Colle 2 - Jules MONTELEONE

BCPST1B
Année 2021-2022

28 septembre 2021

Exercice 1. Soient a et b deux nombres réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant \sqrt{x+y}.$$

Solution de l'exercice 1. On note que puisque $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$ sont des nombres positifs,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geqslant (\sqrt{a+b})^2.$$

Ainsi,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b} \quad \Leftrightarrow \quad a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geqslant a + b \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$$

ce qui est vrai. On a donc démontré le résultat voulu.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$|x-2| - 2|x+1| - 3|x| = 0.$$

Solution de l'exercice 2. On procède par disjonction de cas :

- **Si** $x < -1$ **:** Alors $|x-2| = -(x-2)$, $|x+1| = -(x+1)$ et $|x| = -x$ et donc

  $$|x-2| - 2|x+1| - 3|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2 + 2(x+1) + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

  mais -1 ne satisfait pas la condition $x < -1$. Nous ne tenons donc pas compte de cette solution.

- **Si** $-1 \leqslant x \leqslant 0$ **:** Alors $|x-2| = -(x-2)$, $|x+1| = x+1$ et $|x| = -x$ et donc

  $$|x-2| - 2|x+1| - 3|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2 - 2(x+1) + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

  ce qui est vrai pour tout $x \in [-1, 0]$.

- **Si** $0 < x \leqslant 2$ **:** Alors $|x-2| = -(x-2)$, $|x+1| = x+1$ et $|x| = x$ et donc

  $$|x-2| - 2|x+1| - 3|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2 - 2(x+1) - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6x = 0$$

mais -1 ne satisfait pas la condition $0 < x \leqslant 2$. Nous ne tenons donc pas compte de cette solution.

- **Si** $x > 2$ **:** Alors $|x-2| = x-2$, $|x+1| = x+1$ et $|x| = x$ et donc

$$|x-2| - 2|x+1| - 3|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 - 2(x+1) - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

mais -1 ne satisfait pas la condition $x > 2$. Nous ne tenons donc pas compte de cette solution.

Finalement, nous avons montré que les solutions de l'équation $|x-2| - 2|x+1| - 3|x| = 0$ sont les x appartenant à l'intervalle $[-1, 0]$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \frac{-x+2}{x-3}.$$

Solution de l'exercice 3. Commençons par passer toute les termes à gauche de l'égalité. On obtient que

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \frac{-x+2}{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} + \frac{x-2}{x-3} \leqslant 0.$$

Or,

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x-2}{x-3} = \frac{x(x-3) + (x+1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x+1)(x-3)}.$$

Ce quotient sera donc négatif si et seulement si le numérateur et le dénominateur sont de signes opposés. Or, $2x^3 - 4x - 2$ est un trinôme dont le discriminant est donné par $\Delta = 16 + 16 = 32$ et il possède donc deux racines réelles distinctes données par

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{32}}{4} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{32}}{4} = 1 + \sqrt{2}.$$

Ainsi, ce trinôme est positif (du signe de 2) sauf entre les racines $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. Enfin, le dénominateur $(x+1)(x-3)$ est négatif si x est entre -1 et 3 et positif ailleurs (puisqu'il est alors le produit de deux nombres positifs). Notons alors

$$f(x) := \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x+1)(x-3)}, \quad f_1(x) = 2x^2 - 4x - 2 \quad \text{et} \quad f_2(x) = (x+1)(x-3).$$

On obtient alors en résumé le tableau de signe suivant :

x	0		-1		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0				$+$				
$x-3$					$-$				0	$+$	
$f_2(x)$		$+$	0			$-$			0	$+$	
$f_1(x)$			$+$		0	$-$	0		$+$		
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi, nous pouvons déduire que les solutions de notre inéquation, i.e. les x tels que

$$\frac{2x^2-4x-2}{(x+1)(x-3)} \leqslant 0$$

sont les x appartenant à l'ensemble $]-1, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, 3[$.

Exercice 4. Trouver les couples $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ tels que

$$x^y = y^x \quad \text{et} \quad x^2 = y^3.$$

Solution de l'exercice 4. On écrit

$$y^x = (y^3)^{\frac{x}{3}} = x^{\frac{2x}{3}} = x^y,$$

ce qui s'écrit encore

$$e^{\frac{2x}{3}\ln(x)} = e^{y\ln(x)}.$$

Prenant le logarithme, cela donne

$$\frac{2x}{3}\ln(x) = y\ln(x).$$

On en déduit que, soit $\ln(x) = 0$ et donc $x = y = 1$, soit on a $y = \frac{2x}{3}$, ce qui donne $x^2 = \frac{27}{8}x^3$. La seule solution dans $]0, +\infty[$ est $x = \frac{27}{8}$ et donc $y = \frac{9}{4}$. Les solutions de l'équation sont donc les couples $(1, 1)$ et $\left(\frac{27}{8}, \frac{9}{4}\right)$.