Corrigé - Colle 4 (Sujet 1)

BCPST1B
Année 2021-2022

12 octobre 2021

Exercice 1. Résoudre
$$\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta) = \sqrt{2}.$$
sous la forme d'un sinus.

Solution de l'exercice 1. On commence par déterminer l'amplitude du signal :
$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

On note alors que,
$$\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\sin(\theta)\right) = \sqrt{2}.$$

On arrive donc à
$$\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\theta) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

puis à
$$\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Finalement,
$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

d'où
$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 2. Soit $a \geqslant 0$. Pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + an$.

Solution de l'exercice 2. Montrons par récurrence que la propriété (P_n) : $(1+a)^n \geqslant 1 + an$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a bien $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1 + 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité.** Soit $n \geqslant 0$ un entier fixé. Supposons que la propriété (P_n) est vraie au rang n, i.e. que
$$(1+a)^n \geqslant 1+an.$$
Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$. On a, grâce à l'hypothèse de récurrence,
$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+an) = 1+a+an+a^2n = 1+a(n+1)+a^2n.$$
Or, $a^2n \geqslant 0$ et on a donc montré que
$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a(n+1).$$
Ceci achève de démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion.** On a donc bien démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+an$.

Exercice 3. Donner l'expression du terme général de la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Solution de l'exercice 3. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, de racines 1 et 2. La solution générale est donc de la forme $u_n = a + b2^n$. En introduisant la valeur de u_0 et u_1, on trouve $a = 1$ et $b = 2$, soit $u_n = 1 + 2^{n+1}$.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{4u_n-2}{u_n+1}$.

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique ?
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
3. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.
4. Quelle est la limite de (u_n) ?

Solution de l'exercice 4.

1. $u_0 = 3$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et $u_2 = \frac{16}{7}$ donc (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On a
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-2}{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1} = \frac{4u_n-2-2(u_n+1)}{4u_n-2-(u_n+1)} = \frac{2u_n-4}{3u_n-3} = \frac{2}{3}.$$
3. On a donc $v_n = v_0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Ainsi, puisque
$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1} \quad \Rightarrow \quad (u_n+1)v_n = u_n - 2 \quad \Rightarrow \quad u_n(v_n-1) = -2+v_n$$
on a
$$u_n = \frac{-2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}.$$
4. (u_n) tend vers 2.

Exercice 5. La suite
$$u_n = \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos(n)\right)^n$$
converge-t-elle vers une valeur réelle lorsque n tend vers $+\infty$. Si non, pourquoi, si oui, vers quelle valeur ?

Solution de l'exercice 5. On sait que, pour tout n, on a $|\cos(n)| \leqslant 1$. D'autre part, puisque $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0, il existe $1 \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \geqslant A$, on ait $\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{16}$. Ainsi, pour $n \geqslant A$, on a
$$\left|2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos(n)\right| \leqslant 2 \times \frac{1}{16} + \frac{3}{4} \times 1 = \frac{7}{8}.$$
Ainsi, on a démontré que pour tout $n \geqslant A$, on a
$$|u_n| \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$
Par le théorème d'encadrement des limites, (u_n) converge vers 0.