Colle 2 - Marion SIGUIER

MPSI2
Année 2021-2022

21 septembre 2021

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$x^4 - 3x^2 + 1 < 0.$$

Solution de l'exercice 1. $x^4 - 3x^2 + 1$ n'est pas un trinôme en x mais en x^2 (on parle de trinôme bicarré). Posons donc $X = x^2$. Alors,

$$x^4 - 3x^2 + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - 3X + 1 < 0.$$

Or, nous avons montré à la question précédente que

$$X^2 - 3X + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[.$$

Ainsi, puisque $X = x^2$, on en déduit que $|x| = \sqrt{X}$ et donc que

$$x^4 - 3x^2 + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \in \left]\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right[$$

et finalement

$$x^4 - 3x^2 + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right[.$$

Exercice 2.

1. Démontrer que

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} - x.$$

2. En déduire que si $x > 1000$ alors,

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} < 0,0005.$$

Solution de l'exercice 2. 1. En multipliant des deux côtés de l'égalité par $x + \sqrt{x^2+1}$, qui est différent de 0 car $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$, on obtient

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} - x \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (\sqrt{x^2+1}-x)(x+\sqrt{x^2+1}) = x^2+1-x^2 = 1$$

et cette dernière égalité étant vraie, le résultat est ainsi démontré.

2. Si $x > 1000$ alors,

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{1000+\sqrt{1000+1}} < \frac{1}{1000+\sqrt{1000^2}} = \frac{1}{2000} = 0,0005.$$

Exercice 3. Trouver toutes les solutions réelles de l'équation suivante :

$$2\ln(x) + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)\ .$$

Solution de l'exercice 3. On commence par remarquer que cette égalité n'est bien définie que pour $x > 1$ car ln n'est bien définie que sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus,

$$2\ln x + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + \ln((x-1)^2)$$

et, toujours en utilisant les propriétés de la fonction ln,

$$2\ln x + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2(2x-1)) = \ln((2x+8)(x-1)^2).$$

Ainsi, après calcul on arrive à l'inéquation

$$\ln(2x^3 - x^2) = \ln(2x^3 + 4x^2 - 14x + 8).$$

On applique alors la fonction exponentielle et on obtient

$$2x^3 - x^2 = 2x^3 + 4x^2 - 14x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 - 14x + 8 = 0.$$

Or, le discriminant de ce trinôme est donné par $\Delta = 196 - 160 = 36$ et les racines de ce trinôme sont donc

$$x_1 = \frac{14-\sqrt{36}}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{14+\sqrt{36}}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Or, $x_1 \leqslant 1$ donc la seule solution de l'équation étudiée est $x = 2$.

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$. Démontrer que g est positive ou nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Solution de l'exercice 4. On va étudier g. Pour cela, il faut aller jusqu'à la dérivée seconde ! En effet, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, avec $g'(x) = (x-1)e^x + 1$. Il ne semble pas facile d'étudier directement le signe de g'. On va donc calculer la dérivée de g', qui est $g''(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}^+$. g'' est positive sur $\mathbb{R}^+$, donc g' est croissante sur cet intervalle. De plus, $g'(0) = 0$ donc g' est positive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0) = 0$, g est positive sur $\mathbb{R}^+$.