Corrigé - Colle 9 (Sujet 1)

BCPST1B

Année 2021-2022

30 novembre 2021

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+2}{x+1}\,dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,dx.$
4. $\displaystyle\int_2^3 \ln(x^2-1)\,dx.$

Solution de l'exercice 1.

1. On remarque qu'en posant $u(x)=\ln(x)$, on a $u'(x)=\frac{1}{x}$, de sorte que $f(x)=u'(x)\,u(x)$ et donc

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

2. On a

$$\int_2^3 \frac{x+2}{x+1}\,dx = \int_2^3 1+\frac{1}{x+1}\,dx = [x+\ln(|x+1|)]_2^3 = 3+\ln(4)-(2+\ln(3)) = 1+\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

3. Dans le cas où, comme ici, intervient une fonction polynôme, on fait en général des i.p.p. (intégrations par parties) successives, en dérivant à chaque étape la fonction polynôme qui intervient, jusqu'à « annulation » de la partie polynomiale dans l'expression considérée. Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,\cos(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x)=x^2\,,\ \text{donc } u'(x)=2\,x \\ v(x)=\sin(x)\,,\ \text{donc } v'(x)=\cos(x) \end{cases}$$
$$= \left[x^2\,\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin(x)\,dx.$$

On refait une i.p.p. pour calculer la dernière primitive :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x)=x\,,\ \text{donc } u'(x)=1 \\ v(x)=-\cos(x)\,,\ \text{donc } v'(x)=\sin(x) \end{cases}$$
$$= [-x\,\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx.$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\,dx = \left[x^2 \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left[-x\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

4. On voit la fonction g comme le produit de la fonction g et de la fonction constante égale à 1.

$$\begin{aligned}\int_2^3 \ln(x^2-1)\,dx &= \int_2^3 u(x)v'(x)\,dx \qquad \text{avec } u(x)=\ln(x^2-1), v(x)=x\\ &= \left[x\ln(x^2-1)\right]_2^3 - \int_2^3 x\frac{2x}{x^2-1}\,dx\end{aligned}$$

Puis on écrit

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \frac{x^2-1+1}{x^2-1}\,dx &= \int_2^3 \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx\\ = 1+\frac{1}{2}\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+x}\right)dx &= 1+\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]_2^3\end{aligned}$$

pour conclure que

$$\int_2^3 \ln(x^2-1)\,dx = 3\ln(8)-2\ln(3)-2-(\ln(2)-\ln(4)+\ln(3)) = 3\ln(8)+\ln(4)-3\ln(3)-\ln(2)-2.$$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire un programme Python renvoyant la liste des valeurs de u_n pour $n \in \{0, ..., N\}$.
2. Étant donné un nombre M, écrire un programme Python renvoyant le premier entier n tel que $u_n > M$.

Solution de l'exercice 2. 1. On a

Algorithme 1 : Calcul de u_n

Entrées : Un entier n

Sorties : u_n.

$u = u_0$;

$L = []$;

pour k *de* 0 *à* n **faire**

  $u = u^2$;

  $L = L + u$

fin

retourner u

2. On a

Algorithme 2 : Premier rang pour lequel u_n dépasse M

Entrées : Un nombre M

Sorties : n le premier rang tel que $u_n > M$.

```
u = u_0 ;
n = 0 ;
tant que u ⩽ M faire
    u = u^2 ;
    n = n + 1;
fin
retourner n
```

Exercice 3. Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un nombre réel positif.

Solution de l'exercice 3. On commence par écrire $1+i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle : $1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$. En prenant la puissance n-ième, on obtient $(1+i\sqrt{3})^n = 2^n e^{\frac{in\pi}{3}}$. Ceci est un réel positif si et seulement si $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ et $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \geqslant 0$. Or, $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ si et seulement si $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais, pour ces valeurs de n, on a $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \cos(k\pi)$, et ceci est positif si et seulement si k est pair. Ainsi, les entiers qui conviennent sont les multiples de 6.

Exercice 4. Calculer

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx.$$

Solution de l'exercice 4. On procède au changement de variable $t = \sqrt{x}$. Alors, $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ et $x = t^2$. Ainsi,

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,2dt = 2[\arctan(t)]_0^{\sqrt{3}} = 2(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(0)) = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 5. Soient $a, b \in]0,\pi[$. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$.

Solution de l'exercice 5. On a

$$z = \frac{(e^{-\frac{ia}{2}} + e^{\frac{ia}{2}})e^{\frac{ia}{2}}}{(e^{-\frac{ib}{2}} + e^{\frac{ib}{2}})e^{\frac{ib}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{\frac{ia}{2}}}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)e^{\frac{ib}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)}e^{\frac{i(a-b)}{2}}.$$

De plus, $\cos\left(\frac{a}{2}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{b}{2}\right) > 0$ car a, $b \in]0,\pi[$ et $-\frac{\pi}{2} < \frac{a-b}{2} < \frac{\pi}{2}$ et on a donc bien obtenu l'écriture trigonométrique du complexe.