Corrigé - Colle 5 (Sujet 3)

BCPST1B
Année 2021-2022

19 octobre 2021

Exercice 1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution de l'exercice 1.

- **Annonce :** Prouvons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

La propriété est donc vraie au rang 1.

- **Hérédité :** Supposons que la propriété est vraie à un certain rang n. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Or,

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

La propriété est donc vrai au rang $n+1$.

- **Conclusion :** On a donc montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1} = 0,85 u_n + 1,8.$$

Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution de l'exercice 2. On pose $v_n = u_n - 12$. Alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-12}{u_n-12} = \frac{0,85u_n - 10,8}{u_n - 12} = 0,85 \times \frac{u_n-12}{u_n-12} = 0,85$$

donc (v_n) est géométrique de raison $0,85$. Ainsi,

$$v_n = v_0 \times (0,85)^n = (u_0 - 12) \times (0,85)^n = -4 \times (0,85)^n$$

et finalement

$$u_n = v_n + 12 = 12 - 4 \times (0,85)^n$$

et u_n converge vers 12.

Exercice 3.

1. Démontrer que, pour tout entier n, on a

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n.$$

2. Démontrer que, pour tout entier n, on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = 0.$$

Solution de l'exercice 3.

1. Pour tout entier n, on a $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p} 2^p = (1+2)^n$.
2. On a

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} 2^k$$

car pour tout entier k, k et $2n-k$ ont même parité, ce qui nous donne

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2}(-1+2)^{2n} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit alors que

$$\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} - \frac{1}{2} = 0\ .$$

Exercice 4. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Démontrer que
$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k k.$$

Solution de l'exercice 4. 1. on pose $A_{-1} = 0$ et on a alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=0}^{n}(A_k - A_{k-1})B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k \ .\end{aligned}$$

2. On pose $a_k = 2^k$ et $B_k = k$. Alors $A_n = 2^{n+1} - 1$ et $b_k = 1$. On en déduit que
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k2^k &= (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1}(Z^{k+1} - 1) \\ &= (2^{n+1} - 1)n - 2(2^n - 1) + n \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2 \ .\end{aligned}$$