Corrigé - Colle 7 (Sujet 1)

MPSI2
Année 2021-2022

16 novembre 2021

Question de cours . Énoncer et démontrer le théorème donnant la description des solutions d'une équations différentielle linéaire homogène du premier ordre.

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle

$$7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Solution de l'exercice 1. On résout d'abord l'équation sans second membre $7y'+2y = 0$. La solution générale est de la forme $y(x) = Ke^{-\frac{2x}{7}}$ avec $K \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors P est une solution de l'équation si et seulement si

$$7(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ soit

$$2ax^3 + (21a + 2b)x^2 + (14b + 2c)x + (7c + 2d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification, on trouve que a,b,c et d sont solutions du système

$$\begin{cases} 2a & = 2 \\ 21a + 2b & = -5 \\ 14b + 2c & = 4 \\ 7c + 2d & = -1 \end{cases}.$$

On résout ce système et on trouve qu'une solution particulière est donné par $x^3 - 13x^2 + 93x - 326$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto x^3 - 13x^2 + 93x - 326 + Ke^{-\frac{2x}{7}} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x) - 4e^{x}\sin(2x).$$

Solution de l'exercice 2. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$, dont les racines sont $1+2i$ et $1-2i$. La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par

$$x \mapsto \lambda e^x\cos(2x) + \mu e^x\sin(2x) \quad \text{avec} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x).$$

On va plutôt résoudre $y'' - 2y' + 5y = e^{(-1+i)x}$ puis considérer les parties réelles et imaginaires. Comme $-1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une fonction de la forme $y_0(x) = ae^{(-1+i)x}$. On trouve, en dérivant et en utilisant l'équation

$$((-1+i)^2 - 2(-1+i) + 5)a = 1.$$

Il vient $a = \frac{1}{7-4i} = \frac{7+4i}{65}$. Une solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x)$ est alors donnée par

$$-4\mathrm{Re}(ae^{(-1+i)x}) + 7\mathrm{Im}(ae^{(-1+i)x}) = -4\mathrm{Im}(iae^{(-1+i)x}) + 7\mathrm{Im}(ae^{(-1+i)x})$$

et donc

$$\mathrm{Im}((-4i+7)ae^{(-1+i)x}) = \mathrm{Im}(e^{(-1+i)x}) = e^{-x}\sin(x).$$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 5y = -4e^x\sin(2x)$. On cherche de la même façon à résoudre $y'' - 2y' + 5y = -4e^{(1+2i)x}$. Comme $1+2i$ est solution de l'équation caractéristique, on va chercher une solution sous la forme $axe^{(1+2i)x}$, dont on prendra ensuite -4 fois la partie imaginaire. On trouve finalement que $xe^x\cos(2x)$ est solution de $y''-2y'+5y = -4e^x\sin(2x)$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont les fonctions de la fonction

$$x \mapsto xe^x\cos(2x) + e^{-x}\sin(x) + \lambda e^x\cos(2x) + \mu e^x\sin(2x) \quad \text{avec} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle

$$y' - 2xy = -(2x-1)e^x \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 3. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - 2xy = 0$. On a

$$y' - 2xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \ln(|y|) = x^2 + C,$$

et donc la solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda e^{x^2}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve

$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x+1)e^x \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}.$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = e^{-x^2+x}$ et donc une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2} = e^x.$$

Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$.

Exercice 4. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Solution de l'exercice 4. Soit f une solution de l'équation. On sait qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que f est solution de $f' + f = C$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $f : x \mapsto C + De^{-x}$. Mais on doit aussi avoir $f(0) + f(1) = C$, et donc

$$2C + D(1 + e^{-1}) = C \quad \Leftrightarrow \quad C = -D(1 + e^{-1}).$$

Ainsi, si f est solution de l'équation, il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = -D(1 + e^{-1}) + De^{-x}.$$

Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions sont bien solutions de l'équation de départ.

Exercice 5. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

Montrer que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Solution de l'exercice 5. On pose $g = f + f'$. Alors f est solution de l'équation différentielle $f + f' = g$. On résout cette équation. L'équation homogène est $f' + f = 0$ dont la solution générale est donnée par λe^{-x}. On résout l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante : en posant $f(x) = \lambda(x)e^{-x}$, on trouve

$$\lambda'(x)e^{-x} = g(x),$$

et une solution particulière est donnée par

$$f_0(x) = e^{-x} \int_0^x g(t)e^t \, dt.$$

Finalement, toute fonction f vérifiant $f+f'=g$ s'écrit

$$f(x)=\lambda e^{-x}+e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,dt.$$

Pour montrer que f tend vers 0 en $+\infty$, il suffit de prouver que $e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on va utiliser que g tend vers 0 en $+\infty$, et on va couper l'intégrale en 2. Voici l'idée. Soit $A>0$ arbitraire pour le moment. Alors, pour $x\geqslant A$, on a

$$\left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,dt\right|\leqslant e^{-x}\int_0^A |g(t)e^t|\,dt+e^{-x}\int_A^x |g(t)e^t|\,dt.$$

- Si A est fixé, alors on peut rendre le premier terme petit en choisissant x suffisamment grand.
- Sur $[A;x]$, on peut rendre $|g(t)|$ petit à condition d'avoir choisi A assez grand, ce qui nous permettra de rendre le deuxième terme petit.

Reste à effectuer cette démarche dans le bon ordre. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $A>0$ tel que, pour $t>A$, on a $|g(t)|\leqslant\varepsilon$. Soit $M=\int_0^A|g(t)e^t|\,dt$ et soit $B\geqslant A$ tel que, pour $x\geqslant B$, on a $e^{-x}M\leqslant\varepsilon$. Alors, pour tout $x\geqslant B$, il vient

$$\left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,dt\right|\leqslant e^{-x}\int_0^A |g(t)e^t|\,dt+e^{-x}\int_A^x |g(t)e^t|\,dt\leqslant e^{-x}M+e^{-x}\int_A^x \varepsilon e^t\,dt\leqslant 2\varepsilon.$$

On a bien prouvé que $f(x)\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.