Corrigé - Colle 6 (Sujet 2)

BCPST1B
Année 2021-2022

9 novembre 2021

Exercice 1. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer l'image de f, i.e. $f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'application f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$?

Solution de l'exercice 1.

1. L'ensemble de définition de f est l'ensemble des points x tels que $x^2 + x - 2 \geqslant 0$. Or, $x^2 + x - 2$ est un trinôme dont le discriminant est $\Delta = 9$ et dont les racines sont donc $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. De plus, $x^2 + x - 2$ est positif sauf entre les racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.
2. L'image de f est donnée par $f(\mathcal{D}_f) = [0, +\infty[$ (car le trinôme s'annule en -2 et en 1, $x^2+x-2 \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et la fonction racine est continue sur $\mathbb{R}^+$).
3. Non, l'application f n'est pas injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$. En effet, $f(-2) = f(1) = 0$.

Exercice 2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
2. En déduire la valeur de
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k.$$

Solution de l'exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $x = 1$, alors $S_n = n$. Si $x \neq 1$, la somme S_n est la somme des n premier termes d'une suite géométrique d'où
$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \ .$$
2. Pour tout n et pour tout x, S_n est une fonction dérivable (c'est un polynôme) donc, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x \neq 1$
$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (k-1)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?
2. Démontrer que pour tout réel non-nul x, on a $P_n(x) = \dfrac{x+n}{x} P_n(x-1)$.
3. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, écrire $P_n(p)$ comme un coefficient binomial.

Solution de l'exercice 3. 1. On a $P_n(0) = 1$ (on ne fait que des produits de 1), $Pn(-n) = 0$, car alors $1 + \frac{-n}{n} = 0$ et donc on a un terme nul dans le produit. Enfin,

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2 \times 3 \times ... \times (n+1)}{1 \times 2 \times ... \times n} = n + 1.$$

2. On a
$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} = \frac{(x+1)(x+2)...(x+n)}{1 \times 2 \times ... \times n} = \frac{x+n}{P}_n(x-1).$$

3. On a
$$P_n(p) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+p}{k} = \frac{(p+1)...(p+n)}{n!} = \frac{(n+p)!}{n!p!} \binom{n+p}{p}.$$

Exercice 4. Soient n et p deux entiers tels que $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant p \leqslant n$.

1. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant p+1$,
$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

2. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Solution de l'exercice 4. 1. On rappelle que

$$\binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}.$$

Ainsi,
$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)!}{(p+1)!(k+1-(p+1))!} - \frac{k!}{(p+1)!(k-(p+1))!}$$

et donc
$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)!}{(p+1)!(k-p)!} - \frac{k!}{(p+1)!(k-p-1)!}.$$

On met donc sur le même dénominateur et on obtient

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)! - k!(k-p)}{(p+1)!(k-p)!} = \frac{k!(k+1-(k-p))}{(p+1)!(k-p)!} = \frac{k!(p+1)}{(p+1)!(k-p)!}.$$

On arrive donc bien à

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{k}{p}.$$

2. On note que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right)$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} &= 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p} \\
&= 1 + \left(\binom{p+2}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \right) + \left(\binom{p+3}{p+1} - \binom{p+2}{p+1} \right) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \left(\binom{n}{p+1} - \binom{n-1}{p+1} \right) + \left(\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1} \right) \\
&= 1 + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \\
&= \binom{n+1}{p+1}.
\end{aligned}$$