

[5cm]

---

# Mathématiques pour le P.A.S.S 1

---

FILIÈRE : P.A.S.S.  
ANNÉE : L1.

DAMIEN GOBIN  
Mail : [damien.gobin@univ-nantes.fr](mailto:damien.gobin@univ-nantes.fr)

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray  
Université de Nantes

Année académique 2021-2022

**Question de cours**

Ceci est une question de cours

**Exercice 0.0.1**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathbb{U}_n$  l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|.$$

**Solution 0.0.2**

Soit  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  et soit  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ . Alors

$$|\omega_k - 1| = |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{i0}| = 2 \left| \sin \left( \frac{k\pi}{n} \right) \right|$$

en factorisant par l'angle moitié. De plus, pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$  et le sinus est positif. On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1| &= 2 \sum_{z \in \mathbb{U}_n} \sin \left( \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= 2 \operatorname{Im} \left( \sum_{z \in \mathbb{U}_n} e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \\ &= 2 \operatorname{Im} \left( 1 \times \frac{1 - e^{i\pi}}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} \right) \\ &= 4 \operatorname{Im} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} \right) \\ &= 4 \operatorname{Im} \left( \frac{1}{-2i \sin \left( \frac{\pi}{2n} \right) e^{\frac{i\pi}{2n}}} \right) \\ &= 2 \operatorname{Im} \left( \frac{ie^{\frac{-i\pi}{2n}}}{\sin \left( \frac{\pi}{2n} \right)} \right) \\ &= 2 \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2n} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2n} \right)}. \end{aligned}$$