Colle 4 - Seth DUNCAN

MPSI2
Année 2021-2022

12 octobre 2021

Question de cours . Démontrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Exercice 1. Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Solution de l'exercice 1. On pose, pour $x \geqslant 0$,

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \geqslant 0.$$

Ainsi, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. De plus, $f(0) = 0$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 0$ ce qui entraîne $\ln(1+x) \leqslant x$.
Pour démontrer l'autre inégalité, on introduit cette fois la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0.$$

g est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) \geqslant 0$, donc pour tout $x \geqslant 0$,

$$g(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x).$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

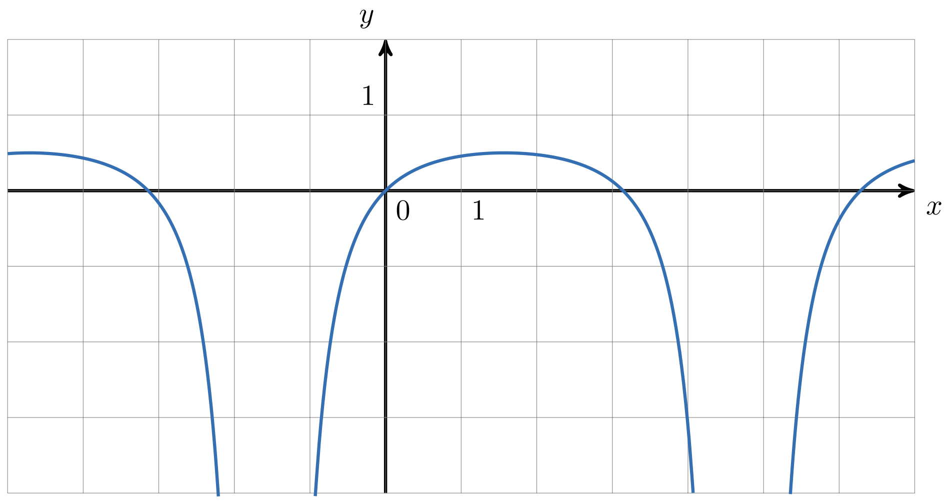
1. Quel est le domaine de définition de f ? Vérifier que f est 2π-périodique.
2. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que dire sur Γ ?
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis déterminer la limite de f en $-\frac{\pi}{2}$.
4. Construire Γ à l'aide des renseignements précédents.

Solution de l'exercice 2.

1. $f(x)$ est défini partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour tout les x avec $\sin(x) \neq -1$. Le domaine de définition de f est donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   De plus, la 2π-périodicité de sin entraîne facilement la 2π-périodicité de f.
2. De $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, on déduit que $f(\pi - x) = f(x)$. Ceci signifie que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de Γ.
3. Posons $g(x) = \frac{x}{x+1}$ et $h(x) = \sin(x)$. On a $f = g \circ h$. De plus, h est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont l'image est $]-1, 1]$. La fonction g est elle croissante sur l'intervalle $]-1, 1]$ (par exemple, on peut écrire $g(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$. Par composition, f est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   De plus, on a $\sin(x) \to -1^+$ lorsque x tend vers $-\frac{\pi}{2}$ et $g(x) \to -\infty$ lorsque $x \to -1^+$. Ainsi, par composition de limites, f tend vers $-\infty$ en $-\frac{\pi}{2}$.
4. On construit d'abord γ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On la déduit sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$. Enfin, on l'obtient sur $\mathbb{R}$ par périodicité de période 2π, et donc par des translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. On obtient :



Exercice 3. Démontrer que pour tous réels x et y, on a

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Solution de l'exercice 3. Une rapide étude montre que la fonction $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. Puisque $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, on en déduit que

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Exercice 4. Trouver les couples $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ tels que

$$x^y = y^x \quad \text{et} \quad x^2 = y^3.$$

Solution de l'exercice 4. On écrit

$$y^x = (y^3)^{\frac{x}{3}} = x^{\frac{2x}{3}} = x^y,$$

ce qui s'écrit encore

$$e^{\frac{2x}{3}\ln(x)} = e^{y\ln(x)}.$$

Prenant le logarithme, cela donne

$$\frac{2x}{3}\ln(x) = y\ln(x).$$

On en déduit que, soit $\ln(x)=0$ et donc $x=y=1$, soit on a $y=\frac{2x}{3}$, ce qui donne $x^2=\frac{27}{8}x^3$. La seule solution dans $]0,+\infty[$ est $x=\frac{27}{8}$ et donc $y=\frac{9}{4}$. Les solutions de l'équation sont donc les couples $(1,1)$ et $\left(\frac{27}{8},\frac{9}{4}\right)$.

Exercice 5. Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

Solution de l'exercice 5. Pour $x>0$, posons

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

de sorte que $\sqrt[n]{n} = f(n)$. f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}e^{\frac{\ln(x)}{x}}.$$

Pour $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$, donc $f'(x)>0$ si $x \in]0,e[$ et $f'(x)<0$ si $x \in]e,+\infty[$. Puisque $3>e$, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $[3,+\infty[$. En particulier, pour $n \geqslant 3$, on a $f(n) \geqslant f(3)$, et donc la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ est atteinte pour $n=2$ ou pour $n=3$. Comme $\sqrt{2} \simeq 1,41$ et $\sqrt[3]{3} \simeq 1,44$ la valeur maximale vaut $\sqrt[3]{3}$.