Corrigé - Colle 1 (Sujet 1)

MPSI2
Année 2021-2022

21 septembre 2021

Question de cours . Démontrer l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.

Exercice 1. Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un nombre réel positif.

Solution de l'exercice 1. On commence par écrire $1+i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle : $1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$. En prenant la puissance n-ième, on obtient $(1+i\sqrt{3})^n = 2^n e^{\frac{in\pi}{3}}$. Ceci est un réel positif si et seulement si $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ et $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \geqslant 0$. Or, $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ si et seulement si $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais, pour ces valeurs de n, on a $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \cos(k\pi)$, et ceci est positif si et seulement si k est pair. Ainsi, les entiers qui conviennent sont les multiples de 6.

Exercice 2. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation
$$\arg(iz) = \frac{\pi}{4} \quad [\pi].$$
2. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation
$$\frac{|z-3+i|}{|z+5-2i|} = 1.$$

Solution de l'exercice 2.

1. On a
$$\arg(iz) = \arg(i) + \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \arg(z) \quad [2\pi].$$
Ainsi,
$$\arg(iz) = \frac{\pi}{4} \quad [\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = -\frac{\pi}{4} \quad [\pi].$$
L'ensemble recherché est donc la droite d'équation $y = -x$ privé de l'origine du repère.
2. $z = -5+2i$ n'est pas solution et l'équation est équivalente à
$$|z-3+i| = |z+5-2i|$$
ou encore à
$$|z-(3-i)| = |z-(-5+2i)|.$$

Autrement dit, le point M d'affixe z est à égale distance du point A d'affixe $3-i$ et du point B d'affixe $-5+2i$. L'ensemble des points recherché est donc la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 3. Résoudre l'équation

$$z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

Solution de l'exercice 3. On a

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Ainsi,

$$\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = -2e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Finalement,

$$z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 4. Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 4. Supposons d'abord que $|z|=1$. Alors z s'écrit $z=e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On peut alors écrire :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

qui est bien un élément de $i\mathbb{R}$ (on note que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$).
Réciproquement, supposons que $\frac{1+z}{1-z} = ia$, avec a un réel alors,

$$\frac{1+z}{1-z} = ia \quad \Leftrightarrow \quad 1+z = ia(1-z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-1+ia}{1+ia}.$$

Ainsi,

$$|z| = \left|\frac{-1+ia}{1+ia}\right| = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$$

ce qui prouve la réciproque.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Calculer

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1|.$$

Solution de l'exercice 5. Soit $k \in \{0,...,n-1\}$ et soit $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Alors

$$|\omega_k - 1| = |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{i0}| = 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|$$

en factorisant par l'angle moitié. De plus, pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$ et le sinus est positif. On en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1| &= 2 \sum_{z \in \mathbb{U}_n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= 2\mathrm{Im}\left(\sum_{z \in \mathbb{U}_n} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\
&= 2\mathrm{Im}\left(1 \times \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \\
&= 4\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \\
&= 4\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{\frac{i\pi}{2n}}}\right) \\
&= 2\mathrm{Im}\left(\frac{ie^{\frac{-i\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right) \\
&= 2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.
\end{aligned}$$