Corrigé - Colle 8 (Sujet 3)

MPSI2
Année 2021-2022

23 novembre 2021

Question de cours . Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$. Montrer que si $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$ alors f est une bijection et $f^{-1} = g$.

Exercice 1. Soit $f \colon x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$. Exprimer $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}(x)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 1. Montrons par récurrence que la propriété $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$ le résultat provient immédiatement de la définition de f.
- **Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$ fixé. Supposons que le résultat est vrai au rang n, i.e. que $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$. Alors,

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f\left(\frac{x}{nx+1}\right) = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} = \frac{x}{x+(nx+1)} = \frac{x}{(n+1)x+1}.$$

  Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.
- **Conclusion.** On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$.

Exercice 2. On définit les ensembles

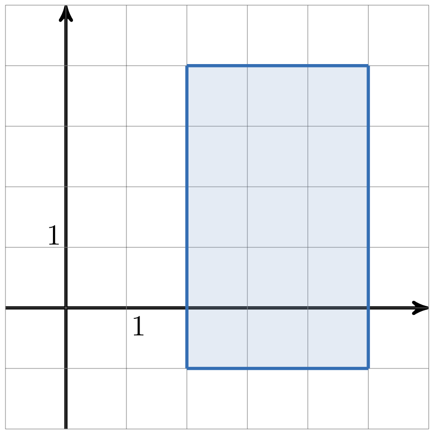
$$K = [2,5] \times [-1,4] \quad \text{et} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leqslant x\}.$$

1. Représenter dans le plan le domaine des points $M(x,y)$ appartenant à K et le domaine des points $N(x,y)$ appartenant à D.
2. L'implication suivante est-elle vraie ?

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in K \quad \Rightarrow \quad (x+1, y-1) \in D.$$

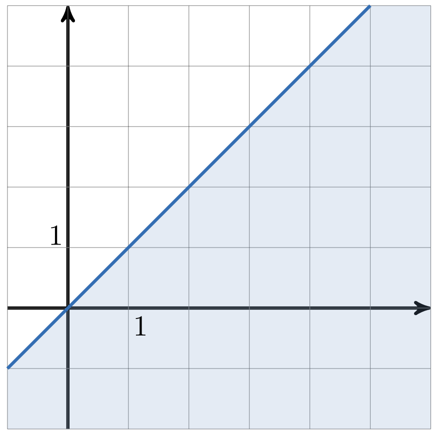
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que $K \cap D \neq \emptyset$.

Solution de l'exercice 2. 1. On a les représentations suivantes (où on a mis en gras les "bords" inclus dans le domaine) :



Ensemble K

et



Ensemble D

2. Cette implication est vraie. En effet, si $(x, y) \in K$, alors $2 \leqslant x \leqslant 5$ et $-1 \leqslant y \leqslant 4$. Ainsi, $3 \leqslant x + 1 \leqslant 6$ et $-2 \leqslant y - 1 \leqslant 3$ et donc $y - 1 \leqslant x + 1$ ce qui signifie que $(x + 1, y - 1) \in D$.
3. La réciproque est fausse. En effet, par exemple $(10, 9) \in D$ mais $(10 - 1, 9 + 1) = (9, 10) \notin K$.
4. $K \cap D \neq \emptyset$ car $(3, 3) \in K \cap D$.

Exercice 3. On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
2. Déterminer l'image de h, i.e. $f(\mathcal{D}_h)$.
3. L'application h est-elle injective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$? Surjective ? Bijective ?

Solution de l'exercice 3. 1. L'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. L'image de h n'est pas si évidente à trouver. Soit $y \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe x tel que $h(x) = y$. Alors,

$$\frac{x^2+1}{2x-1} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = y(2x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2yx + 1 + y = 0.$$

On obtient donc un trinôme en x. Pour déterminer si ce trinôme possède des racines (et donc si y possède un antécédent), on calcule son discriminant. On a

$$\Delta = 4y^2 - 4(1 + y) = 4y^2 - 4y - 4.$$

Ce discriminant est à nouveau un trinôme. Pour déterminer son signe, nous devons à présent calculer le discriminant de ce dernier trinôme. On obtient

$$\Delta' = 16 + 64 = 80 > 0.$$

Le trinôme $4y^2 - 4y - 4$ possède donc deux racines réelles distinctes

$$y_1 = \frac{4 - \sqrt{80}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{4 + 4\sqrt{80}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, on a deux situations possibles :

- Si $y \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ alors Δ est strictement négatif (car il est du signe de $a = 4$ sauf entre les racines). Dans ce cas, l'équation $x^2 - 2yx + 1 + y = 0$ ne possède pas de solution et y n'a donc pas d'antécédent.
- Si $y \notin \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ alors $\Delta \geqslant 0$ et dans ce cas, l'équation $x^2 - 2yx + 1 + y = 0$ possède une (si $y = y_1$ ou $y = y_2$ et donc $\Delta = 0$) ou deux solutions et y a donc bien d'antécédent.

En conclusion, on a

$$\mathrm{Im}(h) = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[.$$

3. h n'est pas injective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$ car $h(1) = 2 = h(3)$. On pourrait utiliser le fait que l'image de h n'est pas $\mathbb{R}$ pour conclure immédiatement que h n'est pas surjective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$. Néanmoins, pour montrer que l'application h n'est pas surjective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathbb{R}$ il n'est pas utile de connaître son image. En effet, 0 n'a pas d'antécédent par h car $h(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 1 = 0$ qui n'a pas de solution réelle. h n'est pas bijective car non surjective.

Exercice 4. Soit $f : E \to F$ et $A \subset F$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Trouver un contre-exemple pour l'autre inclusion. Que peut-on dire si f est de plus injective ?

Solution de l'exercice 4.

1. Soit $x \in A$. Alors, $x \in f^{-1}(f(A))$ équivaut à $f(x) \in f(A)$. Or $f(x) \in f(A)$ puisque $x \in A$ donc on a bien $A \subset f^{-1}(f(A)$.
2. Donnons un contre-exemple lorsque f n'est pas injective. On peut choisir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$. Pour $A = [0, 2\pi]$ on a $f(A) = [-1, 1]$ et $f^{-1}f(A)) = \mathbb{R}$. Donc $f^{-1}(f(A))$ n'est pas inclu dans A.
3. Supposons que f est injective. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors, $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f, on a donc $x = x'$. D'où $x \in A$ et $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Ainsi, lorsque f est injective on a $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 5. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1}.

Solution de l'exercice 5. La première chose à remarquer est que f s'écrit plus facilement

$$f(x) = e^{2x} + 2e^x.$$

Soit $y > 0$. Alors on a

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} + 2e^x - y = 0.$$

On pose alors $X = e^x$ et l'équation est équivalente à l'équation du second degré

$$X^2 + 2X - y = 0$$

dont les racines sont
$$X_1 = -1 - \sqrt{1+y} \quad \text{et} \quad X_2 = -1 + \sqrt{1+y}.$$

Mais $e^x > 0$, et donc on a
$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^x = -1 + \sqrt{1+y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(-1 + \sqrt{1+y}).$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc toujours une unique solution. La fonction f est bijective et
$$f^{-1}(y) = \ln(-1 + \sqrt{1+y}).$$