A função de autocorrelação

Considere inicialmente uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ (ou seja, todas as variáveis são independentes e possuem a mesma distribuição). Sejam

$$A_h = \{X_1, \ldots, X_{n-h}\}$$

e

$$B_h = \{X_h, \ldots, X_n\}.$$

Então, a correlação entre A_h e B_h é nula.

Deste modo, um meio de verificar se a coleção observada é uma série temporal é observar a correlação amostral entre

$$a_h = \{x_1, \ldots, x_{n-h}\}$$

e

$$b_h = \{x_h, \ldots, x_n\},$$

para diferentes valores de h.

A função $r(h)$ que representa a correlação amostral entre a_h e b_h é denominada **autocorrelação**. O valor h é denominado **defasagem** (do inglês, *lag*).

Propriedades

- $r(0) = 1$
- $-1 \leq r(h) \leq 1$

Correlograma O gráfico $(h, r(h))$ é denominado correlograma, ou gráfico da função de autocorrelação.

O correlograma de uma amostra aleatória

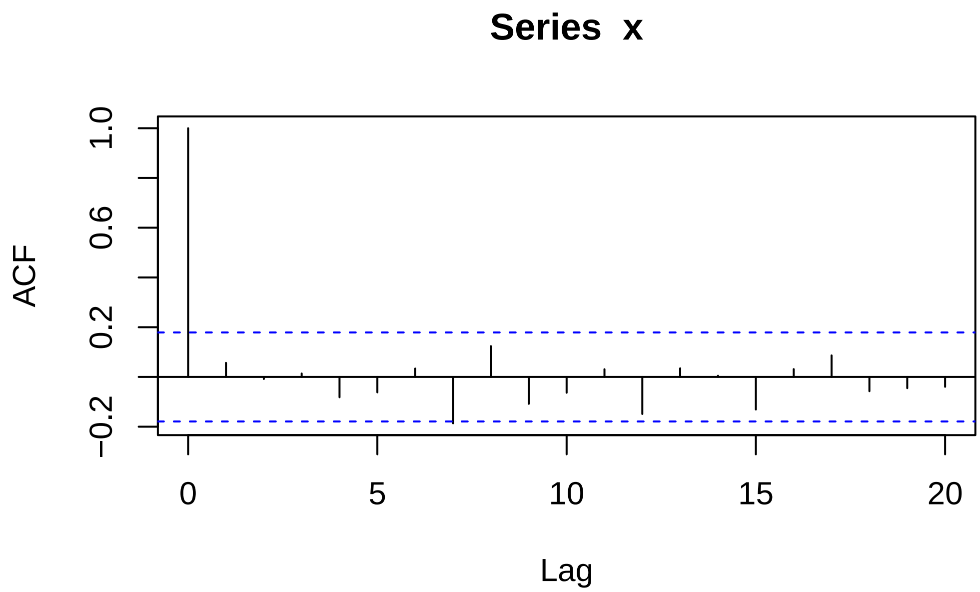
Quando a amostra é aleatória, a função de autocorrelação é nula para qualquer defasagem diferente de 0. Deste modo, o correlograma deve apresentar valores próximos de zero.

Para entender o que próximo de zero significa, o limites do intervalo de confiança para o coeficiente de correlação sobre a hipótese de que esta é nula são colocados no gráfico.

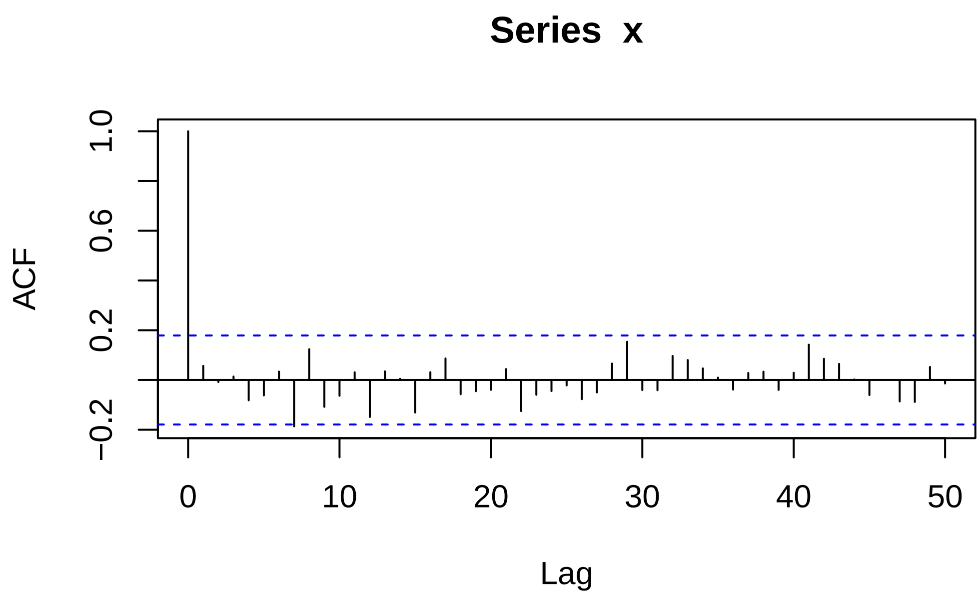
Abaixo ilustramos um correlograma para uma amostra de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão.

```
x <- rnorm(120)

# correlograma
```

```r
acf(x)
```




```r
# o mesmo correlograma com uma defasagem maior
acf(x, lag = 50)
```



O correlograma com a componente de tendência

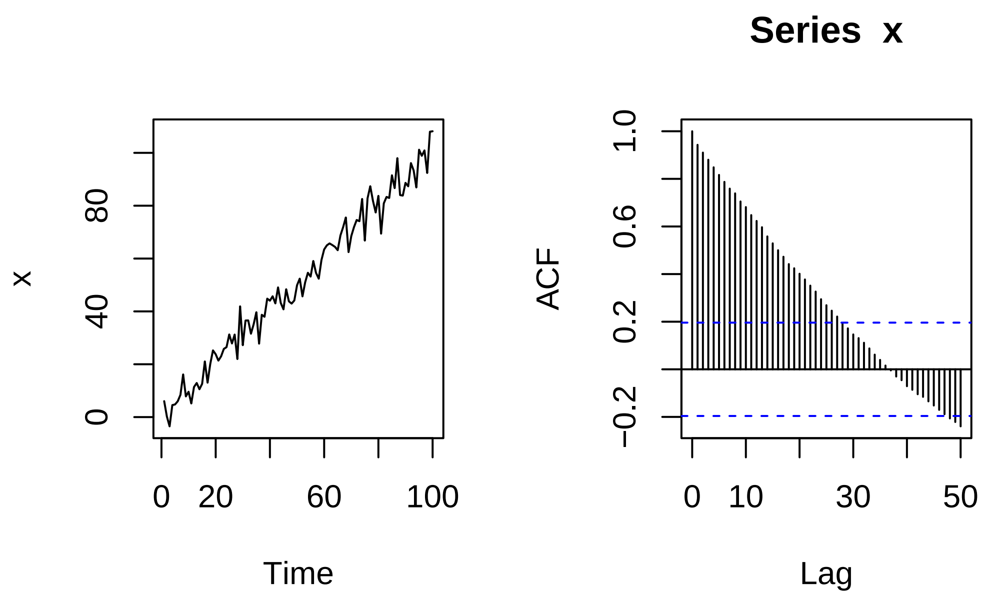
Quando uma série exibe tendência, o correlograma exibe um descaimento lento e persistente.

Considere, por exemplo, a série

$$x_t = t + \varepsilon_t,$$

onde $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0, 5^2)$. Abaixo simulamos essa série e apresentamos o respectivo correlograma

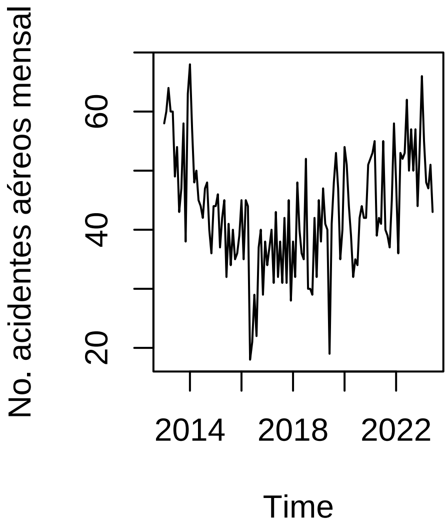
```
x <- rnorm(100, 1:100, 5)

oo <- par( mfrow=c(1,2))
ts.plot(x)
acf(x, lag = 50)
```

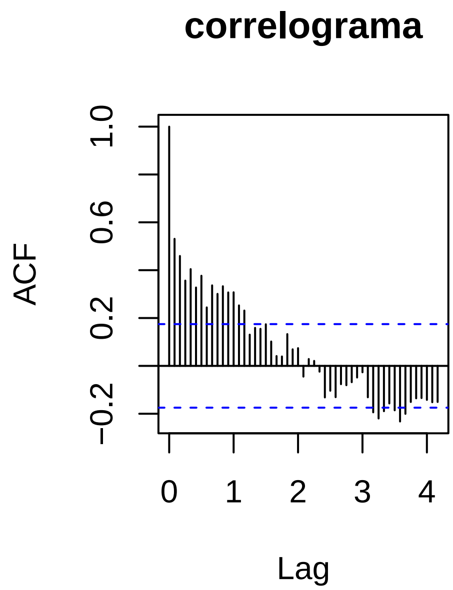



```
par(oo)
```

Observe as similaridades do correlograma acima com o observado para a série de acidentes aéreos mensais vista anteriormente.

```
oo <- par( mfrow=c(1,2))
ts.plot( fab_mes , ylab = 'No. acidentes aéreos mensal' )
acf(fab_mes , lag = 50,  main ='correlograma')
```






```
par(oo)
```

O correlograma com a componente de sazonalidade - sinal harmônico

O sinal sazonal é caracterizado por um comportamento periódico. Existem dois comportamentos sazonais típicos. O primeiro é baseado na função harmônica:

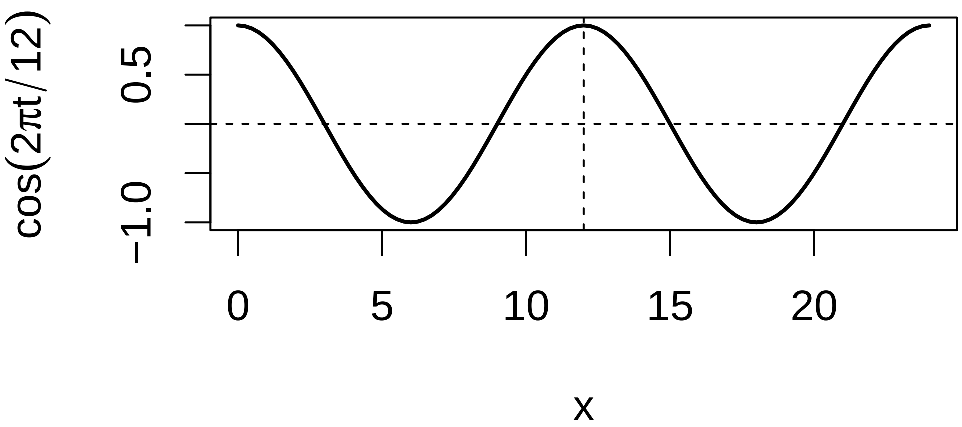
$$\text{sinal}(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{p}t + \phi\right)$$

Neste tipo de sinal, há um comportamento em forma de onda já estabelecido. Eis algumas informações importantes:

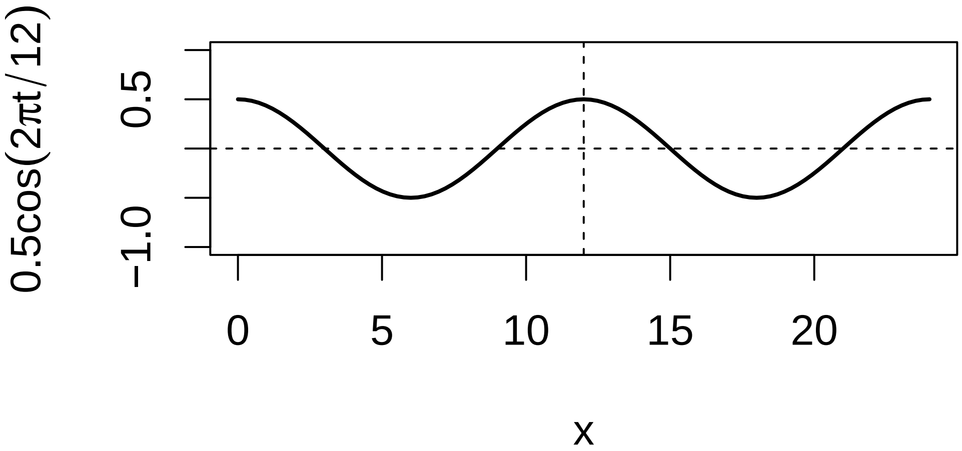
- O valor p, denominado período, equivale ao tempo que demora para o padrão se repetir.
- A é denominado amplitude e representa o maior/menor valor que este sinal pode aingir.
- Por último, ϕ é denominado fase, e serve basicamente para deslocar a onda.

Abaixo seguem alguns exemplos de harmônicos, todos com período 12:

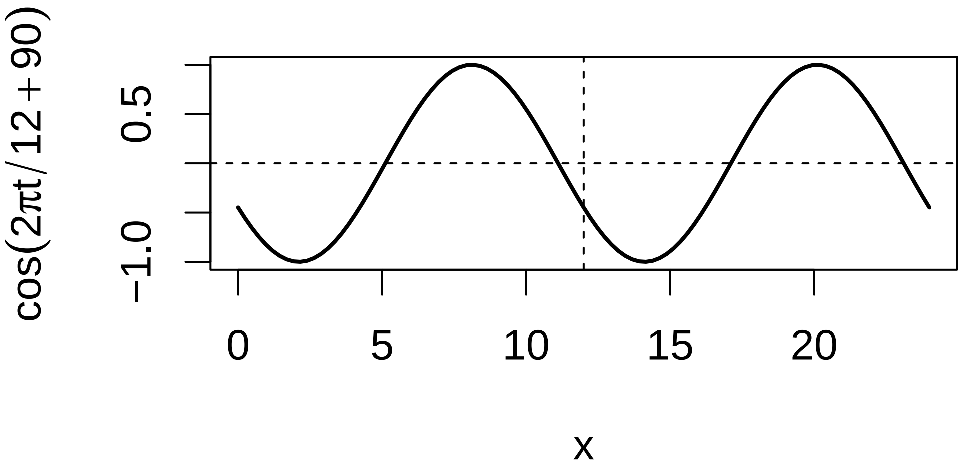
```
oo <- par( cex = 1.3)
curve( cos( x* 2*pi/12), 0,24, lwd = 2, ylab = expression( cos( 2*pi*t/12 )))
abline(h = 0, lty = 2 )
abline(v=12, lty = 2)
```




```
curve( .5*cos( x* 2*pi/12), 0,24, lwd = 2, ylab = expression( .5*cos( 2*pi*t/12 )), ylim =
abline(h = 0, lty = 2 )
abline(v=12, lty = 2)
```

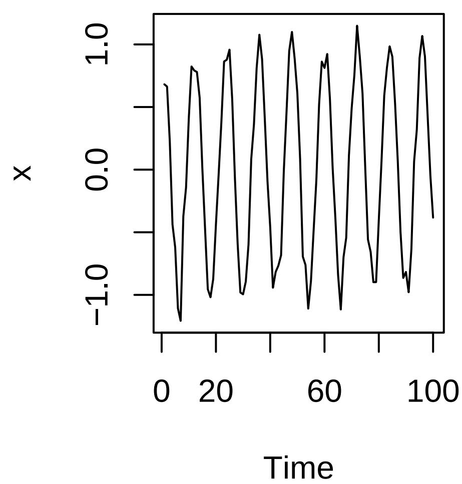


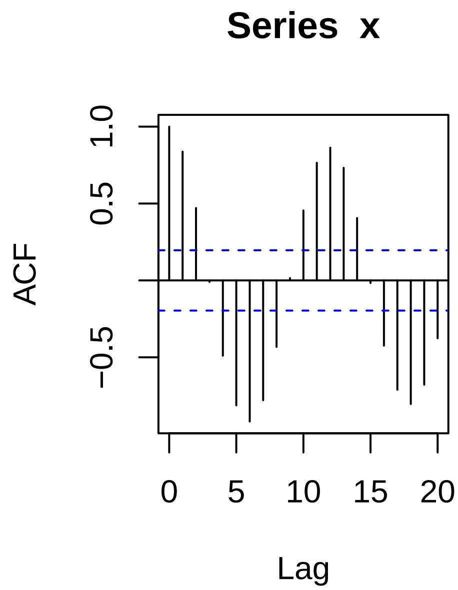

```
curve( cos( x* 2*pi/12+90), 0,24, lwd = 2, ylab = expression( cos( 2*pi*t/12 +90)), ylim =
abline(h = 0, lty = 2 )
abline(v=12, lty = 2)
```



Abaixo simulamos uma série temporal com um sinal do tipo harmônico. Observe que o comportamento em forma de onda é aparente na função de autocorrelação.

```
x <- cos( 2*pi/12 * 1:100) + rnorm(100,0,.1)

oo <- par( mfrow = c(1,2))
ts.plot(x)
acf(x)
```

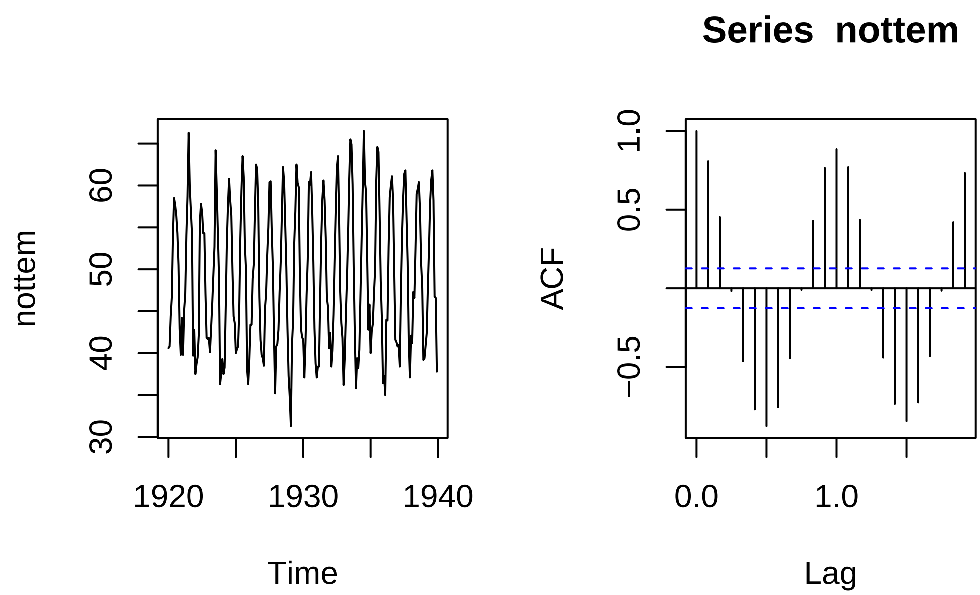





```
par(oo)
```

Abaixo, apresentamos a temperatura mensal observada no Castelo de Nottingham, entre 1920-1939. Compare os resultados com os gráficos acima.

```
oo <- par( mfrow = c(1,2))
  plot(nottem)
  acf(nottem)
```



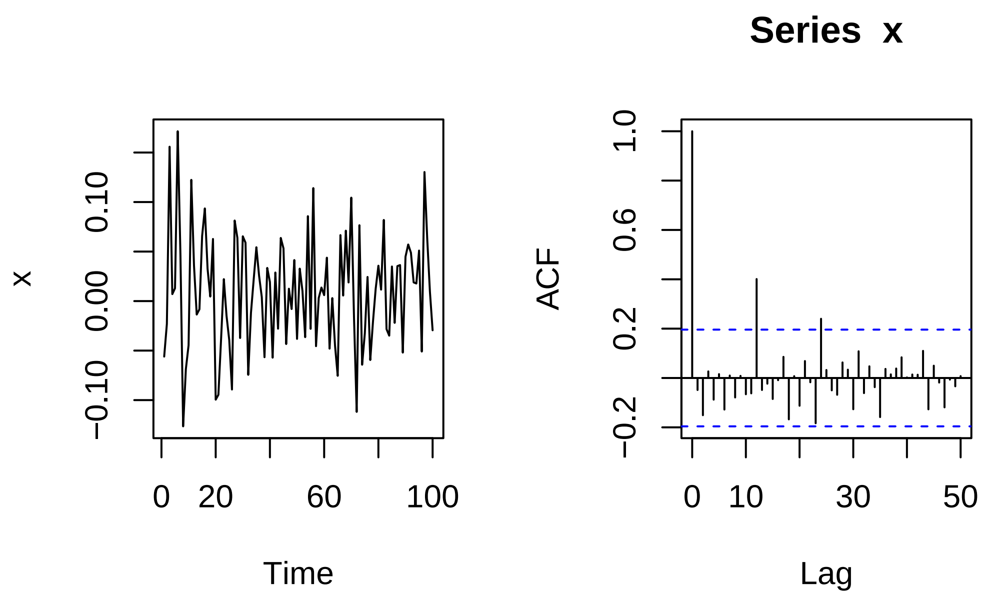

```
par(oo)
```

O correlograma com a componente de sazonalidade - sinal autorregressivo

Nesse tipo de sazonalidade, ainda há um período p, mas não há um sinal harmônico. O valor da série no tempo t é baseado no valor observado no tempo $t-p$.

Quando a sazonalidade possue essa característica, há uma autocorrelação marcante nos múltiplos de p. Observe a série simulada abaixo, com um período $p=12$

```
set.seed(123)
oo <- par( mfrow = c(1,2))
x <- rnorm(12,0,.1)
for(i in 13:100) x[i] <- .6*x[i-12] + rnorm(1,0,.05)
ts.plot(x)
acf(x, lag = 50)
```




```
par(oo)
```

Exercícios

Exercício 1 Estude o comportamento da série `ldeaths`, que conta o número mensal de óbitos por doenças pulmonares no Reino Unido.

Exercício 2 Estude o comportamento da série do número de óbitos maternos mensais.

Exercício 3 Em 2017, um epidemiologista estava interessado na série de suicídios no Mato Grosso do Sul. O banco de dados utilizado é dado a seguir. Construa uma série mensal e estude seu comportamento

```
url <- 'https://drive.google.com/uc?authuser=0&id=1DMSgrQDl0636Lw0Y0MYJHJrgw_2uXntM&export
```