Corrigé - Colle 7 (Sujet 2)

BCPST1B
Année 2021-2022

16 novembre 2021

Exercice 1 (3 points)**.** Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(n) = 2n$ et

$$g : n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. La fonction f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier.
3. La fonction g est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier.

Solution de l'exercice 1.

1. On a

$$(g \circ f)(n) = g(2n) = \frac{2n}{2} = n$$

car $2n$ est pair. De plus, si n est pair,

$$(f \circ g)(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) = 2 \times \frac{n}{2} = n$$

et si n est impair,

$$(f \circ g)(n) = f(0) = 0.$$

2. f n'est pas surjective, car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises par f. En revanche, f est injective car si $f(n) = f(m)$, on a $2n = 2m$ et donc $n = m$. Puisqu'elle n'est pas surjective, f n'est donc pas bijective.
3. g n'est pas injective, car $g(1) = g(3) = 0$ alors que $1 \neq 3$. En revanche, g est surjective. Prenons en effet m n'importe quel entier naturel. Alors, $2m$ est pair et $g(2m) = \frac{2m}{2} = m$. Puisqu'elle n'est pas injective, g n'est donc pas bijective.

Exercice 2. Ecrire un programme Python permettant de calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^5.$$

Solution de l'exercice 2. On a

Algorithme 1 : Calcul de S_n

Entrées : Un entier n

Sorties : S_n.

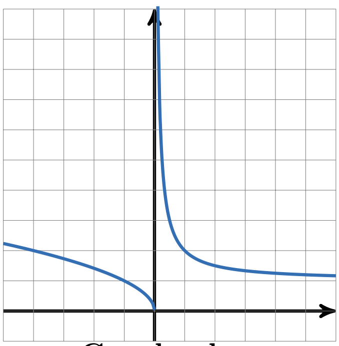
$S = 0$;
pour k *de* 0 *à* n **faire**
  $S = S + k^5$
fin
retourner S

Exercice 3. 1. Représenter graphiquement la fonction suivante sur son domaine de définition :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

2. Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes concernées :
   (a) Donner $g(]0, 2])$ et $g([1, +\infty[)$.
   (b) $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ est-elle surjective ? injective ? Déterminer deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset [0, +\infty[$ tels que $g : I \to J$ soit bijective.

Solution de l'exercice 3. 1. On a



Graphe de g

2. (a) $g(]0, 2]) = [2, +\infty[$ et $g([1, +\infty[) =]1, 2]$.
   (b) g est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$. En effet, si $y \in [0, +\infty[$ alors $g(-y^2) = \sqrt{-(-y^2)} = \sqrt{y^2} = y$ car $y \geqslant 0$. En revanche, g n'est pas injective, par exemple car $g(-4) = 2 = g(1)$. g est, par exemple, bijective de $]0, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$.

Exercice 4. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1}.

Solution de l'exercice 4. La première chose à remarquer est que f s'écrit plus facilement

$$f(x) = e^{2x} + 2e^x.$$

Soit $y > 0$. Alors on a

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} + 2e^x - y = 0.$$

On pose alors $X = e^x$ et l'équation est équivalente à l'équation du second degré

$$X^2 + 2X - y = 0$$

dont les racines sont

$$X_1 = -1 - \sqrt{1+y} \quad \text{et} \quad X_2 = -1 + \sqrt{1+y}.$$

Mais $e^x > 0$, et donc on a

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^x = -1 + \sqrt{1+y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(-1 + \sqrt{1+y}).$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc toujours une unique solution. La fonction f est bijective et

$$f^{-1}(y) = \ln(-1 + \sqrt{1+y}).$$

Exercice 5. Déterminer tous les couples (n, p) d'entiers naturels non nuls tels que $n^p = p^n$ et $n \neq p$.

Solution de l'exercice 5. Le point de départ est de remarquer que

$$n^p = p^n \quad \Leftrightarrow \quad p\ln(n) = n\ln(p) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(p)}{p}.$$

Ceci nous amène à étudier la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Cette fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

La fonction est donc strictement croissante sur $[1, e]$, et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Si les entiers naturels (n, p) vérifient $f(n) = f(p)$, l'un de ces deux entiers, disons n, doit être dans $[1, e]$, et l'autre doit être dans $[e, +\infty[$. Or, dans $[1, e]$, il n'y a que deux entiers : $n = 1$ et $n = 2$. Pour $n = 1$, $f(1) = 0$, et la valeur nulle n'est pas prise par la fonction f sur $[e, +\infty[$. Pour $n = 2$, on a $f(2) = \frac{\ln(2)}{2} = f(4)$. La seule solution pour cette équation est donc $2^4 = 4^2$.