

Corrigé - Colle 5 (Sujet 2)

MPSI2

Année 2021-2022

19 octobre 2021

Question de cours . Étudier et tracer \tanh .

Exercice 1. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Solution de l'exercice 1. On pose, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

Alors f est dérivable sur \mathbb{R}^+ et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \geq 0.$$

Ainsi, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. De plus, $f(0) = 0$, donc, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$ ce qui entraîne $\ln(1+x) \leq x$.

Pour démontrer l'autre inégalité, on introduit cette fois la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

g est dérivable sur \mathbb{R}^+ et pour tout $x \geq 0$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

g est donc croissante sur \mathbb{R}^+ et $g(0) \geq 0$, donc pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

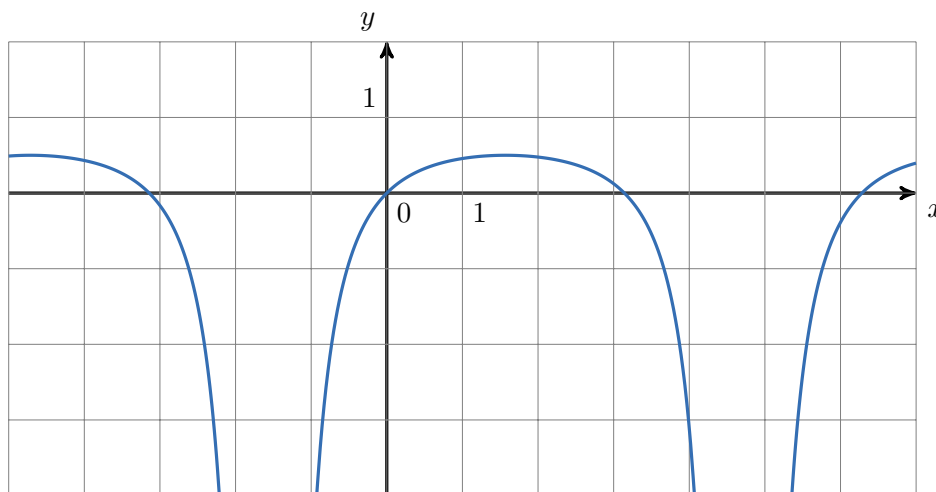
1. Quel est le domaine de définition de f ? Vérifier que f est 2π -périodique.
2. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que dire sur Γ ?
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, puis déterminer la limite de f en $-\frac{\pi}{2}$.
4. Construire Γ à l'aide des renseignements précédents.

Solution de l'exercice 2. 1. $f(x)$ est défini partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour tout les x avec $\sin(x) \neq -1$. Le domaine de définition de f est donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De plus, la 2π -périodicité de \sin entraîne facilement la 2π -périodicité de f .

2. De $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, on déduit que $f(\pi - x) = f(x)$. Ceci signifie que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de Γ .
3. Posons $g(x) = \frac{x}{x+1}$ et $h(x) = \sin(x)$. On a $f = g \circ h$. De plus, h est croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont l'image est $] -1, 1[$. La fonction g est elle croissante sur l'intervalle $] -1, 1[$ (par exemple, on peut écrire $g(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$). Par composition, f est croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus, on a $\sin(x) \rightarrow -1^+$ lorsque x tend vers $-\frac{\pi}{2}$ et $g(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -1^+$. Ainsi, par composition de limites, f tend vers $-\infty$ en $-\frac{\pi}{2}$.
4. On construit d'abord γ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On la déduit sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ par symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$. Enfin, on l'obtient sur \mathbb{R} par périodicité de période 2π , et donc par des translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. On obtient :



Exercice 3. Montrer que, pour tout $x \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \cosh(kx) = \frac{\cosh\left(\frac{nx}{2}\right) \sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Solution de l'exercice 3. On a, pour $x \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^n \cosh(kx) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n e^{kx} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n e^{-kx} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} + \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \right)$$

puisqu'il s'agit de somme géométrique. En utilisant une factorisation par l'angle moitié,

$$\sum_{k=0}^n \cosh(kx) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-\frac{(n+1)x}{2}} - e^{\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}} + \frac{e^{-\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \right)$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \cosh(kx) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{nx}{2}} \frac{\sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} + e^{-\frac{nx}{2}} \frac{\sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \right) = \frac{e^{\frac{nx}{2}} + e^{-\frac{nx}{2}}}{2} \frac{\sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et finalement

$$\sum_{k=0}^n \cosh(kx) = \frac{\cosh\left(\frac{nx}{2}\right) \sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Exercice 4. Trouver les couples $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ tels que

$$x^y = y^x \quad \text{et} \quad x^2 = y^3.$$

Solution de l'exercice 4. On écrit

$$y^x = (y^3)^{\frac{x}{3}} = x^{\frac{2x}{3}} = x^y,$$

ce qui s'écrit encore

$$e^{\frac{2x}{3} \ln(x)} = e^{y \ln(x)}.$$

Prenant le logarithme, cela donne

$$\frac{2x}{3} \ln(x) = y \ln(x).$$

On en déduit que, soit $\ln(x) = 0$ et donc $x = y = 1$, soit on a $y = \frac{2x}{3}$, ce qui donne $x^2 = \frac{27}{8}x^3$. La seule solution dans $]0, +\infty[$ est $x = \frac{27}{8}$ et donc $y = \frac{9}{4}$. Les solutions de l'équation sont donc les couples $(1, 1)$ et $(\frac{27}{8}, \frac{9}{4})$.

Exercice 5. Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 5. Pour $x > 0$, posons

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

de sorte que $\sqrt[n]{n} = f(n)$. f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x)}{x}}.$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$, donc $f'(x) > 0$ si $x \in]0, e[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]e, +\infty[$. Puisque $3 > e$, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$. En particulier, pour $n \geq 3$, on a $f(n) \geq f(3)$, et donc la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ est atteinte pour $n = 2$ ou pour $n = 3$. Comme $\sqrt{2} \simeq 1,41$ et $\sqrt[3]{3} \simeq 1,44$ la valeur maximale vaut $\sqrt[3]{3}$.