Colle 2 - Margaux BONNET

BCPST1B
Année 2021-2022

28 septembre 2021

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$|x-2| - 2|x+1| = 0.$$

Solution de l'exercice 1. On procède par disjonction de cas pour se débarasser des valeurs absolues. Ainsi,

- **Si** $x < -1$ **:** Alors $|x-2| = -(x-2)$ et $|x+1| = -(x+1)$ et donc

$$|x-2| - 2|x+1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x+2+2(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

  et -4 vérifie bien la condition $x < -1$.

- **Si** $-1 \leqslant x \leqslant 2$ **:** Alors $|x-2| = -(x-2)$ et $|x+1| = x+1$ et donc

$$|x-2| - 2|x+1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x+2-2(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

  et 0 vérifie bien la condition $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

- **Si** $x > 2$ **:** Alors $|x-2| = x-2$ et $|x+1| = x+1$ et donc

$$|x-2| - 2|x+1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2-2(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x-4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

  mais -4 ne satisfait pas la condition $x > 2$. Nous ne tenons donc pas compte de cette solution.

Finalement, nous avons montré que les solutions de l'équation $|x-2| - 2|x+1| = 0$ sont -4 et 0.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x-3} < 0.$$

Solution de l'exercice 2. On commence par remarquer que la première racine n'est définie que pour $x(x-2) \geqslant 0$, i.e. pour $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ et la deuxième racine carrée n'est quant à elle définie seulement pour $2x - 3 \geqslant 0$, i.e. pour $x \geqslant \frac{3}{2}$. Ainsi, notre inéquation n'a de sens que pour $x \in [2, +\infty[$. On utilise à présent la multiplication par la quantité conjuguée (qui est strictement positive (car elle est positive ou nulle et nous venons de voir que les deux racines ne peuvent s'annuler simultanément) et ne change donc pas l'inégalité) :

$$\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-3})}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-3}}<0.$$

Or,

$$(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-3})=x^2-2x+-2x+3=x^2-4x+3.$$

Ainsi,

$$\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-3}}<0.$$

Or, le dénominateur est strictement positif, donc

$$\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+3<0.$$

Or, le trinôme x^2-4x+3 a pour discriminant $\Delta=16-12=4$ et possède donc deux racines distinctes

$$x_1=\frac{4-2}{2}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4+2}{2}=3.$$

Ainsi, il est strictement négatif si et seulement si $x\in]1,3[$. On rappelle que l'on travaille pour $x\geqslant 2$ et conclut donc que

$$\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in[2,3[.$$

Exercice 3. On considère la fonction $f\colon x\mapsto x-E(x)$ où E désigne la fonction partie entière.

1. Rappeler la définition de E.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a l'égalité suivante :

   $$E(x+1)=E(x)+1\ .$$

   En déduire que f est périodique.
3. Tracer la partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans la bande de plan d'inéquations

   $$-2\leqslant x<3\ .$$

Solution de l'exercice 3.

1. $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
2. On a

   $$E(x+1)=\max(n\in\mathbb{Z},\, n\leqslant x+1)=\max(n\in\mathbb{Z},\, n-1\leqslant x)=\max(m\in\mathbb{Z},\, m\leqslant x)+1.$$

   Ainsi, on a démontré que

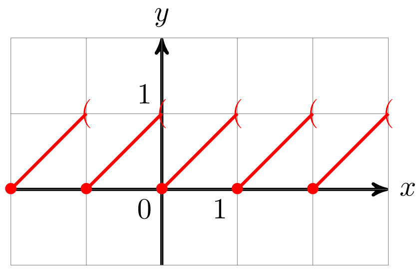
   $$E(x+1)=E(x)+1\ .$$

3. On note que

$$f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = (x+1) - (E(x)+1) = x - E(x) = f(x)$$

donc f est 1-périodique.

4. On a



Exercice 4. Résoudre l'équation

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x.$$

Solution de l'exercice 4. Remarquons d'abord que cette équation n'a de sens que sur $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle, en passant par l'écriture exponentielle des puissances, on a

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}).$$

On arrive donc à

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\ln(x) = \frac{1}{2}x\ln(x).$$

On obtient donc $\ln(x) = 0$ ou $x = 2\sqrt{x}$. Ainsi, les solutions sont $x = 1$ et $x = 4$.