1-MAVZU

HODISALAR TURLARI. TASODIFIY HODISA. HODISALAR USTIDA AMALLAR. ELEMENTAR HODISALAR FAZOSI. EHTIMOOLLIKNING KLASSIK, STATISTIK, GEOMETRIK TA‘RIFLARI. KOLMOGOROV AKSIOMALARI.

I. TASODIFIY HODISALAR.

1.1. ELEMENTAR HODISALAR FAZOSI. HODISALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Tasodifiy natijalarga ega bo‘lgan tajribalarni matematik jihatdan tasvirlash uchun, bizga birinchi navbatda qaralayotgan tajribaga mos keladigan **elementar hodisalar fazosi** tushunchasi zarur bo‘ladi. Elementar hodisalar fazosi tushunchasiga, geometriyada nuqta tushunchasi boshlang‘ich tushuncha bo‘lgani kabi, matematik jihatdan ta’rif berilmaydi u boshlang‘ich tushuncha hisoblanadi. Unga quyidagicha mazmun berish mumkin:

Elementar hodisalar fazosi deb, biror bir tajribada ro‘y berishi mumkin bo‘lgan o‘zaro kesishmaydigan shunday yakunlari to‘plami **Ω** ga aytiladiki, bizni qiziqtirgan tajribaning ixtiyoriy natijasini ushbu to‘plam elementlari orqali bir qiymatli yozish mumkin bo‘ladi.

Ta’rif 1. Tajribada ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha natijalarga **elementar hodisalar** deyiladi.

Elementar hodisalar fazosi ikki turga bo‘linadi:

1. Chekli elementar hodisalar fazosi;
2. Cheksiz elementar hodisalar fazosi.

Mos ravishda cheksiz elementar hodisalar fazosi yana ikkiga bo‘linadi:

1. Sanoqli cheksiz elementar hodisalar fazosi;
2. Sanoqsiz cheksiz elementar hodisalar fazosi.

Misol 1. Tajriba bitta tanga tashlashdan iborat bo‘lsin.

Ω={gerb, raqam}={g, r}

Misol 2. Tajriba bitta o‘yin toshini tashlashdan iborat bo‘lsin.

Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}

Misol 3. Tajriba bitta tangani gerb tushgancha tashlashdan iborat bo‘lsin.

Ω={g, gr, ggr, gggr, ggggr, ...}

Misol 4. Tajriba bitta nuqtani a dan b gacha bo‘lgan kesmaga tashlashdan iborat bo‘lsin.

Ω=[a, b] oraliqdan iborat bo‘ladi.

Ta’rif 2. Ω elementar hodisalar fazosining ixtiyoriy qism to‘plamiga **hodisa** deyiladi. Hodisalar lotin alifbosining bosh harflari bilan yoziladi: A, B, C, ...

Ta‘rif 3. Agar $A \subseteq \Omega$ ni tashkil etuvchi biror bir elementar hodisa ro‘y bersa **A hodisa ro‘y berdi** deyiladi va aksincha.

Hodisalar 3 turga bo‘linadi:

1. **Muqarrar hodisa** - Ω harfi bilan belgilanadi;
2. **Tasodifiy hodisa** – lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi: A, B, C,...
3. **Mumkin bo‘lmagan hodisa** - ∅ kabi belgilanadi.

Ta’rif 4. Muayyan shart-sharoit bajarilganda aniq ro‘y beradigan hodisaga **muqarrar hodisa** deyiladi.

Masalan: yerni tortish kuchi borligi shartida (muayyan shart-sharoit) yuqoriga qarab tashlangan toshni qaytib yerga tushishi muqarrar hodisa bo‘ladi.

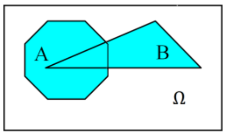
Ta’rif 5. Muayyan shart-sharoit bajarilganda ro‘y berishi ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisaga **tasodifiy hodisa** deyiladi.

Masalan: Tekis sirtda (muayyan shart-sharoit) tashlangan tangada gerb tomon tushishi tasodifiy hodisa bo‘ladi.

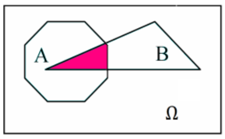
Ta’rif 6. Muayyan shart-sharoit bajarilganda umuman ro‘y bermaydigan hodisaga **mumkin bo‘lmagan hodisa** deyiladi.

Masalan: yerni tortish kuchi borligi shartida (muayyan shart-sharoit) yuqoriga qarab tashlangan toshni havoda muallaq turib qolishi mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi.

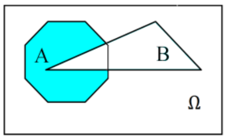
Hodisalar ham umuman olganda to‘plam bo‘lgani uchun ular ustida qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish amallarini bajarish mumkin.



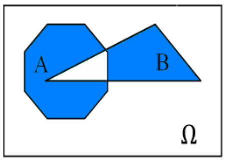
Ta’rif 7. A va B hodisalarning **birlashmasi** yoki **yig‘indisi** deb, ushbu hodisalarning hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berishidan iborat bo‘lgan hodisaga aytiladi va **A∪B** kabi belgilanadi.



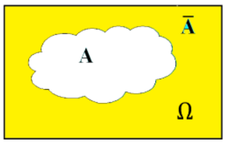
Ta’rif 8. A va B hodisalarning **ko‘paytmasi** yoki **kesishmasi** deb, ham A ga ham B ga tegishli bo‘lgan elementar hodisalardan iborat hodisaga aytiladi va **A∩B** kabi belgilanadi.



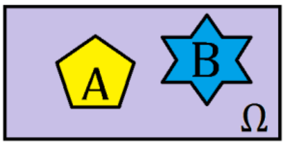
Ta’rif 9. A hodisadan B hodisaning **ayirmasi** deb, A hodisaning B hodisaga tegishli bo‘lmagan elementar hodisalardan iborat hodisaga aytiladi va **A\B** kabi belgilanadi.



Ta'rif 10. A va B hodisalarning **simmetrik ayirmasi** yoki **halqali yig'indisi** deb, A hodisani B hodisaga, B hodisani A hodisaga tegishli bo'lmagan elementar hodisalaridan iborat hodisaga aytiladi va **AΔB** yoki **A⊕B** kabi belgilanadi.



Ta'rif 11. Agar A hodisa ro'y berganda ro'y bermaydigan, A hodisa ro'y bermaganda esa ro'y beradigan hodisaga A ga qarama-qarshi hodisa yoki A ni to'ldiruvchisi deyiladi va $\bar{\mathbf{A}}$ kabi belgilanadi.

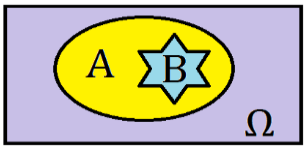


Ta'rif 12. Bitta sinashda birining ro'y berishi qolganlarining ro'y berishini yo'qqa chiqaradigan hodisalarga **birgalikda bo'lmagan hodisalar** deyiladi. (A∩B=∅ bo'lsa)

Ta'rif 13. Agar sinash natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u holda bu hodisalar **yagona mumkin bo'lgan hodisalar** deyiladi.

Ta'rif 14. Agar ikkita hodisadan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa bu hodisalar **erkli hodisalar** deyiladi.

Ta'rif 15. O'zaro birgalikda bo'lmagan $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar uchun $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ bo'lsa, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar **to'la guruhni tashkil etadi** deyiladi.



Ta'rif 16. Agar A hodisaning har bir ro'y berishi natijasida B hodisa ham ro'y bersa, u holda **A hodisa B hodisani ergashtiradi** deyiladi va **A⊂B** kabi belgilanadi.

Ta'rif 17. Agar bir nechta hodisalardan hech birini boshqalariga nisbatan ro'y berishi mumkinroq deyishga asos bo'lmasa, ular **teng imkoniyatli hodisalar** deyiladi.

Aytaylik $\mathcal{F}$ to'plam Ω to'plamning barcha to'plam ostilari to'plami bo'lib, quyidagicha shartlarni bajarsin:

1) Agar ∀A∈ $\mathcal{F}$ va ∀B∈ $\mathcal{F}$ bo'lib, $A \cup B \in \mathcal{F}$ bo'lsa,
2) Agar ∀A∈ $\mathcal{F}$ va ∀B∈ $\mathcal{F}$ bo'lib, $A \cap B \in \mathcal{F}$ bo'lsa,
3) Agar ∀A∈ $\mathcal{F}$ bo'lib, $\bar{A} \in \mathcal{F}$ bo'lsa,

u holda $\mathcal{F}$ to'plam **hodisalar algebrasi** deyiladi.

Eslatma:

1. Yanada aniqroq yondashilganda 1) yoki 2) xossalarning bittasi kifoya, chunki ularning bittasi ikkinchisidan kelib chiqadi: $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$ yoki $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$;

2. Qo‘shish yoki ko‘paytirish amallarini sanoqli sondagi hodisalar to‘plamigacha kengaytirilganda $\mathcal{F}$ hodisalar algebrasi **borel algebrasi** yoki $\boldsymbol{\sigma}$ **−algebra** deyiladi:
   Yani $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ uchun $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, yoki $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Nazorat topshiriqlari

1. Quyidagi hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalar bo‘ladimi?
   a) Tajriba- ikkita tangani tashlashdan iborat. Hodisa:
      A-ikkilasida gerb tushdi, **B**-ikkalasida ham raqam tushdi.
   b) Tajriba- nishonga qarata uchta o‘q uzildi. Hodisa:
      A-hech bo‘lmasa bitta o‘q tegdi, **B**-hech bo‘lmasa bitta o‘q tegmadi.
   c) Tajriba- ikkita o‘yin toshini tashlashdan iborat. Hodisa:
      A- Hech bo‘lmasa bitta toshda uch ochko tushdi,
      B- Har bir toshda juft ochko tushdi.
   d) Tajriba- oq va qora sharlari bor qutidan ikkita sharni olishdan iborat. Hodisa:
      A- Ikkita oq shar olingan; B – ikkala shar ham bir xil rangda.
   e) Tajriba – ikkita lotoreya chiptasini olishdan iborat. Hodisa:
      A – ikkala chipta ham yutadi; B – hech bo‘lmaganda bitta lotoreya yutadi; C – faqat bitta lotoreya yutadi.
   f) Tajriba – lift 10 ta passajir bilan ko‘tarilayapti va 5 ta qavatda to‘xtaydi. Hodisa:
      A – birinchi to‘rtta to‘xtashda ko‘pi bilan 9 kishi tushdi;
      B – oxirgi to‘xtashda hech bo‘lmasa bitta odam tushdi.
2. Quyidagicha hodisalar to‘la guruhni tashkil qiladimi:
   a) Tajriba – nishonga qarata ikkita o‘q uzildi. Hodisalar:
      A – nishonga ikkala o‘q ham tegdi; B – hech bo‘lmaganda bitta o‘q nishonga tegmagan.
   b) Tajriba – ikkita o‘yin toshini tashlashdan iborat. Hodisa:
      A – tushgan ochkolar yig‘indisi 3 dan katta;
      B – tushgan ochkolar yig‘indisi 3 ga teng.
   c) Tajriba – 4 dona urug‘lik ekildi. Hodisa:
      A – bitta urug‘ unib chiqdi; B – ikkita urug‘unib chiqdi; C – uchta urug‘ unib chiqdi; D – to‘rtta urug‘ unib chiqdi.
   d) Xaridor uchta do‘konga kiradi. Hodisa:
      A – xaridor hech bo‘lmasa bitta do‘kondan tovar xarid qiladi;
      B – xaridor birorta ham do‘kondan tovar sotib olmaydi.
3. Quyidagi hodisalar teng imkoniyatli bo‘ladimi:
   a) Tajriba - nishonga qarata o‘q uzildi. Hodisa:
      A – o‘q nishonga tegdi; B – o‘q nishonga tegmadi.
   b) Tajriba – ikkita o‘yin toshini tashlashdan iborat. Hodisa:

A – tushgan ochkolar ko‘paytmasi 12 ga teng;
B – tushgan ochkolar yig‘indisi 9 ga teng.

c) Tajriba – ikkita tangani tashlashdan iborat. Hodisa:
A – ikkita gerb tushdi; B – ikkita raqam tushdi; C – bitta gerb va bitta raqam tushdi.

1.2. HODISA EHTIMOLLIGI.

Tasodifiy hodisa tushunchasini kiritish uchun Ω ning qism to‘plamlaridan iborat bo‘lgan va quyidagicha shartlarni bajaruvchi $\mathfrak{F}$ to‘plam tizimini kiritamiz:

1. $\Omega \in \mathfrak{F}$
2. $A \in \mathfrak{F}$ ekanligidan $\bar{A} \in \mathfrak{F}$ ekanligi kelib chiqsa,
3. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ ekanligidan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}$ ekanligi kelib chiqsa,
4. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ ekanligidan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$ ekanligi kelib chiqsa.

1), 2), 3) shartlar bajarilsa $\mathfrak{F}$ ga algebra, 1), 2), 4) shartlar bajarilsa $\mathfrak{F}$ ga σ algebra deyiladi. 3 yoki 4 –shartlarda ko‘rish qiyin emaski faqat bitta munosabatni bajarilishini talab qilishning o‘zi kifoya, ikkinchisi birinchisidan kelib chiqadi ($\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$). $\mathfrak{F}$ algebraga ayrim hollarda **halqa** ham deyiladi, chunki unda $\mathfrak{F}$ dan chiqib ketmaydigan ikkita qo‘shish va ko‘paytirish amallari aniqlangan. Undan tashqari $\mathfrak{F}$ algebra **biri bor halqa** ham hisoblanadi, unda bir rolini Ω bajaradi, ya’ni $\Omega \in \mathfrak{F}$ va ixtiyoriy $A \in \mathfrak{F}$ uchun $A \cap \Omega = \Omega \cap A = A$

Ta’rif 1. Tasodifiy hodisa deb faqat va faqat $\mathfrak{F}$ ning elementiga aytiladi.

Ehtimol tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Bu tushunchaning bir necha xil ta’riflari mavjud

Ta’rif 2. Agar Ω elementar hodisalar fazosida shunday manfiy bo‘lmagan

$P(\omega_i) \geq 0$ sonli funksiya berilgan bo‘lib,

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$$

shart bajarilsa, **elementar hodisalar ehtimolligi** berilgan deyiladi. P funksiyaga Ω da **ehtimolliklar taqsimotini** beradi ham deyiladi.

Ta’rif 3. (Ehtimollikning statistik ta’rifi) Biror bir tajribada A hodisaning ehtimolligi aniqlanishi uchun tajriba seriyalari ketma-ketligi o‘tqazilayotgan bo‘lsin, n_i – i- seriyadagi tajribalar soni, $n_i(A)$ $-i$-seriyadagi tajribalarda A hodisa ro‘y bergan tajribalar soni bo‘lib, seriyadan-seriyaga tajribalar soni ortib borsin $n_1 \ll n_2 \ll \cdots$, u holda A hodisaning ehtimoli deb,

$$P(A) = \lim_{i\to\infty} \frac{n_i(A)}{n_i}$$

limit qiymatiga aytiladi. Ushbu limitning mavjudligi va yagonaligi katta sonlar qonuni va Bernulli teoremalaridan kelib chiqadi. Ushbu ta'rif hodisa ehtimolligini aniqlashning eng aniq yo'li hisoblansada, amalda undan foydalanish juda mushkul, chunki biz cheksiz ko'p tajriba o'tqazish, undan tashqari juda katta tajribalar sonida ham nisbat aynan qanday songa intilayotganini bir qiymatli aniqlash imkoniyatiga ega emasmiz.

Ta'rif 4. (Ehtimollikning klassik ta'rifi)

Quyidagicha 2 ta shart bajarilsin:

1) Elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ chekli bo'lsin,
2) Har bir elementar hodisa ω_i lar teng imkoniyatli, ya'ni $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, *i=1,…,n* bo'lsin, u holda A hodisaning ehtimoli deb,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

nisbatga aytiladi, bunda *n*(A) yoki $|A|$ – A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradigan elementar hodisalr soni, *n* yoki $|\Omega|$ – ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar soni.

Ta'rif 5. (Elementar hodisalar fazosi sanoqli bo'lganda ehtimollik ta'rifi)

1) Elementar hodisalar fazosi sanoqli–cheksiz $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ bo'lsin.

2) Har bir elementar hodisa ω_i larga manfiy bo'lmagan $P(\omega_i) \geq 0$ sonlar mos qo'yiladiki, quyidagi qator yaqinlashuvchi va 1 ga teng

$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1$ bo'lsin, u holda A hodisaning ehtimoli

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

teng bo'ladi.

Ta'rif 6. (Ehtimollikninng geometrik ta'rifi) A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi soha o'lchovining butun elementar hodisalar fazosi o'lchovi nisbatiga **hodisaning geometrik ehtimolligi** aytiladi, ya'ni ρ – soha o'lchovi bo'lsa,

$$P(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(\Omega)}.$$

Agar soha qandaydir chiziq bo'lsa $\rho -$ **uzunlik**, tekislikdagi soha bo'lsa **yuza**, fazodagi jism bo'lsa **hajm** bo'ladi.

Ω – elementar hodisalar fazosida biror bir hodisalar algebrasini tashkil qiluvchi $\mathfrak{F}$ to‘plamlar tizimini ko‘rib chiqaylik. $< \Omega, \mathfrak{F} >$ - juftlikka **o‘lchovli fazo** deyiladi.

Ta’rif 7. (Ehtimollikni ta’riflashda aksiomatik yondoshish) $< \Omega, \mathfrak{F} >$ -o‘lchovli fazoda aniqlangan ehtimollik deb, $\mathfrak{F}$ ning to‘plamlarida aniqlangan va quyidagicha xossalarga ega bo‘lgan P sonli funksiyaga aytiladi:

1. Ixtiyoriy $A \in \mathfrak{F}$ uchun $P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. Agar $\{A_i\}$ hodisalar ketma-ketligi shunday bo‘lsaki, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ bo‘lganda va $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$ bo‘lsa, u holda
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

natijada hosil bo‘lgan $< \Omega, \mathfrak{F}, P >$ uchlikka **ehtimollik fazosi** deyiladi, P ehtimollikka ayrim hollarda Ω da ehtimollar taqsimoti deb ham yuritiladi. 1,2,3-shartlarga **A.N.Kolmogorov aksiomalari** deyiladi.

U yoki bu eksperimentning matematik modelini yaratishdagi asosiy bosqich $< \Omega, \mathfrak{F}, P >$ ehtimollik fazosini qurishdan iborat.

Ehtimollik xossalari:

1. Muqarrar hodisaning ehtimoli har doim birga teng. $P(\Omega) = 1$
2. Mumkin bo‘lmagan hodisaning ehtimoli har doim nolga teng. $P(\emptyset) = 0$
   Eslatma: Biror bir hodisaning ehtimoli nolga teng bo‘lsa, uni ro‘y bermaydigan hodisa bo‘lishi shart emas. P(A)=0 bo‘lsa, A=$\emptyset$ bo‘lishi shart emas, u ro‘y beradigan hodisa ham bo‘lishi mumkin.
3. $A \cup \bar{A} = \Omega$ muqarrar hodisa bo‘lgani uchun,
$$P(A)+P(\bar{A}) = 1, \qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
4. Ixtiyoriy A hodisaning ehtimoli $0 \leq P(A) \leq 1$
5. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, u holda $P(A) \leq P(B)$
6. Ixtiyoriy A va B hodisalar uchun: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
7. Ixtiyoriy sondagi hodisalar soni uchun ham quyidagi tengsizlik o‘rinli:
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

2-MAVZU

SHARTLI EHTIMOL. HODISALARNING BOG‘LIQSIZLIGI. EHTIMOLLARNI QO‘SHISH VA KO‘PAYTIRISH TEOREMALARI. TO‘LA EHTIMOL VA BAYES FORMULALARI.

Ta’rif 1. Birgalikda bo‘lmagan hodisalar deb, bitta sinashda birining ro‘y berishi qolganlarining ro‘y berishini yo‘qqa chiqaradigan hodisalarga aytiladi.

Teorema 1. (Birgalikda bo‘lmagan hodisalar ehtimollarini qo‘shish teoremasi) Birgalikda bo‘lmagan ikkita hodisadan qaysinisi bo‘lsa ham, birining ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

Natija. Har ikkitasi birgalikda bo‘lmagan bir nechta hodisalardan qaysinisi bo‘lsa ham, birining ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig‘indisiga teng:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Ta’rif 2. To‘la guruh deb, sinashning yagona mumkin bo‘lgan hodisalari to‘plamiga aytiladi.

Teorema 2. To‘la guruhni tashkil etuvchi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning ehtimollari yig‘indisi birga teng:

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$$

Teorema 3. Qarama-qarshi hodisalarning ehtimollari yig‘indisi birga teng:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Ta’rif 3. Agar ikkita hodisadan birining ro‘y berishi ikkinchisining ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligiga bog‘liq bo‘lmasa, bu hodisalar **erkli hodisalar** deyiladi.

Teorema 4. Ikkita erkli hodisaning birgalikda ro‘y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari ko‘paytmasiga teng:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Natija. Birgalikda bog‘liq bo‘lmagan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n ta erkli hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli, ushbu hodisalar ehtimollari ko‘paytmasiga teng:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) * P(A_2) * \ldots * P(A_n)$$

Ta’rif 4. A hodisa ro‘y berganlik sharti ostida, B hodisaning **shartli ehtimolligi** deb

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)}, \qquad P(A) > 0$$

songa aytiladi.

Teorema 5. Ikkita bog‘liq hodisaning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, ulardan birining ehtimolini shu hodisa ro‘y berdi degan farazda hisoblangan ikkinchi hodisaning shartli ehtimoli ko‘paytmasiga teng:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})*\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \text{ yoki } \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{B})*\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$$

Natija. Bir nechta bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, ulardan birining ehtimolini qolganlarining shartli ehtimollariga ko‘paytmasiga teng, bunda har bir keyingi hodisaning ehtimoli undan oldingi hamma hodisalar ro‘y berdi degan farazda hisoblanadi:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)*P_{A_1}(A_2)*P_{A_1A_2}(A_3)*\ldots*P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Bunda $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$- A_n hodisaning $A_1,A_2,\ldots,A_{n-1}$ hodisalar ro‘y berdi degan farazda hisoblangan ehtimoli.

Teorema 6. $A_1,A_2,\ldots,A_n$ hodisalardan kamida bittasining ro‘y berish ehtimoli bir bilan $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\ldots,\bar{A}_n$teskari hodisalar ko‘paytmasi ehtimolining orasidagi ayirmaga teng:

$$P(A)=1-P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_n)=1-P(\bar{A}_1)*P_{\bar{A}_1}(\bar{A}_2)*\ldots*P_{\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_{n-1}}(\bar{A}_n)$$

Natija 1. Birgalikda bog‘liq bo‘lmagan $A_1,A_2,\ldots,A_n$ hodisalardan kamida bittasining ro‘y berish ehtimoli bir bilan $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\ldots,\bar{A}_n$teskari hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasi orasidagi ayirmaga teng:

$$P(A)=1-P(\bar{A}_1)*P(\bar{A}_2)*\ldots*P(\bar{A}_n)=1-q_1*q_2*\ldots*q_n$$

Natija 2. Agar $A_1,A_2,\ldots,A_n$ hodisalarning ro‘y berish ehtimollari bir xil bo‘lsa, ya’ni $P(A_i)=p,\ P(\bar{A}_i)=1-p=q,\ i=1,\ldots,n$ bo‘lsa, u holda ularning hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berish ehtimoli

$$P(A)=1-q^n$$

teng bo‘ladi.

Teorema 7. To‘la guruhni tashkil etuvchi birgalikda bo‘lmagan $B_1,B_2,\ldots,B_n$ hodisalardan bittasining ro‘y berganlik shartidagina ro‘y beradigan A hodisaning ehtimoli shu hodisalardan har birining ehtimolini A hodisaning mos shartli ehtimoliga ko‘paytmalari yig‘indisiga teng:

$$P(A)=P(B_1)*P_{B_1}(A)+P(B_2)*P_{B_2}(A)+\cdots+P(B_n)*P_{B_n}(A)$$

Bu formulaga “To‘la ehtimollik formulasi”, $B_1,B_2,\ldots,B_n$-hodisalarga taxminlar deyiladi.

Teorema 8. A hodisa to‘la guruhni tashkil etuvchi, birgalikda bo‘lmagan $B_1,B_2,\ldots,B_n$ hodisalarning biri ro‘y berishi shartidagina ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. Agar A hodisa ro‘y bergan bo‘lsa, u holda B_i taxminning shartli ehtimolligi:

$$P_A(B_i) = P(B_i/A) = \frac{P(B_i)*P_{B_i}(A)}{P(A)} \quad , \qquad i=1,2,\ldots,n$$

Taxminlar formulasi yoki Bayes formulasi orqali topiladi. Ushbu formula taxminlar ehtimollarini qayta baholash imkonini beradi.

3-MAVZU

BOG‘LIQSIZ TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI. MUAVR-LAPLASNING LOKAL VA INTEGRAL TEOREMALARI. PUASSON TEOREMASI.

Agar bir nechta sinash o‘tqazilayotgan bo‘lib, har bir sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli boshqa sinash natijalariga bog‘liq bo‘lmasa, u holda bunday sinashlar A hodisaga nisbatan **erkli** deyiladi.

Har xil erkli sinashlarda A hodisa yoki har xil ehtimolga, yoki bir xil ehtimolga ega bo‘lishi mumkin.

1. **O‘zgarmas shartlardagi tajribalarda.**

a) Aytaylik biror bir tajriba o‘zgarmas shartlar ostida n marta takrorlanayotgan bo‘lsin, va ularning har birida A hodisa P(A)=p ehtimollik bilan ro‘y berishi yoki P($\bar{A}$)=1-p=q ehtimollik bilan ro‘y bermasligi mumkin bo‘lsin, u holda n ta sinashda A hodisaning roppa-rosa k marta ro‘y berishi va n-k marta ro‘y bermasligidan iborat bo‘lgan murakkab hodisaning ehtimoli erkli hodisalar ehtimollarini ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra:

$$pqpqqqppp\ldots p=p^k q^{n-k}$$

ga teng. Bunday murakkab hodisalar soni esa n ta elemenrdan k tadan guruhlashlar soniga teng. Bunday murakkab hodisalar birgalikda bo‘lmaganligi uchun, birgalikda bo‘lmagan hodisalar ehtimollarini qo‘shish teoremasiga ko‘ra, izlanayotgan ehtimol barcha mumkin bo‘lgan murakkab hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Teorema. Har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli p (0<p<1) ga teng bo‘lgan n ta erkli sinashda hodisaning qaysi tartibda bo‘lishidan qat’iy nazar roppa-rosa k marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k) = C_n^k * p^k * q^{n-k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

teng bo‘ladi. Ushbu formulaga **Bernulli formulasi** deyiladi. Bernulli formulasiga olib keladigan shartlarga esa, **takrorlanuvchi bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi xususiy sxemasi** yoki **Bernulli sxemasi** deyiladi. $P_n(k)$ ehtimolliklar k ning turli qiymatlarida Nyuton binomi yoyilmasidagi qo‘shiluvchilarni bergani uchun:

$$(p+q)^n = C_n^0 * p^0 * q^n + C_n^1 * p^1 * q^{n-1} + \cdots + C_n^k * p^k * q^{n-k} + \cdots + C_n^n * p^n * q^0$$

$P_n(k)$ ehtimolliklar taqsimoti $(P_n(0), P_n(1), \ldots, P_n(n))$ **binomial taqsimot** deyiladi.

b) Agar har birida ro‘y berish ehtimoli ***p*** ga teng bo‘lgan bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi A hodisa ***k*** marta ro‘y bergancha o‘tqazilayotgan bo‘lsa, u holda m ta omadsiz tajriba o‘tqazilgan b‘lish ehtimoli:

$$P_{m+k}(m) = C_{m+k-1}^{k} * p^k * q^m, \qquad m=0,1,2,\dots$$

formula bilan aniqlanadi. Mos ehtimollar taqsimoti esa manfiy binomial taqsimot deyiladi. (mumkin bo‘lgan holatlar to‘plami cheksiz)

2. **O‘zgaruvchan shartlardagi tajribalarda.**

Agar har bir bog‘liqsiz tajribalar ketma-ketligida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli turli xil bo‘lsa, (**takrorlanuvchi bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi umumiy sxemasi)** u holda A hodisaning n ta tajribada k marta ro‘y berish ehtimolli quyidagicha polinomning k-darajasi oldidagi koeffitsiyent sifatida aiqlanadi:

$$\varphi_n(Z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i * Z) = a_n * Z^n + a_{n-1} * Z^{n-1} + \dots + a_1 * Z^1 + a_0$$

Bu yerda $\varphi_n(Z)$-ga **ishlab chiqaruvchi funksiya** deyiladi.

3. **Bir nechta hodisalar bilan tajriba.**

Agar tajriba natijasida birgalikda bo‘lmagan va to‘la guruhni tashkil etuvchi A_1, $A_2,\dots,$ A_L hodisalarning bittasi ro‘y berishi mumkin bo‘lib, bunda $P(A_1)=p_1,\dots,$ $P(A_L)=p_L$ va $\sum_{i=1}^{L} p_i = 1$ bo‘lsa, u holda A_1 hodisani k_1 marta, A_2 hodisani k_2 marta, …, A_L hodisani k_L marta ro‘y berish ehtimoli:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_L) = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \dots * k_m!} p_1^{k_1} * \dots * p_L^{k_L}$$

formula bilan aniqlanadi. Mos ehtimollar taqsimotiga **polynomial taqsimot** deyiladi.

Misol: Biror bir mo‘ljalga qaratib uchta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan o‘q otildi. Har bir otishda o‘qni nishonga tegish ehtimollari turli xil bo‘lsin $p_1=0.7$, $p_2=0.8$, $p_3=0.9$. Nishonga tegmaslik, 1, 2, 3 ta o‘qni nishonga tegish ehtimollari topilsin.

$$\varphi_3(Z) = (0.3 + 0.7 * Z)(0.2 + 0.8 * Z)(0.1 + 0.9 * Z) =$$
$$= 0.504 * Z^3 + 0.398 * Z^2 + 0.092 * Z^1 + 0.006$$

U holda nishonga tegmaslik ehtimoli $P_3(0) = 0.006$

Bitta o‘qni nishonga tegish ehtimoli $P_3(1) = 0.092$

Ikkita o‘qni nishonga tegish ehtimoli $P_3(2) = 0.398$

Uchta o‘qni nishonga tegish ehtimoli $P_3(3) = 0.504$

Har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $\boldsymbol{p}$ ga teng bo‘lgan $\boldsymbol{n}$ ta erkli sinash o‘tqazilayotgan bo‘lsin. Agar tajribalar soni n yetarlicha katta va $\boldsymbol{p} \to \mathbf{0}$ yoki $\boldsymbol{p} \to \mathbf{1}$ bo‘lsa, u holda Bernulli formulasi ish bermaydi.

Masalan: n=100, p=0.01, q=1-p=0.99, k=30 bo‘lganda

$P_{100}(30) = C_{100}^{30} * 0.01^{30} * 0.99^{70}$ -? Murakkab hisoblashlarga olib keladi. Bunday hollarda asimptotik (taqribiy) formulalarga o‘tiladi. $n*p=\lambda$ ko‘paytma o‘zgarmas bo‘lsin, degan shart ostida Bernulli formulasida quyidagicha shakl almashtirish bajaramiz:

$$P_n(k) = C_n^k * p^k * q^{n-k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!} * p^k * (1-p)^{n-k} =$$

$n*p=\lambda$ bo‘lgani uchun $p = \frac{\lambda}{n}$ bo‘ladi. Demak,

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

n juda katta qiymatga ega ekanligini nazarda tutib, $P_n(k)$ ni o‘rniga $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k)$ ni topamiz. Bunda izlanayotgan ehtimolning taqribiy qiymati topiladi xolos.

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} * \frac{\lambda^k}{n^k} * \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} * \lim_{n\to\infty}\left[1 * \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) * \dots * \left(1-\frac{k-1}{n}\right) * \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} * \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n * \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} * 1$$

Shunday qilib, quyidagicha teoremaga keldik.

Teorema (Puasson teoremasi). Har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli p (p<0.1) ga teng bo‘lgan n ta erkli sinashda hodisaning qaysi tartibda bo‘lishidan qat’iy nazar roppa-rosa k marta ro‘y berish ehtimoli, *npq*<10 bo‘lganda

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}\,, \text{ bunda } \lambda = n * p$$

bo‘ladi.

Bernulli sxemasi va Puasson formulalari iuchun quyidagilar o‘rinli:

1) $P_n(k\ tadan\ kam\ marta) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$
2) $P_n(k\ tadan\ ko‘p\ marta) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$
3) $P_n(kamida\ k\ marta) = P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$
4) $P_n(ko‘pi\ bilan\ k\ marta) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$
5) $P_n(kamida\ k_1\ ko‘pi\ bilan\ k_2\ marta) = P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + \dots + P_n(k_2)$
6) $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(n) = 1$
7) $P_n(hech\ bo‘lmaganda\ bir\ marta) = 1 - P_n(0)$

Tajribalar soni n katta bo‘lganda va har bir tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0<p<1 bo‘lganda taqribiy asimptotik formulalarga o‘tiladi. Aytib o‘tish kerakki, xususiy holda, chunonchi $p = \frac{1}{2}$ bo‘lganda asimptotik formulani 1730 yilda Muavr topgan edi. 1783 yilda esa Muavr formulasini Laplas 0 va 1 dan farqli ixtiyoriy p uchun umumlashtirgan. Shuning uchun quyidagi teorema Muavr-Laplas teoremasi deb ataladi.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi: Har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli p (0<p<1) ga teng bo‘lgan n ta erkli sinashda hodisaning qaysi tartibda bo‘lishidan qat’iy nazar roppa-rosa *k* marta ro‘y berish ehtimoli, *npq*≥ 10 bo‘lganda

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} * \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

bo‘ladi. Bunda

1) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$,(normal taqsimot zichlik funksiyasi) Laplas funksiyasi;
2) $\varphi(-x) = \varphi(x)$ juft funksiya;
3) $x = \pm 1$ nuqtalar egilish nuqtalari;
4) $0 \leq x \leq 4$ qiymatlarda $\varphi(x)$ funksiya qiymatlari ilovalarda jadval ko‘rinishida berilgan.
5) $x \geq 4$ qiymatlarda $\varphi(x) \to 0$ bo‘lgani uchun, $\varphi(x)$ qiymatlari nolga teng deb olinadi.

Muavr-Laplasning integral teoremasi: Har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli p (0<p<1) ga teng bo‘lgan n ta erkli sinashda, hodisaning kamida k_1 va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli, *npq*≥ 10 bo‘lganda

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

bo‘ladi. Bunda

1) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, toq funksiya;
3) $0 \leq x \leq 4$ qiymatlarda $\Phi(x)$ funksiya qiymatlari ilovalarda jadval ko‘rinishida berilgan.
4) $x \geq 4$ qiymatlarda $\Phi(x) \to \frac{1}{2}$ bo‘lgani uchun, $\Phi(x)$ qiymatlari 0.5 teng deb olinadi.

Misol: 21 ta tajribaning har birida A hodisani ro‘y berish ehtimoli 0.7 ga teng. A hodisani roppa-rosa 15 marta, ko‘pchiligida, kamchiligida ro‘y berish ehtimollari topilsin.

1) $P_{21}(15) \approx \frac{1}{\sqrt{21*0.7*0.3}} * \varphi\left(\frac{15-21*0.7}{\sqrt{21*0.7*0.3}}\right) = \frac{1}{2.1}\varphi(0.143) = \frac{1}{2.1} * 0.395 = 0.188$

2) $P_{21}(ko\text{‘}pchiligida) = P_{21}(11; 20) \approx \Phi\left(\frac{21-21*0.7}{\sqrt{21*0.7*0.3}}\right) - \Phi\left(\frac{11-21*0.7}{\sqrt{21*0.7*0.3}}\right) =$

$= \Phi(3) - \Phi(-1,76) = \Phi(3) + \Phi(1,76) = 0,4986 + 0,4608 = 0,9594$

3) $P_{21}(kamchiligida) = P_{21}(0; 10) \approx \Phi\left(\frac{10-21*0.7}{\sqrt{21*0.7*0.3}}\right) - \Phi\left(\frac{0-21*0.7}{\sqrt{21*0.7*0.3}}\right) =$

$= \Phi(-2.238) - \Phi(-7) = -\Phi(2.238) + \Phi(7) = -0,4874 + 0,5$

$= 0,0126$

4-MAVZU

DISKRET TASODIFIY MIQDORLARNING BERILISH USULLARI VA ULARNING SONLI TASNIFLARI.

Ta’rif 1. Avvaldan noma’lum bo‘lgan va oldindan inobatga olib bo‘lmaydigan tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan hamda tajriba natijasida bitta mumkin bo‘lgan qiymat qabul qiluvchi miqdorga **tasodifiy miqdor** deyiladi.

Ta’rif 2. Ω elementar hodisalar fazosini haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi $\xi = \xi(\omega): \Omega \to R$ o‘lchovli funksiyaga **tasodifiy miqdor** deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar 3 turga bo‘linadi:

1. Diskret tasodifiy miqdorlar; (d.t.m) 2. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar; (u.t.m)
3. Singulyar tasodifiy miqdorlar. (s.t.m)

Ta’rif 3. Mumkin bo‘lgan qiymatlari ayrim-ayrim sonlar bo‘lib, ularni tayin ehtimollar bilan qabul qiladigan miqdorga **diskret tasodifiy miqdor** deyiladi.

Diskret tasodifiy miqqdorlarning qabul qiladigan qiymatlari soni chekli yoki sanoqli-cheksiz bo‘lishi mumkin. Diskret tasodifiy miqqdorlar 3 xil ko‘rinishda berilishi mumkin:

1. Taqsimot qonuni. 2. Taqsimot ko‘pburchagi. 3. Analitik ko‘rinishda.

Ta’rif 4. D.t.m. ning qabul qiladigan qiymatlari va mos ehtimollari ro‘yxatiga d.t.m ning **taqsimot qonuni** deyiladi.

ξ	x_1	....	x_n
P	p_1	....	p_n

Bunda $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, $p_i = P(\xi = x_i)$

Ta’rif 5. To‘g‘ri burchakli koordinatalar tizimida $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2)$, …, $M_n(x_n, p_n)$ nuqtalarni birin-ketin tutashtirishdan hosil bo‘lgan siniq chiziqqa **taqsimot ko‘pburchagi** deyiladi.

$\boldsymbol{\xi}$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$P(\xi = k) = \varphi(k) = C_n^k * p^k * q^{n-k}$$

analitik usulda yoki integral funksiya ko‘rinishida ham berilishi mumkin. Tasodifiy miqdorlar ustida qo‘shish va ko‘paytirish amallarini bajarish mumkin.

Ta’rif 6. ξ va η tasodifiy miqdorlarning yig‘indisi deb, ξ va η tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari yig‘indisi va mos ehtimollari ko‘paytmasidan iborat tasodifiy miqdorga aytiladi.

Ta'rif 7. ξ va η tasodifiy miqdorlarning ko'paytmasi deb, ξ va η tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari ko'paytmasi va mos ehtimollari ko'paytmasidan iborat tasodifiy miqdorga aytiladi.

Bu amallarda bir xil qiymatlarga ega bo'lgan tasodifiy miqdor qiymatlari bir marta yoziladi, mos ehtimollar esa qo'shib qo'yiladi.

Misol.

ξ	1	2
P	0.3	0.7

η	-1	0	1
P	0.3	0.2	0.5

$\xi+\eta$	1+(-1)	1+0	1+1	2+(-1)	2+0	2+1
P	0.3*0.3	0.3*0.2	0.3*0.5	0.7*0.3	0.7*0.2	0.7*0.5

$\xi+\eta$	0	1	2	3
P	0.09	0.27	0.29	0.35

$\xi*\eta$	1*(-1)	1*0	1*1	2*(-1)	2*0	2*1
P	0.3*0.3	0.3*0.2	0.3*0.5	0.7*0.3	0.7*0.2	0.7*0.5

$\xi*\eta$	-2	-1	0	1	2
P	0.21	0.09	0.2	0.15	0.35

Amaliy masalalarda tasodifiy miqdorni to'laligicha berishga ehtiyoj yo'q. Ko'p hollarda taqsimotning ayrim sonli parametrlarini berish kifoya. Bunday sonli parametrlarga sonli xarakteristikalar (tasniflar) deyiladi. Bunday sonli tasniflarga **matematik kutilma, dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish, moda, mediana** va boshqalar kiradi.

1. **Matematik kutilma.**

Ta'rif 8. ξ d.t.m. ning **matematik kutilmasi** deb, uning mumkin bo'lgan barcha qiymatlarini mos ehtimollari ko'paytmalari yig'indisiga yoki d.t.m.ning o'rtacha qiymatiga aytiladi.

$$M\xi=\frac{x_1*p_1+x_2*p_2+\cdots+x_n*p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i*p_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i*p_i}{1}=\sum_{i=1}^{n}x_i*p_i$$

Agar tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari sanoqli cheksiz bo'lsa, u holda

$$M\xi=\sum_{i=1}^{\infty}x_i*p_i$$

Bunda tenglikning o‘ng tomonida turgan qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi va barcha p_i ehtimollar yig‘indisi birga teng.

Matematik kutilmaning **fizikaviy ma’nosi** shundaki taqsimot qonunini $x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda qo‘yilgan $p_1, \dots, p_n$ og‘irliklar deb faraz qilinsa, matematik kutilma og‘irlik markazini topib beradi.

Matematik kutilma quyidagicha xossalarga ega:

1) M(C)=C, bu yerda C=const;
2) M(Cξ) =C*Mξ
3) M$(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$
4) Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar erkli bo‘lsa, u holda M$(\xi * \eta) = M\xi * M\eta$
5) Chetlanishning matematik kutilishi nolga teng: M$(\xi - M\xi) = 0$

2. Dispersiya va uning xossalari.

Tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlarini uning o‘rtacha qiymati atrofida qanchalik tarqoqligini tasniflash uchun **dispersiya** xizmat qiladi.

Ta’rif 9. Tasodifiy miqdorni o‘zining matematik kutilishidan chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga d.t.m.ning dispersiyasi deyiladi:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^2 * p_i$$

yoki

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 * p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i * p_i\right)^2$$

Dispersiyaning xossalari:

1. DC=0, c=const;
2. D(Cξ) $= C^2 * D\xi$;
3. Agar ξ va η lar erkli tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, D$(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$
4. D(C+ ξ) =D ξ

Dispersiya d.t.m.ning o‘rtacha kvadratik chetlanishini ifodalagani uchun, amaliyotda tarqoqlik tasnifi sifatida o‘rtacha kvadratik chetlanishdan foydalaniladi. Ushbu tasnif ξ tasodifiy miqdor o‘lchovi bilan bir xil o‘lchovga ega bo‘ladi.

Ta’rif 10. Dispersiyadan olingan kvadrat ildizga o‘rtacha kvadratik chetlanish deyiladi.

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$$

Ta’rif 11. Tasodifiy miqdorning eng kata ehtimolli qiymatiga, tasodifiy miqdorning modasi $M_o\ (\xi)$ deyiladi.

Ta’rif 12. D.t.m.ning **medianasi** deb, tasodifiy miqdorning shunday $M_e(\xi)$ qiymatiga aytiladiki, bunda

$$P\big(\xi < M_e(\xi)\big) = P(\xi > M_e(\xi))$$

o‘rinli bo‘ladi. D.t.m. lar uchun odatda mediana aniqlanmaydi.

5-MAVZU

UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLARNING BERILISH USULLARI VA ULARNING SONLI TASNIFLARI. BOSHLANG‘ICH VA MARKAZIY MOMENTLAR.

Ta’rif 1. Qabul qiladigan qiymatlari biror bir oraliqni to‘liq qoplaydigan miqdorga **uzluksiz tasodifiy miqdor** deyiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyasi yoki zichlik funksiyasi bilan berilishi mumkin.

Ta’rif 2. Har bir x qiymat uchun ξ tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymatni qabul qilish ehtimolini aniqlaydigan $F_\xi(x)$ funksiyaga u.t.m. uchun **taqsimotning integral funksiyasi** deyiladi, (ko‘pincha “integral funksiya” termini o‘rnida “taqsimot funksiya” terminidan foydalaniladi) ya’ni

$$F_\xi(x) = P(\xi < x)$$

Taqsimot quyidagicha xossalarga ega:

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1$
2. $\forall\, x_1 < x_2$ uchun $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$, ya’ni taqsimot funksiya kamaymaydigan funksiya.
3. Agar ξ u.t.m. bo‘lsa, u holda $P(\xi = a) = 0$
4. P$(a < \xi < b) = P(a \le \xi < b) = P(a < \xi \le b) =$
$$=P(a \le \xi \le b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$
5. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari (a,b) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda
$$x \le a \quad \text{bo‘lganda} \quad F_\xi(x) = 0$$
$$x \ge b \quad \text{bo‘lganda} \quad F_\xi(x) = 1$$
6. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari butun x o‘qida joylashgan bo‘lsa, u holda
$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$$

Ta’rif 3. U.t.m. uchun **ehtimollar taqsimotining differensial funksiyasi** yoki **zichlik funksiyasi** deb, taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi, ya’ni

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x)$$

Zichlik funksiyaning xossalari:

1. $f_\xi(x) \ge 0$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$, xususan ξ u.t.m. (a,b) oraliqda aniqlangan bo‘lsa $\int_a^b f_\xi(x)dx = 1$ boladi.
3. $\mathrm{P}(a < \xi < b) = \int_a^b f_\xi(x)dx$
4. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$

Ta’rif 4. Mumkin bo‘lgan qiymatlari butun OX o‘qqa tegishli bo‘lgan ξ u.t.m. ning matematik kutilishi deb,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_\xi(x)dx$$

integral qiymatiga aytiladi, xususan agar barcha mumkin bo‘lgan qiymatlari (a,b) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$M\xi = \int_a^b x * f_\xi(x)dx$$

Agar η=$\varphi(\xi)$ mumkin bo‘lgan qiymatlari butun OX o‘qqa tegishli bo‘lgan ξ tasodifiy argumentning funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$M\eta = M[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) * f_\xi(x)dx$$

xususan agar barcha mumkin bo‘lgan qiymatlari (a,b) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$M\eta = M[\varphi(\xi)] = \int_a^b \varphi(x) * f_\xi(x)dx$$

Matematik kutilishning d.t.m. lar uchun ko‘rsatilgan barcha xossalari u.t.m. lar uchun ham o‘rinli hisoblanadi.

Ta’rif 5. Mumkin bo‘lgan qiymatlari butun OX o‘qqa tegishli bo‘lgan ξ u.t.m. ning dispersiyasi deb,

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 * f_\xi(x)dx$$

tenglik bilan yoki bu tenglikka teng kuchli bo‘lgan

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f_\xi(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x * f_\xi(x)dx\right)^2$$

tenglik bilan aniqlanadigan integralga aytiladi.

Xususan, agar barcha mumkin bo‘lgan qiymatlar (a,b) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_a^b (x - M\xi)^2 * f_\xi(x)dx$$

yoki

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_a^b x^2 * f_\xi(x)dx - \left(\int_a^b x * f_\xi(x)dx\right)^2$$

Dispersiyaning d.t.m. lar uchun ko‘rsatilgan barcha xossalari u.t.m. lar uchun ham o‘rinli hisoblanadi.

Agar η=$\varphi(\xi)$ berilgan ξ tasodifiy argumentning funksiyasi bo‘lsa, shu bilan birga mumkin bo‘lgan qiymatlar butun OX o‘qqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$D\varphi(\xi) = M(\varphi(\xi) - M\varphi(\xi))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - M\varphi(\xi))^2 * f_\xi(x)dx$$

yoki

$$D\varphi(\xi) = M[\varphi(\xi)]^2 - \big(M\varphi(\xi)\big)^2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)^2 * f_\xi(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) * f_\xi(x)dx\right)^2$$

Xususan, agar barcha mumkin bo‘lgan qiymatlar (a,b) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$D\varphi(\xi) = M(\varphi(\xi) - M\varphi(\xi))^2 = \int_a^b (\varphi(x) - M\varphi(\xi))^2 * f_\xi(x)dx$$

Yoki

$$D\varphi(\xi) = M[\varphi(\xi)]^2 - (M\varphi(\xi))^2$$
$$= \int_a^b \varphi^2(x) * f_\xi(x)dx - \left(\int_a^b \varphi(x) * f_\xi(x)dx\right)^2$$

Ta'rif 6. Dispersiyadan olingan kvadrat ildizga

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$$

o'rtacha kvadratik chetlanish deyiladi.

Ta'rif 7. Uzluksiz tasodifiy miqdorning $M_o(\xi)$ modasi deb, uning shunday mumkin bo'lgan qiymatiga aytiladiki, bu qiymatga zichlik funksiyaning maksimumi mos keladi.

$$M_o(\xi) = \{x: \sup f(x), -\infty < x < +\infty\}$$

Ta'rif 8. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiya bilan chegaralangan yuzani teng ikkiga bo'luvchi qiymatiga Mediana $M_e(\xi)$ deyiladi.

$$M_e(\xi): \quad P(\xi < M_e(\xi)) = P(\xi > M_e(\xi)) = \frac{1}{2}$$

Ta'rif 9. Tasodifiy miqdorning ***k*-tartibli boshlang'ich momenti** deb, ξ tasodifiy miqdor k-darajasi matematik kutilmasiga aytiladi.

$$\alpha_k = M\xi^k,$$

d.t.m. uchun: $\alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k * p_i = x_1^k * p_1 + x_2^k * p_2 + \cdots + x_n^k * p_n$

u.t.m. uchun: $\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k * f_\xi(x)dx$

Ta'rif 10. Tasodifiy miqdorning ***k*-tartibli markaziy nazariy momenti** deb, $(\xi - M\xi)$ tasodifiy miqdor k-darajasi matematik kutilmasiga aytiladi:

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$$

d.t.m. uchun:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - M\xi)^k * p_i = (x_1 - M\xi)^k * p_1 + \cdots + (x_n - M\xi)^k * p_n$$

u.t.m. uchun:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k f_\xi(x)dx$$

Ravshanki, agar

k=1 bo‘lsa, u holda $\alpha_1 = M\xi^1$ - matematik kutilma, $\mu_1 = M(\xi - M\xi)^1 = 0$, k=2 bo‘lsa, u holda $\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$ – dispersiyani beradi.

Markaziy momentlar boshlang‘ich momentlar orqali quyidagicha formulalar bilan ifodalanadi:

$$\mu_1 = M(\xi - M\xi)^1 = 0$$

$$\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$$

$$\mu_4 = M(\xi - M\xi)^4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$$

6-MAVZU

AMALIYOTDA KO'P UCHRAYDIGAN BA'ZI BIR DISKRET VA UZLUKSIZ TAQSIMOTLAR.

I. Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan d.t.m.lar

1. Bernulli taqsimoti:

ξ	0	1
P	q	p

M$\xi = 0 * q + 1 * p = p;$ D$\xi = 0^2 * q + 1^2 * p$-$p^2 = p(1-p) = p * q$

2. Binomial taqsimot uchun:

M$\xi = \sum_{k=0}^{n} k * C_n^k * p^k * q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k * \frac{n!}{k! * (n-k)!} * p^k * q^{n-k} =$

$$= n * p * \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! * \left(n-1-(k-1)\right)!} p^{k-1} * q^{n-1-(k-1)} = n * p * (p+q)^{n-1} = n * p$$

Dξ=$\sum_{k=0}^{n} k^2 * C_n^k * p^k * q^{n-k} - (n * p)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 * \frac{n!}{k! * (n-k)!} * p^k * q^{n-k} -$
$(n * p)^2 = \sum_{k=1}^{n} (k - 1 + 1) * \frac{n!}{(k-1)! * (n-k)!} * p^k * q^{n-k} - (n * p)^2 =$

$$= p^2 * n * (n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)! * (n-2-(k-2))!} * p^{k-2} * q^{n-2-(k-2)} +$$

$$+ p * n * \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! * (n-1-(k-1))!} * p^{k-1} * q^{n-1-(k-1)} - (n * p)^2 =$$

$=p^2 * n * (n-1) + pn - (n * p)^2 = npq$

3. Puasson taqsimoti uchun:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k * \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} = \lambda * e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda * e^{-\lambda} * e^{\lambda} = \lambda$$

$$D\xi = \sum_{k=0}^{n} k^2 * \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda * e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} (k - 1 + 1) * \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 =$$

$= \lambda * e^{-\lambda} * \lambda * \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda * e^{-\lambda} * \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

II. Amaliyotda keng qo'llaniladigan u.t.m.lar

1. **[a,b] oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor:**

Ta'rif 1. ξ u.t.m. taqsimot funksiyasi

$$P(\xi < x) = F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & agar\ \ x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & agar\ \ a < x \le b \\ 1, & agar\ \ \ x > b \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, ξ u.t.m.ga [a,b] da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Zichlik funksiyasi esa quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, & agar\ \ \ x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, & agar\ \ \ a < x \le b \\ 0, & agar\ \ \ \ x \ge b \end{cases}$$

Matematik kutilmasi: $M\xi = \int_a^b x * \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$

Dispersiyasi: $D\xi = \int_a^b x^2 * \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

O‘rtacha kvadratik chetlanishi: $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning (α, β) oraliqqa tushish ehtimoli:

P$(\alpha < \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a} dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$

2. Ko‘rsatkichli taqsimot.

Ta’rif 2. Taqsimot funksiyasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘lgan u.t.m.ga

$P(\xi < x) = F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & agar\ \ x \ge 0 \\ 0, & agar\ \ \ x < 0 \end{cases}$ bunda $\lambda = const,\ \ \lambda > 0$

λ parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Ko‘rsatkichli taqsimotning taqsimot (integral) funksiyasi

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x}, & agar\ \ x \ge 0 \\ 0, & agar\ \ \ x < 0 \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Matematik kutilmasi:

$$M\xi = \int_0^{+\infty} x * \lambda * e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{+\infty} x d e^{-\lambda x} = -x * e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Dispersiyasi: $D\xi = \int_0^{+\infty} x^2 * \lambda * e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

O‘rtacha kvadratik chetlanish: $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\lambda}$

ξ u.t.m. ning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli:

$$P(a < \xi < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Ko‘rsatkichli taqsimot ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasida, ishonchlilik nazariyalarida katta rol o‘ynaydi.

3. Normal taqsimot qonuni.

Ushbu taqsimot qonuni eng ko‘p uchraydigan taqsimot qonuni bo‘lib, uning muhim xususiyati shundaki u chegaraviy qonun bo‘lib, ma’lum bir shartlar ostida boshqa qonuniyatlar aynan unga yaqinlashadi.

Ta’rif 3. ξ u.t.m. taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

ko‘rinishda bo‘lsa, ξ u.t.m.ga ***a* va *σ* parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi.

Ushbu u.t.m. ning zichlik (differensial) funksiyasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$f_\xi(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Normal taqsimotning sonlli tasniflari:

1. Matematik kutilma taqsimotning markazini tasniflaydi:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a$$

2. Dispersiya taqsimot shaklini tasniflaydi:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi - a)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

Normal taqsimot zichlik funksiyasining xossalari:

1. Aniqlanish sohasi: $D_l(f) = R,$ Qiymatlar sohasi: $D_r(f) = (0, +\infty)$
2. OX o‘q – gorizontal asimptota,
3. $x = a \pm \sigma$ nuqtalar egilish nuqtalari,
4. Maksimumi koordinatasi $\left(a,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ nuqtada,
5. Grafik x=a to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik,
6. Momentlari:
   $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \cdots = \mu_{2k+1} = \cdots = 0$
   $\mu_2 = \sigma^2, \mu_4 = 3 * \sigma^4$
   $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0, \qquad E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$

7. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli, taqsimot funksiyaning xossasiga ko‘ra aniqlanadi:
$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$
Bu yerda
$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)dt$ normal qonunning taqsimot funksiyasi,
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ Laplas funksiyasi (qiymatlari jadvaldan topiladi).
Normal qoonuniyatning taqsimot funksiyasi quyidagicha xossalarga ega:
1. $\Phi^*(-\infty) = 0;$
2. $\Phi^*(+\infty) = 1;$
3. $\Phi^*(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x);$
4. $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$

Berilgan chetlanish ehtimoli. Uch sigma qoidasi.

Normal taqsimotga ega bo‘lgan ξ tasodifiy miqdorni o‘zining matematik kutilmasi M ξ =a dan $\varepsilon > 0$ miqdordan katta bo‘lmagan chetlanishga ega bo‘lish ehtimolini topamiz:

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < \xi - a < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon) =$$

$$= \Phi^*\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) = \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\right)$$
$$= 2 * \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$$

yoki Laplas funksiyasidan foydalansak:

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2 * \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 = 2 * \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\right) - 1 = 2 * \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Normal taqsimotga ega bo‘lgan ξ tasodifiy miqdorni o‘zining matematik kutilmasi M ξ =a dan $\sigma, 2\sigma,\ 3\sigma$ larga chetlanishlarini topamiz:

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2 * \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 2 * 0{,}3413 = 0{,}6826$$

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2 * \Phi\left(\frac{2 * \sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) = 2 * 0{,}4772 = 0{,}9544$$

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2 * \Phi\left(\frac{3 * \sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 * 0{,}4965 = 0{,}9973$$

Bundan esa uch sigma qoidasi kelib chiqadi: Agar tasodifiy miqdor normal taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsa, u holda ushbu tasodifiy miqdorni o‘zining matematik kutilmasidan chetlanishi absolyut qiymati bo‘yicha o‘rtacha kvadratik chetlanishning uchlanganidan oshmaydi. Demak biror bir tasodifiy miqdor uchun uch sigma qoidasi o‘rinli bo‘lsa, u holda bu tasodifiy miqdorni juda katta ehtimollik bilan normal taqsimlangan deyish mumkin ekan.

Eslatma: agar ξ u.t.m matematik kutilmasi Mξ=a va dispersiyasi D$\xi = \sigma^2$ bo‘lgan normal taqsimotga ega bo‘lsa, u holda buni quyidagicha belgilashadi: $\xi \epsilon N(a, \sigma^2)$

7-MAVZU

KO‘P O‘LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLAR VA ULARNING TAQSIMOT QONUNLARI.

KOVARIATSIYA MOMENTI VA KORRELYATSIYA KOEFFITSIYENTI.

Shu vaqtga qadar mumkin bo‘lgan qiymatlari bitta son bilan o‘lchanadigan tasodifiy miqdorlar qaralgan edi. Bunday miqdorlar bir o‘lchovli deb ataladi. Amaliyotda ko‘p hollarda bir vaqtning o‘zida bir nechta son bilan o‘lchanadigan tasodifiy miqdorlarga duch kelish mumkin. Masalan ishlab chiqarilayotgan mahsulotning faqat uzunligi o‘lchansa bir o‘lchovli, ham uzunligi ham eni o‘lchansa ikki o‘lchovli, bir vaqtning o‘zida uzunligi, eni, balandligi o‘lchansa uch o‘lchovli va hokazo ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlarga ega bo‘lamiz.

Soddalik uchun ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlarni ko‘rib chiqamiz.

Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor (ξ,η) ning mumkin bo‘lgan qiymatlari *(x*$_i$*, y*$_j$*)*- sonlar juftligi va ularning mos ravishda *p(x*$_i$*, y*$_j$*)* (*i*=1,2,...,n; *j*=1,2,...,m) ehtimollari ro‘yxatiga ushbu miqdorning taqsimot qonuni deyiladi.

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	....	y_j	....	y_m
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	....	$p(x_1,y_j)$	....	$p(x_1,y_m)$
....	....	....	....	....	....	....
x_i	$p(x_i,y_1)$	$p(x_i,y_2)$	....	$p(x_i,y_j)$	....	$p(x_i,y_m)$
....	....	....	....		....	....
x_n	$p(x_n,y_1)$	$p(x_n,y_2)$	....	$p(x_n,y_j)$	....	$p(x_n,y_m)$

ξ va η tasodifiy miqdorlar (ξ,η) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlarning tashkil etuvchilari deyiladi. Birinchi ustunda ξ tasodifiy miqdorning, birinchi satrda η tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari keltirilgan. x_i ustun va y_j ustunlarning kesishgan joyida esa $p(x_i,y_j)$=P($\xi = x_i, \eta = y_j$) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning *(x*$_i$*, y*$_j$*)* qiymat qabul qilish ehtimolini ko‘rsatadi. Shuni ta’kidlash joizki *(x*$_i$*, y*$_j$*)* hodisalar to‘liq guruhni tashkil etgani uchun:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(\xi = x_i,\ \eta = y_j)=1.$$

Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor (ξ,η) ning taqsimot qonunini bilsak, uni tashkil etuvchi tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini topish mumkin.

ξ	x_1	....	x_i	....	x_n

P	$\sum_{j=1}^{m} p_{1j}$	....	$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}$	....	$\sum_{j=1}^{m} p_{nj}$

η	y_1	....	y_j	....	y_m
P	$\sum_{i=1}^{n} p_{i1}$	....	$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$	....	$\sum_{i=1}^{n} p_{im}$

Ta'rif 2. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor (ξ, η) ning **taqsimot funksiyasi** deb, ***x*** va ***y*** sonlarning har bir jufti uchun ξ tasodifiy miqdorning ***x*** dan kichik qiymat qabul qilishi, η tasodifiy miqdorning ***y*** dan kichik qiymat qabul qilish ehtimolini aniqlaydigan

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$$

funksiyaga aytiladi.

Geometrik nuqtai nazardan yuqoridagi tenglikni quyidagicha talqin qilish mumkin: $F_{\xi\eta}(x, y)$ funksiya (ξ, η) tasodifiy miqdorning (tasodifiy nuqtaning) uchi (x,y) nuqtada bo'lgan va bu nuqtadan chapda va pastda joylashgan cheksiz kvadrantga tushish ehtimolini anglatadi.

$F_{\xi\eta}(x, y)$ funksiya xossalari:

1-xossa. $0 \le F_{\xi\eta}(x, y) \le 1$

2-xossa. $F_{\xi\eta}(x, y)$ har qaysi argumenti bo'yicha kamaymaydigan funksiya, ya'ni

Agar $x_2 > x_1$ bo'lsa, $F_{\xi\eta}(x_2, y) \ge F_{\xi\eta}(x_1, y)$,

Agar $y_2 > y_1$ bo'lsa, $F_{\xi\eta}(x, y_2) \ge F_{\xi\eta}(x, y_1)$ bo'ladi.

3-xossa. Quyidagicha limit munosabatlar o'rinli:

1) $F(-\infty, y) = 0$, 2) $F(x, -\infty) = 0$, 3) $F(-\infty, -\infty) = 0$ 4) $F(+\infty, +\infty) = 1$

4-xossa. $F_{\xi\eta}(x, +\infty) = F_{\xi}(x)$

5-xossa. $F_{\xi\eta}(+\infty, y) = F_{\eta}(y)$

6-xossa. $P(x_1 < \xi < x_2, \eta < y) = F_{\xi\eta}(x_2, y) - F_{\xi\eta}(x_1, y)$

7-xossa. $P(\xi < x, y_1 < \eta < y_2) = F_{\xi\eta}(x, y_2) - F_{\xi\eta}(x, y_1)$

8-xossa. $P(x_1 < \xi < x_2, y_1 < \eta < y_2) = [F_{\xi\eta}(x_2, y_2) - F_{\xi\eta}(x_1, y_2)] - [F_{\xi\eta}(x_2, y_1) - F_{\xi\eta}(x_1, y_1)]$

Ta'rif 3. (ξ, η) ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning **zichlik funksiyasi** deb, $F_{\xi\eta}(x, y)$ taqsimot funksiyadan olingan ikkinchi tartibli aralash hosilaga aytiladi:

$$\boldsymbol{f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \partial y}}$$

Xossalari:

1°. $\boldsymbol{f_{\xi\eta}(x, y) \geq 0}$

2°. $F_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{f_{\xi\eta}(x, y) dx dy}$

3°. $\boldsymbol{P\big((\xi, \eta) \in D\big) = \iint_{(D)} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy}$

4°. $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy = 1}$

5°. ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi- $f_\xi(x)$

$$f_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\{F_{\xi\eta}(x, +\infty)\} = \frac{d}{dx}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{f_{\xi\eta}(x, y) dx dy}\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f_{\xi\eta}(x, y) dy}$$

6°. $\boldsymbol{\eta}$ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi- $f_\eta(y)$

$$f_\eta(y) = \frac{dF_\eta(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\{F_{\xi\eta}(+\infty, y)\} = \frac{d}{dy}\left\{\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f_{\xi\eta}(x, y) dx dy}\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f_{\xi\eta}(x, y) dx}$$

Kovariatsiya momenti

$$cov(\xi, \eta) = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)] = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta$$

Ko'p o'lchovli diskret tasodifiy miqdor bo'lganda kovariatsiya momenti quyidagicha hisoblanadi:

$$cov(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M\xi)\big(y_j - M\eta\big) \cdot p\big(x_i, y_j\big)$$

yoki

$$cov(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(\xi = x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(\eta = y_j)\right)$$

Ko‘p o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar berilganda kovariatsiya koeffitsiyenti quyidagicha topiladi:

$$cov(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)(y - M\eta)\boldsymbol{f_{\xi\eta}(x,y)dxdy}$$

ξ va η tasodifiy miqdorlar erkli bo‘lsa, kovariatsiya koeffitsiyenti nolga teng bo‘ladi. Ushbu kattalikning kamchiligi shundagi u ξ va η tasodifiy miqdorlarning o‘lchov birliklariga bog‘liq bo‘ladi, bu esa juda ko‘p amaliy masalalarda noqulaylik tug‘diradi. O‘lchov birliklaridan qutulish uchun korrelyatsiya koeffitsiyenti kiritiladi.

Korrelyatsiya koeffitsiyenti

$$corr(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)} = \frac{M(\xi\cdot\eta) - M\xi\cdot M\eta}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}}$$

Xossalari:

1. $-1 \le corr(\xi,\eta) \le +1$
2. $corr(\xi,\eta) = 0 \implies \xi$ va η tasodifiy miqdorlar chiziqli bog‘lanmagan bo‘ladi.
3. $corr(\xi,\eta) < 0 \implies \xi$ va η tasodifiy miqdorlar o‘rtasidagi bog‘liqlik yo‘nalishi teskari bo‘ladi.
4. $corr(\xi,\eta) > 0 \implies \xi$ va η tasodifiy miqdorlar o‘rtasidagi bog‘liqlik yo‘nalishi bir xil bo‘ladi.
5. $corr(\xi,\eta) = 1 \implies \xi$ va η tasodifiy miqdorlar o‘rtasidagi chiziqli bog‘liqlik mavjudligini anglatadi.

Misol. Talabalarning o‘zlashtirishi bilan ularni qoldirgan dars soatlari o‘rtasidagi korrelyatsiya koeffitsiyenti topilsin.

Qoldirilgan dars soatlari	baholar			
	2	3	4	5
0	0	5	10	10
4	5	15	20	15
10	10	5	5	0

Ehtimollar yig‘indisi birga teng bo‘lishi kerak edi, shuning uchun ham jadvaldagi talabalar sonini jami talabalar soniga bo‘lsak quyidagi jadvalga ega bo‘lamiz:

Qoldirilgan dars soatlari	baholar			
	2	3	4	5
0	0	0,05	0,1	0,1
4	0,05	0,15	0,2	0,15
10	0,1	0,05	0,05	0

Korrelyatsiya koeffitsiyentini topish uchun ξ va η tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini topamiz;

ξ	0	4	10
p	0,25	0,55	0,2

$$M\xi = 0 * 0.25 + 4 * 0.55 + 10 * 0.2 = 4.2$$

$$D\xi = 0^2 * 0.25 + 4^2 * 0.55 + 10^2 * 0.2 - 4.2^2 = 11.16$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \sqrt{11.16} = 3.34$$

η	2	3	4	5
p	0,15	0,25	0,35	0,25

$$M\eta = 2 * 0.15 + 3 * 0.25 + 4 * 0.35 + 5 * 0.25 = 3.7$$

$$D\eta = 2^2 * 0.15 + 3^2 * 0.25 + 4^2 * 0.35 + 5^2 * 0.25 - 3.7^2 = 1.01$$

$$\sigma(\eta) = \sqrt{D\eta} = \sqrt{1.01} = 1.005$$

$$M(\xi \cdot \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j) =$$

=4*2*0.05+4*3*0.15+4*4*0.2+4*5*0.15+10*2*0.1+10*3*0.05+10*4*0.05=13.9

$$corr(\xi, \eta) = \frac{M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}} = \frac{13.9 - 4.2 * 3.7}{3.34 * 1.005} = \frac{-1.64}{3.3567}$$
$$= -0.488 \text{ yoki } 48.8\%$$

Demak korrelyatsiya koeffitsiyentining manfiyligi talabalarning o‘zlashtirishi bilan ularning dars qoldirishlari soni teskari bog‘langanligidan dalolat beradi. Ular bir-biriga 48,8% bog‘liqliligini anglatadi.

8-MAVZU

KATTA SONLAR QONUNI. MARKAZIY LIMIT TEOREMA. CHEBISHEV TENGSIZLIKLARI. ERKLI TASODIFIY MIQDORLAR KETMA-KETLIGI UCHUN KATTA SONLAR QONUNI. CHEBISHEV VA BERNULLI TEOREMALARI. BIR XIL TAQSIMLANGAN TASODIFIY MIQDORLAR UCHUN MARKAZIY LIMIT TEOREMA. LYAPUNOV TEOREMASI. LAPLAS TEOTEMASI.

Эҳтимоллик ва статистика оммавий тасодифий борлиқларни ўрганадиган фан бўлиб, Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари тасодифийлик билан зарурат ўртасида боғлиқлик ўрнатади. Оммавий тасодифий борлиқларда пайдо бўладиган қонуниятларни ўрганиш келажакдаги тажрибалар натижаларини илмий жиҳатдан башорат қилиш имконини беради. Қаерда тасодифийлик бўлса, у ерда эҳтимоллар назарияси қонунлари ишлайди. Ижтимоий ҳаётимизнинг барча соҳаларида, айниқса иқтисодий кўрсаткичларни башорат қилишда, кузатилаётган тасодифий миқдорнинг тақсимоти кўриниши тўғрисидаги тахминларни илмий жиҳатдан текшириш ва етарлича эҳтимоллик (кафолат) билан тасдиқлаш йўлларини топиш фаннинг нақадар кенг спектрдаги масалаларни ечишда етарлича инструментларга эга эканлигини кўрсатади. Биржа савдолари, суғурта соҳасида эҳтимоллар назарияси усуллари беқиёс ҳисобланади. Техниканинг турли жабхаларида, айниқса дастурлаш технологияларида тасодифийликка боғлиқ бўлган дастурлар, масалан турли хил ўйинлар дастурида эҳтимоллар назарияси усулларидан кенг фойдаланилади.

1.2. **Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари мазмуни**

Эҳтимоллар назарияси лимит теоремалари иккита гуруҳга бўлинади, уларнинг биттаси катта сонлар қонуни деб ном олди, иккинчиси эса марказий лимит теоремалар деб ном олган. Катта сонлар қонуни айрим тасодифий миқдорларни уларнинг тақсимот қонунларидан қатъий назар маълум бир лимит қийматларга яқинлашиш саволларига тегишлидир. Марказий лимит теоремалар эса тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотининг лимит қонунларига тегишли теоремаларни ўз ичига олади.

Катта сонлар қонуни деб ном олган теоремалар: Чебишев тенгсизлиги, Чебишев теоремаси, Бернулли теоремасини кўриб чиқамиз.

1. КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ

Маълумки, тасодифий миқдор синаш якунида мумкин бўлган қийматлардан қайси бирини қабул қилишини аввалдан ишонч билан айтиб бўлмайди, чунки у ҳисобга олиб бўлмайдиган бир қанча тасодифий сабабларга боғлиқ бўлиб, биз уларни хисобга ололмаймиз. Ҳар бир тасодифий миқдор ҳақида ана шу маънода жуда кам маълумотга эга бўлганимиз учун етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси тўғрисида ҳам бирор нарса айта олишимиз қийиндек кўринади. Аслида эса бу ундай эмас. Бирор нисбатан кенг шартлар остида етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тасодифийлик характери деярли йўқолар ва у қонуниятга айланиб қолар экан. Амалиёт учун жуда кўп тасодифий сабабларнинг биргаликдаги таъсири тасодифга деярли боғлиқ бўлмайдиган натижага олиб келадиган шартларни билиш жуда катта аҳамиятга эга, чунки бу ҳодисаларнинг қандай ривожланишини кўра билиш имконини беради. Бу шартлар умумий ном билан катта сонлар қонуни деб юритиладиган теоремаларда кўрсатилади. Булар жумласига Чебишев ва Бернулли теоремалари мансуб, Чебишев теоремаси катта сонлар қонунининг энг умумийси, Бернулли теоремаси эса энг соддасидир. Бу теоремаларнинг исботида Чебишев тенгсизлигидан фойдаланилади.

2. ЧЕБИШЕВ ТЕНГСИЗЛИГИ

Чебишев тенгсизлиги дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ўринли. Соддалик учун бу тенгсизликни дискрет миқдорлар учун исботлаймиз.

Тақсимот жадвали (қонуни) билан берилган X дискрет тасодифий миқдорни қараймиз:

X	x_1	x_2	....	x_n
P	p_1	p_2	....	p_n

Тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилишидан четланиши абсолют қиймат бўйича ε мусбат сондан ортмаслик эҳтимолини баҳолашни мақсад қилиб қўяйлик. Агар ε етарлича кичик бўлса, биз бу билан тасодифий миқдор ўзининг математик кутилишига яқин қиймат қабул қилиш эҳтимолини баҳолаган бўламиз. П.Л.Чебишев бизни қизиқтираётган баҳони берувчи тенгсизликни исботлаган.

Чебишев тенгсизлиги. X тасодифий миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланиши абсолют қиймат бўйича ε мусбат сондан кичик бўлиш эҳтимоли $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ дан кичик эмас:

$$P(|X-MX|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Исботи. $|X-MX|<\varepsilon$ ва $|X-MX|\geq\varepsilon$ тенгсизликларнинг бажарилишидан иборат бўлган ҳодисалар қарама-қарши бўлгани учун уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг, яъни

$$\mathrm{P}(|X-MX|<\varepsilon)+\mathrm{P}(|X-MX|\geq\varepsilon)=1$$

Бундан бизни қизиқтираётган эҳтимол:

$$\mathrm{P}(|X-MX|<\varepsilon)=1-\mathrm{P}(|X-MX|\geq\varepsilon) \qquad (*)$$

Кўриб турибмизки, масала $\mathrm{P}(|X-MX|\geq\varepsilon)$ эҳтимолни ҳисоблашга келтирилди.

X тасодифий миқдор дисперсиясининг ифодасини ёзайлик:

$$D(X)=(x_1-M(X))^2\cdot p_1+\cdots+(x_n-M(X))^2\cdot p_n$$

Бу йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси манфий эмас.

Таркибида $|x_i-M(X)|<\varepsilon$ бўлган қўшилувчиларни ташлаб юборамиз, қолган қўшилувчилар учун $|x_i-M(X)|\geq\varepsilon$ бўлади. Натижада йиғинди фақат камайиши мумкин. Аниқлик учун биринчи k ta қўшилувчи ташлаб юборилган деб ҳисоблаймиз (умумийликка зиён келтирмасдан, тақсимот жадвалида мумкин бўлган қийматлар шу тартибда белгилаб чиқилган дейиш мумкин). Шундай қилиб,

$$D(X) \geq (x_{k+1} - M(X))^2 \cdot p_{k+1} + \cdots + (x_n - M(X))^2 \cdot p_n$$

$|x_i - M(X)| \geq \varepsilon$ $(j = k+1, k+2, \ldots, n)$ тенгсизликнинг иккала томони ҳам мусбат, шунинг учун уларни квадратга ошириб, тенг кучли $|x_i - M(X)|^2 \geq \varepsilon^2$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан фойдаланиб ва қолган йиғиндидаги ҳар бир $|x_i - M(X)|^2$ кўпайтувчини ε^2 билан алмаштириб (бундан фақат тенгсизлик кучайиши мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X) \geq \varepsilon^2(p_{k+1} + p_{k+2} + \cdots + p_n) \qquad (**)$$

Қўшиш теоремасига кўра $p_{k+1} + p_{k+2} + \cdots + p_n$ эҳтимоллар йиғиндиси X тасодифий миқдор $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ қийматларнинг қайсиниси бўлса, бирини қабул қилиш эҳтимоли бўлиб, уларнинг ҳар бирида ҳам четланиш $|x_i - M(X)| \geq \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантиради. Бундан $p_{k+1} + p_{k+2} + \cdots + p_n$ йиғинди

$$\text{P}(|X - MX| \geq \varepsilon)$$

эҳтимолни ифодалаши келиб чиқади. Бу мулоҳаза (**) тенгсизликни бундай ёзишга имкон беради:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 \cdot \text{P}(|X - MX| \geq \varepsilon)$$

Ёки

$$\text{P}(|X - MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (***)$$

(***) ни (*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\text{P}(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Мана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Эслатма. Амалиёт учун Чебишев тенгсизлигиниг аҳамияти чекланган, чунки кўп ҳолларда у қўпол, баъзан эса тривиал (аҳамияти бўлмаган) баҳо беради. Масалан, агар $D(X) > \varepsilon^2$, ва демак $\frac{D(X)}{\varepsilon^2} > 1$ бўлса, у ҳолда $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} < 0$; шундай қилиб, бу ҳолда Чебишев тенгсизлиги четланишнинг эҳтимоли манфий эмаслигини билдиради, бу эса шундоқ ҳам равшан, чунки ҳар қандай эҳтимол манфий бўлмаган сон билан ифодаланади. Чебишев тенгсизлигини назарий аҳамияти эса жуда каттадир. Қуйида Чебишев теоремасини келтириб чиқариш учун шу тенгсизликдан фойдаланамиз.

3.ЧЕБИШЕВ ТЕОРЕМАСИ

Чебишев теоремаси. Агар $X_1, X_2, \ldots, X_n$ жуфт-жуфт эркли тасодифий миқдорлар бўлиб, уларнинг дисперсиялари $DX_i \leq C$ текис чегараланган (ўзгармас С сондан катта эмас) бўлса, у ҳолда мусбат ε сон ҳар қанча кичик бўлганда ҳам, тасодифий миқдорлар сони етарлича катта бўлса,

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon$$

Тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.

Бошқача қилиб айтганда, теорема шартлари бажарилганда

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

Шундай қилиб, Чебишев теоремаси бундай даъво қилади: агар дисперсиялари чегараланган тасодифий миқдорларнинг етарлича кўп сондагиси қаралаётган бўлса, у ҳолда бу тасодифий миқдорлар арифметик ўртача қийматининг уларнинг математик кутилишлари арифметик ўртача қийматидан четланиши абсолют қиймат бўйича исталганча кичик бўлишидан иборат ҳодисани деярли муқаррар деб ҳисоблаш мумкин.

Исботи. Янги тасодифий миқдор – тасодифий миқдорларнинг

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

Арифметик ўртача қийматини текширамиз.

$\bar{X}$ нинг математик кутлишини топамиз. Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланиб (ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисдан ташқарига чиқариш мумкин; йиҳиндининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг), қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{M}\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n} \qquad (*)$$

$\bar{X}$ тасодифий миқдорга Чебишев тенгсизлигини қўллаймиз:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \qquad (**)$$

Дисперсиянинг хоссаларидан фойдаланиб (ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб дисперсия белгиласидан ташқарига чиқариш мумкин; эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчилар дисперсиялари йиғиндисига тенг), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^2}$$

Шартга кўра ҳамда тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари С ўзгармас сон билан чегараланган, яъни

$$D(X_1)\leq C;\ D(X_2)\leq C;\ldots;\ D(X_n)\leq C$$

тенгсизликлар ўринли, шунинг учун

$$\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^2}\leq\frac{\mathrm{C}+\mathrm{C}+\cdots+\mathrm{C}}{n^2}=\frac{\mathrm{C}}{n}$$

Шундай қилиб,

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\leq\frac{\mathrm{C}}{n} \qquad (***)$$

(***) нинг ўнг томонини (**) га қўйиб, (бундан (**) тенгсизлик фақат кучайиши мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\mathrm{C}}{n\cdot\varepsilon^2}$$

Бундан $n \to \infty$ да лимитга ўтиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1$$

Ниҳоят, эҳтимол бирдан катта бўла олмаслигини ҳисобга олиб, узил-кесил бундай ёзишимиз мумкин:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Теорема исботланди.

Юқорида Чебишев теоремасини таъкидлашда, биз тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари ҳар хил деб фараз қилган эдик. Амалиётда эса кўпинча тасодифий миқдорлар бир хил математик кутилишга эга бўлади. Агар шунга қўшимча қилиб, бу тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари текис чегараланган бўлса, у ҳолда бу миқдорларга Чебишев теоремасини қўллаш мумкинлиги равшан. Ҳар бир тасодифий миқдорнинг математик кутилишини a орқали белгилаймиз, қаралаётган ҳолда математик кутилишларнинг арифметик ўртачаси ҳам a га тенг бўлишини кўриш қийин эмас.

Биз энди қаралаётган хусусий ҳол учун Чебишев теоремасини таърифлашимиз мумкин.

Агар $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий миқдорлар жуфт-жуфт эркли ва бир хил математик кутилишга эга бўлиб, уларнинг дисперсиялари текис чегараланган бўлса, у ҳолда $\varepsilon > 0$ мусбат сон ҳар қанча кичик бўлганда ҳам тасодифий миқдорлар сони етарлича кўп бўлса,

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.

Бошқача сўз билан айтганда, теореманинг шартлари бажарилганда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1$$

тенглик ўринли бўлади.

ЧЕБИШЕВ ТЕОРЕМАСИНИНГ МОҲИЯТИ

Исботланган теореманинг моҳияти бундай: айрим эркли тасодифий миқдорлар ўз математик кутилишларидан анча фарқ қиладиган қийматлар қабул қилса-да, етарлича катта сондаги тасодифий миқдорларининг арифметик ўрта қиймати катта эҳтимоллик билан ўзгармас сонга, чунончи $\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}$ сонга (ёки хусусий ҳолда a сонга) яқин қийматларни катта эҳтимол билан қабул қилади. Бошқача сўз биланайтганда, айрим тасодифий миқдорлар анчагина сочилган бўлиши мумкин, лекин уларнинг арифметик ўрта қиймати кам тарқоқ бўлади.

Шундай қилиб ҳар бир тасодифий миқдор мумкин бўлган қийматлардан қайси бирини қабул қилишини аввалдан айтиб бўлмайди, аммо уларнинг арифметик ўрта қиймати қандай қиймат қабул қилишини олдиндан кўра билиш мумкин.

Шундай қилиб, етарлича катта сондаги эркли тасодифий миқдорларнинг (дисперсиялари текис чегараланган) арифметик ўртача қиймати тасодифийлик характерини йўқотади. Бу бундай изоҳланади: ҳар бир миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланиши мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин, аммо арифметик ўртача қийматда улар ўзаро йўқолиб кетади.

Чебишев теоремаси фақат дискрет тасодифий миқдорлар учун эмас, балки узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринли.

ЧЕБИШЕВ ТЕОРЕМАСИНИНГ АМАЛИЁТ УЧУН АҲАМИЯТИ

Одатда бирор физикавий катталикни ўлчаш учун бир нечта ўлчашлар ўтказилади ва уларнинг арифметик ўртача қиймати изланаётган ўлчам сифатида қабул қилинади. Қандай шартларда бундай ўлчашусулини тўғри деб ҳисоблаш мумкин? Бу саволга Чебишев теоремаси (унинг хусусий ҳоли) жавоб беради.

Ҳақиқатдан ҳам, ҳар бир ўлчаш натижаларини $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Бу тасодифий миқдорар учун Чебишев теоремасини қўлламоқчи бўлсак қуйидагилар бажарилиши керак: 1) улар жуфт-жуфт эркли, 2) бир хил математик кутилишга эга, 3) уларнинг дисперсиялари текис чегараланган.

Агар ҳар бир ўлчаш натижаси қолганларининг натижаларига боғлиқ бўлмаса, биринчи талаб бажарилади.

Агар ўлчашлар систематик (бир хил ишорали) хатоларсиз бажарилса, иккинчи талаб бажарилади. Бу ҳолда ҳамма тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари бир хил бўлиб, у ҳақиқий ўлчам *a* га тенг бўлади.

Агар ўлчаш асбоби тайин аниқликни таъминлай олса, учинчи талаб бажарилади. Бунда айрим ўлчашларнинг натижалари ҳар хил бўлсада, уларни тарқоқлиги чегараланган бўлади.

Агар юқорида кўрсатилган ҳамма талаблар бажарилган бўлса, у ҳолда ўлчаш натижаларига Чебишев теоремасини қўллашга ҳақлимиз: *n* етарлича катта бўлганда

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon$$

Тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади. Бошқача қилиб айтганда, етарлича кўп сонда ўлчашлар ўтказилса, у ҳолда уларнинг арифметик ўртача қиймати ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматидан исталганча кам фарқ қилади.

Шундай қилиб, Чебишев теоремаси кўрсатилган ўлчаш усулини қўллаш мумкин бўладиган шартларни бажарилиши кераклигини кўрсатади.

Бироқ ўлчашлар сонини кўпайтириш билан исталганча аниқликка эришиш мумкин деб ўйлаш нотўғри бўлар эди. Гап шундаки, асбобнинг ўзи $\pm\alpha$ аниқликда кўрсатади; шунинг учун ҳар бир ўлчаш натижаси, ва демак уларнинг арифметик ўртача қиймати ҳам асбобнинг аниқлигидан ортмайдиган аниқликда ҳосил қилинади.

Статистикада қўлланиладиган танланма усул Чебишев теоремасига асосланган, бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, унда унча катта бўлмаган тасодифий танланмага асосланиб, барча текширилаётган объектлар тўплами (бош тўплам) тўғрисида мулоҳаза қилинади. Масалан, бир той пахтанинг сифати ҳақида ҳар ер-ҳар еридан олинган пахта толаларидан иборат тутамнинг сифатига қараб хулоса чиқарилади.Тутамдаги пахта толаларини сони тойдагидан анча кам бўлса ҳам, тутам етарлича кўп сондаги юзлаб толалардан иборатдир.

Бошқа мисол сифатида доннинг сифатини ундан озгинасини татиб кўришга асосланиб уни сифатини билиб олиш мумкин. Бу ҳолда ҳам таваккалига олинган донлар сони ҳамма дон сонидан анча кичик бўлсада, лекин ўз-ўзи учун етарлича кўп.

Мана шу келтирилган мисолларнинг ўзида. Чебишев теоремаси амалиёт учун бебаҳо аҳамиятга эга деб хулоса чиқариш мумкин.

4.БЕРНУЛЛИ ТЕОРЕМАСИ

n та эркли синаш ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли *p* га тенг бўлсин. Ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси тахминан қандай бўлишини аввалдан кўра билиш мумкинми? Бу саволга Яков Бернулли томонидан исботланган теорема (1713 йилда нашр этилган) ижобий жавоб беради, бу теорема “катта сонлар қонуни” номи билан юритилади, у эҳтимоллар назариясининг фан сифатида шаклланишига асос солди. Бернуллининг исботи мураккаб эди. Теореманинг содда исботини П.Л.Чебишев 1846 йилда баён этган.

Бернулли теоремаси. *Агар **n** та эркли синашнинг ҳар бирида А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли **p** ўзгармас ва синашлар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда нисбий частотанинг **p** эҳтимолдан четланиши абсолют қиймат бўйича, исталганча кичик бўлиш эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.*

Бошқача қилиб айтганда, агар ε исталганча кичик мусбат сон бўлса, у ҳолда теорема шартлари бажарилганда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Исботи. X_1орқали (дискрет тасодифий миқдор) биринчи синашда, X_2 орқали иккинчи синашда, ..., X_n орқали *n*-синашда ҳодисанинг рўй бериш сонини белгилаймиз.

Равшанки бу миқдорларнинг ҳар бири фақат иккита қиймат: 1 ни (A ҳодиса рўй берди) *p* эҳтимол билан ва 0 ни (ҳодиса рўй бермади) 1-*p*=*q* эҳтимол билан қабул қилиши мумкин.

Қаралаётган миқдорларга Чебишев теоремасини қўллаш мумкинми? Агар тасодифий миқдорлар жуфт-жуфт эркли ва уларнинг дисперсиялари чегараланган бўлса, мумкин. Иккала шарт ҳам бажарилади. Ҳақиқатдан ҳам $X_1, X_2, \dots, X_n$ миқдорларнинг жуфт-жуфт эрклилиги тажрибаларнинг эрклилигидан келиб чиқади. Ихтиёрий X_i (*i*=1, 2, ..., *n*) миқдорнинг дисперсияси *p*q* кўпайтмага тенг, *p+q=1* бўлгани учун *p*q* кўпайтма $\frac{1}{4}$ дан ортмайди (маълумки, йиғиндиси ўзгармас бўлган икки соннинг кўпайтмаси ўзининг энг катта қийматига кўпайтувчилар ўзаро тенг бўлган ҳолда эришади. Бу ерда *p+q=1* , яъни ўзгармас, шунинг учун *p=q=*$\frac{1}{2}$ да *p*q* кўпайтма энг катта қийматга эга бўлади, бу қиймат $\frac{1}{4}$ га тенг.), демак бу миқдорларнинг дисперсиялари чегараланган, масалан C=$\frac{1}{4}$ сони билан.

Кўрилаётган миқдорларга Чебишев теоремасини (хусусий ҳолини) қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Ҳар бир X_i миқдорнинг ***a*** математик кутилиши (яъни битта синашда ҳодисанинг рўй бериш сонининг математик кутилиши) ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли *p* га тенг эканлигини эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Энди $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ каср *n* та синашда A ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси $\frac{m}{n}$ га тенглигини кўрсатиш қолди, холос. Ҳақиқатдан $X_1, X_2, \dots, X_n$ миқдорларнинг ҳар бири ҳодиса мос синашда рўй берганида бирни қабул қилади; демак $X_1 + X_2 + \ \dots + X_n$ йиғинди n та синашда ҳодисанинг рўй бериш сони m га тенг. Демак,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{m}{n}$$

Бу тенгликни ҳисобга олиб, узил-кесил

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Эслатма. Бернулли теоремасига асосланиб, синашлар сони ортиши билан нисбий частота албатта p эҳтимолга интилади, деб хулоса чиқариш нотўғри бўлар эди; бошқача қилиб айтганда, Бернулли теоремасидан $\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p$ тенглик келиб чиқмайди. Теоремада фақат тажрибалар сони етарлича катта бўлганда нисбий частотанинг ҳар бир синашда ҳодиса рўй беришининг ўзгармас эҳтимолидан исталганча кам фарқ қилиши эҳтимоли тўғрисида сўз боради.

Шундай қилиб, $\frac{m}{n}$ нисбий частотанинг р эҳтимолга интилиши математик анализдаги маънодаги интилишдан фарқ қилади. Бу фарқни таъкидлаш мақсадида "эҳтимол бўйича яқинлашиш" тушунчаси киритилади. Аниқроғи, кўрсатилган интилиш турлари орасидаги фарқ қуйидагидан иборат:

Агар $\frac{m}{n}$ нисбат $n\to\infty$ да математик анализдаги интилиш маъносида p га интилса, у ҳолда $\forall\varepsilon>0$ учун $\exists n_0\in N$ топиладики $\forall n>n_0$ лар учун албатта $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади; агарда $\frac{m}{n}$ нисбат $n\to\infty$ да p га эҳтимол бўйича интилса, у ҳолда n нинг айрим қийматларида тенгсизлик бажарилмай қолиши мумкин.

Шундай қилиб, Бернулли теоремасига кўра $n\to\infty$ да нисбий частота р га эҳтимол бўйича интилади. Бернулли теоремаси қисқача қуйидагича ёзилади:

$$\frac{m}{n}\xrightarrow{\text{Р−эҳт}}p,\qquad n\to\infty$$

Кўриниб турибтики, Бернулли теоремаси синашлар сони етарлича кўп бўлганда нисбий частота нима учун турғунлик хоссасига эга бўлишини тушунтиради ва эҳтимолнинг статистик таърифини асослайди.

Классик лимит теорема

Марказий лимит теоремалар – эҳтимоллар назариясидаги шундай теоремалар синфики, уларда тахминан бир хил масштабга ва суст (кучсиз) боғлиқликка эга бўлган жуда катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлишини тасдиқлашади.

Амалиётда жуда кўп тасодифий миқдорлар бир нечта суст боғланган тасодифий факторлар таъсирида шаклланади, уларнинг тақсимотини нормал деб қабул қилишади. Бунда бу факторларнинг бирортаси хам доминанта бўлмаслиги шарти бажарилиши лозим. Бундай ҳолларда марказий лимит теоремалар нормал тақсимотни қўллашни асослаб беради.

Марказий лимит теореманинг классик шакли.

Айтайлик $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ эркли, бир хил тақсимланган тасодифий миқдорларнинг чексиз кетма-кетлиги берилган бўлиб, улар чекли математик кутилма ва чекли дисперсияга $\mathrm{M}X_i=\mu<\infty, DX_i=\sigma^2<\infty$ эга бўлсин. Белгилаш киритамиз: $S_n=X_1+\cdots+X_n$=$\sum_{i=1}^{n}X_i$, у ҳолда

$$\frac{S_n-n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}\to N(0{,}1)\ \text{тақсимот бўйича}\ n\to\infty.$$

ёки $$P\left(\frac{S_n-n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}<x\right)\to\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2}dt$$

бунда Ф(x) – стандарт нормал тақсимотнинг тақсимот функцияси

Эслатмалар:

- Но расмий айтганда, классик марказий лимит теорема, n та эркли, бир хил тақсимланган тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси $N(n\mu, n\sigma^2)$ тақсимотга яқин тақсимотга эга эканлигини тасдиқлайди. Эквивалент равишда $\bar{X} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ тасодифий миқдор $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлади.

- $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ тасодифий миқдорлар турли хил эҳтимоллик фазоларида аниқланган бўлиши мумкин. Улар фақат битта ҳақиқий тўғри чизиқда қиймат қабул қилса бўлди.
- Стандарт нормал тақсимотнинг тақсимот функцияси узлуксиз бўлгани учун, ушбу тақсимотга яқинлашиш тақсимот функцияларининг стандарт нормал тақсимот функциясига нуқтали яқинлашишига эквивалент.

$Z_n = \frac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}$ белгилаш киритсак, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз

$$F_{Z_n}(x) \to \Phi(x), \quad \forall x \in R$$

- Классик марказий лимит теорема характеристик функциялар ёрдамида исботланади (узлуксизлик ҳақидаги Леви теоремасига асосланиб)
- Умуман олганда тақсимот функцияларнинг яқинлашишидан, зичлик функцияларинг яқинлашиши келиб чиқмайди, лекин классик ҳолатда бу тасдиқ ўринли.

ЛОКАЛ МАРКАЗИЙ ЛИМИТ ТЕОРЕМА

Классик марказий лимит теорема шартларига қўшимча равишда, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ тасодифий миқдорларнинг тақсимоти абсолют узлуксиз бўлса, яъни у зичлик функцияга эга бўлса, у ҳолда $Z_n = \frac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}$ тасодифий миқдор тақсимоти ҳам абсолют узлуксиз бўлиб, шу билан бирга

$$f_{Z_n}(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , n \to \infty$$

бунда, $f_{Z_n}(x)$ - функция Z_n тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси, ўнг томонда эса стандарт нормал тақсимотнинг зичлик функцияси.

Айрим умумлаштиришлар

Классик марказий лимит теорема натижаси тўла эрклилик ва бир хил тақсимланганлик шартларидан кўра янада умумийроқ шартларда ҳам ўринли.

Марказий лимит теоремаси (Линдеберг)

Айтайлик $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ эркли тасодифий миқдорлар битта эҳтимоллик фазосида аниқланган бўлиб, чекли математик кутилма ва дисперсияларга эга бўлсин. $M[X_i] = \mu_i < \infty, \; D[X_i] = \sigma_i^2 < \infty$, у ҳолда

$$MS_n = m_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \;, \quad DS_n = g_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Линдеберг шарти бажарилсин

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M\left[\frac{(X_i - \mu_i)^2}{g_n^2} 1\{|X_i - \mu_i| > \varepsilon \cdot g_n\}\right] = 0$$

У ҳолда

$$\frac{S_n - m_n}{g_n} \to N(0,1) \text{ тақсимот бўйича } n \to \infty$$

ёки

$$P\left(\frac{S_n - m_n}{g_n} < x\right) \to \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$$

Марказий лимит теорема (Ляпунов)

Айтайлик Линдеберг марказий лимит теоремаси базавий шартлари бажарилган бўлсин. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ тасодифий миқдорлар чекли учинчи моментга эга бўлсин, у ҳолда

$$r_n^3 = \sum_{i=1}^{n} M[|X_i - \mu_i|^3]$$

Кетма-кетлик аниқланган бўлиб, агар

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{g_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} M[|X_i-\mu_i|^3]}}{\sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}} = 0 \qquad \text{(Ляпунов шарти)}$$

бўлса, у ҳолда

$$\frac{S_n - m_n}{g_n} \to N(0,1) \text{ тақсимот бўйича } n \to \infty$$

ёки

$$P\left(\frac{S_n - m_n}{g_n} < x\right) \to \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$$

Мисол. Хусусий самолёт умумий оғирлиги 360 кг.дан ошмайдиган кўпи билан 4 кишини ўз бортига олиши мумкин. Пассажирнинг оғирлиги X тасодифий миқдор бўлиб, нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин. MX=75кг, $\sigma^2(\mathrm{X}) = 64\ (\text{кг})^2$. Самолётда ортиқча юк пайдо бўлиш даврийлиги топилсин?

Айтайлик X_i-*i*-пассажир оғирлиги бўлсин (*i*=1,2,3,4).

$$S_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

$$MS_4 = M(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = 4 * MX = 4 * 75 = 300$$

$$DS_4 = D(4X) = 16 * DX = 16 * 64 = 32^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma(S_4) = 32$$

$$P\{S_4 > 360\} = P\{360 < S_4 < \infty\} = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{360 - 300}{32}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \Phi(1{,}875) \approx 0{,}5 - 0{,}47 = 0{,}03$$

яъни самолётда мўлжалланган оғирлик миқдорини меъёрдан ошиши ўрта ҳисобда ҳар 100 та рейснинг 3 тасида кузатилишини англатади.

1-"муаммоли вазият": "Асака" автомобил заводида, эҳтиёт қисмларнинг ўлчамлари ўртача ўлчамдан фарқи 2мм дан ошмасин. Ўртача ўлчам деталлар ўлчамларининг математик кутилмаси билан устма-уст тушсин ва ўртача квадратик четланиш 0.25мм ($\sigma_{\mathrm{X}} = 0.25\text{мм}$)га тенг бўлса, автомобил бирор бир қисмини тўғри йиғишни ташкил этиш эҳтимолини баҳоланг? Олинган натижаларга интерпретация беринг?

Ечилиши: Масаланинг берилиш шартига кўра эҳтиёт қисмлар ўлчамларини тасодифий миқдор десак, ушбу тасодифий миқдор турли қийматлар қабул қилади, чунки биз эътиборга олишимизни иложи бўлмаган жуда кўп сабабларга кўра станокдан чиқаётган детал бўлиши керак бўлган ўртача ўлчамдан кўпи билан 2мм га фарқ қилар экан, бу эса $\varepsilon = 2\text{мм}$ эканлигини англатади, эҳтиёт қисмнинг ўртача ўлчами, яъни математик кутилмасини M(X) билан белгиласак, у ҳолда Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon) \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X-M(X)|<2) \geq 1-\frac{0.25^2}{2^2}=0.9844 \text{ ёки } 98.44\%$$

Эканлигини аниқлаймиз. Буни эса ўрта хисобда автомобилнинг айнан шу қисмини тўғри йиғилганлигига 98.44% гарантия берилганлигини, ва ўрта ҳисобда 10.000 та машинадан 156 тасидагина бу қисми нотўғри йиғилган бўлишини англатади.

2-Муаммоли вазият. Йиғиш цехига юборилган 1000 та буюмдан, 200 таси сифатини текшириш учун тасодифий танлаб олинди. Уларнинг ичидан 25 таси брак чиқди. Брак деталлар сонининнинг ажратиб олинган деталлардаги улушини брак детал ишлаб чиқариш эҳтимоли сифатида қабул қилиб, бутун партияда брак деталлар улуши камида 10% кўпи билан 15 % бўлиш эҳтимоли топилсин.

Ечилиши. Марказий лимит теореманинг хусусий холи Лапласнинг интеграл теоремасига шартларини қаноатлантиради $n=1000, p=\frac{25}{200}=0.125, q=1-p=0.875, k_1=1000*10\%=100, k_2=1000*15\%=150,$

$P_n(k_1,k_2)=P_{1000}(100,150) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)=$

$=\Phi\left(\frac{150-1000*0.125}{\sqrt{1000*0.125*0.875}}\right)-\Phi\left(\frac{100-1000*0.125}{\sqrt{1000*0.125*0.875}}\right)=2\Phi(2.390457)=2*0{,}4913==0{,}9826$

9-MAVZU

MATEMATIK STATISTIKANING ASOSIY MASALALARI. MATEMATIK STATISTIKA PREDMETI. BOSH VA TANLANMA TO'PLAM. TANLANMANING BOSHLANG'ICH STATISTIK TAHLILI.

Tanlanma ma'lumotlarning dastlabki statistik tahlili

Ehtimollar nazariyasida o'rganilayotgan tasodifiy jarayonning matematik modeli sifatida $\{\Omega, \mathfrak{I}, P\}$ ehtimollik fazosi qaraladi, bunda Ω - elementar hodisalar fazosi deb ataluvchi biror to'plam, $\mathfrak{I}$ – Ω elementar hodisalar fazosining to'plam osti to'plamlaridan biror qoidaga ko'ra ajratilgan tasodifiy hodisalar to'plami, P $\mathfrak{I}$ to'plamdagi tasodifiy hodisalar ehtimoli. Xar bir tayin holat uchun P ehtimollik o'lchovi to'la aniqlanadi. Ehtimollar nazariyasining asosiy vazifasi mavjud ehtimollik fazosi qonuniyatlarini ochib berish, xususan murakkab hodisalarning ehtimollarini aniqlashga imkon beruvchi usullarni ishlab chiqishdan iboratdir.

Biroq amaliyotda tayin tajribalarni o'rganishda P ehtimollik ba'zi bir noaniqliklarga ega bo'ladi. Ko'p hollarda aytish mumkinki, P ehtimollik biror ehtimollar sinfining elementi bo'ladi. Bu sinf $\mathfrak{I}$ da berilishi mumkin bo'lgan barcha ehtimolliklarni o'z ichiga oladi. Agar $\mathfrak{I}$ sinf berilgan bo'lsa, u holda ehtimollikning statistik modeli yoki qisqacha statistik modeli berilgan deyiladi. Shunday qilib statistik model o'rganilayotgan tajribani ehtimollik modelida ehtimollikni berishda u yoki bu noaniqlik bo'lgandagi holatni yoritadi. Matematik statistikaning vazifasi bu noaniqliklarni kuzatilayotgan tajriba ma'lumotlari asosida kamaytirishdan iborat.

Shunday qilib matematik statistikada barcha mulohazalar statistik ma'lumotlarga, ya'ni kuzatilgan tajriba natijalariga asoslanadi. Ko'p hollarda esa dastlabki statistik ma'lumotlar P taqsimotga ega bo'lgan X tasodifiy miqdor ustida o'tqazilgan tajribalar natijasi bo'ladi. Bu holda tajriba tasodifiy miqdor ustida n ta sinov o'tqazishdan iborat bo'lib, i-sinov natijasi X_i tasodifiy miqdor bilan aniqlanadi, i=1,2,…,n. $X_1,X_2,\dots,X_n$ – to'plamga tanlanma deyiladi, n- tanlama hajmi. Biz kuzatishlar bir-biriga bog'liqsiz bo'lgan holni qaraymiz. Shu sababli $X_1,X_2,\dots,X_n$ larni n ta bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Tayin o'tqazilgan tajriba natijalari $X_1,X_2,\dots,X_n$ tanlanma hisoblanadi, uni $x_1, x_2,.., x_n$ lar orqali belgilaymiz.

Ma'lumki $x_1, x_2,\dots,x_n$ sonlar kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning qiymatlar to'plamidan bo'ladi, shu sababli ular variantalar deyiladi. Faraz qilaylik $\mathfrak{R}$ kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning barcha qiymatlar to'plami bo'lsin. $\mathfrak{R}$ bosh to'plam deyiladi, $x_1,x_2,\dots,x_n$ qiymatlarni bosh to'plam $\mathfrak{R}$ dan qaytariladigan tanlashlar sxemasi bo'yicha olingan, hajmi n bo'lgan tanlanma deb qarash mumkin. Tanlanmani o'sib borish yoki kamayib borish tartibida yozilishiga variatsion qator deyiladi. Variatsion qatorning uchta turi mavjud: ranjirlangan, diskret, oraliq variatsion qatorlar. Variatsion qatorni ko'pincha taqsimot qatori ham deyiladi. Ranjirlangan qator tanlanma hajmi kichik bolganda bu tanlanmaning alohida qiymatlari $x_1,x_2,\dots,x_n$ larni o'sish (kamayish) tartibida joylashishidan iboratdir, $x_{(1)}\le x_{(2)}\le x_{(3)} \le \dots \le x_{(n)}$. Agar variantalar soni yetarlicha katta bo'lib, x_{min} va x_{max} lar o'rtasidagi farq kichik bo'lsa, ranjirlangan qator juda katta bo'ladi. Agar belgi qiymatlari bir nechta bo'lsa, u holda diskret variatsion qator tuziladi.

Diskret variatsion qator, ikkita qatordan tashkil topgan bo'lib, birinchi qatorda belgining $x_1,x_2,\dots,x_s$ turli variantalari ikkinchi qatorda esa shu variantalarga mos ularning chastotalari n_i yoki nisbiy chastotalari n_i/n joylashgan bo'ladi. Agar tanlanma hajmi katta bo'lib, x_{min} va x_{max} o'rtasidagi farq yetarlicha katta bo'lsa, u holda oraliq variatsion qator tuziladi.

Oraliq variatsion qator ikkita qatordan tuzilgan bo‘lib, birinchi qatorda o‘rganilayotgan belgining oraliqlaridan, ikkinchisi esa bu oraliqlarga tegishli variantalar chastotasi yoki nisbiy chastotalaridan tuzilgan. Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi. Tanlanmaning statistik taqsimotini oraliqlar va ularning chastotalari yordamida ham berish mumkin. Ehtimollar nazariyasida taqsimot deganda tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bilan bu qiymatlar ehtimollari orasidagi moslik tushuniladi, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar orasidagi moslik tushuniladi.

Faraz qilaylik birorta bir jinsli ob‘yektlar to‘plamining miqdor yoki sifat belgilarini o‘rganish talab qilinayotgan bo‘lsin.

Empirik taqsimot funktsiya.

Faraz qilaylik diskret variatsion qator berilgan (1-jadval)

1-jadval

x_i	x_1	x_2	....	x_k
n_i	n_1	n_2		n_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$		$\frac{n_k}{n}$

Bu yerda $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, $n(u) = \sum_{i=1}^{k} n_i * \mathrm{I}(x_i < u)$

u dan kichik variantalar soni bo‘lsin , bunda

$$\mathrm{I}(x_i < u) = \begin{cases} 1, & agar \quad x_i < u \quad bo'lsa \\ 0, & agar \quad x_i \geq u \quad bo'lsa \end{cases}$$

boshqa so‘z bilan aytganda, $n(u)$ X tasodifiy miqdor ustida n ta kuzatish o‘tqazilgandagi x hodisaning ro‘y berishlari chastotalar soni.

Ta‘rif. Tanlamaning empirik taqsimot funktsiyasi $F_n(u)$ deb n(u)/n nisbatga aytiladi, ya‘ni

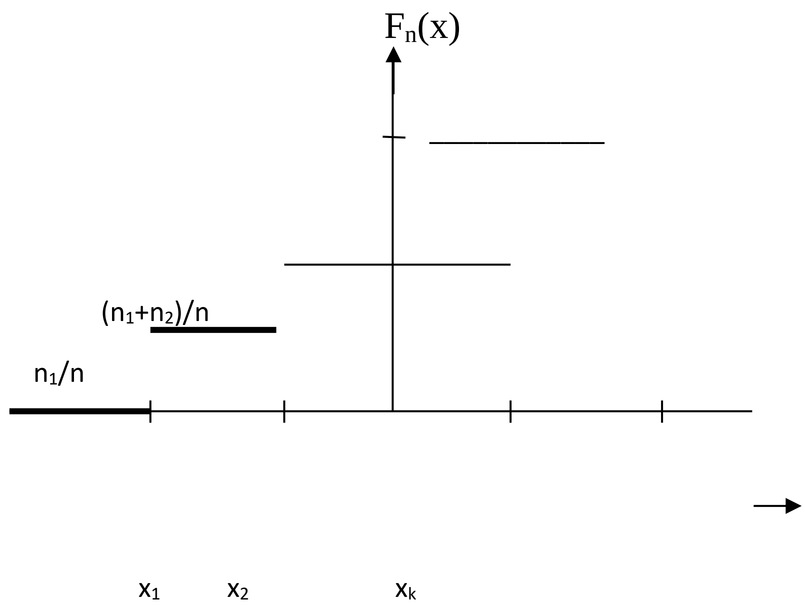
$$F_n(u) = \frac{n(u)}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} * \mathrm{I}(x_i < u) = \begin{cases} 0, & agar\ \ x < x_1 \ \ bo'lsa \\ \dfrac{n_1}{n}, & agar\ \ x_1 \le x < x_2 \ \ bo'lsa \\ \dfrac{n_1}{n} + \dfrac{n_2}{n}, & agar\ \ x_2 \le x < x_3 \ \ bo'lsa \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dfrac{n_1}{n} + \dots + \dfrac{n_{k-1}}{n}, & agar\ \ x_{k-1} \le x < x_k \ \ bo'lsa \\ 1, & agar\ \ x \ge x_k \ \ bo'lsa \end{cases} \qquad (1.1)$$

Empirik taqsimot funktsiya $F_n(u)$ taqsimot funktsiyaning barcha xossalarini qanoatlantiradi. Faraz qilaylik $F(x) = P(X < x)$ kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning noma'lum taqsimot funktsiyasi bo'lsin. Odatda $F(x)$ ni X tasodifiy miqdorning nazariy taqsimot funktsiyasi deyiladi. Shuni aytib o'tish kerakki, tayin tajriba o'tqazilguncha empirik taqsimot funktsiyani tasodifiy miqdor deb qarash kerak, chunki u $X_1, X_2, ..., X_n$ tanlamaning funktsiyasi xisoblanadi. Kuchaytirilgan katta sonlar qonunidan Glivenko teoremasi kelib chiqadi.

Glivenko teoremasi. Ixtiyoriy ε >0 son uchun quyidagi munosabat o'rinli

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_x \left|F_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon) = 1 \qquad (1.2)$$

Shunday qilib empirik taqsimot funksiya $F_n(x)$ "taqriban" $F(x)$ nazariy taqsimot funktsiyaga tengdir. Empirik funktsiya zinapoyasimon funktsiya bo'lib, $x_1, x_2, ..., x_k$ nuqtalarda sakrashlarga ega, x_m nuqtadagi sakrash qiymati $\dfrac{n_m}{n}$ ga teng,



1-rasm

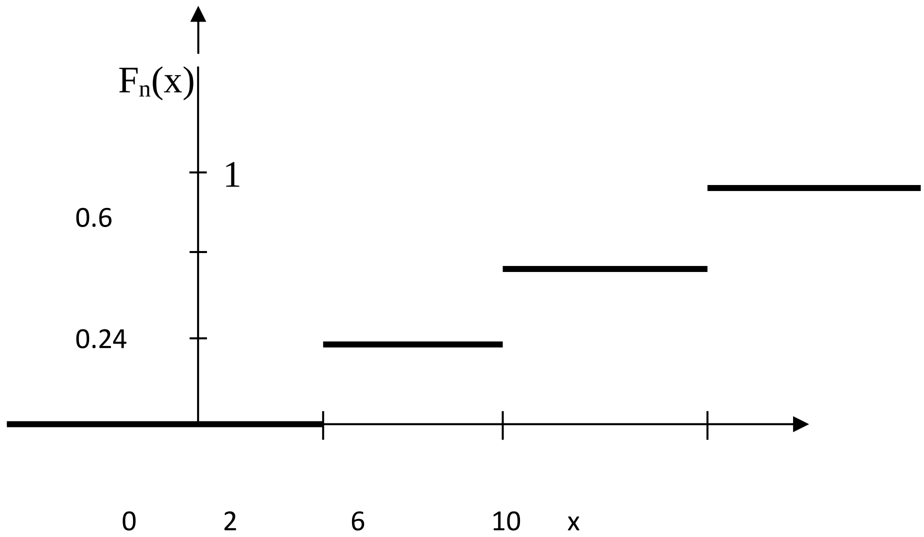
Empirik fuktsiya $F_n(x)$ bilan nazariy taqsimot funktsiya $F(x)$ ning farqi shundan iboratki, $F(x)$ (X<x) hodisaning ehtimolini, empirik taqsimot funktsiya $F_n(x)$ esa xuddi shu hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi.

Misol. Tanlanmaning berilgan diskret variatsion qatori bo‘yicha empirik taqsimot funktsiyani yasang.

x_i	2	6	10
n_i	12	18	20

$$n=\sum_{i=1}^{3} n_i = 12+18+20=50$$

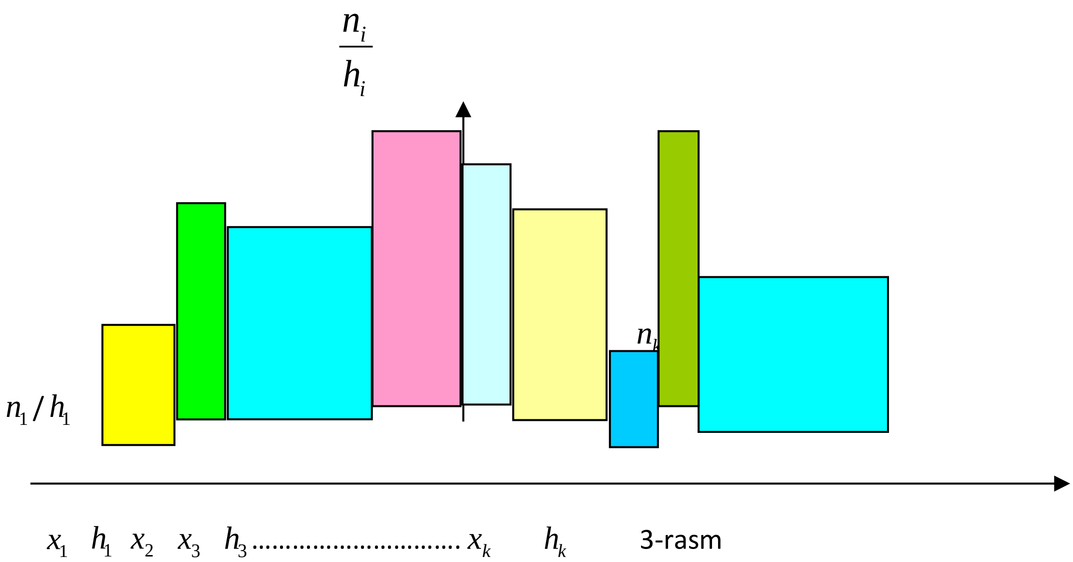
$$F_n(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ \dfrac{12}{50}, & 2\le x<6 \\ \dfrac{30}{50}, & 6\le x<10 \\ 1, & x\ge 10 \end{cases}$$



2-rasm.

Poligon va gistogramma. $(x_1,n_1),(x_2,n_2),...,(x_k,n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq **chastotalar poligoni** deyiladi. $\left(x_1,\frac{n_1}{n}\right),\left(x_2,\frac{n_2}{n}\right),...,\left(x_k,\frac{n_k}{n}\right)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa **nisbiy chastotalar poligoni** deyiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h_i uzunlikdagi guruh oraliqlari, balandliklari esa $\frac{n_i}{h_i}$ nisbatlarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figuraga aytiladi.



3-rasm

Hosil bo‘lgan figuraning yuzasi n ga teng. Xususan oraliqlar qadamlari bir xil ham bo‘lishi mumkin $h_1=h_2=...=h_k=h$ Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h_i uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{n*h_i}$ nisbatga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figuraga aytiladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzasi birga teng. Boshqa so‘z bilan aytganda nisbiy chastotalar poligoni va gistogrammasi nazariy taqsimot funktsiya $F(x)$ zichlik funktsiyasining geometrik bahosi xisoblanadi.

Tanlanmaning sonli xarakteristikalari.

Nazariy taqsimotning sonli xarakteristikalari kabi $X_1,X_2,....,X_n$ tanlanmaning empirik taqsimot funktsiyasining ham sonli xarakteristikalari kiritiladi. Tanlanma momentlar quyidagicha aniqlanadi:

Ranjirlangan variatsion qator berilgan holda:

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k \quad k-\text{ tartibli tanlanma moment.} \qquad (1.3)$$

$$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-A_1)^k \quad k-\text{ tartibli markaziy moment.} \qquad (1.4)$$

Koʻp hollarda ishlatiladigan A_1 va M_2 xarakteristikalar aloxida harflar bilan belgilanadi.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ - tanlanma oʻrta qiymat, (1.5)

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$ - tanlanma dispersiya, (1.6)

$$\bar{\mathbf{S}} = \sqrt{\bar{S}^2}$$ - tanlanma oʻrtacha kvadratik chetlanish. (1.7)

Agar diskret variatsion qator berilgan boʻlsa tanlanma momentlar quyidagicha hisoblanadi:

$$A_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^j * n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$ j- tartibli tanlanma moment, (1.8)

$$M_j = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - A_1\right)^j * n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$ j- tartibli markaziy moment (1.9)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i * n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$ tanlanma oʻrta qiymat (1.10)

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 * n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$ tanlanma dispersiya (1.11)

Oraliqli variatsion qatorlarda ham tanlanma momentlar diskret variatsion qatorlar uchun berilgan formulalar orqali topiladi, bunda x_i variantalar sifatida oraliq oʻrtalari olinishi mumkin. Diskret va oraliqli variatsion qatorlarda hisoblashni soddalashtirish uchun

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i - c}{k}\right) * n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} * k + c \qquad (1.12)$$

$$\overline{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 * n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} * k^2 - (\overline{x} - c)^2 \qquad (1.13)$$

formulalardan foydalanish mumkin, bunda C- umuman olganda ixtiyoriy son, lekin hisoblashni soddalashtirish uchun eng koʻp qatnashgan x_i ni olgan maʼqul, k- x_i larning oʻzgarish qadami.

2. **Tanlanma modasi M_0.** Ranjirlangan variatsion qatorlarda M_0 aniqlanmaydi. Diskret variatsion qatorlarda eng katta chastotali varianta M_0 boʻladi, agar eng katta chastotali varianta ikkita boʻlsa, u holda variatsion qator bimodal qator hisoblanadi va h.k. Agar kuzatishlar oraliqli variatsion qator koʻrinishida berilgan boʻlsa, u holda moda

$$Mo = X_{Mo} + k * \frac{n_{Mo} - n_{Mo+1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})} \qquad (1.14)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda X_{Mo}-eng koʻp qatnashgan oraliq - moda oraligʻining quyi chegarasi, n_{Mo}- moda oraligʻi chastotasi, n_{Mo+1}- moda oraligʻidan bitta keyingi oraliq chastotasi, n_{Mo-1}- moda oraligʻidan bitta oldingi oraliq chastotasi, k-moda oraliq uzunligi.

Ranjirlangan variatsion qatorlarda Me quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$Me = \begin{cases} x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} & \text{agar n toq bo'lsa} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{agar n juft bo'lsa} \end{cases} \qquad (1.15)$$

bu erda n-tanlanma hajmi, [a]- a sonning butun qismi.

Diskret variatsion qator mediana Me yigʻma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan yoki yigʻma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan x_j variantaga aytiladi.

Oraliq variatsion qator uchun Me quyidagicha formula bilan aniqlanadi:

$$Me = X_{Me} + k * \frac{\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{2} - T_{Me-1}}{n_{Me}} \qquad (1.16)$$

Bu yerda X_{Me} oraliqli variatsion qatorda yigʻma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan oraliq yoki yigʻma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan oraliq - mediana oraligʻining boshi, n_{Me} - mediana oraligʻining chastotasi, T_{Me-1} mediana oraligʻi chastotasigacha boʻlgan chastotalar yigʻindisi, yaʼni $T_{Me-1} = n_1 + n_2 + ... + n_{Me-1}$, k-mediana oraligʻi uzunligi.

10-MAVZU

Tanlanmaning sonli xarakteristikalari. Tanlanma matematik kutilish, tanlanma dispersiya va tanlanma o’rtacha kvadratik chetlanish tushunchalari. Tanlanma sonli xarakteristikalari xossalari.

Tanlanmaning sonli xarakteristikalari.

Nazariy taqsimotning sonli xarakteristikalari kabi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tanlanmaning empirik taqsimot funktsiyasining ham sonli xarakteristikalari kiritiladi. Tanlanma momentlar quyidagicha aniqlanadi:

Ranjirlangan variatsion qator berilgan holda:

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \qquad k - \text{tartibli tanlanma moment.} \qquad (1.3)$$

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - A_1)^k \qquad k - \text{tartibli markaziy moment.} \qquad (1.4)$$

Ko‘p hollarda ishlatiladigan A_1 va M_2 xarakteristikalar aloxida harflar bilan belgilanadi.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ - tanlanma o‘rta qiymat,} \qquad (1.5)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \text{ - tanlanma dispersiya,} \qquad (1.6)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \sqrt{\bar{S}^2} \text{ - tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish.} \qquad (1.7)$$

Agar diskret variatsion qator berilgan bo‘lsa tanlanma momentlar quyidagicha hisoblanadi:

$$A_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^j * n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \qquad \text{j- tartibli tanlanma moment,} \qquad (1.8)$$

$$M_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - A_1)^j * n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \qquad \text{j- tartibli markaziy moment} \qquad (1.9)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i * n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$ tanlanma o‘rta qiymat (1.10)

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 * n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$ tanlanma dispersiya (1.11)

Oraliqli variatsion qatorlarda ham tanlanma momentlar diskret variatsion qatorlar uchun berilgan formulalar orqali topiladi, bunda x_i variantalar sifatida oraliq o‘rtalari olinishi mumkin. Diskret va oraliqli variatsion qatorlarda hisoblashni soddalashtirish uchun

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - c}{k}\right) * n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} * k + c \qquad (1.12)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 * n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} * k^2 - (\bar{x} - c)^2 \qquad (1.13)$$

formulalardan foydalanish mumkin, bunda C- umuman olganda ixtiyoriy son, lekin hisoblashni soddalashtirish uchun eng ko‘p qatnashgan x_i ni olgan ma’qul, k- x_i larning o‘zgarish qadami.

2. **Tanlanma modasi M_0.** Ranjirlangan variatsion qatorlarda M_0 aniqlanmaydi. Diskret variatsion qatorlarda eng katta chastotali varianta M_0 bo‘ladi, agar eng katta chastotali varianta ikkita bo‘lsa, u holda variatsion qator bimodal qator hisoblanadi va h.k. Agar kuzatishlar oraliqli variatsion qator ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, u holda moda

$$Mo = X_{Mo} + k * \frac{n_{Mo} - n_{Mo+1}}{\left(n_{Mo} - n_{Mo-1}\right) + \left(n_{Mo} - n_{Mo+1}\right)} \qquad (1.14)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda X_{Mo}-eng ko‘p qatnashgan oraliq - moda oralig‘ining quyi chegarasi, n_{Mo}- moda oralig‘i chastotasi, n_{Mo+1}- moda oralig‘idan bitta keyingi oraliq chastotasi, n_{Mo-1}- moda oralig‘idan bitta oldingi oraliq chastotasi, k-moda oraliq uzunligi.

Ranjirlangan variatsion qatorlarda Me quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$Me=\begin{cases} x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} & \text{agar n toq bo'lsa} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{agar n juft bo'lsa} \end{cases} \qquad (1.15)$$

bu erda n-tanlanma hajmi, [a]- a sonning butun qismi.

Diskret variatsion qator mediana Me yig‘ma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan yoki yig‘ma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan x_j variantaga aytiladi.

Oraliq variatsion qator uchun Me quyidagicha formula bilan aniqlanadi:

$$Me = X_{Me} + k * \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{2} - T_{Me-1}}{n_{Me}} \qquad (1.16)$$

Bu yerda X_{Me} oraliqli variatsion qatorda yig‘ma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan oraliq yoki yig‘ma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan oraliq - mediana oralig‘ining boshi, n_{Me} - mediana oralig‘ining chastotasi, T_{Me-1} mediana oralig‘i chastotasigacha bo‘lgan chastotalar yig‘indisi, ya‘ni $T_{Me-1} = n_1 + n_2 + ... + n_{Me-1}$, k-mediana oralig‘i uzunligi.

11-MAVZU.

TAQSIMOT NOMA’LUM PARAMETRLARINING STATISTIK BAHOLARI. BAHOLAR VA ULARNING TURLARI. BAHOLARNING XOSSALARI: SILJIMAGANLIK, AHAMIYATLILIK, SAMARALILIK, NUQTALI BAHOLAR. BAHOLARNI TOPISH USULLARI: MOMENTLAR USULI, ENG KATTA O‘XSHASHLIK USULI

Taqsimot parametrlarining statistik baholarini topish usullari

Aytaylik o‘rganilayotgan belgining taqsimoti nazariy mulohazalardan aniqlangan bo‘lsin. Bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi yuzaga kelishi tabiiydir.

Ta’rif. Nazariy taqsimot noma’lum parametrining **statistik baxosi** deb tanlanmadan olingan ixtiyoriy funktsiyaga aytiladi.

Statistik baxolar baxolanayotgan parametrni yaxshi yaqinlashtirib berishi uchun ular ma’lum talablarni qanoatlantirishlari lozim.

Faraz qilaylik $T_n = T(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazariy taqsimotning noma’lum θ parametri bahosi bo‘lsin va hajmi n ga teng bo‘lgan tanlanma bo‘yicha T_1 baho topilgan bo‘lsin. Endi bosh to‘plamdan hajmi n ga teng bo‘lgan boshqa tanlanma hosil qilamiz va bu tanlanma bo‘yicha T_2 bahoni topamiz va hokazo. $T_1, T_2, ..., T_k$ sonlar bir xil bo‘lishi shart emas. Shunday qilib T_n bahoni tasodifiy miqdor deb, $T_1, T_2, ..., T_k$ sonlarni esa uning mumkin bo‘lgan qiymatlari deb qarash mumkin.

Boshqa tomondan, ta‘rifdan kelib chiqadiki bitta parametr uchun bir nechta yoki cheksiz ko‘p statistik baxolar tuzish mumkin. Shu sababli barcha baholar sinfi ichidan «yaxshi» larini ajratish, ya’ni shunday statistika ajratish kerakki, ularning qiymatlari u yoki bu ma’noda noma’lum parametrning haqiqiy qiymati atrofida joylashgan bo‘lsin.

Ta‘rif. **Siljimagan baho** deb, tanlanma hajmi n ixtiyoriy bo‘lganda ham matematik kutilishi baholanayotgan θ parametrga teng bo‘lgan T_n statistik bahoga aytiladi,

$$MT_n = MT_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \theta \qquad (2.1)$$

agar bu shart bajarilmasa, u holda bu bahoga siljigan baho deyiladi va siljish $MT_n - \theta$ ayirma sifatida aniqlanadi.

Aynan bitta parametr uchun bir nechta siljimagan baholarni tuzish mumkin.

Masalan, noma’lum parametr kuzatilayotgan tasodifiy miqdor X ning matematik kutilishi bo‘lsin, ya’ni, $MX = \theta$ shunday qilib

$MX_1 = MX_2 = ... = MX_n = \theta$ (eslatib o‘tamizki tanlanma bu X tasodifiy miqdorning n ta nusxasidir).

Statistik baho sifatida esa quyidagini olamiz.

$$T = T(X_1, X_2, ..., X_n) = a_1 * X_1 + a_2 * X_2 + ... + a_n * X_n \qquad (2.2)$$

Bu yerda $a_1, a_2, ..., a_n$ o‘zgarmas sonlar va ular uchun $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ tenglik o‘rinli bo‘lsin,

$$MT_n = MT(X_1, X_2, ..., X_n) = M(a_1 * X_1 + a_2 * X_2 + ... + a_n * X_n) =$$
$$= a_1 * MX_1 + a_2 * MX_2 + ... + a_n * MX_n = \theta * (a_1 + a_2 + ... + a_n) = \theta$$

Shunday qilib, (2.2) noma’lum matematik kutilma uchun siljimagan baho bo‘ladi.

Xususan $a_1 = 1, a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$ bo‘lsa, u holda

$$T(X_1, X_2, ..., X_n) = X_1 \qquad (2.3)$$

Agar $a_1 = a_2 = ... = a_n = \frac{1}{n}$ bo‘lsa, u holda

$$T(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \overline{X} \qquad (2.4)$$

demak o‘rta qiymat (matematik kutilma) μ uchun siljimagan baho tanlanma o‘rta qiymat bo‘lar ekan. Xuddi shunday σ^2 dispersiyani tanlanma dispersiya $\overline{S}^2$ orqali baholash mumkin. Umumiylikka zarar yetqazmasdan $MX_1 = MX_2 = ... = MX_n = 0$ deb olamiz ($MX_1 = MX_2 = ... = MX_n \neq 0$ bo‘lgan holda $Y_1 = X_1 - \theta,\ Y_2 = X_2 - \theta, ..., Y_n = X_n - \theta,$ tasodifiy miqdorlarga o‘tiladi), u holda $DX_1 = DX_2 = ... = DX_n = MX^2 = \sigma^2$ bo‘ladi.

$$M\overline{S}^2 = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{n}\right)^2\right) = \frac{\sum_{i=1}^{m} MX_i^2}{n} - \frac{1}{n^2} * M\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + 2 * \sum_{i \neq j}^{m} X_i * X_j\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n^2} * \sum_{i \neq j}^{n} MX_i * MX_j = \frac{1}{n} * n * \sigma^2 - \frac{1}{n^2} * n * \sigma^2 - 0 =$$

$$= \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{(n-1)}{n} * \sigma^2 .$$

Shunday qilib $\overline{S}^2$ tanlanma dispersiya σ^2 dispersiya uchun siljigan baho bo‘ladi. Siljish $\sigma^2 - \frac{(n-1)}{n} * \sigma^2 = \frac{1}{n} * \sigma^2$ ga teng bo‘lib, bundan ko‘rinib turibtiki $n \to \infty$ da siljish nolga intiladi.

Demak yetarlicha katta n hajmli tanlanmalarda $\overline{S}^2$ tanlanma dispersiyani σ^2 dispersiyaning taxminan siljimagan bahosi deb qabul qilish mumkin. Kichik hajmli tanlanmalarda dispersiyaning siljimagan bahosi sifatida quyidagicha aniqlanadigan to‘g‘rilangan dispersiya ishlatiladi:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} * \overline{S}^2 \qquad (2.5)$$

Haqiqatdan ham S^2 siljimagan baho bo‘ladi, chunki

$$MS^2 = M\left(\frac{n}{n-1} * \overline{S}^2\right) = \frac{n}{n-1} M\overline{S}^2 = \frac{n}{n-1} * \frac{n-1}{n} * \sigma^2 = \sigma^2 \qquad (2.6)$$

bo‘ladi.

Yuqoridagi misolda ko‘rsatilganidek bitta parametrga bir nechta siljimagan baho tuzish mumkin, bu baholar ichidan yaxshisini topish uchun statistik bahodan effektivlik sharti talab qilinadi.

Effektiv baxo. Ψ_θ bilan noma’lum θ parametrning barcha siljimagan baholari to‘plamini belgilaymiz. Faraz qilaylik

$T_1(X_1, X_2,..., X_n) \in \Psi_\theta$, $T_2(X_1, X_2,..., X_n) \in \Psi_\theta$ bo‘lsin,

Agar $DT_1(X_1, X_2,..., X_n) < DT_2(X_1, X_2,..., X_n)$ bo‘lsa, u holda $T_1(X_1, X_2,..., X_n)$ baho $T_2(X_1, X_2,..., X_n)$ bahoga nisbatan effektivroq deyiladi.

Siljimagan baholar to‘plamidagi (tanlama hajmi n berilganda) dispersiyasi eng kichik bo‘lgan statistik bahoga **tekis effektiv** baho deyiladi.

$$T^*(X_1, X_2,..., X_n) = \inf_{T\in\Psi_\theta} DT(X_1, X_2,..., X_n) \qquad (2.7)$$

O‘quvchiga tanlanma o‘rta qiymat X_1 statistikaga nisbatan effektivroq baho bo‘lishini tekshirishni taklif qilamiz.

Eslatma: tekis effektiv baho har doim mavjud bo‘lavermaydi, chunki to‘plam infimiumi har doim ham bu to‘plamga tegishli bo‘lmaydi.

Katta xajmli tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslilik talabi qo‘yiladi.

Ta’rif $\forall\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \qquad (2.8)$$

bo‘lsa, T_n statistik baho θ parametr uchun **asosli baho** deyiladi.

Demak asosli baho baholanayotgan parametr θ ga $n \to \infty$ da ehtimol bo‘yicha yaqinlashadigan statistik bahoga aytiladi.

Noma’lum parametrlarni baholashning bir nechta usullari mavjud. Baholashning momentlar va eng katta o‘xshashlik usullarini ko‘rib chiqamiz.

Momentlar usuli. Faraz qilaylik kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi $F(x,\theta)$ noma’lum $\theta = (\theta_1, \theta_2,..., \theta_k)$ parametrga, ya’ni k ta noma’lum parametrga bog‘liq bo‘lsin. Momentlar usulining mantiqiy asosi shundan iboratki, parametrlar shunday bo‘lishi kerakki taqsimotning nazariy momentlari mos tanlanma momentlariga teng bo‘lishi kerak. k - tartibli boshlang‘ich va markaziy momentlarni mos ravishda quyidagicha belgilaymiz

$$\alpha_k = MX^k,\ \beta_k = M(X - MX)^k$$

Nazariy taqsimot θ parametrga bog‘liq bo‘lganligi sababli, nazariy momentlar ham θ parametrga bog‘liq bo‘ladi, $\alpha_k = \alpha_k(\theta), \beta_k = \beta_k(\theta).$

Agar noma’lum parametrlar soni k ta bo‘lsa, u holda quyidagi k ta tenglamalar tizimini tuzamiz.

$$\begin{cases} A_1 = \alpha_1(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \\ .... \\ A_k = \alpha_k(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \end{cases} \qquad (2.9)$$

bunda $A_j = A_j(x_1, ..., x_n)$ j-tartibli tanlanma momentlar.

Agar (2.9) tenglamalar tizimining yechimi

$\theta^*(X_1, ..., X_n) = (\theta_1^*(X_1, ..., X_n), ..., \theta_k^*(X_1, ..., X_n))$ mavjud bo’lsa, u holda

θ^* yechim noma’lum θ parametrga momentlar usulida olingan baho deyiladi.

Shuni ta’kidlab o‘tamizki momentlar usulida bir xil ma’noli momentlar tenglashtirilishi kerak. Masalan, agar noma’lum parametrlar matematik kutilma va dispersiya bo’lsa, u holda tabiiyki quyidagi tenglamalar tizimini hosil qilamiz

$$\begin{cases} \overline{X} = \alpha_1(\theta) \\ \overline{S}^2 = \beta_2(\theta) \end{cases} \qquad (2.10)$$

Eng katta o‘x shashlik usuli

Belgilash kiritamiz: $f(u, \theta) = P\{X = u, \theta\}$ agar tasodifiy miqdor X diskret bo‘lsa, X uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lsa $f(u, \theta)$ tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi. U holda quyidagicha tuzilgan funktsiyaga

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = f(x_1, \theta) * f(x_2, \theta) * ... * f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \qquad (2.11)$$

O‘xshashlik funktsiyasi deyiladi. Eng katta o‘xshashlik usulining mohiyati shundan iboratki, noma’lum parametrga eng katta ehtimolli tanlanma asosida baxo tuzish kerak, ya’ni θ parametrni shunday tanlash kerakki, o‘xshashlik funktsiyasi eng katta qiymat qabul qilsin, demak agar θ parametrning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plamini Θ deb belgilasak quyidagi shartni bajarilishini talab qilamiz

$$\max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta^*) \qquad (2.12)$$

Faraz qilaylik, barcha $\theta \in \Theta$ lar uchun $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) > 0$ va o‘xshashlik funktsiyasi θ bo‘yicha differentsiallanuvchi bo‘lsin. Yuqorida aytilganlarga ko‘ra, parametrning **eng katta o‘xshashlik bahosi** deb, quyidagi tenglamaning

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, ..., x_n, \theta) = 0 \qquad (2.13)$$

$\theta^* = \theta^*(x_1, ..., x_n)$ yechimiga aytiladi. Bizga ma’lumki funktsiya va uning logarifmining statsionar nuqtalari ustma-ust tushadi, shuning uchun (2.13) tenglama quyidagi tenglamaga teng kuchlidir.

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x_m, \theta) = 0 \qquad (2.14)$$

agar noma’lum parametr $\theta = (\theta_1, \theta_2 ..., \theta_k)$ bo‘lsa, ya’ni k ta noma’lum parametr bo‘lsa, u holda quyidagi tenglamalar tizimiga ega bo‘lamiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \theta_1} L(x_1, ..., x_n, \theta_1, ... \theta_k) = 0 \\ .... \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} L(x_1, ..., x_n, \theta_1, ... \theta_k) = 0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

yoki unga teng kuchli tenglamalar tizimi

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial \theta_1} \ln f(x_m, \theta_1, ..., \theta_k) = 0 \\ .... \\ \sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(x_m, \theta_1, ..., \theta_k) = 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

Bu tenglamalar tizimining yechimiga noma’lum parametrga eng katta o‘xshashlik usulida topilgan baho deyiladi.

12-MAVZU

ORALIQLI BAHOLAR. ISHONCHLILIK EHTIMOLI VA ISHONCHLILIK ORALIG'I. NORMAL TAQSIMOTNING NOMA'LUM PARAMETRLARI ISHONCHLILIK ORALIQLARI.

Oraliq baho. Ishonchlilik oralig'i.

Tanlanmadagi variantlar kam takrorlangan holdagina, tanlama berilganlari guruhlanadi, shu bilan birga guruhlar soni guruhlash usuliga bog'liq bo'lmasligi kerak. **Nuqtaviy baho** deb, bitta son bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi. Yoqirida ko'rilgan barcha baholar nuqtaviy baholar, chunki ular sonlar o'qida bitta sonni aniqlaydi. Hajmi unchalik katta bo'lmagan tanlanma uchun (n<30) nuqtaviy baho baholanayotgan parametrdan farq qilishi mumkin, ya'ni qo'pol xatoliklarga olib kelishi mumkin. Shu sababli hajmi kichik bo'lgan tanlanmalarda oraliqli baholardan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Oraliq baho deb, ikkita son - oraliq uchlari bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi. Faraz qilaylik $\theta *$ - noma'lum θ parametrning bahosi bo'lsin (θ o'zgarmas yoki tasodifiy miqdor bo'lishi mumkin). Barcha nuqtaviy baholar tanlanma asosida baholanadi, lekin tanlanmalar tasodifiy bo'lganligi uchun baholar ham tasodifiy miqdor bo'lib, asl θ parametrlardan farq qiladi. Bahoning aniqliligini Δ $(\Delta > 0)$ deb belgilasak, u holda $|\theta - \theta *| \leq \Delta$ bo'ladi, tushunarliki Δ qanchalik kichik bo'lsa, $\theta *$ baho shunchalik aniq bo'ladi. Statistik usullar $\theta *$ baho $|\theta - \theta *| \leq \Delta$ tengsizlikni qanoatlantiradi deb qat'iy davo qilishga imkon bermaydi, har qanday aniqlikni qandaydir γ ehtimol bilan olish mumkin:

$$P\{|\theta - \theta *| \leq \Delta\} = \gamma \qquad (2.17)$$

va $|\theta - \theta *| \leq \Delta$ tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan $\theta * - \Delta \leq \theta \leq \theta * + \Delta$ tengsizlik bilan almashtirsak (2.17) quyidagi ko'rinishni oladi

$$P\{\theta^* - \Delta \leq \theta \leq \theta^* + \Delta\} = \gamma \qquad (2.18)$$

(2.18) shart $[\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta]$ oraliq θ parametr qiymatini berilgan γ ishonchlilik ehtimoli bilan qoplashini bildiradi. $[\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta]$ oraliqqa ishonchklilik oralig'i deyiladi, γ - ehtimollikka ishonchlilik ehtimoli ham deyiladi. Ko'p hollarda γ birga yaqin qilib tanlanadi (masalan 0,95; 0,98, 0.99 va h.k.).

Eslatma. Baholanayotgan θ parametr emas, balki ishonchlilik oralig'i tasodifiy miqdor bo'lganligi uchun, θ ning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli haqida emas, balki ishonchlilik oralig'i θ ni qoplash ehtimoli haqida gapirish to'g'riroq bo'ladi.

Dispersiyasi σ^2 ma'lum bo'lgan normal taqsimotning noma'lum matematik kutilmasi μ uchun ishonchlilik oralig'i

Aytaylik, bosh to‘plam parametrlari μ va σ^2 bo‘lgan normal taqsimotga ega bo‘lsin, ya’ni kuzatilayotgan X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan va $MX = \mu$ noma’lum bo‘lib, $DX = \sigma^2$ ma’lum bo‘lsin. Bu $X \in N(\mu, \sigma)$ kabi belgilanadi.

Noma’lum μ parametrning statistik bahosi sifatida tanlanma o‘rta qiymatini olamiz. Ma’lumki, o‘zaro erkli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning yig‘indisi normal taqsimotga ega bo‘lib, uning parametrlari mos parametrlar yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya‘ni bizning holda $\overline{X}_n \in N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$. Shunday qilib

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \leq \Delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(u_\gamma) - 1 = \gamma \qquad (2.19)$$

Bu yerda $\Delta = u_\gamma \sigma / \sqrt{n}$ ва $\Phi(u)$ - standart normal taqsimot funktsiya.

(2.19) tenglikka asosan

$$\Delta = u_\gamma \sigma / \sqrt{n} \qquad (2.20)$$

Shunday qilib θ parametr uchun

$$P\left\{\overline{X}_n - \frac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \frac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma \qquad (2.21)$$

va γ ishonchlilik ehtimoli bilan

$$\left(\overline{X}_n - u_\gamma * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;;\; \overline{X}_n + u_\gamma * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad (2.22)$$

oraliq noma’lum θ parametrni qoplaydi, bu yerda u_γ quyidagi tenglama yechimidir

$$\Phi(u_\gamma) = (1+\gamma)/2 \qquad (2.23)$$

va normal taqsimot funktsiyasi uchun EXM dagi statistik dasturlar orqali aniqlanadi yoki keltirilgan adabiyotlardagi ilovalardan foydalanib topiladi.

χ^2 taqsimot (Pirson taqsimoti)

Aytaylik X_i (i=1,2,…, n) lar erkli normal tasodifiy miqdorlar bo‘lib, shu bilan birga ularning matematik kutilmalari 0 ga, o‘rtacha kvadratik chetlanishlari 1 ga teng bo‘lsin, u holda bu miqdorlar kvadratlari yig‘indisi:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (2.24)$$

$k = n$ erkinlik darajali χ^2 («xi kvadrat») qonun bo'yicha taqsimlangan deyiladi, agar bu miqdorlar bitta chizikli munosabat bilan bog'langan, masalan, $\sum_{i=1}^{n} X_i = n * \overline{X}$ bo'lsa, u holda erkinlik darajalari soni $k = n - 1$ bo'ladi.

Erkinlik darajalari soni ortishi bilan taqsimot normal taqsimotga sekin yaqinlashadi.

$t-$taqsimot (Styudent taqsimoti)

Z normal tasodifiy miqdor, shu bilan birga $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$, V esa k erkinlik darajali χ^2 qonun bo'yicha taqsimlangan va Z ga bog'liq bo'lmagan miqdor bo'lsin, u holda

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \qquad (2.25)$$

miqdor $t-$ taqsimot yoki k erkinlik darajali Styudent (ingliz statistigi V. Gosset taxallusi) taqsimoti deb ataladigan taqsimotga ega. Erkinlik darajalari soni ortishi bilan Styudent taqsimoti normal taqsimotga tez yaqinlashadi.

Dispersiyasi σ^2 noma'lum bo'lgan normal taqsimotning noma'lum matematik kutilmasi μ uchun ishonchlilik oralig'i

Aytaylik $X \in N(\mu, \sigma^2)$ bo'lsin, bu holda yuqorida keltirilgan formulalardan foydalana olmaymiz, chunki bu holda ishonchlilik oralig'i noma'lum parametr σ ga bog'liq. Shuning uchun ham baho sifatida quyidagi statistikani tanlaymiz:

$$t = \frac{(\overline{x_n} - \mu)}{S} * \sqrt{n} \qquad (2.26)$$

bu yerda S^2 to'grilangan tanlama dispersiya. Ma'lumki, t-statistika erkinlik darajasi $n-1$ ga teng bulgan Styudent taqsimotiga (t-taqsimot) ega.

Oraliqli bahoni tuzish uchun quyidagi munosabat bajarilishini talab etamiz

$$P\left\{ \frac{|\overline{x}_n - \mu|}{S} * \sqrt{n} \le t_\gamma \right\} = \gamma \qquad (2.27)$$

Bu tenglamadan t_γ miqdor berilgan n ва γ bo‘yicha Styudent taqsimoti uchun EXM da mavjud statistik dasturlar bo‘yicha yoki keltirilgan adabiyotlardagi ilovalardan foydalanib topiladi. Agar Y tasodifiy miqdor Styudent taqsimotiga ega bo‘lsa, u holda t_γ

$$P\{|Y|\leq t_\gamma\}=\gamma \qquad (2.28)$$

tenglamaning yechimi sifatida aniqlanadi. Odatda jadvalda $P(|Y|\geq t_\gamma)$ ning qiymatlari beriladi, shuning uchun t_γ quyidagi tenglamaning

$$P(|Y|\geq t_\gamma)=1-\gamma \qquad (2.29)$$

yechimi sifatida topiladi. Shunday qilib, noma’lum θ_1 parametr uchun quyidagi oraliq bahoga ega bo‘lamiz.

$$P(\overline{X}_n-t_\gamma*\frac{S}{\sqrt{n}}\leq\theta_1\leq\overline{X}_n+t_\gamma*\frac{S}{\sqrt{n}})=\gamma \qquad (2.30)$$

Bundan kelib chiqadiki, noma’lum matematik kutilma μ uchun ishonchlilik oralig‘i

$$(\overline{X}_n-t_\gamma*\frac{S}{\sqrt{n}};\overline{X}_n+t_\gamma*\frac{S}{\sqrt{n}}) \qquad (2.31)$$

ni hosil qilamiz. (2.30) va (2.22) oraliqlar o’xshashdir, bu yerda

$$\Delta=t_\gamma\sigma/\sqrt{n} \qquad (2.32)$$

Normal taqsimotning σ^2 dispersiyasi uchun ishonchlilik oralig‘i

Aytaylik $X\in N(\mu,\sigma)$ bo‘lsin, u holda

$$\chi^2(n)=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \qquad (2.33)$$

tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $(n-1)$ ga teng bo‘lgan χ^2-taqsimotga (Pirson taqsimoti) ega bo‘ladi. $\chi^2(n)$ tasodifiy miqdor faqat manfiy bo‘lmagan qiymatlarni qabul qiladi. Berilgan ishonchlilik ehtimoli γ bo‘yicha shunday t_γ ni topish mumkinki, unda

$$P\{\frac{(n-1)}{\sigma^2} * S^2 \le t_\gamma\} = \gamma \qquad (2.34)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi, bu yerda t_γ miqdor

$$P\{\chi^2 \le t_\gamma\} = \gamma \qquad (2.35)$$

tenglamaning yechimi bo‘lib, χ^2-taqsimot (Pirson taqsimoti) jadvalidan yoki EXM dagi mavjud statistik dastur paketidan aniqlanadi, bunda χ^2 tasodifiy miqdor bo‘lib, erkinlik darajasi n ga teng bo‘lgan χ^2 taqsimotga ega. Biroq ishonchlilik oralig‘ini tuzish uchun shunday u_1 va u_2 sonlarni topish kerakki

$$P\{u_1 \le \chi^2 \le u_2\} = \gamma \qquad (2.36)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak. Bunday u_1 va u_2 sonlar cheksiz ko‘pdir. Bunday sonlarning yagona juftligini topish uchun quyidagi «simmetriklik sharti» ni kiritamiz:

$$P\{\chi^2 < u_1\} = P\{\chi^2 > u_2\} = (1-\gamma)/2 \qquad (2.37)$$

χ^2 taqsimot jadvalidan (ilova 4) va (2.37) formula orqali u_2 ni topamiz. u_1 ni topish uchun qarama-qarshi hodisa ehtimolidan foydalanamiz:

$$P\{\chi^2 > u_1\} = (1+\gamma)/2 \qquad (2.38)$$

χ^2 o‘rniga uning (2.33) ifodasini qo‘yib va elementar almashtirishlarni bajarib, ushbu

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{u_1} \le \theta^2 \le \frac{(n-1)S^2}{u_2}\right\} = \gamma \qquad (2.39)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Noma‘lum dispersiya σ^2 uchun ishonchlilik oralig‘ini aniqlovchi tengsizlikni har ikki tomonidan kvadrat ildiz olib, noma‘lum o‘rtacha kvadratik chetlanish σ ni γ ishonchlilik ehtimoli bilan qoplaydigan

$$(S\sqrt{\frac{n-1}{u_1}}, S\sqrt{\frac{n-1}{u_2}}) \qquad (2.40)$$

ishonchlilik oralig‘ini hosil qilamiz.

Tanlanma hajmini aniqlash.

Shu vaqtgacha biz hajmi berilgan statistik ma’lumotlarning tahlili bilan shug‘ullandik. Yetarlicha aniq natijalar olish uchun tanlanmaning minimal hajmini aniqlash masalasi muhimdir.

Normal taqsimotning dispersiyasi ma’lum bo‘lganda noma’lum o‘rta qiymat uchun ishonchlilik oralig‘ini aniqlashda (2.20) formuladan foydalanish mumkin, u holda quyidagi

$$n = u_\gamma^2 * \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \qquad (2.41)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Agar normal taqsimotning dispersiyasi noma‘lum bo‘lsa, u holda ishonchlilik oralig‘ini aniqlash uchun zarur bo‘lgan tanlanma hajmi (2.32) dan aniqlanadigan quyidagi

$$n = t_\gamma^2 * \frac{S^2}{\Delta^2} \qquad (2.42)$$

formula bo‘yicha aniqlanadi.

Shuni ta‘kidlab o‘tamizki, dispersiya ma‘lum bo‘lganda berilgan ishonchlilik ehtimoli bilan matematik kutilmani qoplaydigan ishonchlilik oralig‘ini tuzishga zarur bo‘lgan tanlanma hajmini tanlanmani hosil qilishdan avval (2.41) formuladan aniqlash mumkin. Biroq (2.42) formulaga ko‘ra yechilayotgan masalada zarur bo‘lgan tanlanma hajmini, noma’lum dispersiya uchun siljimagan baho hisoblangan tanlanmani qayta tahlil qilingandan so‘ng korrektlashtirish mumkin.

13-MAVZU

STATISTIK TAXMINLAR VA ULARNING TURLARI. STATISTIK TAXMINLARNI TEKSHIRISH. STATISTIK TAXMINLARNI TEKSHIRISH MASALASINING UMUMIY QOʻYILISHI. TASDIQLASH ALOMATI TUSHUNCHASI. KRITIK SOHA, KRITIK NUQTA.

Matematik statistikaning asosiy vazifalaridan biri - statistik taxminlarni tekshirishning ratsional usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Statistik taxmin, bu tajribada kuzatilayotgan tasodifiy miqdor nomaʼlum taqsimotining koʻrinishi yoki uning xossalari haqidagi ixtiyoriy tasdiq, yoki maʼlum taqsimotning nomaʼlum parametrlari haqidagi ixtiyoriy farazdir. Bunday taxminlar nazariy tushunchalar yoki tanlanma kuzatishlarning statistik tahlili asosida ilgari suriladi. Masalan, X tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega; normal taqsimotga ega boʻlgan tasodifiy miqdor $\mu = 7$ yoki $\mu \neq 7$ oʻrta qiymatga ega.

Taqsimotning nomaʻlum parametri θ haqidagi taxminlar oddiy va murakkab boʻladi. Oddiy taxminda nomaʻlum parametr θ bitta tayin qiymat qabul qilishini taʻkidlaydi. Murakkab taxminda θ parametr qiymatlar toʻplamidan qiymat qabul qilishi taʻkidlanadi ($\theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$, $\theta \neq \theta_0$). Tekshirilayotgan taxmin H_0 harfi bilan belgilanadi. Bizning maqsadimiz tanlama qiymatlari tekshiralayotgan taxminni tasdiqlashini tekshirishdan iborat.

Tekshirilishi kerak boʻlgan H_0 taxmin nolinchi (asosiy) taxmin deyiladi. Koʻp hollarda nolinchi taxminni rad etuvchi ixtiyoriy H_1 taxmin alternativ (qarama-qarshi) taxmin ishlab chiqiladi. Oddiy taxmin deb faqat bitta taxminni oʻz ichiga olgan taxminga aytiladi. Murakkab taxmin deb chekli yoki cheksiz sondagi oddiy taxminlardan iborat taxminga aytiladi. Shunday qilib, tekshirish natijasida faqat bitta taxmin qabul qilinadi H_0 yoki H_1, mos ravishda ikkinchisi rad etiladi.

Taxmin bosh toʻplamdan olingan tanlanmalar asosida tekshiriladi, tanlanma tasodifiy boʻlganligi uchun xatoliklarga yoʻl qoʻyilib, notoʻgʻri xulosalar qabul qilinishi mumkin. Xatoliklar ikki turga boʻlinadi. Agar taxmin toʻgʻri boʻla turib, u rad etilsa 1-tur xatolikka yoʻl qoʻyilgan boʻladi. Agar taxmin notoʻgʻri boʻla turib, u qabul qilinsa 2-tur xatolikka yoʻl qoʻyilgan boʻladi. Bu xatolarning oqibatlari har xil boʻlishi mumkin, masalan «binoni qurish davom ettirilsin» degan toʻgʻri qaror rad etilgan boʻlsa, u holda 1-tur xatolik moddiy zararga olib keladi, agar binoning agʻdarilib tushish xavfiga qaramasdan «qurilish davom ettirilsin» degan qaror qabul qilingan boʻlsa, u holda ikkinchi tur xatolik kishilarning halokatiga olib kelishi mumkin. Birinchi tur xato ikkinchi tur xatoga nisbatan og‘irroq oqibatlarga olib keladigan misollar ham keltirish mumkin.

1-eslatma. To‘g‘ri qaror ham ikki holda qabul qilinishi mumkin:

1) taxmin qabul qilinadi, u aslida ham to′g′ri edi;

2) taxmin rad etiladi, u aslida ham noto‘g‘ri edi.

Shunday qilib, ayrim tanlanmalar bo‘yicha to‘g‘ri qaror qabul qilinadi, boshqalari bo‘yicha noto‘g‘ri qaror qabul qilinadi. Qaror esa statistika yoki statistik tasnif deb ataluvchi tanlanmadan olingan biror bir funktsiyaning qiymati asosida qabul qilinadi. Bu statistika qiymatlar to‘plamini ikkita kesishmaydigan to‘plamlarga ajratishi mumkin:

H_0 taxmin qabul qilinadigan (rad etilmaydigan) statistikaning qiymatlar to‘plam ostisi taxminning qabul qilinish sohasi deyiladi.

H_0 taxmin qabul qilinmaydigan (rad etiladigan), H_1 taxmin qabul qilinadigan statistikaning qiymatlar to‘plam ostisiga kritik soha deyiladi. Taxminlarni tekshirganda tushunarliki noto‘g‘ri qaror qabul qilish ehtimolini kamaytirish maqsadga muvofiqdir. Birinchi tur xatoga yo‘l qo‘yish ehtimolini α orqali belgilash qabul qilingan; u ahamiyatlilik darajasi deyiladi. Ahamiyatlilik darajasi ko‘pincha 0,05, 0,01 ga teng qilib olinadi. Lekin ko‘p holda 1-tur xatoligi ehtimolining kamayishi 2-tur xatoligi ehtimolining oshishiga olib keladi. 2 tur xatoligi β bilan belgilanadi. Shuning uchun ham statistika α ва β ehtimolliklar minimal bo‘ladigan qilib tanlanadi. Ushbu qo‘llanmada H_0 taxmin har doim oddiy deb faraz qilinadi, shuning uchun ham to‘g‘ri H_0 taxminda statistika taqsimoti ma‘lum. Eng yaxshi statistikani tanlash usullari ko‘rib chiqilmagan. Statistikaning kritik sohasini aniqlash uchun ahamiyatlilik darajasi α va alternativ taxminning ko‘rinishi e’tiborga olinadi.

Noma’lum parametr θ ning qiymati haqidagi asosiy taxmin H_0 quyidagicha:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

Alternativ taxmin H_1 esa quyidagi ko‘rinishlardan biri bo‘lishi mumkin:

$$H_1 : \theta < \theta_0 \text{ , } H_1 : \theta > \theta_0 \text{, } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Mos ravishda chap tomonlama, o‘ng tomonlama yoki ikkitomonlama kritik sohalarni olish mumkin. Kritik sohaning chegaraviy nuqtalari statistikaning taqsimot jadvallaridan aniqlanadi.

Statistik taxminni tekshirish bosqichlari quyidagilardan iborat

1) H_0 ва H_1 taxminlar aniqlanadi;

2) Statistika tanlanadi va ahamiyatlilik darajasi beriladi;

3) Ahamiyatlilik darajasi α , alternativ taxmin H_1 va jadvallar

orqali kritik soha aniqlanadi;

4) Tanlanma boʻyicha statistika qiymati hisoblanadi;

5) Statistika qiymati kritik soha bilan taqqoslanadi;

6) Qaror qabul qilish: agar statistika qiymati kritik sohaga kirmasa, u holda H_0 taxmin qabul qilinadi, H_1 rad etiladi, agar kritik sohaga kirsa, u holda H_0 taxmin rad etiladi, H_1 taxmin qabul qilinadi.

Ayrim hollarda altevnativ taxmin H_1 ni aniqlashdan oldin statistika qiymatini xisoblash uchun bosh toʻplam parametrlarining siljimagan baholarini topishni talab etadigan 4) bosqichni bajarish maqsadga muvofiqdir. Masalan $H_0 : \mu = 7$ taxmin tekshirilayapti va oʻrta qiymat uchun siljimagan baxo $\bar{x} = 8.4$ boʻlsa, u holda koʻrinib turibtiki alternativ taxmin $H_1 : \mu > 7$ yoki $H_1 : \mu = 7$ koʻrinishda qilib tanlab olish kerak.

Statistik taxminni tekshirish natijalariga quyidagicha interpretatsiya beriladi: agar H_1 taxmin qabul qilinsa, u holda bu isbotlangan hisoblanadi, agar H_0 taxmin qabul qilinsa, u holda H_0 kuzatish natijalariga zid emasligini tan olgan boʻlamiz, lekin qaror qabul qilishdan oldin yana qoʻshimcha tadqiqot oʻtqazish kerak boʻladi.

14-MAVZU

NOMA’LUM TAQSIMOTNING KO‘RINISHI HAQIDAGI STATISTIK TAXMINNI TEKSHIRISH ALOMATLARI

PIRSONNING χ^2 TASDIQLASH ALOMATI

Bosh to‘plam X taqsimoti haqidagi taxminni qanday tekshirish kerakligini ko‘rib chiqaylik. Aytaylik bosh to‘plam qandaydir noma’lum taqsimotga ega bo‘lsin. Bosh to‘plamdan tanlanma olamiz. Tanlanmaga asoslanib yoki boshqa mulohazalarni e’tiborga olib bosh to‘plamning aniq $F_0(x)$ taqsimot funksiyasi haqidagi taxminni tuzamiz. Bu taqsimotni nazariy deb ataymiz. Tanlanma asosida taqsimotning empirik funktsiyasi $F^*(x)$ ni topishimiz mumkin. Agar empirik taqsimot nazariy taqsimotga yaqin bo‘lsa bosh to‘plamning taqsimoti haqidagi $H_0 : \mathrm{F(x)} = \mathrm{F}_0(x)$ taxminni qabul qilamiz. Bunday taxminlarni tekshirish uchun bir necha tasdiqlash alomatlari mavjud bo‘lib, ulardan biri Pirsonning χ^2 tasdiqlash alomatini keltiramiz. χ^2 tasdiqlash alomatida X bosh to‘plamning o‘zgarish sohasini umuman olganda turli xil uzunliklarga ega bo‘lgan l ta oraliqqa bo‘lamiz. Tanlanma bo‘yicha shu oraliqlar asosida variatsion qator tuzamiz. Agar ayrim oraliqlarda n_i chastota juda kichik bo‘lsa (5 dan kichik), u holda bu oraliqlarni qo‘shni oraliqlar bilan bilashtiramiz. Tanlanma asosida nazariy taqsimot parametrlarining baholarini hisoblaymiz. Shu bilan nazariy taqsimot funktsiya to‘laligicha aniqlanadi. Endi nazariy taqsimot asosida X tasodifiy miqdorning $i-$oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimolliklari p_i larni hisoblaymiz:

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = F_0(x_i) - F_0(x_{i-1}) \qquad i = 1,\dots,l \qquad (3.1)$$

bunda $p_1 + p_2 + \dots + p_l = 1$. Keyin nazariy chastotalarni hisoblaymiz $m_i = n * p_i$ (n-tanlanma hajmi). Agar nazariy va empirik chastotalar m_i va n_i lar yetarlicha bir-biridan farq qilsa $H_0 : \mathrm{F(x)} = \mathrm{F}_0(x)$ taxminni qabul qilamiz. $H_0 : \mathrm{F(x)} = \mathrm{F}_0(x)$ taxminni tekshirish uchun quyidagi statistikadan foydalanamiz:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} \qquad (3.2)$$

Q^2 tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $k = l - r - 1$ bo‘lgan χ^2 - taqsimotga ega, bu erda $l -$ oraliqlar soni, r- tanlanma asosida baholari topilgan nazariy taqsimotning parametrlar soni.

Q^2 qanchalik katta bo‘lsa, shunchalik nazariy va empirik taqsimotlar mutanosiblashmagan bo‘ladi.

Q^2 statistikaning yetarlicha katta qiymatlarida $H_0 : \mathrm{F(x)} = \mathrm{F}_0(x)$ taxminni rad etish kerak. Shuning uchun faqat o‘ng tomonlama kritik sohadan foydalanamiz.

Agar $Q^2 \geq \chi_\alpha$ bo‘lsa, taxminni rad etishga asos bor.

Agar $Q^2 < \chi_\alpha$ bo‘lsa, taxminni qabul qilishga asos bor. χ_α kritik nuqta avvaldan berilgan ahamiyatlilik darajasi α va erkinlik darajasi $k = l - r - 1$ lar asosida keltirilgan adabiyotlardagi χ^2 taqsimot uchun ilovalardan yoki EXM da mavjud dasturlar paketidan foydalanib topiladi.

Bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi taxminni χ^2 tasdiqlash alomati yordamida tekshirish qoidasi

1. Taxmin qilinayotgan taqsimot parametrlarining bahosi topiladi, ya‘ni $\overline{x}_t$ va S_t lar hisoblanadi.
2. Taqsimot parametrlari bahosi normal taqsimot zichlik funktsiyasiga qo‘yilib, zichlik funktsiyaning bahosi - $f^*(x)$ topiladi.

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} e^{-\frac{(x-\overline{x}_t)^2}{2S^2}} \qquad (3.3)$$

3. Tasodifiy miqdor X ning i-oraliqqa tushish ehtimoli p_i ni quyidagi

 formula yordamida hisoblanadi:

$$p_i = p(x_{i-1} < x < x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^*(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_t}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{\frac{(x-\overline{x}_t)^2}{2S_t^2}} dx =$$

$$=\Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}_t}{S_t}\right)-\Phi\left(\frac{x_{i-1}-\bar{x}_t}{S_t}\right) \qquad (3.4)$$

bu yerda $\Phi(x)$ - normal taqsimot funktsiya va uning qiymatlari adabiyotlarda keltirilgan ilovalardan yoki EXM da mavjud dasturlar paketidan foydalanib topiladi.

4. Nazariy chastotalar $m_i = n * p_i$ (n-tanlanma hajmi, p_i - X tasodifiy miqdorning i-oraliqqa tushish ehtimoli) hisoblanadi.

5. $H_0 : F(x) = \Phi(\frac{x-\bar{x}_t}{S_t})$ taxminni tekshirish uchun quyidagi statistika qiymatini hisoblaymiz:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} \qquad (3.5)$$

6. Avvaldan berilgan ahamiyatlilik darajasi α va erkinlik darajasi

$k = l - r - 1 = l - 2 - 1 = l - 3$ lar asosida keltirilgan adabiyotlardagi χ^2 taqsimot uchun ilovalaridan yoki EXM dagi mavjud dasturlar paketidan foydalanib kritik nuqta χ_α topiladi.

6. Agar $Q^2 < \chi_\alpha$ bo'lsa, bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi $H_0 : F(x) = \Phi(\frac{x-\bar{x}_t}{S_t})$ taxmin qabul qilinadi.

Agar $Q^2 \geq \chi_\alpha$ bo'lsa, $H_0 : F(x) = \Phi(\frac{x-\bar{x}_t}{S_t})$ taxminni rad etishga asos bor.

Normal taqsimot o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum bo'lganda, uning o'rta qiymati haqidagi taxminni tekshirish

Faraz qilaylik, bosh to‘plam a va σ^2 parametrli normal taqsimotga ega $X \in N(a,\sigma)$, bu yerda σ -ma’lum, α ahamiyatlilik darajasida $H_0 : \mu = \mu_0$

taxminni tekshirish kerak. Alternativ taxmin sifatida $H_1 : \mu < \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ taxminlardan biri olingan bo’lsin.

Statistika sifatida quyidagi tasodifiy miqdor

$$Z = \frac{\bar{x}_T - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \qquad (3.6)$$

olinadi. H_0 taxmin to‘g‘ri bo‘lganda Z tasodifiy miqdor standart normal taqsimotga (0 va 1 parametrli) ega $Z \in N(0,1)$.

Kritik nuqtani adabiyotlarda keltirilgan normal taqsimot funktsiya uchun ilovalardan yoki EXM dagi mavjud dasturlar paketidan foydalanib topiladi.

Agar alternativ taxmin $H_1 : \mu < \mu_0$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda quyidagi shartni bajaruvchi chap tomonlama kritik sohadan foydalanamiz:

$$\Phi(-z_\alpha) = \alpha \qquad (3.7)$$

Jadval faqat musbat qiymatlar uchun berilgan, shuning uchun

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad (3.8)$$

Formulani e’tiborga olib, Z_α kritik nuqtani

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha \qquad (3.9)$$

tenglikdan topamiz, u holda kritik soha

$$Z < -Z_\alpha \qquad (3.10)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar alternativ taxmin $H_1 : \mu > \mu_0$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda quyidagi shartni bajaruvchi o‘ng tomonlama kritik soha olinadi:

$$P(Z > Z_\alpha) = \alpha \qquad (3.11)$$

Z_α kritik nuqtani topish uchun asosan quyidagi tenglikdan foydalaniladi

$$P(Z < Z_\alpha) = \Phi(Z_\alpha) = 1 - \alpha \qquad (3.12)$$

Bu erdan kritik soha ko‘rinishini topamiz

$$Z > Z_\alpha \qquad (3.13)$$

Agar alternativ taxmin $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda quyidagi shartni bajaruvchi ikki tomonlama kritik soha olinadi:

$$P(|Z| > Z_\alpha) = \alpha \qquad (3.14)$$

Mutlaq miqdor ta’rifiga ko‘ra

$$P(Z < Z_\alpha) = P(Z > Z_\alpha) = \frac{\alpha}{2} \qquad (3.15)$$

(3.11) va (3.12) formulalarga ko‘ra jadvaldan foydalanish shartini olamiz:

$$\Phi(Z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad (3.16)$$

Shunday qilib bu holda kritik soha $|Z| > Z_\alpha$ ko‘rinishda bo‘ladi.

15-MAVZU

Korrelyasion va regression tahlil. Tasodifiy belgilar orasidagi funksional, statistik va korrelyatsion bog‘lanishlar. Korrelyatsion bog‘lanishning ikki asosiy masalasi. Shartli matematik kutilma, regressiya tenglamasi.

Икки ўлчовли (бир факторли) регрессион модел.

Бир факторли белги ҳоли учун регрессион муаммони формаллаштирамиз.

Айтайлик икки ўзгарувчининг қийматлари тўплами берилган бўлсин: y_i (тушунтирилувчи ўзгарувчи ёки натижа) ва x_i (тушунтирувчи ўзгарувчи ёки фактор). Ушбу ўзгарувчилар ўртасида объектив боғлиқлик мавжуд бўлсин:

$$y = f(x) \qquad (1)$$

Ушбу тенгламани регрессиянинг “ҳаққоний” тенгламаси деб атаймиз. Кузатиш натижалари $(y_i, x_i, i = 1:n)$ асосида (1) “ҳаққоний” боғлиқликни “энг яхши” ифодалайдиган $y^* = f(x)$ функцияни танлашимиз керак. Функцияни танлаш – функционал боғлиқлик кўринишини ва параметрлар қийматларини аниқлашдир. Функционал боғлиқлик кўринишини аниқлаш учун қуйидагилардан фойдаланиш мумкин:

1) Назарий тасаввур ва олдинги шунга ўхшаш тадқиқотлар тажрибаси;
2) График усул – корреляцион майдон ёки регрессиянинг эмпирик чизиғи асосида. Корреляцион майдон – (x , y) координаталар тизимидаги нуқтали график. Ҳар бир нуқта кузатиш бирлиги (x_i , y_i) га мос келади.
3) Бир нечта функцияларни танлаб, уларнинг ичидан регессия тенгламаси сифати кўрсаткичлари бўйича энг яхшисини танлаш мумкин.

Регрессия чизиқли ва чизиқсиз кўринишда бўлади.

Икки ўлчовли чизиқли регрессия модели қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y_i = b_0 + b_1 * x_i + u_i \qquad (2)$$

y_i ўзгарувчи миқдори иккита ташкил этувчидан иборат:

1) тасодифий бўлмаган ташкил этувчи $b_0 + b_1 * x_i$;

2) тасодифий ташкил этувчи u_i .

Чизиқсиз регрессия икки синфга бўлинади: таҳлилга киритилган тушунтирувчи ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли бўлмаган, лекин баҳоланаётган параметрларга нисбатан чизиқли бўлган регрессия ва баҳоланаётган параметрларга нисбатан чизиқсиз бўлган регрессия.

Тушунтирувчи ўзгарувчилари бўйича чизиқсиз бўлган регрессиялар:

1) турли даражали полиномлар: $y = a + b_1 * x + b_2 * x^2 + b_3 * x^3 + u$

2) тенгтомонлама гипербола: $y = a + \frac{b}{x} + u$

Баҳоланаётган параметрлари бўйича чизиқсиз бўлган регрессиялар:

1) даражали: $y = a * x^b * u$

2) кўрсаткичли: $y = a * b^x * u$

3) экспоненциал: $y = e^{a+b*x} * u$

Жуда кўп ҳолларда чизиқли кўринишдаги боғлиқлик ишлатилади. Чизиқли кўринишга бўлган эътибор шундаки параметрларнинг аниқ иқтисодий маънога эга эканлиги, ўзгарувчиларнинг чегараланган вариацияси ва кўп ҳолларда чизиқли бўлмаган боғлиқликларнинг ҳисоблашларни амалга ошириш учун чизиқли кўринишга келтирилишидир.

Тасодифий ташкил этувчи u_i нинг мавжудлик сабаблари:

1) Натижага аҳамиятли даражада таъсир қилувчи “муҳим ” факторларнинг йўқлиги. Жуфт регрессия деярли ҳар доим катта соддалаштиришдир. Ҳақиқатда эса бошқа факторлар ҳам мавжуд бўлиб (2) формулада эътиборга олинмаган бўлиши мумкин. Бу факторларни ўлчашни иложи бўлмаслиги мумкин (масалан, психологик). Бу факторларни ўлчашни иложи бўлганда ҳам улар натижага жуда суст таъсир қилганлиги учун уларни моделда эътиборга олмаймиз. Ундан ташқари, улар жуда “муҳим” факторлар бўлиб, биз уларни тажрибамиз камлиги учун эътиборга олмаган бўлишимиз мумкин. Буларнинг ҳаммаси кузатилаётган маълумотлар $b_0 + b_1 * x_i$ тўғри чизиқдан ташқарида ётишига олиб келади;

2) Моделни нотўғри функционал спецификациялаш;

3) Ўзгарувчиларни ўлчашдаги хатолик.

Моделдаги регрессия коэффициенти b_1 нинг ишораси боғлиқлик йўналишини кўрсатади. Агар $b_1 > 0$ бўлса, боғлиқлик тўғри, агар $b_1 < 0$ бўлса, боғлиқлик тескари бўлади. b_1 миқдор x фактор ўзининг ўлчов бирлигида бир бирликка ўзгарганда y натижа ўрта ҳисобда қанча миқдорга ўзгаришини кўрсатади. Моделда b_0 параметр қиймати формал равишда x=0 да y нинг ўртача қиймати. Агар фактор нол қийматга эга эмас ёки нолга тенг бўлиши мумкин бўлмаса, у ҳолда юқоридаги трактовка маънога эмас. Икки ўлчовли регрессион модел матрица кўринишида қуйидагича бўлади.

$$Y = X * b + u$$

бу ерда,

Y - кузатилаётган натижавий белги қийматларининг $(n \times 1)$ ўлчамдаги тасодифий вектор-устуни;

$X = (x_0 , x_1)$ - кузатилаётган фактор белги қийматларининг $(n \times 2)$ ўлчамдаги матрица. Қўшимча фактор x_0 регрессия тенгламасидаги озод ҳад b_0 нинг мавжудлиги билан боғлиқ. Озод ҳад учун x_0 факторнинг қиймати бирга тенг деб қабул қилиш қабул қилинган.

b - Баҳоланиши керак бўлган модел параметрларининг (2×1) ўлчамли ўзгарувчилари вектор-устунидир.

u - $(n \times 1)$ ўлчамли кузатиш хатоликлари тасодифий вектор-устунидир.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{01} \ x_{11} \\ \dots\dots\dots \\ x_{0i} \ x_{1i} \\ \dots\dots\dots \\ x_{0n} \ x_{1n} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Мисол кўриб чиқамиз. 20 ишчининг иш ҳаққи ва ёши ҳақида маълумотлар берилган бўлсин. Ишчининг иш ҳаққи регрессион модели қурилсин. Бунда y_i - i-ишчининг иш ҳаққи ($); x_i - i-ишчининг ёши (ёш), i=1; n.

i	y_i	x_i	i	y_i	x_i
1	300	29	11	400	47
2	400	40	12	250	28
3	300	36	13	350	30
4	320	32	14	200	25
5	200	23	15	400	48
6	350	45	16	220	30
7	350	38	17	320	40
8	400	40	18	390	40
9	380	50	19	360	38
10	400	47	20	260	29

Бизнинг мисолда b_1 параметр ишчининг ёши 1 ёшга ошганда унинг иш ҳаққи ўрта ҳисобда неча долларга ўзгаршини билдиради. b_0 параметр маънога эга эмас, чунки ишчининг ёши нолга тенг бўлиши мукин эмас.

Анъанавий энг кичик квадратлар усули – ЭККУ.

Функционал боғлиқлик кўриниши $y = f(x)$ аниқлангандан сўнг, модел параметрлари баҳоланади. Моделнинг энг яхши параметрларини аниқлаш учун, қуйидагича критериялардан фойдаланиш мумкин:

1) Кузатилаётган боғлиқли ўзгарувчи y қийматларнинг $f(x)$ функция бўйича ҳисобланган y^* қийматлардан четланишлари квадратлари йиғиндиси: $S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2$ - энг кичик квадратлар усули (ЭККУ);

2) Кузатилаётган боғлиқли ўзгарувчи y қийматларнинг $f(x)$ функция бўйича ҳисобланган y^* қийматлардан четланишлари модуллари йиғиндиси: $S=\sum_{i=1}^{n}\left|y_i-y_i^*\right|$;

3) $S=\sum_{i=1}^{n}g(y_i-y_i^*)$, бу ерда *g* – “ўлчов” бўлиб, *i* –кузатиш учун четланиш функционалга киради.

S – функционални минималлаштирадиган параметр қийматлари оптимал бўлади.

Чизиқли жуфт регрессия моделидаги параметрларини баҳолаш учун кўпинча ЭККУ қўлланилади. Ушбу усулга кўра параметрларнинг баҳолари сифатида $S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i^*)^2$ функционални минималлаштирадиган b_0 ва b_1 миқдорлар олинади. Ушбу функция b_0 ва b_1 параметрларга боғлиқ бўлган функция бўлганлиги учун $S(b_0,b_1)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_1*x_i-b_0)^2$, функциянинг минимумини топиш учун ушбу параметрлари бўйича хусусий ҳосила олиб нолга тенглаштирамиз.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S(b_0,b_1)}{\partial b_0}=0\\[2ex]\dfrac{\partial S(b_0,b_1)}{\partial b_1}=0\end{cases}\qquad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S(b_0,b_1)}{\partial b_0}=2*\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_1*x_i-b_0)*(-1)=0\\[2ex]\dfrac{\partial S(b_0,b_1)}{\partial b_1}=2*\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_1*x_i-b_0)*(-x_i)=0\end{cases}\qquad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - b_1 * \sum_{i=1}^{n} x_i - n * b_0 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i * x_i - b_1 * \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b_0 * \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Ушбу тизимни соддалаштириб, b_0 ва b_1 параметрларни топамиз.

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y}{n} - b_1 * \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{y} - b_1 * \bar{x};$$

$$b_1 = \frac{\overline{y * x} - \bar{y} * \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\text{cov}(x, \text{y})}{\sigma_x^2}$$

σ_x^2 - фактор белги дисперсияси;

$\bar{y}$ - натижавий белги ўртача қиймати;

$\bar{x}$ - фактор белги ўрта қиймати;

$\overline{x * y}$ - факторни натижага кўпайтмасининг ўртача қиймати.

Регрессия тенгламаси параметрлари ҳисобланиши тўғрилигини $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$ йиғиндилар тенглиги орқали текширилади (бунда ҳисоблашлар яхлитланиши ҳисобига қандайдир фарқ бўлиши мумкин). Жуда кўп тадқиқотларнинг натижалари шуни тасдиқлайдики, *x* ўзгарувчи олдидаги параметрлар сонидан 6-7 баравар кўп бўлиши керак. Бу тасдиқ 7 тадан кам кузатишга эга бўлиб, чизиқли регрессияни қидириш, умуман маънога эга эмас.

Юқорида келтирилган мисол учун иш ҳаққи ва ишчилар ёши маълумотлари бўйича чизиқли жуфт регрессия параметрларини ЭККУ ёрдамида баҳолаймиз.

Кузатиш №	*x – ишчи ёши, (ёш)*	*y – бир ойлик иш ҳаққи, $*	x^2	$x*y$	y^2
1	29	300	841	8700	90000
2	40	400	1600	16000	160000
3	36	300	1296	10800	90000

4	32	320	1024	10240	102400
5	23	200	529	4600	40000
6	45	350	2025	15750	122500
7	38	350	1444	13300	122500
8	40	400	1600	16000	160000
9	50	380	2500	19000	144400
10	47	400	2209	18800	160000
11	47	400	2209	18800	160000
12	28	250	784	7000	62500
13	30	350	900	10500	122500
14	25	200	625	5000	40000
15	48	400	2304	19200	160000
16	30	220	900	6600	48400
17	40	320	1600	12800	102400
18	40	390	1600	15600	152100
19	38	360	1444	13680	129600
20	29	260	841	7540	67600
Устун бўйича йиғинди	735	6550	28275	249910	2236900
Ўртача қиймат	36,75	327,5	1413,75	12495,5	111845

$$b_1 = \frac{\overline{y * x} - \overline{y} * \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{12495{,}5 - 327{,}5 * 36{,}75}{1413{,}75 - 36{,}75^2} = \frac{459{,}875}{63{,}1875} = 7{,}277943$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x} = 327{,}5 - 7{,}278 * 36{,}75 = 60{,}03561$$

Уҳолда иш ҳаққининг ишчи ёшига боғлиқлигини ифодалайдиган чизиқли жуфт регрессия қуйидаги кўринишда бўлади.

$$y = 60.04 + 7.278 * x$$

Яъни ишчи ёши 1 ёшга ошганда унинг иш ҳаққи ўрта ҳисобда 7.278$ ошишини билдиради.