Colle 1 - Clotilde BAYNAUD

MPSI2
Année 2021-2022

21 septembre 2021

Question de cours . Montrer qu'un nombre complexe est de module 1 si et seulement si il s'écrit sous la forme $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. Soient $a, b \in]0, \pi[$. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$.

Solution de l'exercice 1. On a

$$z = \frac{(e^{-\frac{ia}{2}} + e^{\frac{ia}{2}})e^{\frac{ia}{2}}}{(e^{-\frac{ib}{2}} + e^{\frac{ib}{2}})e^{\frac{ib}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right) e^{\frac{ia}{2}}}{\cos\left(\frac{b}{2}\right) e^{\frac{ib}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{\frac{i(a-b)}{2}}.$$

De plus, $\cos\left(\frac{a}{2}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{b}{2}\right) > 0$ car a, $b \in]0, \pi[$ et $-\frac{\pi}{2} < \frac{a-b}{2} < \frac{\pi}{2}$ et on a donc bien obtenu l'écriture trigonométrique du complexe.

Exercice 2. Résoudre l'équation

$$(z-1)^5 = (z+1)^5.$$

Solution de l'exercice 2. 1 n'est pas solution et l'équation est donc équivalente à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1.$$

Posons $w = \frac{z+1}{z-1}$, c'est-à-dire $z = \frac{w+1}{w-1}$. On a

$$w^5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Revenons à présent à z. On doit exclure $w = 1$ car l'équation $\frac{z+1}{z-1} = 1$ n'admet pas de solutions. On a donc quatre solutions qui sont

$$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1}, k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

On peut encore simplifier en utilisant les formules d'Euler. En effet,

$$e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1 = e^{\frac{ik\pi}{5}} \left(e^{\frac{ik\pi}{5}} + e^{-\frac{ik\pi}{5}}\right) = 2e^{\frac{ik\pi}{5}} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right).$$

De même,

$$e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{5}}\left(e^{\frac{ik\pi}{5}} - e^{-\frac{ik\pi}{5}}\right) = 2ie^{\frac{ik\pi}{5}} \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right).$$

Finalement, l'ensemble des solutions est donné par

$$z = -i\cot\left(\frac{k\pi}{5}\right), k \in \{1,2,3,4\}.$$

Exercice 3. Résoudre l'équation

$$4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0,$$

sachant qu'elle admet une racine réelle.

Solution de l'exercice 3. Soit x une racine réelle, i.e.

$$4ix^3 + 2(1+3i)x^2 - (5+4i)x + 3(1-7i) = 0.$$

Les parties réelle et imaginaire du membre de gauche doivent être nulles. Ainsi,

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \text{et} \quad 4x^3 + 6x^2 - 4x - 21 = 0.$$

Il est facile de résoudre la première équation et de vérifier si on obtient une racine de l'autre équation. On trouve que $\frac{3}{2}$ est racine. On factorise alors le polynôme par $z - \frac{3}{2}$, et on trouve (par exemple en procédant par identification) :

$$4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = \left(z - \frac{3}{2}\right)(4iz^2 + 2(1+6i)z + 2(-1+7i)).$$

Reste à résoudre l'équation

$$4iz^2 + 2(1+6i)z + 2(-1+7i) = 0$$

dont les solutions sont $-2 + \frac{3}{2}i$ et $-1-i$.

Exercice 4. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation

$$\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

2. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation

$$|(1+i)z - 2i| = 2.$$

Solution de l'exercice 4. 1. On a

$$\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \arg(z) - \arg(1+i) \quad [2\pi] = \arg(z) - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi].$$

Ainsi,

$$\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = \frac{3\pi}{4} \quad [\pi].$$

Soit B un point tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$ (par exemple le point d'affixe $-1+i$. Alors l'ensemble recherché est la demi-droite $[OB)$ privé du point O.

2. Factorisons par $1+i$ dans le module. On trouve :

$$|1+i| \left| z - \frac{2i}{1+i} \right| = 2.$$

Puisque $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\frac{2i}{1+i} = 1+i$, ceci est équivalent à

$$|z-(1+i)| = \sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des points M correspondants est le cercle de centre le point $A(1,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 5. Soient $n \geqslant 1$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.
2. Soit $p \geqslant 0$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}.$$
3. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = 2n.$$

Solution de l'exercice 5. 1. Les racines n-ièmes de l'unité sont les complexes ω^k, avec $k = 0, ..., n-1$. Leur produit vaut donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}.$$

2. On a ici une somme géométrique de raison ω^p. Si p est un multiple de n, la raison est donc égale à 1, et la somme fait n. Sinon, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

puisque $\omega^n = 1$.

3. On développe la puissance à l'intérieur de la somme en utilisant la formule du binôme de Newton, et on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \omega^{kp} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}.$$

On utilise le résultat de la question précédente : la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = 0$$

sauf si $p = 0$ ou si $p = n$. Dans ce cas, cette somme vaut n. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = \binom{n}{0} n + \binom{n}{n} n = n + n = 2n.$$