Corrigé - Colle 9 (Sujet 2)

BCPST1B
Année 2021-2022

30 novembre 2021

Exercice 1. Écrire un programme Python renvoyant une liste contenant les valeurs de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^5$$

pour $n \in \{0, ..., N\}$.

Solution de l'exercice 1. On a

Algorithme 1 : Calcul de S_n

Entrées : Un entier n
Sorties : S_n.
$S = 0$;
$L = []$;
pour k *de* 0 *à* n **faire**
    $S = S + k^5$;
    $L = L + S$
fin
retourner S

Exercice 2. Les questions de cet exercices sont indépendantes.

1. Déterminer les racines carrées du nombres complexes $1 + i$.
2. Résoudre l'équation $2z^2 + 2z + 1 = 0$.

Solution de l'exercice 2. 1. On cherche $z = x + iy$ tel que $(x + iy)^2 = 1 + i$. Grâce au module : $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ et en développant on a $x^2 - y^2 + 2xyi = 1 + i$ d'où

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} .$$

On en déduit :

$$2x^2 = \sqrt{2}+1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

et

$$2y^2 = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Or $2xy = 1$ donc x et y sont de même signe. Donc les racines carrées de $1+i$ sont :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

2. $\Delta = 2^2 - 4\times 2\times 1 = -4 < 0$ donc il y a deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{-2-2i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{et} \ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}\,dx.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$
3. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-3x}\,dx.$
4. $\displaystyle\int_1^e x^n \ln(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 3. 1. On remarque qu'en posant $u(x) = x^3+2$, on a $u'(x) = 3\,x^2$, de sorte que $f(x) = \frac{8}{3}\,\frac{u'(x)}{u^3(x)}$. On a donc

$$f(x) = \frac{8}{3}\,u'(x)\,u^{-3}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)u^{-2}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{3}\,(x^3+2)^{-2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{3\,(x^3+2)^2}\right)$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}\,dx = \left[-\frac{4}{3\,(x^3+2)^2}\right]_0^1 = -\frac{4}{27} + \frac{4}{12} = -\frac{4}{27} + \frac{9}{27} = \frac{5}{27}.$$

2. On remarque qu'en posant $u(x) = e^x+1$, on a $u'(x) = e^x$, de sorte que $i(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. On a donc

$$i(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{d}{dx}\left(\ln|u(x)|\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln(e^x+1)\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln(e^x+1)\right)$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(2).$$

3. On procède à deux i.p.p. successives où on dérive la partie polynomiale à chaque étape.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,e^{-3x}\,dx &= \int_0^1 u(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x) = x^2\,, \text{ donc } u'(x) = 2\,x \\ v(x) = -\frac{1}{3}\,e^{-3x}\,, \text{ donc } v'(x) = e^{-3x}\end{cases} \\ &= \left[-\frac{1}{3}\,x^2\,e^{-3x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 x\,e^{-3x}\,dx\,,\end{aligned}$$

$$\int_0^1 x\,e^{-3x}\,dx = \int_0^1 u(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x) = x\,, \text{ donc } u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{3}\,e^{-3x}\,, \text{ donc } v'(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\,x\,e^{-3x}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3} - \frac{1}{9}(e^{-3}-1) = -\frac{4}{9}e^{-3} + \frac{1}{9}$$

Finalement,

$$\int x^2\,e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3} - \frac{4}{9}e^{-3} + \frac{1}{9} = -\frac{7}{9}e^{-3} + \frac{1}{9}.$$

4. A priori, on ne connaît pas de primitive de la fonction ln.

$$\int_1^e x^n\,\ln(x)dx = \int_1^e u(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x) = \ln(x)\,, \text{ donc } u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,, \text{ donc } v'(x) = x^n \end{cases}$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^n}{n+1}\right)dx$$

$$= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Exercice 4. Calculer , en utilisant un ou des changement(s) de variable(s), l'intégrale

$$I = \int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{-x^2+2x+8}\,dx.$$

Solution de l'exercice 4. On a

$$-x^2+2x+8 = -(x^2-2x-8) = -((x-1)^2-9) = 9-(x-1)^2.$$

On a

$$I = \int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{9-(x-1)^2}\,dx = 3\int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}\,dx.$$

On pose alors $u = \frac{x-1}{3}$ pour se ramener à une intégrale du type $\int \sqrt{1-u^2}\,du$, que l'on sait calculer. On a $dx = 3du$, et le changement de variables est affine, donc bijectif. On en déduit que

$$I = 9\frac{0}{\frac{1}{2}}\sqrt{1-u^2}\,du.$$

On pose ensuite $u = \sin(t)$. La fonction sin réalisant une bijection de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que

$$I = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)^2\,dt = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1+\cos(2t)\,dt.$$

et donc

$$I = \frac{9}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Exercice 5. Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

Solution de l'exercice 5. De $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$, on déduit que $|z|^2 = 1$ et donc que $|z| = 1$. Ainsi, $z = e^{i\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculons maintenant le module de $1 - z$. On écrit

$$1 - z = 1 - e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}) = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Ainsi, le module de $1 - z$ vaut donc 1 si et seulement si $\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}$. Or, l'équation $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$ donne $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{3}$ alors que l'équation $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ n'a pas de solutions. L'ensemble des solutions est donc $\left\{e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{3}}\right\}$.