Corrigé - Colle 5 (Sujet 3)

MPSI2
Année 2021-2022

19 octobre 2021

Question de cours . Étudier et tracer arcsin.

Exercice 1. Résoudre l'équation $\cosh(x) = 2$.

Solution de l'exercice 1. Utilisant la définition de la fonction cosinus hyperbolique, on sait que

$$\cosh(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^x + e^{-x} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}(e^{2x} + 1 - 4e^x) = 0.$$

La fonction exponentielle ne s'annulant jamais, l'équation est équivalente à

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0.$$

On pose $X = e^x$ et on résout

$$X^2 - 4X + 1 = 0.$$

Ses racines sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$, qui sont tous les deux des réels positifs. Les solutions de l'équation sont donc $\ln(2 - \sqrt{3})$ et $\ln(2 + \sqrt{3})$.

Exercice 2. Trouver toutes les solutions réelles de l'équation suivante :

$$2\ln(x) + \ln(2x - 1) = \ln(2x + 8) + 2\ln(x - 1)\ .$$

Solution de l'exercice 2. On commence par remarquer que cette égalité n'est bien définie que pour $x > 1$ car ln n'est bien définie que sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus,

$$2\ln x + \ln(2x - 1) = \ln(2x + 8) + 2\ln(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) + \ln(2x - 1) = \ln(2x + 8) + \ln((x - 1)^2)$$

et, toujours en utilisant les propriétés de la fonction ln,

$$2\ln x + \ln(2x - 1) = \ln(2x + 8) + 2\ln(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2(2x - 1)) = \ln((2x + 8)(x - 1)^2).$$

Ainsi, après calcul on arrive à l'inéquation

$$\ln(2x^3 - x^2) = \ln(2x^3 + 4x^2 - 14x + 8).$$

On applique alors la fonction exponentielle et on obtient

$$2x^3 - x^2 = 2x^3 + 4x^2 - 14x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 - 14x + 8 = 0.$$

Or, le discriminant de ce trinôme est donné par $\Delta = 196 - 160 = 36$ et les racines de ce trinôme sont donc

$$x_1 = \frac{14 - \sqrt{36}}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{14 + \sqrt{36}}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Or, $x_1 \leqslant 1$ donc la seule solution de l'équation étudiée est $x = 2$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par

$$f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$$

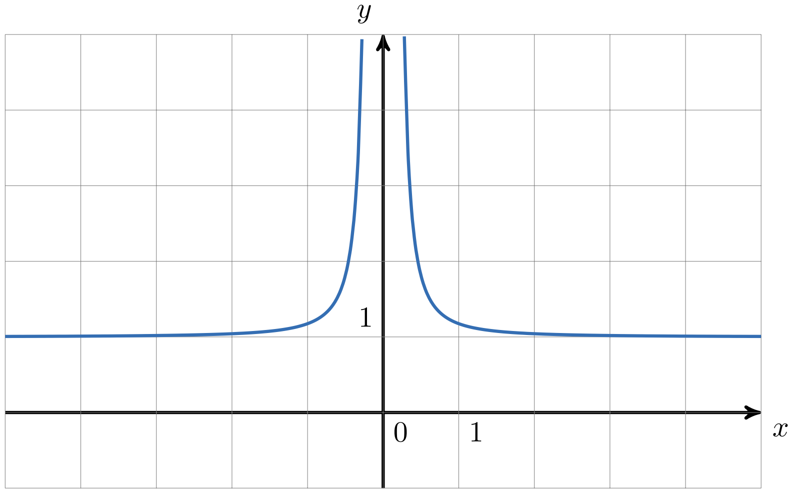
où l'on rappelle que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Étudier la parité de f.
2. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$ et en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et calculer sa dérivée.
4. Justifier que pour tout $y \geqslant 0$, $\tanh(y) \leqslant y$. En déduire le tableau de variations de f puis tracer la courbe représentative de f.

Solution de l'exercice 3.

1. f est paire car c'est le produit de deux fonctions impaires. On peut donc se restreindre à étudier f sur $]0, +\infty[$.
2. On pose $y = \frac{1}{x}$. Alors
$$f(x) = \frac{\sinh(y)}{y} = \frac{\sinh(y) - \sinh(0)}{y - 0}.$$
Lorsque x tend vers $+\infty$, y tend vers 0, et cette quantité tend vers la dérivée de sinh en 0, c'est-à-dire $\cosh(0) = 1$.
La limite en $-\infty$ s'obtient par parité. Enfin, en 0^+, on a toujours en posant $y = \frac{1}{x}$,
$$f(x) = \frac{\sinh(y)}{y} = \frac{e^y}{2y} - \frac{e^{-y}}{2y}.$$
Par croissance comparée, $\frac{e^y}{y} \to +\infty$ lorsque $y \to +\infty$, alors que $\frac{e^{-y}}{2y} \to 0$ (ce n'est pas une forme indéterminée). On en déduit que
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et $y \mapsto \sinh(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée, obtenue par la formule de dérivation d'une composée, vaut :
$$f'(x) = \sinh(1/x) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \cosh\left(\frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\frac{1}{x}\right)\left(\tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right).$$

4. On commence par étudier la fonction auxiliaire $g(y) = \tanh(y) - y$. Elle dérivable sur $]0, +\infty[$, et sa dérivée vaut
$$g'(y) = (1 - \tanh^2(y)) - 1 = -\tanh^2(y) \leqslant 0.$$
g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$, et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que $g(y) \leqslant 0$ pour tout $y \geqslant 0$. On en déduit que f' est négative sur $]0, +\infty[$, et donc que f est décroissante sur cet intervalle. On obtient donc :



Exercice 4. Montrer que l'équation
$$\ln(1 + |x|) = \frac{1}{x - 1}$$
possède exactement une solution α dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $1 < \alpha < 2$.

Solution de l'exercice 4. Posons, pour $x \neq 1$,
$$f(x) = \ln(1 + |x|) + \frac{1}{1 - x}.$$
L'équation initiale est équivalente à l'équation $f(x) = 0$. Remarquons que si $x < 1$, alors $f(x) > 0$ et donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutions dans l'intervalle $] - \infty, 1[$. Nous allons ensuite étudier la fonction f sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Elle y est dérivable et
$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{(1 - x)^2} > 0.$$
La fonction f est donc strictement croissante sur $]1, +\infty[$. De plus, on a
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(2) = \ln(3) - 1 > 0.$$
f, qui est de plus continue, réalise une bijection de l'intervalle $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'équation admet donc une unique solution α dans $]1, +\infty[$. Le calcul de $f(2)$ et de la limite de f en 1 permettent de conclure que $1 < \alpha < 2$.

Exercice 5. Déterminer tous les couples (n, p) d'entiers naturels non nuls tels que $n^p = p^n$ et $n \neq p$.

Solution de l'exercice 5. Le point de départ est de remarquer que

$$n^p = p^n \quad \Leftrightarrow \quad p\ln(n) = n\ln(p) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(p)}{p}.$$

Ceci nous amène à étudier la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Cette fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

La fonction est donc strictement croissante sur $[1,e]$, et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Si les entiers naturels (n,p) vérifient $f(n) = f(p)$, l'un de ces deux entiers, disons n, doit être dans $[1,e]$, et l'autre doit être dans $[e,+\infty[$. Or, dans $[1,e]$, il n'y a que deux entiers : $n = 1$ et $n = 2$. Pour $n = 1$, $f(1) = 0$, et la valeur nulle n'est pas prise par la fonction f sur $[e,+\infty[$. Pour $n = 2$, on a $f(2) = \frac{\ln(2)}{2} = f(4)$. La seule solution pour cette équation est donc $2^4 = 4^2$.