Corrigé - Colle 7 (Sujet 3)

MPSI2
Année 2021-2022

16 novembre 2021

Question de cours . Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y = x \quad \text{et} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}.$$

Solution de l'exercice 1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet 1 comme racine double. La solution générale de l'équation homogène est donc $(Ax + B)e^x$.
On cherche une solution particulière de l'équation générale en utilisant le principe de superposition des solutions. On commence donc à chercher une solution de $y''-2y'+y = (x^2+1)e^x$. On la cherche sous la forme d'une exponentielle polynôme $P(x)e^x$. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on sait qu'on va trouver une solution avec un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4. Utilisant

$$y'(x) = (P'(x) + P(x))e^x \quad \text{et} \quad y''(x) = (P''(x) + 2P'(x) + P(x))e^x,$$

on obtient

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = P'(x)e^x.$$

y est donc solution de l'équation si et seulement si $P'' = x^2 + 1$. On obtient donc une solution particulière sous la forme

$$\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

On cherche maintenant une solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^{3x}$. Cette fois, 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, et on peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = \alpha e^{3x}$. On obtient, en introduisant dans l'équation

$$9\alpha - 6\alpha + \alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4}.$$

Les solutions de l'équation générale de départ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + Ax + B\right) e^x + \frac{1}{4} e^{3x}.$$

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^x} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$ dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{-x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$, de sorte que $y'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$. On introduit ceci dans l'équation différentielle et on trouve

$$\lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Après simplification, ceci donne :

$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x} \quad \Rightarrow \quad \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Une solution particulière est donc donné par $y(x) = \ln(1 + e^x)e^{-x}$. Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \ln(1 + e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x}.$$

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle

$$y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x).$$

Solution de l'exercice 3. La solution générale de l'équation sans second membre est $y(x) = Ke^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$. Il y a ensuite plusieurs méthodes pour rechercher une solution particulière. Par exemple, on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' - 2y = \cos(x)$. Pour cela, on écrit que $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ et on cherche une solution de $y' - 2y = e^{ix}$. Puisque e^{ix} n'est pas solution de l'équation sans second membre, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \alpha e^{ix}$. Cette fonction est solution de $y' - 2y = e^{ix}$ si et seulement si

$$i\alpha e^{ix} - 2\alpha e^{ix} = e^{ix}$$

i.e. si et seulement si

$$\alpha = \frac{1}{-2 + i} = \frac{-2 - i}{(-2 + i)(-2 - i)} = -\frac{2 + i}{5}.$$

Une solution particulière de $y' - 2y = \cos(x)$ est donc donnée par

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{2 + i}{5} e^{ix}\right) = -\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x).$$

On cherche ensuite une solution particulière de $y' - 2y = \sin(x)$en utilisant exactement la même méthode, mais en remarquant que cette fois $\sin(x) = \text{Im}(e^{ix})$. Une solution particulière est donc donnée par
$$2\text{Im}\left(-\frac{2+i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{4}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x).$$
Par le principe de superposition des solutions, on trouve finalement que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto Ke^{2x} - \frac{4}{5}\cos(x) - \frac{3}{5}\sin(x) \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Solution de l'exercice 4. Soit f une solution de l'équation. On sait qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que f est solution de $f' + f = C$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $f : x \mapsto C + De^{-x}$. Mais on doit aussi avoir
$$\int_0^1 f(t)\,dt = C,$$
et donc
$$C + D(1 + e^{-1}) = C \quad \Leftrightarrow \quad D = 0.$$
Ainsi, les seules solutions sont les fonctions constantes. Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions sont bien solutions de l'équation de départ.

Exercice 5. Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle
$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \text{(E)}$$
admet une unique solution impaire.

Solution de l'exercice 5. Il y a deux clés pour résoudre cet exercice :

- Toute fonction impaire vaut 0 en 0.
- L'équation différentielle (E) admet une unique solution y_0 vérifiant $y_0(0) = 0$.

Ceci montre déjà l'unicité : s'il y a une fonction y impaire solution de (E), elle vérifie $y(0) = 0$ et doit donc être égale à y_0.
Réciproquement, on doit prouver que y_0 est impaire. On va poser $z(t) = -y_0(-t)$. z est solution de (E). En effet,
$$z'(t) + a(t)z(t) = y_0'(-t) - a(t)y0(-t) = y_0'(-t) + a(-t)y0(-t) = b(-t) = b(t),$$
car y_0 est solution de (E), a est impaire et b est paire. z est donc solution de (E), et satisfait de plus $z(0) = 0$. Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, z est égale à y_0, et donc y_0 est impaire.
On pouvait aussi prouver que y_0 est impaire, en cherchant à résoudre l'équation différentielle par la

méthode usuelle (solution de l'équation homogène à l'aide de l'exponentielle et d'une primitive de a, puis méthode de variation de la constante).