

Colle 2 - Solenne ARNAUD

MPSI2

Année 2021-2022

28 septembre 2021

Question de cours . Démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 1. Simplifier l'expression suivante :

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) .$$

Exercice 2. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.

Exercice 3. Soient p, q et m trois entiers naturels avec $q \leq p \leq m$. Démontrer que

$$\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \binom{m-q}{p-k}$$

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 3n$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note

$$a_n = \sum_{k=1}^n k \quad , \quad b_n = \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^n k^3 .$$

On admet que

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad c_n = a_n^2 .$$

1. Calculer

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij.$$

2. Calculer

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j).$$