{a}\right)^x = \sum_{k=1}^{p} e^{x\ln\left(\frac{a_k}{a}\right)}.$$
Puisque $\ln\left(\frac{a_k}{a}\right) < 0$, $x \mapsto x\ln\left(\frac{a_k}{a}\right)$ est strictement décroissante, et donc f_a est strictement décroissante. Or, $f_a(0) = p$ et
$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0.$$
L'équation $f_a(x) = 1$ admet donc une unique racine $x_a > 0$.

2. Soit $a < b$. En reprenant la notation de la question précédente, pour tout $x > 0$, on a $f_a(x) \geqslant f_b(x)$. En particulier $f_b(x_b) = f_a(x_a) = 1 \geqslant f_b(x_a)$. Par décroissance de f_b, on en déduit que $x_a \geqslant x_b$ et donc $a \mapsto x_a$ est décroissante.

3. Puisque $a \mapsto x_a$ est décroissante et minorée par 0, elle admet une limite $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$. Supposons $\ell > 0$. Alors, en passant à la limite dans

$$a_1^{x_a} + \cdots + a_p^{x_a} = a^{x_a},$$

on trouve

$$a_1^{\ell} + \cdots + a_p^{\ell} = +\infty,$$

une contradiction. Donc $\ell = 0$. Ainsi, il vient également

$$x_a \ln(a) = \ln\left(a_1^{x_a} + \cdots + a_p^{x_a}\right),$$

ce qui prouve que $x_a \ln(a)$ tend vers $\ln(p)$.