Corrigé - Colle 2 (Sujet 3)

MPSI2
Année 2021-2022

28 septembre 2021

Exercice 1. Simplifier l'expression suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) .$$

Solution de l'exercice 1. C'est une somme télescopique. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(k+1\right) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) .$$

Exercice 2. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.

Solution de l'exercice 2. Raisonnons par analyse-synthèse.

1. **Analyse :** Soit x un solution de l'équation. Alors, par définition de la racine carré on a forcément $x \in]-\infty, 2]$. De plus, on doit avoir $x \geqslant 0$ car la racine carrée est positive et $x = \sqrt{2-x}$. Ainsi, $x \in [0, 2]$. Elevons maintenant au carré l'égalité en question. Si x est solution, il satisfait alors

$$2 - x = x^2.$$

   Autrement dit $x^2 + x - 2 = 0$. La résolution de cette équation du second degré donne $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$. Seul x_1 est dans l'intervalle $[0, 2]$. La seule solution possible est donc 1.

2. **Synthèse :** Prouvons que $x = 1$ est solution de l'équation. En effet, $\sqrt{2-1} = 1$.

En conclusion, la seule solution de cette équation est 1.

Exercice 3. Soient p, q et m trois entiers naturels avec $q \leqslant p \leqslant m$. Démontrer que

$$\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{m-q}{p-k}$$

Solution de l'exercice 3. Soit $x \in \mathbb{C}$. On cherche de deux manières possibles la valeur du coefficient devant x^p dans $(1+x)^m$. Par le binôme de Newton, ce coefficient est égal à $\binom{m}{p}$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= (1+x)^q(1+x)^{m-q}\\ &= \left(\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}x^j\right)\left(\sum_{l=0}^{m-q}\binom{m-q}{l}x^j\right)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n = 3n$.

Solution de l'exercice 4. On procède par récurrence forte.

- **Annonce :** Pour tout entier naturel non nul n, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par : $u_n = 3n$.
- **Initialisation :** Pour $n = 1$, $u_1 = 3 = 3n$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ quelconque, on suppose que $\mathcal{P}(1)$, ..., $\mathcal{P}(n)$ sont vraies. Alors,

  $$u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 3k = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{6}{n}\frac{n(n+1)}{2}.$$

  On en déduit que $u_{n+1} = 3(n+1)$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :** Par le principe de récurrence forte, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k \quad , \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 \ .$$

On admet que

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad c_n = a_n^2.$$

1. Calculer
   $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant i \leqslant n} ij.$$
2. Calculer
   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j).$$

Solution de l'exercice 5. 1. On a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant i\leqslant n} ij &= \sum_{j=1}^{n} j\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} j a_j\\ &= \sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3+j^2\\ &= \frac{b_n+c_n}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.\end{aligned}$$

2. Posons, pour i fixé, $S_i = \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$ et commençons par calculer la valeur de S_i. Alors, on a

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i = \left(n+\frac{1}{2}\right)i - \frac{i^2}{2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n} S_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(n+\frac{1}{2}\right)i - \frac{i^2}{2}\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$