Corrigé - Colle 4 (Sujet 2)

BCPST1B
Année 2021-2022

12 octobre 2021

Exercice 1. Écrire sous la forme d'un cosinus

$$A = \sqrt{3}\cos(\theta) + \sin(\theta).$$

Solution de l'exercice 1. On commence par déterminer l'amplitude du signal :

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

On note alors,

$$A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(\theta)\right).$$

Finalement,

$$A = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n$, pour tout $n \geqslant 0$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1 + n(n-1)$.

Solution de l'exercice 2. On utilise une récurrence double.

- **Annonce :** Pour tout entier naturel non nul n, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par :

$$u_n = -1 + n(n-1).$$

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = -1 = -1 + n(n-1)$ et pour $n = 1$, $u_1 = -1 = -1 + n(n-1)$. Donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- **Hérédité :** On suppose que cette propriété est vraie à un rang $n \geqslant 1$ quelconque et également

au rang $n+1$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & (n+1)u_{n+1}-(n+2)u_n \\ & = & (n+1)(-1+(n+1)n)-(n+2)(-1+n(n-1)) \\ & = & -n-1+n(n+1)^2+n+2-n(n-1)(n+2) \\ & = & -n-1+n^3+2n^2+n+n+2-n(n^2-n-2) \\ & = & 1+n^2+3n \\ & = & -1+(n+2)(n+1). \end{array}$$

- **Conclusion :** Par le principe de récurrence double, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1+n(n-1)$.

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On définit ainsi la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. La suite (v_n) est-elle arithmétique, géométrique ?
2. En déduire une expression de (u_n) en fonction de n.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 < u_n \leqslant \frac{1}{3}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Solution de l'exercice 3.

1. On a

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n+1}{u_n} = 2+\frac{1}{u_n} = 2+v_n$$

donc v_n est arithmétique de raison 2 et $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

2. $v_n = 1+2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1+2n}$.
3. On a $n \geqslant 1$, $1+2n \geqslant 3$ et donc $u_n \leqslant \frac{1}{3}$.
4. On a $1+2(n+1) = 1+2n+2 \geqslant 1+2n$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est donc décroissante.

Exercice 4. Démontrer que la somme des $n \geqslant 1$ premiers entiers naturels impairs vaut n^2.

Solution de l'exercice 4. Montrons par récurrence que la propriété (P_n) : "La somme des n premiers entiers naturels impairs vaut n^2" est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$, on a bien $1 = 1^2$ car le premier nombre impairs est 1.
- **Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. Supposons que la propriété (P_n) est vraie au rang n, i.e. que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2.$$

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$. La somme des $n+1$ premiers entiers impairs est donnée par

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\right) + (2n+1)$$

Alors, par hypothèse de récurrence, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Ceci achève de démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion.** On a donc bien démontré que pour tout $n \geqslant 1$, la somme des n premiers entiers naturels impairs vaut n^2.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

1. Montrer, pour tout $x \geqslant 0$, l'inégalité
$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. On pose $v_n = \ln(u_n)$. Déduire des questions précédentes que
$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant v_n \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$
4. Montrer que (v_n) converge, et préciser sa limite. De même pour (u_n).

Solution de l'exercice 5. 1. Posons $f(x) = x - \ln(1+x)$. On a $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$. La fonction f est donc croissante sur $[0, +\infty[$. En particulier, on a $f(x) \geqslant f(0) = 0$, ce qui donne la première inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$. De même, on pose $g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$. g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$g'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leqslant 0$$

pour $x \geqslant 0$. La fonction g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$ et on a $g(x) \leqslant g(0) = 0$ pour $x \geqslant 0$, ce qui donne l'autre inégalité.

2. On procède par récurrence sur n.

3. On a, puisque $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On utilise ensuite l'inégalité $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour trouver

$$vn \leqslant \frac{1}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}(1 + ... + n) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Pour l'autre inégalité, on procède de façon identique en utilisant cette fois $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$. On trouve

$$v_n \geqslant \frac{1}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2} - \left(\frac{1^2}{2n^4} + ... + \frac{n^2}{2n^4}\right).$$

La première partie a déjà été calculée auparavant. Pour la seconde, on utilise la question précédente. Ainsi,

$$v_n \geqslant \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4}(1^2 + ... + n^2) = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+6)}{6} = \frac{n+1}{2n} - \frac{n(n+1)(2n+6)}{12n^3}.$$

4. On sait que $\frac{n+1}{2n}$ tend vers $\frac{1}{2}$ tandis que $\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$ tend vers 0 (quotient d'un polynôme de degré 2 et d'un polynôme de degré 3). (v_n) est donc encadré par deux suites qui tendent toutes deux vers $\frac{1}{2}$. Par le théorème d'encadrement des limites (ou théorème des gendarmes), (v_n) converge elle-même vers $\frac{1}{2}$.

5. On a $u_n = \exp(v_n)$. Par le théorème de composition des limites, (u_n) est convergente, de limite $\exp(1/2)$.