Corrigé - Colle 4 (Sujet 3)

BCPST1B
Année 2021-2022

12 octobre 2021

Exercice 1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$1+2+...+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution de l'exercice 1.

- **Annonce :** Prouvons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Initialisation :** Pour $n=1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} k=1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1.$$

  La propriété est donc vraie au rang 1.

- **Hérédité :** Supposons que la propriété est vraie à un certain rang n. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k=\sum_{k=1}^{n} k+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1).$$

  Or,

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n^2+n}{2}+\frac{2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

  La propriété est donc vrai au rang $n+1$.

- **Conclusion :** On a donc montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1}=0,85u_n+1,8.$$

Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution de l'exercice 2. On pose $v_n = u_n - 12$. Alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 12}{u_n - 12} = \frac{0,85u_n - 10,8}{u_n - 12} = 0,85 \times \frac{u_n - 12}{u_n - 12} = 0,85$$

donc (v_n) est géométrique de raison $0,85$. Ainsi,

$$v_n = v_0 \times (0,85)^n = (u_0 - 12) \times (0,85)^n = -4 \times (0,85)^n$$

et finalement

$$u_n = v_n + 12 = 12 - 4 \times (0,85)^n$$

et u_n converge vers 12.

Exercice 3. Résoudre l'équation

$$\sin(x)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2.$$

Solution de l'exercice 3. On commence par rappeler que $\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$. Ainsi,

$$\sin(x)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \;\Leftrightarrow\; 1 - \cos(x)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \;\Leftrightarrow\; \cos(x)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) + 1 = 0.$$

On a donc un trinôme en $X = \cos(x)$. De plus,

$$\Delta = \frac{9 \times 2}{4} - 4 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2} > 0$$

donc il y a deux solutions,

$$X_1 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2}.$$

Or, $\cos(x) = \sqrt{2}$ n'a pas de solution. Finalement, on a donc

$$\sin(x)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Exercice 4. On définit la suite de Fibonacci par :

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geqslant n$.

Solution de l'exercice 4. Montrons par récurrence double que la propriété (P_n) : $F_n \geqslant n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** On a $F_0 = 1 \geqslant 0$ et $F_1 = 1 \geqslant 1$ donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.
- **Hérédité.** Soit $n \geqslant 0$ un entier fixé. Supposons que la propriété est vraie au rang n et $n+1$, i.e. que
$$F_n \geqslant n \quad \text{et} \quad F_{n+1} \geqslant n+1.$$
Montrons que la propriété est vraie au rang $n+2$. On a, grâce à l'hypothèse de récurrence,
$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \geqslant n + (n+1).$$
Or, $n \geqslant 1$ et on a donc montré que
$$F_{n+2} \geqslant 1 + (n+1) = n+2.$$
Ceci achève de démontrer que la propriété est vraie au rang $n+2$.
- **Conclusion.** On a donc bien démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geqslant n$.

Exercice 5. La suite
$$u_n = \sqrt{n} \ln \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} \right)^n$$
converge-t-elle vers une valeur réelle lorsque n tend vers $+\infty$. Si non, pourquoi, si oui, vers quelle valeur ?

Solution de l'exercice 5. On utilise des propriétés fonctionnelles du logarithme, puis on factorise par $\sqrt{n}$ dans le logarithme. Il vient
$$u_n = \sqrt{n} \ln(\sqrt{n}+1) - \sqrt{n} \ln(\sqrt{n}-1)$$
et donc
$$u_n = \sqrt{n} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln(\sqrt{n}) \right) - \sqrt{n} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln(\sqrt{n}) \right).$$
Finalement,
$$u_n = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$
Or, $\frac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0 (dérivée de la fonction logarithme). On en déduit donc que la suite (u_n) converge vers 2.