

数字图像处理 - 频率域滤波

自动化钱 61 柴嘉骏 2160405071

2019 年 4 月 2 日

目录

1	频率域低通滤波器	3
1.1	高斯低通滤波器	3
1.2	巴特沃斯低通滤波器	4
2	频域域高通滤波器	5
2.1	高斯高通滤波器	5
2.2	巴特沃斯高通滤波器	6
3	其他高通滤波器	8
3.1	频率域拉普拉斯高通滤波器	8
3.2	高提升高通滤波器	9
4	空域和频域滤波器分析	9

1 频率域低通滤波器

一幅图像中的边缘和其他急剧灰度变化主要影响其傅里叶变换的高频内容，因此在频率域平滑可通过衰减高频信号来达到。比如理想低通滤波器就是在以原点为圆心、以 D_0 为半径的圆内无衰减的通过所有频率，而在圆外“阻断”所有频率的二维低通滤波器。但是由于禁止频率处的突变，使用理想低通滤波器常常会出现振铃效应。为此，本小节使用高斯低通滤波器和巴特沃斯低通滤波器实现对测试图像的模糊操作。

1.1 高斯低通滤波器

高斯低通滤波器（GLPF）的计算公式如下所示：

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

式中 D_0 是截止频率，该滤波器对低频部分保留较多而极大地衰减了高频部分，而起到了模糊图像的作用，对测试图片 1、2 的处理结果如下所示：

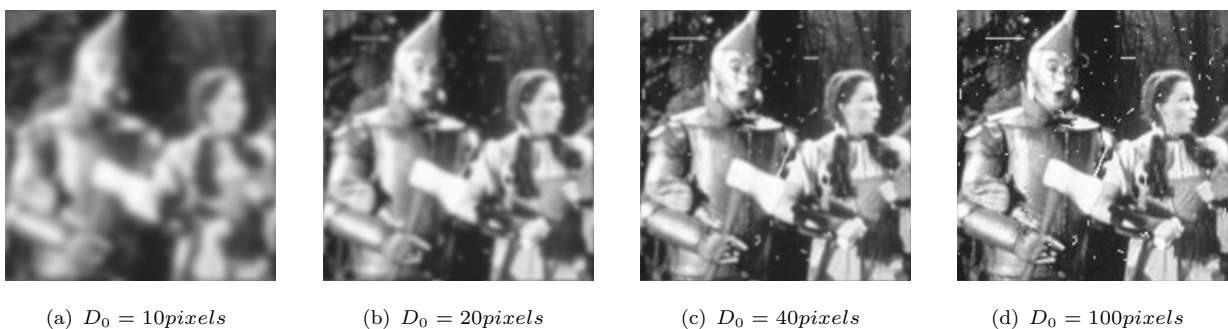


图 1: 对测试图像 1 进行高斯低通滤波

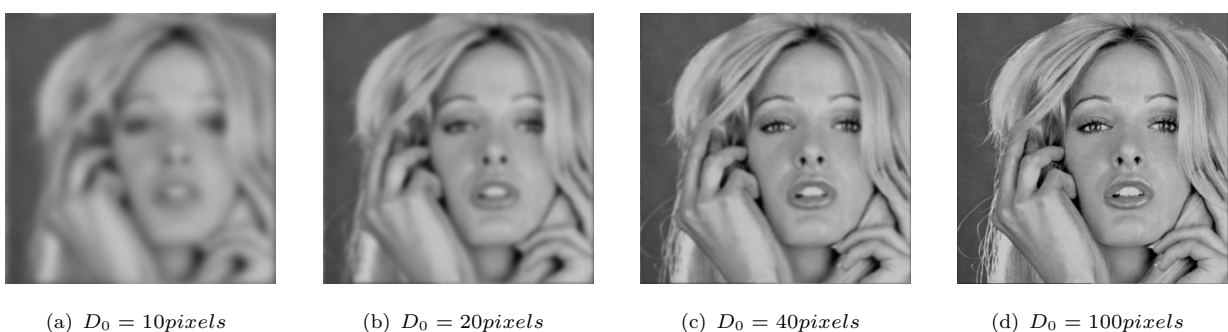


图 2: 对测试图像 2 进行高斯低通滤波

分析图 1和图 2两幅图片可以看到，随着滤波器的截止半径 D_0 增大，高频分量被衰减的程度减小，因此模糊的效果也越来越差，在截止半径为 100 pixels 时已与原图像没有明显差别了。

1.2 巴特沃斯低通滤波器

巴特沃斯低通滤波器 (BLPF) 的计算公式如下所示:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

式中 D_0 是截止频率, 该滤波器对低频部分保留较多而极大地衰减了高频部分, 而起到了模糊图像的作用, 对测试图片 1、2 的处理结果如下所示:

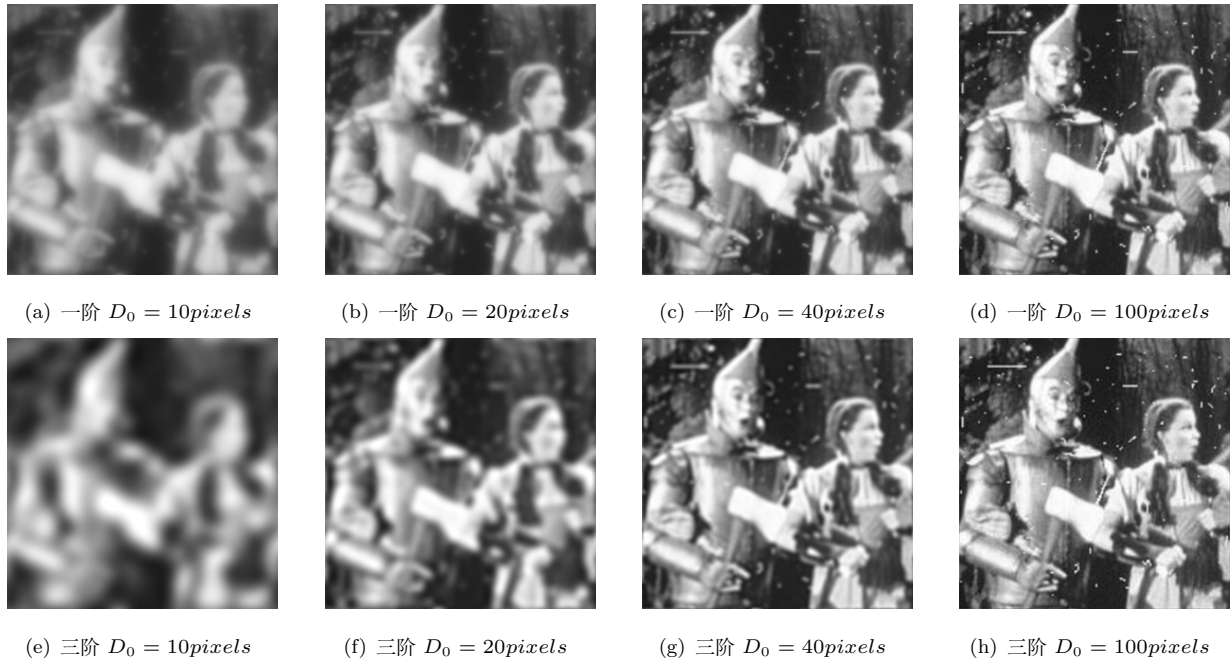


图 3: 对测试图像 1 进行巴特沃斯低通滤波

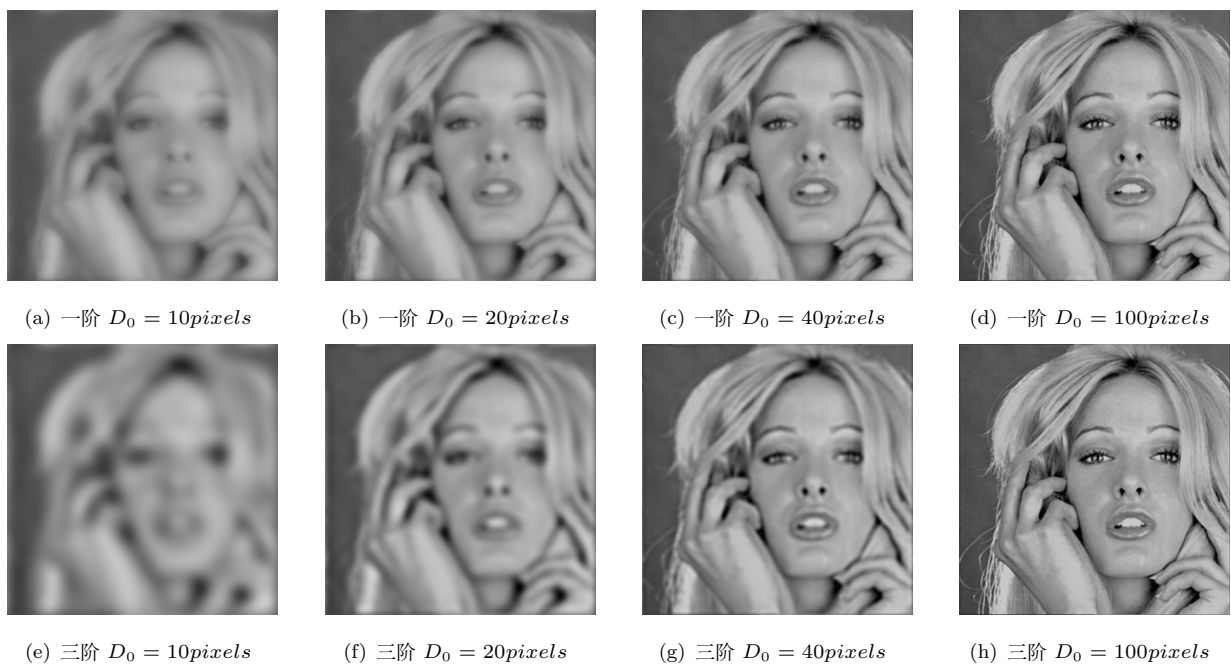


图 4: 对测试图像 2 进行巴特沃斯低通滤波

而对图 3和图 4进行分析可以看出，随着巴特沃斯滤波器的阶数提高，图片的模糊效果也越来越好，即高频部分的衰减也更加明显。与此同时，和高斯低通滤波器一样，巴特沃斯滤波器的模糊效果也随着截止半径的增大而减弱。

为了得到去除掉的高频信息的能量，可以计算滤波前后的能量比，即功率谱比，具体如表 1和表 2所示：

功率谱比 \ 截止半径		10	20	40	100
滤波器种类					
高斯低通滤波器		98.53%	99.32%	99.73%	99.93%
巴特沃斯低通滤波器	一阶	98.15%	99.06%	99.60%	99.90%
	三阶	98.87%	99.61%	99.88%	99.98%

表 1: 测试图像 1 的功率谱比表

功率谱比 \ 截止半径		10	20	40	100
滤波器种类					
高斯低通滤波器		99.26%	99.56%	99.74%	99.87%
巴特沃斯低通滤波器	一阶	99.11%	99.47%	99.68%	99.84%
	三阶	99.38%	99.66%	99.79%	99.90%

表 2: 测试图像 2 的功率谱比表

2 频域域高通滤波器

由于边缘和其他灰度的急剧变化与高频成分有关，所以图像的锐化可在频率域通过高通滤波来实现，高通滤波会衰减傅里叶变换中的低频成分而不会扰乱高频信息。通常情况下一个高通滤波器可以从给定的低通滤波器用下式得到：

$$H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$$

其中， $H_{LP}(u,v)$ 是低通滤波器的传递函数。与上一小节中类似，本小节使用高斯高通滤波器和巴特沃斯高通滤波器对测试图像 3、4 进行锐化增强处理，即使用高通滤波器滤波后与原图像相加后得到锐化图像。

2.1 高斯高通滤波器

高斯低通滤波器（GHPF）的计算公式如下所示：

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

式中 D_0 是截止频率，该滤波器对低频部分保留较多而极大地衰减了低频部分，而起到了锐化图像、增强图像边缘的作用，对测试图片 3、4 的处理结果如下所示：

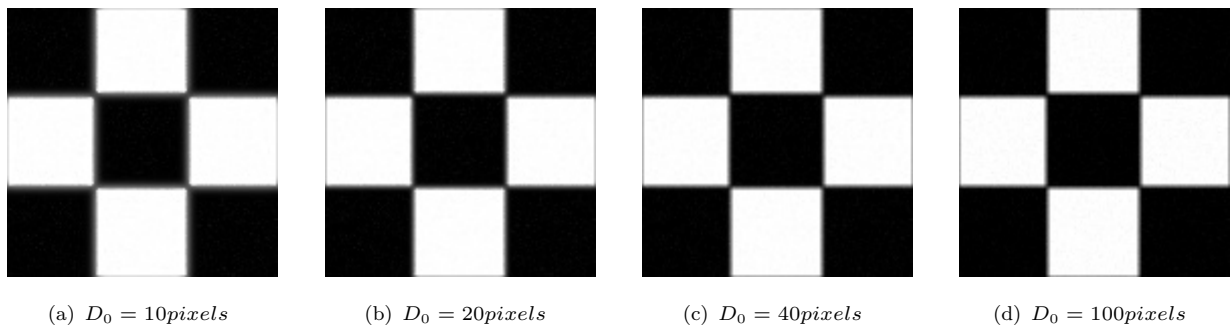


图 5: 对测试图像 3 进行高斯高通滤波

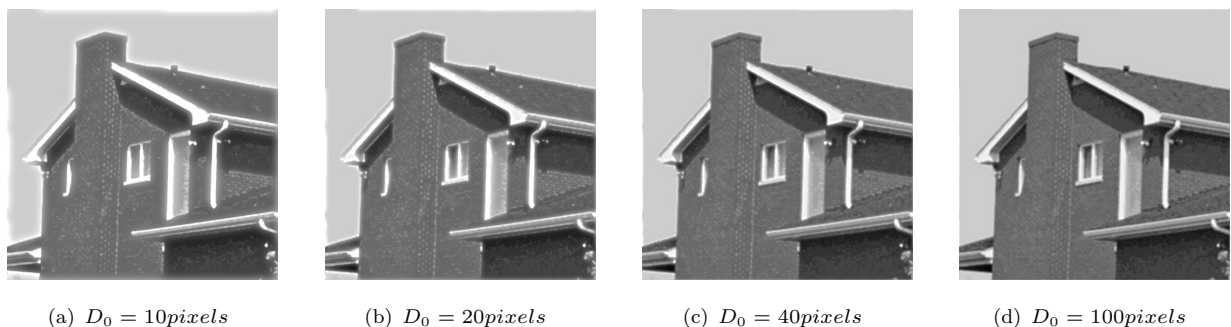


图 6: 对测试图像 4 进行高斯高通滤波

分析图 1和图 2两幅图片可以看到，随着滤波器的截止半径 D_0 增大，低频分量被衰减的程度增大，而剩余的能量也越来越小，在截止半径为 100 pixels 时已与原图像没有明显差别了。

2.2 巴特沃斯高通滤波器

巴特沃斯低通滤波器（BHPF）的计算公式如下所示：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

式中 D_0 是截止频率，与低通滤波器相反，该滤波器对高频部分保留较多而极大地衰减了低频部分，而起到了模糊图像的作用，对测试图片 3、4 的处理结果如下所示：

而对图 3和图 4进行分析可以看出，随着巴特沃斯滤波器的阶数提高，其对高频部分信息的保留更多，可以看出边缘信息被更加的强调了。

为了得到去除掉的低频信息的能量，可以计算滤波前后的能量比，即功率谱比，具体如表 3和表 4所示：

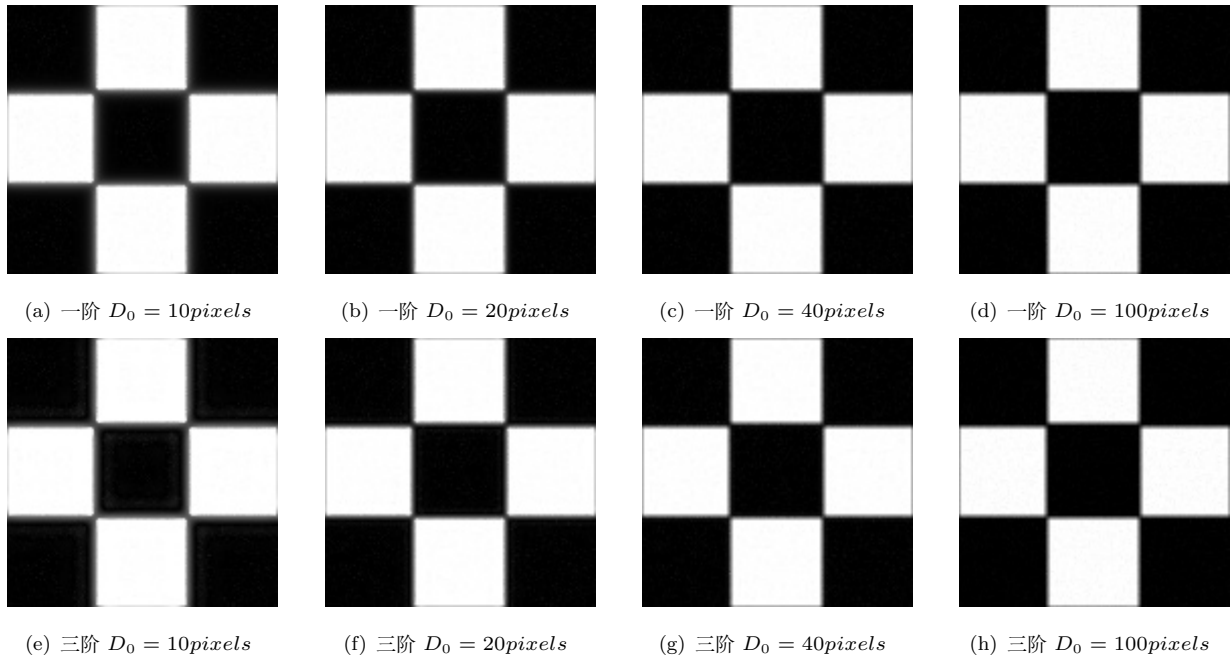


图 7: 对测试图像 3 进行巴特沃斯高通滤波

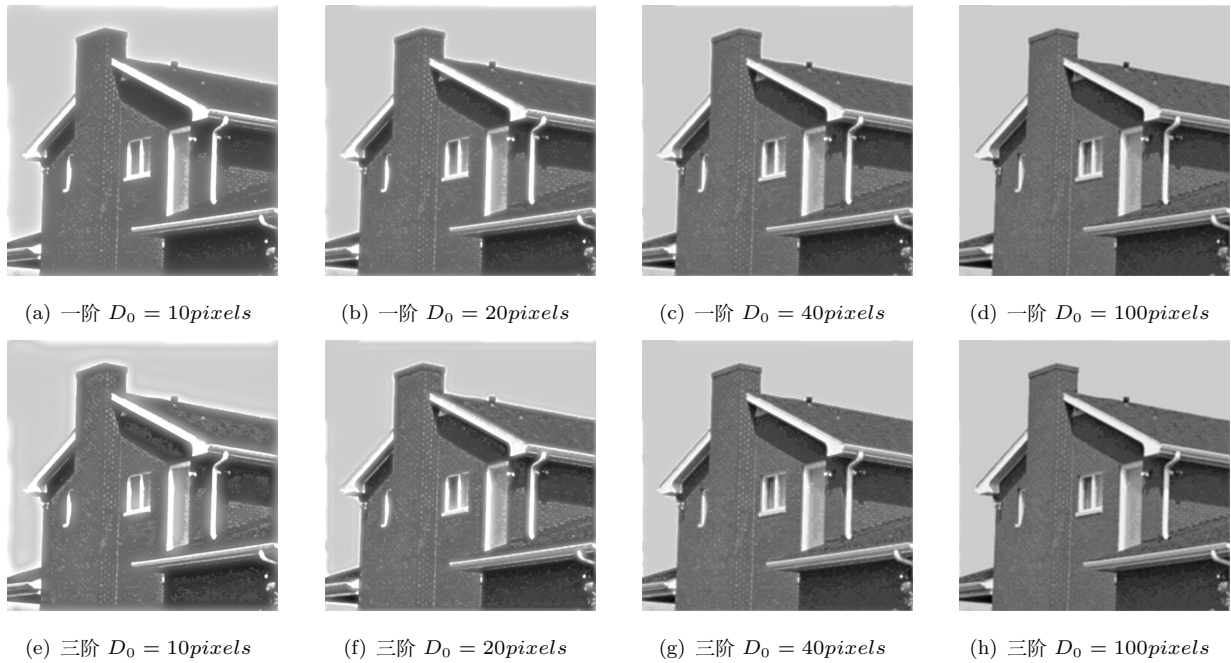


图 8: 对测试图像 4 进行巴特沃斯高通滤波

功率谱比 \ 截止半径		10	20	40	100
滤波器种类					
高斯高通滤波器		0.02%	0.01%	0.00%	0.00%
巴特沃斯高通滤波器	一阶	0.85%	0.29%	0.08%	0.01%
	三阶	1.05%	0.33%	0.08%	0.01%

表 3: 测试图像 3 的功率谱比表

功率谱比 \ 截止半径		10	20	40	100
滤波器种类					
高斯高通滤波器		0.04%	0.00%	0.00%	0.00%
巴特沃斯高通滤波器	一阶	0.44%	0.25%	0.15%	0.06%
	三阶	0.54%	0.29%	0.18%	0.09%

表 4: 测试图像 4 的功率谱比表

3 其他高通滤波器

除了上述的两种高通滤波器之外，还存在很多种类的高通滤波器，比如本小节中使用的拉普拉斯高通滤波器和高提升滤波（Unmask）图像锐化技术。

3.1 频率域拉普拉斯高通滤波器

在上次作业中已经使用拉普拉斯算子对空间与图像进行了增强，而在这一小节中使用频率域的拉普拉斯算子对图像进行锐化处理，拉普拉斯算子可以使用如下滤波器在频域关于频率矩形的中心使用如下滤波器实现：

$$H(u,v) = -4\pi^2[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2] = -4\pi^2D^2(u,v)$$

式中 $D(u,v)$ 是距离函数，拉普拉斯图像可由下式得到：

$$\nabla^2 f(x,y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u,v)F(u,v)\}$$
$$g(x,y) = f(x,y) + c \nabla^2 f(x,y)$$

由此原理对测试图像 3、4 进行高频增强得到的结果如下所示：

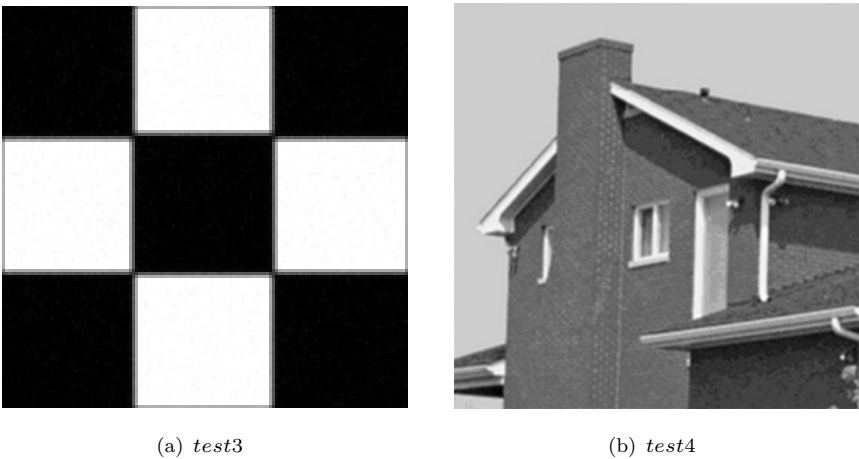


图 9: 对测试图像 3、4 进行拉普拉斯高通滤波

可以看到处理的效果并不明显，而如果不是与原图像相加，仅仅是取高频部分生成的图像，可以看出边缘部分不是特别清晰可见，只有在进行对数运算后才能明显的看出边缘。

3.2 高提升高通滤波器

与之前作业中的高提升滤波类似，这一小节中使用频率域的高提升滤波制作模板对图像进行锐化处理，其模板由下式给出定义：

$$g_{mask}(x, y) = f(x, y) - f_{LP}(x, y)$$

且

$$f_{LP}(x, y) = \mathfrak{S}^{-1}[H_{LP}(u, v)F(u, v)]$$

式中 $H_{LP}(u, v)$ 是一个低通滤波器， $F(u, v)$ 是 $f(x, y)$ 的傅里叶变换，而 $f_{LP}(x, y)$ 是平滑后的图像，则有：

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{mask}(x, y)$$

或可以变形为下式：

$$g(x, y) = \mathfrak{S}^{-1}\{[1 + k * [1 - H_{LP}(u, v)]]F(u, v)\}$$

$$g(x, y) = \mathfrak{S}^{-1}\{[k_1 + k_2 * H_{HP}(u, v)]F(u, v)\}$$

由此原理并使用数中提供的参数 $k_1 = 0.5, k_2 = 0.75$ ：对测试图像 3、4 进行高频增强得到的结果如下所示：

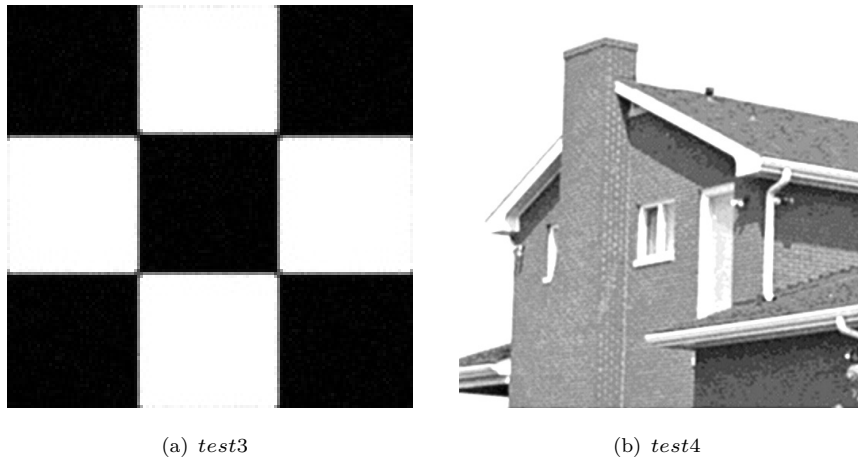


图 10: 对测试图像 3、4 进行高提升高通滤波

可以看到处理的效果远优于频率域的拉普拉斯高通滤波器，而且可以通过调整直流分量的值改变图片整体的亮度，交互式的选择参数 k_1 、 k_2 更利于图像的处理。

4 空域和频域滤波器分析

空间域和频率域间的纽带是卷积定理。空间域的滤波器和频率域的滤波器互为傅里叶变换。空间域中的滤波定义为滤波函数 $h(x, y)$ 与输入图像 $f(x, y)$ 进行卷积；频率域中的滤波定义为滤波

函数 $H(u, v)$ 与输入图像的傅里叶变换 $F(u, v)$ 进行相乘。频域增强技术与空域增强技术因此有了密切的联系。

空域滤波主要包括平滑滤波和锐化滤波。平滑滤波是要滤除不规则的噪声的影响，从频域的角度看，不规则的噪声具有较高的频率因此应当使用频域的低通滤波器完成这一操作；类似的，图像的边缘信息大都体现在频域中的高频部分，要想提取图像的边缘信息以进行锐化则需使用频域的高通滤波器。而提到拉普拉斯算子在空域和频域中的异同时，我们应当注意到我们所能使用的范围仅仅是拉普拉斯算子进行傅里叶变换后的一部分，并不是从零频直到无穷的所有频率，因此在效果上将会与空域直接进行卷积有所不同。但是显然使用频域处理更为灵活，且更能体现图像本来的特征。