Corrigé - Colle 3 (Sujet 1)

BCPST1B
Année 2021-2022

5 octobre septembre 2021

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$|x-2| - 2|x+1| = 0.$$

Solution de l'exercice 1. On procède par disjonction de cas pour se débarasser des valeurs absolues. Ainsi,

- **Si** $x < -1$ **:** Alors $|x-2| = -(x-2)$ et $|x+1| = -(x+1)$ et donc

$$|x-2| - 2|x+1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x+2+2(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

  et -4 vérifie bien la condition $x < -1$.

- **Si** $-1 \leqslant x \leqslant 2$ **:** Alors $|x-2| = -(x-2)$ et $|x+1| = x+1$ et donc

$$|x-2| - 2|x+1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x+2-2(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

  et 0 vérifie bien la condition $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

- **Si** $x > 2$ **:** Alors $|x-2| = x-2$ et $|x+1| = x+1$ et donc

$$|x-2| - 2|x+1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2-2(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x-4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

  mais -4 ne satisfait pas la condition $x > 2$. Nous ne tenons donc pas compte de cette solution.

Finalement, nous avons montré que les solutions de l'équation $|x-2| - 2|x+1| = 0$ sont -4 et 0.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{2x-3} < 0.$$

Solution de l'exercice 2. On commence par remarquer que la première racine n'est définie que pour $x(x-2) \geqslant 0$, i.e. pour $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ et la deuxième racine carrée n'est quant à elle définie seulement pour $2x-3 \geqslant 0$, i.e. pour $x \geqslant \frac{3}{2}$. Ainsi, notre inéquation n'a de sens que pour $x \in [2, +\infty[$. On utilise à présent la multiplication par la quantité conjuguée (qui est strictement positive (car elle est positive ou nulle et nous venons de voir que les deux racines ne peuvent s'annuler simultanément) et ne change donc pas l'inégalité) :

$$\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-3})}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-3}}<0.$$

Or,

$$(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-3}) = x^2-2x+-2x+3 = x^2-4x+3.$$

Ainsi,

$$\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x-3}}<0.$$

Or, le dénominateur est strictement positif, donc

$$\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+3<0.$$

Or, le trinôme x^2-4x+3 a pour discriminant $\Delta = 16-12 = 4$ et possède donc deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Ainsi, il est strictement négatif si et seulement si $x \in]1,3[$. On rappelle que l'on travaille pour $x \geqslant 2$ et conclut donc que

$$\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2,3[.$$

Exercice 3. Trouver toutes les solutions réelles de l'équation suivante :

$$2\ln(x)+\ln(2x-1) = \ln(2x+8)+2\ln(x-1)\ .$$

Solution de l'exercice 3. On commence par remarquer que cette égalité n'est bien définie que pour $x>1$ car ln n'est bien définie que sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus,

$$2\ln x+\ln(2x-1) = \ln(2x+8)+2\ln(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2)+\ln(2x-1) = \ln(2x+8)+\ln((x-1)^2)$$

et, toujours en utilisant les propriétés de la fonction ln,

$$2\ln x+\ln(2x-1) = \ln(2x+8)+2\ln(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2(2x-1)) = \ln((2x+8)(x-1)^2).$$

Ainsi, après calcul on arrive à l'inéquation

$$\ln(2x^3-x^2) = \ln(2x^3+4x^2-14x+8).$$

On applique alors la fonction exponentielle et on obtient

$$2x^3-x^2 = 2x^3+4x^2-14x+8 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2-14x+8=0.$$

Or, le discriminant de ce trinôme est donné par $\Delta = 196-160 = 36$ et les racines de ce trinôme sont

donc
$$x_1 = \frac{14 - \sqrt{36}}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{14 + \sqrt{36}}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$
Or, $x_1 \leqslant 1$ donc la seule solution de l'équation étudiée est $x = 2$.

Exercice 4. Résoudre l'équation
$$\sin(x)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2.$$

Solution de l'exercice 4. On commence par rappeler que $\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$. Ainsi,
$$\sin(x)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \;\Leftrightarrow\; 1 - \cos(x)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \;\Leftrightarrow\; \cos(x)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) + 1 = 0.$$
On a donc un trinôme en $X = \cos(x)$. De plus,
$$\Delta = \frac{9 \times 2}{4} - 4 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2} > 0$$
donc il y a deux solutions,
$$X_1 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2}.$$
Or, $\cos(x) = \sqrt{2}$ n'a pas de solution. Finalement, on a donc
$$\sin(x)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Exercice 5. Résoudre l'équation
$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x.$$

Solution de l'exercice 5. Remarquons d'abord que cette équation n'a de sens que sur $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle, en passant par l'écriture exponentielle des puissances, on a
$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}).$$
On arrive donc à
$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\ln(x) = \frac{1}{2}x\ln(x).$$
On obtient donc $\ln(x) = 0$ ou $x = 2\sqrt{x}$. Ainsi, les solutions sont $x = 1$ et $x = 4$.