Corrigé - Colle 5 (Sujet 1)

BCPST1B
Année 2021-2022

19 octobre 2021

Exercice 1. Simplifier l'expression suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) .$$

Solution de l'exercice 1. C'est une somme télescopique. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) .$$

Exercice 2. Donner l'expression du terme général de la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Solution de l'exercice 2. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, de racines 1 et 2. La solution générale est donc de la forme $u_n = a + b2^n$. En introduisant la valeur de u_0 et u_1, on trouve $a = 1$ et $b = 2$, soit $u_n = 1 + 2^{n+1}$.

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique ?
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
3. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.
4. Quelle est la limite de (u_n) ?

Solution de l'exercice 3.

1. $u_0 = 3$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et $u_2 = \frac{16}{7}$ donc (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1} - 2}{\frac{4u_n-2}{u_n+1} - 1} = \frac{4u_n - 2 - 2(u_n+1)}{4u_n - 2 - (u_n+1)} = \frac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \frac{2}{3}.$$

3. On a donc $v_n = v_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Ainsi, puisque
$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \quad \Rightarrow \quad (u_n+1)v_n = u_n - 2 \quad \Rightarrow \quad u_n(v_n - 1) = -2 + v_n$$
on a
$$u_n = \frac{-2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}.$$

4. (u_n) tend vers 2.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note
$$a_n = \sum_{k=1}^n k \quad , \quad b_n = \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^n k^3 \ .$$
On admet que
$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad c_n = a_n^2.$$

1. Calculer
$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant i \leqslant n} ij.$$

2. Calculer
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i,j).$$

Solution de l'exercice 4. 1. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i \leqslant i \leqslant n} ij &= \sum_{j=1}^n j \left(\sum_{i=1}^n i\right) \\
&= \sum_{j=1}^n j a_j \\
&= \sum_{j=1}^n j \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^3 + j^2 \\
&= \frac{b_n + c_n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.
\end{aligned}$$

2. Posons, pour i fixé, $S_i = \sum_{j=1}^n \min(i,j)$ et commençons par calculer la valeur de S_i. Alors, on a
$$S_i = \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=i+1}^n i = \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i = \left(n + \frac{1}{2}\right) i - \frac{i^2}{2}.$$

On en déduit
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n} S_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(n+\frac{1}{2}\right)i-\frac{i^2}{2} \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$