Corrigé - Colle 7 (Sujet 1)

BCPST1B
Année 2021-2022

16 novembre 2021

Exercice 1. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer l'image de f, i.e. $f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'application f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$?

Solution de l'exercice 1.

1. L'ensemble de définition de f est l'ensemble des points x tels que $x^2 + x - 2 \geqslant 0$. Or, $x^2 + x - 2$ est un trinôme dont le discriminant est $\Delta = 9$ et dont les racines sont donc $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. De plus, $x^2 + x - 2$ est positif sauf entre les racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.
2. L'image de f est donnée par $f(\mathcal{D}_f) = [0, +\infty[$ (car le trinôme s'annule en -2 et en 1, $x^2+x-2 \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et la fonction racine est continue sur $\mathbb{R}^+$).
3. Non, l'application f n'est pas injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$. En effet, $f(-2) = f(1) = 0$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

1. Comment appelle-t-on une telle application ?
2. Montrer que f est injective.

Solution de l'exercice 2.

1. Une telle application est strictement croissante.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Supposons par l'absurde que $x \neq y$. Alors, $x < y$ ou $x > y$. Supposons, sans perte de généralité que $x < y$. Alors par hypothèse, $f(x) < f(y)$. On obtient donc une contradiction. Ainsi, on a nécessairement $x = y$ et f est donc injective.

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire un programme Python calculant u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Étant donné un nombre M, écrire un programme Python renvoyant le premier entier n tel que $u_n > M$.

Solution de l'exercice 3. 1. On a

Algorithme 1 : Calcul de u_n

Entrées : Un entier n

Sorties : u_n.

$u = u_0$;
pour k *de* 0 *à* n **faire**
  $u = u^2$
fin
retourner u

2. On a

Algorithme 2 : Premier rang pour lequel u_n dépasse M

Entrées : Un nombre M

Sorties : n le premier rang tel que $u_n > M$.

$u = u_0$;
$n = 0$;
tant que $u \leqslant M$ **faire**
  $u = u^2$;
  $n = n + 1$;
fin
retourner n

Exercice 4. Soient

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} - x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1-x^2}{2x} \end{array}.$$

1. Montrer que tout réel x, $f(x) > 0$.
2. Montrer que la composée $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout $x > 0$.
3. De même, montrer que la composée $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Que peut-on en conclure ?

Solution de l'exercice 4. 1. On a

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+1} > x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 > x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 0$$

ce qui est bien sûr vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $f \circ g$ est bien définie lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ puisque f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et donc sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2 + 1} - \frac{1-x^2}{2x} = \sqrt{\frac{1-2x^2+x^4}{4x^2} + 1} - \frac{1-x^2}{2x}.$$

Après calcul, on arrive à

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{4x^2}} - \frac{1-x^2}{2x} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{4x^2}} - \frac{1-x^2}{2x}.$$

Or, $\sqrt{(1+x^2)^2} = |(1+x^2)^2| = (1+x^2)^2$ car $(1+x^2)^2 \geqslant 0$ et de plus, puisque $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\sqrt{4x^2} = |2x| = 2x$. Ainsi, on a finalement,

$$(f \circ g)(x) = \frac{1+x^2}{2x} - \frac{1-x^2}{2x} = x.$$

3. La composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ car f est définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et g est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et donc sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1-(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{1-(x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2)}{2(\sqrt{x^2+1}-x)}.$$

Après calcul, on arrive à

$$(g \circ f)(x) = \frac{1-x^2-1+2x\sqrt{x^2+1}-x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{2x(\sqrt{x^2+1}-x)}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = x.$$

4. On a montré que

$$f \circ g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \mapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g \circ f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

Autrement dit,

$$f \circ g = Id_{\mathbb{R}_+^\star} \qquad \text{et} \qquad g \circ f = Id_{\mathbb{R}}.$$

On peut en déduire que l'on a en réalité montré que f et g sont des applications réciproques l'une de l'autre.

Exercice 5. Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

Solution de l'exercice 5. Pour $x > 0$, posons

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

de sorte que $\sqrt[n]{n} = f(n)$. f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x)}{x}}.$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$, donc $f'(x) > 0$ si $x \in]0, e[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]e, +\infty[$. Puisque $3 > e$, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$. En particulier, pour $n \geqslant 3$, on a $f(n) \geqslant f(3)$, et donc la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ est atteinte pour $n = 2$ ou pour $n = 3$. Comme $\sqrt{2} \simeq 1,41$ et $\sqrt[3]{3} \simeq 1,44$ la valeur maximale vaut $\sqrt[3]{3}$.