Colle 6 - Antonin RUBIO

MPSI2
Année 2021-2022

9 novembre 2021

Question de cours . Que peut-on dire de l'intégrale d'une fonction périodique. Démontrer.

Exercice 1. Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2x-3} \quad ; \quad g(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}$$

$$h(x) = (e^x+1)^3 e^x \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

Exercice 2. Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^n \ln(x) \quad ; \quad g(x) = x\sqrt{1+x} \quad \text{et} \quad h(x) = \sin(\ln(x))$$

Exercice 3. Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+\frac{5}{4}}\,dx.$$

Exercice 4. Calculer

$$I = \int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{-x^2+2x+8}\,dx.$$

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt.$$

1. Montrer que la suite (I_n) est strictement décroissante.
2. Montrer que, pour tout $u \in [0,1]$, on a $0 \leqslant 1-u \leqslant e^{-u}$.
3. En déduire une majoration de I_n à l'aide de $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx$.
4. Montrer que la suite (J_n) est majorée. En déduire que la suite (I_n) converge vers une limite que l'on calculera.
5. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
6. En déduire, pour $n \geqslant 0$, une expression de I_n à l'aide de factorielles.
7. En déduire une expression de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^{2n+1}\,d\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.